

Riemanns avbildningssats

En studie av bijektiva avbildningar mellan öppna och enkelt sammanhängande områden i det komplexa planet

Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers

Johan Karlsson

Johan Särnbratt

Riemanns avbildningssats

En studie av bijektiva avbildningar mellan öppna och enkelt sammanhängande områden i det komplexa planet

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik vid Chalmers

Johan Karlsson Johan Särnbratt

Handledare: Lärkäng, Richard
Raufi, Hossein

Examinator: Rosengren, Hjalmar

Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Göteborgs universitet
Göteborg 2013

Sammanfattning

Målet med den här rapporten är att presentera tre bevis av Riemanns avbildningssats. För att kunna presentera dessa bevis på ett så begripligt sätt som möjligt krävs det dock en hel del teori. Därför behandlar rapporten viktiga grundläggande satser inom komplex analys och en omfattande diskussion om Dirichletproblemets lösbarhet. Det andra bevis vi genomför öppnar dörren för att simulera avbildningar i MATLAB. Från nämnda bevis får vi nämligen en sekvens av funktioner som konvergerar mot den avbildning som existerar enligt Riemanns avbildningssats. Vi använder oss även av en annan algoritm kallad Schwarz-Christoffel avbildningar.

Abstract

The aim of this report is to present three proofs of the Riemann mapping theorem. To be able to present these proof in a comprehensible manner we need quite a bit of theory. This report, therefore, also contains fundamental theorems in complex analysis as well as a discussion about the existence of a solution to the Dirichlet problem. The second proof paves the way for MATLAB-simulations. This proof gives a sequence of functions which converge towards the mapping, which existence is guaranteed by the Riemann mapping theorem. We also use a second algorithm called Schwarz-Christoffel mappings.

Förord

Inledningsvis riktas ett stort tack till våra handledare Richard Lärkäng och Hossein Raufi för deras engagemang och tålamod, som vida överträffade det som förväntades av dem.

Under arbetets gång har både tidslogg och dagbok förts, i vilka det framgår hur arbetet har fortgått. I tidsloggen presenteras vad den enskilde individen har jobbat med en viss dag och i dagboken framgår det vad gruppen har åstadkommit en viss vecka samt vad målen för veckan var.

I tabellen nedan framgår vilken gruppmedlem som är huvudförfattare till de olika avsnitten.

Johan Karlsson: Avsnitt 1.1, 1.4, 2.3, 3.1, 3.2, 4.1, 4.2, 4.3

Johan Särnbratt: Avsnitt 1.2, 1.3, 2.1, 2.2, 3.3, 5.1, 5.2

Notera dock att samtliga avsnitt har bearbetats och lästs igenom av samtliga medlemmar.

Innehåll

I Riemanns avbildningsats och Dirichletproblemet

1	Introduktion	3
1.1	Inledning	3
1.2	Tillämpning av Riemanns avbildningsats på Dirichletproblemet	4
1.3	Introduktion till programmering	7
1.4	Innehåll	7
2	Förberedande teori	8
2.1	Schwarz lemma och automorfier	8
2.2	Montels sats	10
2.3	Övriga resultat	12
3	Riemanns avbildningsats	14
3.1	Första beviset	14
3.2	Andra beviset	17
3.3	Tredje beviset	20
4	Dirichletproblemet	21
4.1	Hilbertrumsteori	21
4.2	Harmoniska funktioner	24
4.3	Dirichletproblemet	29

II Programmering

5	Numeriska simuleringar	37
5.1	Första algoritmen	37
5.2	Andra algoritmen	41
	Appendix A: Första algoritmen	43
	Appendix B: Andra algoritmen	49

Del I

**Riemanns avbildningsats och
Dirichletproblemet**

Kapitel 1

Introduktion

1.1 Inledning

År 1851 introducerade Bernhard Riemann den sats som senare kom att kallas Riemanns avbildningssats. Beviset han presenterade för satsen var enkelt och byggde på det som Riemann kallade Dirichletprincipen. Det här beviset möttes dock av invändningar, från bland andra Weierstrass, eftersom man ansåg att det inte var bortom all tvivel att Dirichletprincipen alltid var sann. Det skulle mycket riktigt visa sig att Dirichletprincipen inte gällde så allmänt som Riemann och Dirichlet trott.

Ett annat bevis av Riemanns avbildningssats presenterades av Paul Koebe 1914. Detta bevis ger oss en helt annan syn på satsen än Riemanns ursprungliga bevis. Denna sats förser oss nämligen inte bara med ett bevis utan också en algoritm för att kunna hitta avbildningarna (mer om detta i del II av rapporten).

Vi kommer även komplettera dessa båda bevis med det bevis som är vanligast idag och kanske elegantast av de tre. Det finns ytterligare bevis av Riemanns avbildningssats men i den här rapporten kommer vi att ägna oss åt dessa tre bevis och den teori som de bygger på.

En naturlig klass av avbildningar att studera är konforma avbildningar. En konform avbildning är en funktion $f : U \rightarrow V$, där U och V är öppna delmängder av det komplexa talplanet \mathbb{C} , som uppfyller att $f'(z) \neq 0$. Anledningen till denna definition är att villkoret $f'(z) \neq 0$ ger oss att avbildningen bevarar vinklar, det vill säga om vi har två kurvor i mängden U som när de korsar varandra bildar en vinkel β så kommer vinkeln att vara β även i V . Vinkeln mellan dessa kurvor definieras som vinkeln mellan dess tangenter i den punkt z_0 där de korsar varandra. För att se att en konform avbildning är vinkelbevarande låter vi $\gamma_1(z)$ och $\gamma_2(z)$ beskriva två kurvor i \mathbb{C} . Vinkeln mellan dem kan skrivas som $\arg(\gamma_1'(z_0)) - \arg(\gamma_2'(z_0))$. Om f nu är en konform avbildning till ett område Ω får vi att vinklarna beskrivs av $\arg(f'(\gamma_1'(z_0))) + \arg(\gamma_1'(z_0))$ respektive $\arg(f'(\gamma_2'(z_0))) + \arg(\gamma_2'(z_0))$, med andra ord är skillnaden fortfarande $\arg(\gamma_1'(z_0)) - \arg(\gamma_2'(z_0))$.

Vi kommer dock titta på så kallade biholomorfa avbildningar.

Definition 1.1. En avbildning är *biholomorf* om den är en bijektiv (injektiv och surjektiv), holomorf funktion $f : V \rightarrow U$, där U och V är öppna delmängder av det komplexa talplanet \mathbb{C} .

Man kan visa att om en holomorf funktion f är injektiv, så är $f'(z) \neq 0$ och alltså är biholomorfa avbildningar också vinkelbevarande.

Riemanns avbildningssats säger att det finns en biholomorf avbildning mellan varje öppet, enkelt sammanhängande område i \mathbb{C} (som ej är hela \mathbb{C}), och enhetsdisken. Om det öppna, enkelt sammanhängande området har en tillräckligt snäll rand, utvidgas avbildningen kontinuerligt till en bijektion mellan områdets rand och enhetsdiskens rand (detta är dock inte en konsekvens av Riemanns avbildningssats,

den behandlar endast öppna mängder!). En anledning till varför satsen är intressant är att det ofta är enklare att lösa problem av olika slag på enhetsdisken. Detta gör att man som en konsekvens av Riemanns avbildningssats kan lösa problem som är enkla i enhetsdisken och som är invariants under holomorfa avbildningar, på andra mindre enkla områden. Detta genom att avbilda sitt problem på enhetsdisken, lösa problemet där, och sedan använda den inversa avbildningen för att få tillbaka lösningen på sitt ursprungliga område. Ett exempel på detta presenteras i nästa avsnitt där vi undersöker hur man på detta sätt kan lösa Dirichletproblemet på ett område med tillräckligt snäll rand.

1.2 Tillämpning av Riemanns avbildningssats på Dirichletproblemet

Dirichletproblemet definieras som: Hitta en funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sådan att

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{i } \Omega, \\ u = f & \text{på } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Här är Ω ett öppet område i \mathbb{C} , $\partial\Omega$ är randen till Ω , f är en given kontinuerlig funktion på $\partial\Omega$, och Δ är Laplaceoperatorn (i två dimensioner $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$). Fysikaliskt kan u tolkas som en stationär lösning till värmeledningsekvationen, där u då är temperaturfördelningen i rummet Ω och f beskriver temperaturen på randen.

Om Ω är enhetsdisken, kan man visa att (1.2) nedan löser Dirichletproblemet. Integralen kallas Poissonintegralen och (1.3) kallas för Poissonkärnan till \mathbb{D}

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \varphi) f(\varphi) d\varphi, \quad (1.2)$$

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}. \quad (1.3)$$

Att detta är en lösning till Dirichletproblemet är ett välkänt faktum inom analys men för ett fullständigt bevis se Ransford [3]. För ett mer allmänt område Ω kan vi nu hitta en lösning till (1.1) genom att, som nämnts ovan, avbilda Dirichletproblemet biholomorft på \mathbb{D} med en funktion $F : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$, lösa det med hjälp av Poissonintegralen, och sedan använda den inversa funktionen $F^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ för att återföra lösningen till det ursprungliga området. För att denna metod skall fungera behöver vi först och främst visa att $u \circ F^{-1}$ är en så kallad harmonisk funktion.

Definition 1.2. En funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ kallas för *harmonisk* på Ω om den är två gånger deriverbar samt uppfyller att

$$\Delta u = 0 \text{ på } \Omega.$$

Följande sats säkerställer nu att $u \circ F^{-1}$ verkligen är harmonisk.

Sats 1.1. Låt V och U vara öppna områden i \mathbb{C} och låt $F : V \rightarrow U$ vara en holomorf funktion. Om $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ är en harmonisk funktion så är $u \circ F$ harmonisk på V .

Bevis. Det är ett välkänt faktum inom komplex analys att varje harmonisk funktion är realdelen till en holomorf funktion och omvänt att real- och imaginärdelarna till en holomorf funktion är harmoniska. Antag därför att U är en öppen disk och att G är en holomorf funktion i U med u som realdel. Låt $H = G \circ F = u(F) + iv(F)$, där v är $\text{Im}(G)$ och notera att $\text{Re}(H) = u \circ F$. Alltså är $u \circ F$ en harmonisk funktion på V ty den är realdelen av H som är holomorf. \square

För att reduceringen av Dirichletproblemet på Ω till enhetsdisken ska fungera behöver vi därtill att den biholomorfa avbildningen $F : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ utvidgar till en bijektion $F : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$. Vi illustrerar metoden med ett exempel. Antag att vi vill lösa Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{i } \mathbb{H}, \\ u = f & \text{på } \partial\mathbb{H}, \end{cases} \quad (1.4)$$

där \mathbb{H} betecknar det övre halvplanet och f är en given kontinuerlig funktion sådan att $f(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \pm\infty$. Precis som vi har beskrivit ovan, vill vi nu överföra detta problem till enhetsdisken. Det första vi måste göra är att hitta en biholomorf avbildning $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ och dess invers $G : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$. Dessa ser ut på följande sätt

$$F(z) = \frac{i-z}{i+z} \quad \text{och} \quad G(w) = i\frac{1-w}{1+w}.$$

För att överföra problemet till enhetsdisken definierar vi en ny funktion $\tilde{u}(w) = u(G(w))$. Man kan visa att $G : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\mathbb{H}$, där -1 avbildas på ∞ , och eftersom $f(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \pm\infty$ får vi att $\tilde{f}(w) = f(G(w))$ är en väldefinierad funktion på $\partial\mathbb{D}$. Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} = 0 & \text{i } \mathbb{D}, \\ \tilde{u} = \tilde{f} & \text{på } \partial\mathbb{D}, \end{cases}$$

vet vi enligt (1.2) och (1.3) har lösningen

$$\tilde{u}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} \tilde{f}(e^{i\varphi}) d\varphi.$$

För att kunna transformera tillbaka lösningen till övre halvplanet börjar vi med att notera att en godtyckligt punkt i enhetsdisken kan uttryckas med hjälp av polära koordinater som $z = re^{i\theta}$ där $\theta \in \mathbb{R}$ och $r < 1$. Att försöka hitta ett allmänt uttryck för dessa punkter i det övre halvplanet kan bli mycket krångligt, så till att börja med bestämmer vi lösningen på den positiva imaginära axeln, och väntar till slutet av avsnittet med att visa hur vi reducerar det allmänna fallet till detta fall.

Vi bestämmer då θ och r genom att lösa $F(iy) = re^{i\theta}$,

$$re^{i\theta} = \frac{1-y}{1+y} \quad \text{för } y > 0. \quad (1.5)$$

Vi noterar att vi måste dela upp beräkningen av (1.5) i två intervall $0 < y < 1$ och $1 < y < \infty$ då den första delen av imaginära axeln transformeras till den positiva realaxeln ($\theta = 0$) och resten till den negativa realaxeln ($\theta = \pi$). Detta ger oss

$$r = \begin{cases} \frac{1-y}{1+y}, & 0 < y < 1, \\ \frac{y-1}{1+y}, & 1 < y < \infty. \end{cases}$$

Nu när vi har ett uttryck för både r och θ stoppar vi helt enkelt in dessa i Poissonkärnan för lösningen i \mathbb{D} och förenklar. I båda fallen blir den nya Poissonkärnan

$$P_y(\varphi) = \frac{2y}{1+y^2+(y^2-1)\cos(\varphi)}.$$

Då blir lösningen på imaginära axeln

$$u(0, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2y}{1+y^2+(y^2-1)\cos(\varphi)} \tilde{f}(e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Det sista vi gör är att utföra variabelbytet $t = G(e^{i\varphi})$ eller $F(t) = e^{i\varphi}$. Detta är faktiskt ett reellt variabelbyte, vilket kan kontrolleras genom att verifiera att $G(e^{i\theta}) = \overline{G(e^{i\theta})}$. För att kunna utföra variabelbytet måste vi ha ett uttryck för $\cos(\varphi)$ och $d\varphi$. Om vi skriver ut $F(t) = e^{i\varphi}$ ser vi att

$$e^{i\varphi} = \frac{i - t}{i + t}.$$

Genom att identifiera realdelarna får vi att

$$\cos(\varphi) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Om vi däremot logariterar och sedan deriverar får vi efter lite räkning att

$$d\varphi = \frac{2}{t^2 + 1} dt.$$

Vi noterar att de nya gränserna blir $-\infty$ respektive ∞ , ty $G(e^{i\varphi}) \rightarrow \pm\infty$ då $\varphi \rightarrow \pm\pi$. Efter variabelbytet erhåller vi följande lösning för Dirichletproblemet på positiva imaginära axeln

$$u(0, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(t)}{t^2 + y^2} dt. \quad (1.6)$$

Vi kan nu använda translation för att erhålla lösningen på resten av övre halvplanet. För att inse detta börjar vi med att konstatera att $u(x, y)$ är en lösning till (1.4) om och endast om $u_{x_0} := u(x + x_0, y)$ är en lösning till motsvarande translaterade problem

$$\begin{cases} \Delta u_{x_0} = 0 & \text{i } \mathbb{H}, \\ u_{x_0} = f_{x_0} & \text{på } \partial\mathbb{H}, \end{cases} \quad (1.7)$$

vilket ses med hjälp av kedjeregeln och det faktum att \mathbb{H} är invariant under translation i x -led. Om u löser (1.4) så gäller (1.6). Om vi använder denna lösning på differentialekvationen

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{i } \mathbb{H}, \\ v = f_{x_0} & \text{på } \partial\mathbb{H}, \end{cases} \quad (1.8)$$

så får vi givetvis

$$v(0, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf_{x_0}(t)}{t^2 + y^2} dt.$$

men enligt ovan så har (1.8) lösningen $v = u_{x_0}$, så

$$u_{x_0}(0, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf_{x_0}(t)}{t^2 + y^2} dt.$$

Men eftersom $u_{x_0}(0, y) = u(x_0, y)$ och $f_{x_0}(t) = f(t + x_0)$ så får vi

$$u(x_0, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(t + x_0)}{t^2 + y^2} dt.$$

Slutligen ersätter vi x_0 med x och utför variabelbytet $t \rightarrow -t$. Då erhåller vi den allmänna lösningen

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-t)}{t^2 + y^2} dt.$$

På liknande sätt kan man lösa Dirichletproblemet i alla öppna, enkelt sammanhängande områden Ω som är delmängder av \mathbb{C} och har en tillräckligt snäll rand.

1.3 Introduktion till programmering

Riemanns avbildningssats garanterar att det finns en biholomorf avbildning $f : U \rightarrow V$ för alla öppna enkelt sammanhängande områden U och V , men redan för väldigt enkla områden kan dessa avbildningar inte beskrivas med elementära funktioner. Som vi kommer att se i avsnitt 5.2 om Schwarz-Christoffel avbildningar ges avbildningar från enhetsdisken till enkla polygoner av avancerade integraler. Dessa är svåra att ta fram och evaluera för hand, men kan beskrivas algoritmiskt och därmed har vi kunnat ta fram sådana i MATLAB.

Vi har även studerat en alternativ algoritm i avsnitt 5.1 som fungerar bättre för polygoner med flera hundra hörn. Denna algoritm bygger på ett av bevisen i kapitel 2 och ger en avbildning till enhetsdisken om man låter antalet iterationer gå mot oändligheten. Därför ger denna endast approximativa avbildningar.

1.4 Innehåll

Det andra kapitlet i rapporten, Förberedande teori, tar upp viktiga grundläggande resultat inom komplex analys. De viktigaste delarna här är Schwarz lemma, automorfier av enhetsdisken samt Montels sats. Övriga resultat (avsnitt 2.3) består främst av kända satser som läsaren antas känna till, men de radas upp här för fullständighetens skull.

Tredje kapitlet behandlar den egentliga huvuddelen av rapporten, nämligen de tre olika bevisen för Riemanns avbildningssats. Hela kapitel två och kapitel tre grundar sig främst på Stein och Shakarchi [1].

Kapitel 4 behandlar existensen av en lösning till Dirichletproblemet samt den teori som detta bygger på (detta behövs för tredje beviset av Riemanns avbildningssats). Teorin som presenteras är indelad i två avsnitt där det första behandlar Hilbertrumsteori, då främst pre-Hilbertrum och ortogonalprojektioner. Det andra avsnittet behandlar harmoniska funktioner och innehåller en rad begrepp och satser som är viktiga för oss: Svagt harmonisk, Medelvärdesegenskapen och sekvenser av harmoniska funktioner. Det sista avsnittet i kapitel tre är själva beviset av existensen av en lösning till Dirichletproblemet. Hela kapitel 3 bygger till stor del på Stein och Shakarchi [2], men avsnitt 4.2 bygger delvis på Ransford [3].

Andra delen av rapporten behandlar simuleringar i MATLAB. Algoritmen i avsnitt 5.1 bygger i princip helt och hållet på bevis två av Riemanns avbildningssats medan avsnitt 5.2 handlar om Schwarz-Christoffel avbildningar och teorin bakom denna algoritm bygger på Driscoll och Trefethen [4].

Kapitel 2

Förberedande teori

För att kunna bevisa Riemanns avbildningssats måste vi först ha en hel del teori utöver den man lär sig i en kurs som behandlar grundläggande komplex analys. I detta avsnitt har vi samlat ihop den teori från komplex analys som vi kommer att använda oss av i beviset. Här diskuterar vi främst Schwarz lemma och automorfier av enhetsdisken.

2.1 Schwarz lemma och automorfier

Först vill vi påminna läsaren om maximumprincipen som vi här formulerar utan bevis.

Sats 2.1. (Maximumprincipen) Antag att Ω är ett område med kompakt slutet hölje $\bar{\Omega}$ (det vill säga området tillsammans med dess rand är kompakt). Om f är holomorf på Ω och kontinuerlig på $\bar{\Omega}$ så gäller att

$$(i) \sup_{z \in \Omega} |f(z)| \leq \sup_{z \in \bar{\Omega} \setminus \Omega} |f(z)|.$$

(ii) Om Ω är sammanhängande och om likhet gäller i (i) för något $z \in \Omega$, så är f konstant.

För ett fullständigt bevis se [1] kapitel 3 Theorem 4.5.

Schwarz lemma är en väldigt viktig sats inom komplex analys och speciellt viktig för våra syften. Dels för att den spelar en central roll i beviset för Riemanns avbildningssats, dels för att den också är viktig vid klassificeringen av alla automorfier av enhetsdisken (mer om detta senare i avsnittet), vilka i sin tur också används i beviset av Riemanns avbildningssats.

Sats 2.2. (Schwarz lemma) Låt $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ vara en holomorf funktion sådan att $f(0) = 0$. Då gäller att:

$$(i) |f(z)| \leq |z| \text{ för alla } z \in \mathbb{D}.$$

(ii) Om $|f(z_0)| = |z_0|$ för något $z_0 \neq 0$ så är f en rotation, det vill säga det finns ett $\theta \in \mathbb{R}$ så att $f(z) = e^{i\theta}z$.

(iii) $|f'(0)| \leq 1$. Om likhet gäller så är f en rotation.

Bevis. f är holomorf på \mathbb{D} och kan därför utvecklas i en potensserie,

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$$

Eftersom $f(0) = 0$ så är $a_0 = 0$ och därför är singulariteten i $z = 0$ hävbar och alltså $f(z)/z$ en holomorf funktion på \mathbb{D} . Låt $\mathbb{D}_r(0)$ vara en öppen disk med radie $r < 1$ och centrum i origo. Om vi låter $|z| = r < 1$ får vi att

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{r},$$

ty $|f(z)| \leq 1$. Då f är holomorf på \mathbb{D} och $r < 1$, får vi att f är holomorf på $\overline{\mathbb{D}_r(0)}$ och därmed kontinuerlig på randen. Då får vi enligt maximumprincipen (Sats 2.1) att olikheten ovan gäller så länge $|z| \leq r$. Om vi låter $r \rightarrow 1$ så är (i) bevisad.

För (ii) kan man konstatera att $f(z)/z$ antar sitt största värde i \mathbb{D} eftersom $|f(z_0)/z_0| = 1$ enligt antagandet och $z_0 \in \mathbb{D}$. Från detta kan man genom att återigen använda sig av maximumprincipen se att $f(z)/z = c$, där c är en konstant. Alltså får f formen $f(z) = cz$. Evaluering av funktionen i punkten z_0 ger:

$$|f(z_0)| = |cz_0| = |c||z_0|.$$

Från detta och antagandet i (ii) kan vi dra slutsatsen att $|c| = 1$, så det existerar ett $\theta \in \mathbb{R}$ så att $c = e^{i\theta}$. Alltså är f en rotation och (ii) är bevisad.

Slutligen observerar vi att om vi låter $g(z) = f(z)/z$ så följer av det tidigare att $|g| \leq 1$ och då

$$g(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0),$$

medför detta att $|f'(0)| \leq 1$. När likhet gäller, det vill säga då $|f'(0)| = 1$, är även $|g(0)| = 1$, vilket leder till att g enligt maximumprincipen är konstant. Med samma resonemang som i beviset för (ii) implicerar detta att $f(z) = e^{i\theta}z$ för något $\theta \in \mathbb{R}$. \square

Vi kan nu utan större svårighet generalisera Schwarz lemma till att gälla för godtyckliga diskar. Om $\mathbb{D}_r(z)$ är en disk med radie r och centrum i z så har vi följande sats.

Sats 2.3. Låt $f : \mathbb{D}_{r_1}(z_1) \rightarrow \mathbb{D}_{r_2}(z_2)$ vara en holomorf funktion sådan att $f(z_1) = z_2$. Då gäller att:

$$(i) \quad \frac{|f(z) - z_2|}{r_2} \leq \frac{|z - z_1|}{r_1} \text{ för alla } z \in \mathbb{D}_{r_1}(z_1).$$

$$(ii) \quad \text{Om } \frac{|f(z_0) - z_2|}{r_2} = \frac{|z_0 - z_1|}{r_1} \text{ för något } z_0 \neq z_1 \text{ så är } f \text{ en translaterad och skalad rotation, det vill säga det finns ett } \theta \in \mathbb{R} \text{ så att } f(z) = \frac{r_2}{r_1} e^{i\theta} (z - z_1) + z_2.$$

$$(iii) \quad |f'(z_1)| \leq \frac{r_2}{r_1}. \text{ Om likhet gäller så är } f \text{ en skalad och translaterad rotation.}$$

Bevis. Låt $\tilde{f}(z) = (f(r_1 z + z_1) - z_2)/r_2$. Då gäller att $\tilde{f} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ är en holomorf funktion och $\tilde{f}(0) = 0$. Sats 2.3 följer nu av att vi tillämpar Schwarz lemma på \tilde{f} . \square

Schwarz lemma är väldigt viktigt, och vi kommer att använda det många gånger i kommande kapitel, vår första tillämpning är en fullständig klassificering av alla automorfier av \mathbb{D} .

En biholomorf avbildning $f : \Omega \rightarrow \Omega$ av ett område Ω på sig själv kallas för en automorfi. Vi betecknar mängden av alla sådana avbildningar med $\text{Aut}(\Omega)$. Exempel på automorfier av \mathbb{D} är rotationer: $f(z) = e^{i\theta}z$, för något $\theta \in \mathbb{R}$. Andra exempel är funktioner av formen

$$\phi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z},$$

där $\alpha \in \mathbb{D}$. Vi observerar att

$$|\phi_\alpha(e^{i\theta})| = \left| \frac{\alpha - e^{i\theta}}{e^{i\theta}(e^{-i\theta} - \bar{\alpha})} \right| = \left| e^{-i\theta} \frac{w}{\bar{w}} \right| = 1,$$

för $w = \alpha - e^{i\theta}$. Tillsammans med maximumprincipen ger detta att $|\phi_\alpha(z)| \leq 1$ för alla $z \in \mathbb{D}$. Dessutom kan man verifiera att $\phi_\alpha(\phi_\alpha(z)) = z$, för alla $z \in \mathbb{D}$ så att $\phi_\alpha^{-1} = \phi_\alpha$. Härmed vet vi att ϕ_α är en automorfi av \mathbb{D} .

Det visar sig att dessa exempel på automorfier av \mathbb{D} räcker för att beskriva alla automorfier.

Sats 2.4. Om f är en automorfi av \mathbb{D} så finns det $\theta \in \mathbb{R}$ och $\alpha \in \mathbb{D}$ så att $f(z) = e^{i\theta} \phi_\alpha(z)$.

Bevis. Antag att f är en godtycklig automorfi av \mathbb{D} . Då existerar det ett unikt tal $\alpha \in \mathbb{D}$ så att $f(\alpha) = 0$. Låt $g(z) = f \circ \phi_\alpha(z)$. Då har vi att $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ är en automorfi och att $g(0) = 0$, och $g^{-1}(0) = 0$. Med Schwarz lemma (Sats 2.2) får vi att

$$|g(z)| \leq |z|,$$

och

$$|g^{-1}(w)| \leq |w|.$$

Om vi låter $w = g(z)$ i den senare olikheten så får vi att $|z| \leq |g(z)|$. Tillsammans med den första olikheten ger det oss att

$$|g(z)| = |z|.$$

Enligt Schwarz lemma är därmed g en rotation, $g(z) = e^{i\theta} z$ för något $\theta \in \mathbb{R}$. Alltså har vi att $f \circ \phi_\alpha(z) = e^{i\theta} z$ och eftersom $z = \phi_\alpha \circ \phi_\alpha(z)$ får vi att $f(z) = e^{i\theta} \phi_\alpha(z)$. \square

2.2 Montels sats

Nästa verktyg vi behöver till beviset för avbildningssatsen är Montels sats, men innan vi kan ge oss i kast med den måste vi ha ett antal definitioner. De tre första handlar om delmängder, av \mathbb{C} , och de tre sista om familjer (mängder) av holomorfa funktioner.

Den första definition som behandlar delmängder av \mathbb{C} är en ekvivalent definition till det välbekanta begreppet kompakt. En vanlig definition är att en mängd $K \subset \mathbb{C}$ kallas kompakt om den är både sluten och begränsad.

Definition 2.1. En mängd $K \subset \mathbb{C}$ är *kompakt* om det för varje oändlig mängd av öppna mängder $\{U_j\}_{j=1}^\infty$ som täcker K , det vill säga $K \subset \bigcup_{j=1}^\infty U_j$, räcker det med ett ändligt antal av dessa mängder för att täcka K , alltså $K \subset \bigcup_{j=1}^N U_j$ för något heltal N .

Att dessa båda definitioner är ekvivalenta är inte alls uppenbart men är ett välkänt faktum inom topologi och mängdlära.

Definition 2.2. Vidare kallas en sekvens av kompakta delmängder $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ av Ω för *uttömmande* om K_n ligger i K_{n+1} för alla $n = 1, 2, 3, \dots$ och om varje kompakt mängd $K \subset \Omega$ ligger i K_n för något n . Speciellt säger detta att $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$.

Notera att samtliga öppna delmängder Ω av \mathbb{C} har en uttömmande mängd. Låt nämligen K_n bestå av alla $z \in \Omega$ så att $|z| < n$ och avståndet mellan z och randen till Ω är större än $1/n$. Detta är användbart då man (som vi kommer märka) ofta är intresserad av hur funktioner uppför sig på kompakta delmängder till Ω .

Den tredje definitionen behandlar så kallade täta mängder och dessa är väldigt användbara när man i en överuppräknelig mängd vill hitta ett uppräkneligt antal punkter i denna mängd som fortfarande

ligger godtyckligt nära alla andra punkter i mängden. I beviset för Montels kommer vi utnyttja täthet i kombination med kompakthet för att motivera att ett ändligt antal diskar med centrum i punkter som ligger i en tät mängd täcker hela Ω .

Definition 2.3. En mängd A är *tät* i en mängd B om $A \subset B$ och det för varje $\epsilon > 0$ och varje element $x \in B$ existerar ett element $y \in A$ sådant att $|x - y| < \epsilon$. Ett exempel på en tät mängd är mängden av alla rationella tal i mängden av alla reella tal.

De tre nästkommande definitionerna handlar om familjer (mängder) av holomorfa funktioner eftersom det är just sådana (eller egenskaper hos sådana) som Montels sats behandlar. De tre begrepp som behandlas i Montels sats är likformigt begränsad familj, normal familj och ekvikontinuitet. Ekvikontinuitet är en motsvarighet till likformig kontinuitet, fast för en hel familj istället för bara en funktion (kom ihåg att en funktion f kallas likformigt kontinuerlig på Ω om det för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att för alla $z, w \in \Omega$ sådana att $|z - w| < \delta$ gäller att $|f(z) - f(w)| < \epsilon$).

Låt nu \mathcal{F} vara en familj med holomorfa funktioner:

Definition 2.4. \mathcal{F} sägs vara *ekvikontinuerlig* på Ω om det för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att för alla $z, w \in \Omega$ sådana att $|z - w| < \delta$ och alla $f \in \mathcal{F}$, gäller att $|f(z) - f(w)| < \epsilon$.

Med andra ord innebär ekvikontinuitet att alla funktioner i familjen är likformigt kontinuerliga på Ω med samma δ .

Definition 2.5. \mathcal{F} kallas för en *normal familj* av funktioner om det för varje sekvens av funktioner i \mathcal{F} finns en delsekvens som konvergerar likformigt på varje kompakt delmängd av Ω .

Definition 2.6. \mathcal{F} sägs vara *likformigt begränsad* på Ω om det för varje kompakt delmängd $K \subset \Omega$ finns ett tal $B > 0$ så att $|f(z)| \leq B$ för alla $z \in K$ och $f \in \mathcal{F}$.

Notera att likformigt begränsad inte är något annat än en utvidgning av begreppet begränsad funktion. Vi begär nu inte bara att $|f(z)| < B$ för en enstaka funktion, utan att samtliga funktioner i familjen \mathcal{F} skall vara begränsade av samma tal $B > 0$.

Slutligen vill vi även påminna om följande fundamentala egenskaper hos komplexa (och reella) tal.

Sats 2.5. (Bolzano-Weierstrass sats) *Varje begränsad sekvens av komplexa tal har en konvergent delsekvens.*

För ett fullständigt bevis se Walter Rudin [5] kapitel 2 Theorem 2.42. Nu kan vi äntligen formulera och bevisa Montels sats.

Sats 2.6. (Montels sats) *Låt Ω vara en öppen delmängd av \mathbb{C} och antag att \mathcal{F} är en familj av holomorfa funktioner på Ω . Antag vidare att \mathcal{F} är likformigt begränsad på kompakta delmängder av Ω . Då gäller att:*

(i) \mathcal{F} är ekvikontinuerlig på alla kompakta delmängder av Ω .

(ii) \mathcal{F} är en normal familj.

Bevis. Låt K vara en kompakt delmängd av Ω och låt $r > 0$ vara så litet att disken $\mathbb{D}_{3r}(z) \subset \Omega$ för alla $z \in K$, där $\mathbb{D}_{3r}(z)$ är en disk med radien $3r$ och centrum i punkten z . Låt γ vara randen till $\mathbb{D}_{2r}(z)$ och välj $w \in K$ sådant att $|z - w| < r$. Cauchys integralformel ger nu att

$$f(z) - f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right) d\zeta.$$

Eftersom $\zeta \in \gamma$ och $|z - w| < r$ får vi att $|\zeta - z| > r$ och $|\zeta - w| > r$ vilket i sin tur medför att

$$\left| \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right| = \left| \frac{z - w}{(\zeta - z)(\zeta - w)} \right| \leq \frac{|z - w|}{r^2}.$$

Tillsammans med att f är begränsad av något $B > 0$ (kom ihåg att \mathcal{F} antas vara likformigt begränsad på kompakta delmängder av Ω) ger detta att

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} |f(\zeta)| \frac{|z - w|}{r^2} d\zeta \leq \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi r B |z - w|}{r^2} = C |z - w|,$$

där C är oberoende av f, z och w . Detta visar att \mathcal{F} är ekvikontinuerlig på K och därmed är (i) bevisad.

För att visa (ii) kommer vi att använda oss av ett så kallat diagonaliseringsargument. Låt $\{f_n\}$ vara en sekvens av funktioner tillhörande \mathcal{F} . Låt också $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ vara en sekvens av punkter som är tät i Ω (vi vet att en sådan existerar eftersom till exempel mängden av alla tal $z = a + bi$ med $a, b \in \mathbb{Q}$ är uppräknelig och tät i \mathbb{C}).

Eftersom funktionerna $f_n, n = 1, 2, 3, \dots$ är likformigt begränsade på kompakta delmängder, och därför speciellt punktvis begränsade, kan vi ta en delsekvens av $\{f_n\}$ som konvergerar för w_1 enligt Bolzano-Weierstrass sats (Sats 2.5), ty $f_n(w_1)$ är bara en följd av komplexa tal. Vi kallar denna sekvens för $\{f_{n,1}\}$. Vi kan nu ta en delsekvens av $\{f_{n,1}\}$ som konvergerar i w_2 , och kalla denna sekvens för $\{f_{n,2}\}$. Vi kan med upprepade appliceringar av Bolzano-Weierstrass på detta sätt alltid hitta en sekvens $\{f_{n,k}\}$ som är en delsekvens av $\{f_{n,k-1}\}$ som konvergerar i alla punkter w_j där $j = 1, 2, \dots, k$.

Om vi låter $g_n = f_{n,n}$ kommer sekvensen $\{g_n\}$ konvergera i alla punkter w_j . Detta eftersom för en godtycklig punkt w_i ur den täta mängden är $\{f_{n,n}\}$ för $n \geq i$ en delsekvens av $\{f_{n,i}\}$. Fixera $\epsilon > 0$. Från ekvikontinuiteten vet vi att det finns ett $\delta > 0$ så att för alla $z, w \in \Omega$ sådana att $|z - w| < \delta$ och $f \in \mathcal{F}$ gäller att $|f(z) - f(w)| < \epsilon$. Då $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ är tät i Ω , kommer $\{\mathbb{D}_{\delta}(w_j)\}_{j=1}^{\infty}$ för detta val av δ , att täcka Ω , och därigenom också K . Då K är kompakt vet vi att ett ändligt antal av dessa mängder kommer att täcka K . Alltså finns det ett J sådant att

$$K \subset \mathbb{D}_{\delta}(w_1) \cup \dots \cup \mathbb{D}_{\delta}(w_J).$$

Eftersom ändligt många diskar täcker K och $\{g_n\}$ konvergerar i alla punkter w_j , finns det något N så att $|g_n(w_j) - g_m(w_j)| < \epsilon$ för alla $j \in \{1, 2, \dots, J\}$ om $n, m > N$.

Om vi nu har $z \in K$ kommer $z \in \mathbb{D}_{\delta}(w_j)$ för något $j \in \{1, \dots, J\}$. Triangelolikheten ger att

$$|g_n(z) - g_m(z)| \leq |g_n(z) - g_n(w_j)| + |g_n(w_j) - g_m(w_j)| + |g_m(w_j) - g_m(z)| \leq 3\epsilon,$$

där vi har använt oss av ekvikontinuitet. Alltså har vi att $\{g_n\}$ konvergerar likformigt på en given kompakt delmängd K av Ω , eftersom $\epsilon > 0$ var godtyckligt.

Nu vill vi ta fram en serie som konvergerar likformigt på alla kompakta delmängder av Ω . Låt $\{K_n\}$ vara någon uttömmande mängd av Ω , och låt $\{g_{n,1}\}$ vara en delsekvens av $\{f_n\}$ som konvergerar på K_1 . Vidare låt $\{g_{n,k}\}$ vara en delsekvens av $\{g_{n,k-1}\}$ som konvergerar likformigt på K_k . Nu kan vi ta sekvensen $\{g_{n,n}\}$, som är en delsekvens av $\{f_n\}$, som kommer att konvergera likformigt på alla kompakta delmängder av Ω . □

2.3 Övriga resultat

Förutom Montels sats behöver vi även fem andra resultat för att kunna bevisa Riemanns avbildningssats. De fyra första är grundläggande och välkända inom komplex analys och presenteras därför utan bevis.

Sats 2.7. *En holomorf funktion på en enkelt sammanhängande mängd Ω har en primitiv i Ω .*

För ett fullständigt bevis se [1] kapitel 2 Theorem 2.1 och den följande diskussionen.

Sats 2.8. Om $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ är en sekvens av holomorfa funktioner som konvergerar likformigt till en funktion f på varje kompakt delmängd av Ω , så är f holomorf på Ω .

För ett fullständigt bevis se [1] kapitel 5 Theorem 5.2.

Sats 2.9. (Argumentprincipen) Antag att f är en holomorf funktion på ett öppet område som innehåller en disk D och dess rand γ . Antag vidare att f inte har några nollställen på randen till D . Då gäller att:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = (\text{Antalet nollställen till } f \text{ i } D)$$

För ett fullständigt bevis se [1] kapitel 3 Theorem 4.1.

Sats 2.10. (Rouchés sats) Låt Ω vara ett öppet område vars rand γ är en enkel, slutna kurva. Om f och g är holomorfa på $\bar{\Omega}$ samt uppfyller att $|f(z)| > |g(z)|$ på γ , så har f och $f+g$ lika många nollställen i Ω .

För ett fullständigt bevis se [1] kapitel 4 Theorem 4.3.

Den femte satsen är inte fullt lika välkänd och vi inkluderar därför även ett bevis.

Proposition 2.11. Låt Ω vara en öppen sammanhängande delmängd av \mathbb{C} , och låt $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ vara en följd av holomorfa och injektiva funktioner på Ω . Om $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konvergerar likformigt på varje kompakt delmängd av Ω till en holomorf funktion f , så är f antingen injektiv eller konstant.

Bevis. Antag att f inte är injektiv, det vill säga att det existerar tal $z_1 \neq z_2$ i Ω sådana att $f(z_1) = f(z_2)$. Definera nu den nya följd $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_1)$. Vi vet att $g_n(z)$ inte har några andra nollställen än z_1 , då f_n enligt antagande är injektiv. Funktionerna g_n konvergerar likformigt på varje kompakt delmängd av Ω , till $g(z) = f(z) - f(z_1)$. Om $g(z)$ inte är identiskt noll (i så fall är $f(z)$ konstant och beviset är färdigt) vet vi att z_2 är ett isolerat nollställe till g eftersom g är holomorf på ett sammanhängande område och $f(z_1) = f(z_2)$. Välj därför r sådant att g endast har nollstället z_2 i disken $\mathbb{D}_r(z_2)$ med rand γ . Om vi tillämpar argumentprincipen (Sats 2.9) erhåller vi:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} d\zeta = 1. \tag{2.1}$$

Eftersom g inte blir 0 någonstans på γ så konvergerar $1/g_n$ likformigt till $1/g$ på γ . Eftersom även $g'_n \rightarrow g'$ likformigt får vi att:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'_n(\zeta)}{g_n(\zeta)} d\zeta \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} d\zeta, \text{ då } n \rightarrow \infty.$$

Men vi vet att g_n har sitt enda nollställe i z_1 och detta ligger inte innanför cirkeln γ så:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'_n(\zeta)}{g_n(\zeta)} d\zeta = 0, \text{ för alla } n.$$

Detta implicerar att integralen (2.1) skall vara både 0 och 1, vilket är en motsägelse. Alltså måste f vara injektiv. \square

Kapitel 3

Riemanns avbildningssats

Nu när vi har samlat på oss alla hjälpmedel vi behöver kan vi äntligen vända uppmärksamheten mot Riemanns avbildningssats:

Sats 3.1. (Riemanns avbildningssats) *Antag att Ω är ett öppet enkelt sammanhängande område som är en äkta delmängd av \mathbb{C} (men inte den tomma mängden). Om $z_0 \in \Omega$ så finns det en unik biholomorf avbildning $F : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ sådan att:*

$$F(z_0) = 0 \quad \text{och} \quad F'(z_0) > 0.$$

Satsen ovan garanterar alltså att det finns en biholomorf avbildning från alla enkelt sammanhängande öppna områden (som inte är hela det komplexa talplanet eller tomma mängden) till enhetsdisken, utan att ställa några som helst krav på områdets rand. En följsats av Riemanns avbildningssats är att alla sådana områden är biholomorft ekvivalenta (det vill säga de kan avbildas biholomorft på varandra). För att se detta tar vi de två öppna enkelt sammanhängande områdena $\Omega \subset \mathbb{C}$ och $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}$ vars respektive biholomorfa avbildningar är $F : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ och $G : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{D}$. Det är då uppenbart att dessa två områden är biholomorft ekvivalenta ty:

$$\begin{cases} F^{-1} \circ G : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega, \\ G^{-1} \circ F : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}. \end{cases}$$

Där vi vet att inverserna existerar eftersom både F och G är biholomorfa.

3.1 Första beviset

Vi vänder oss nu till det första beviset av Riemanns avbildningssats. För att kunna göra detta funderar vi först på vad vi vet om den avbildning vi vill finna. Vi vill hitta en funktion $F : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ som är holomorf, injektiv och surjektiv. Idén är att det borde vara enklare att hitta en funktion som uppfyller allt detta förutom surjektiviteten (vi hade lika gärna kunnat kolla på funktioner som istället uppfyllde allt utom injektiviteten). Vi väljer därför att studera mängden

$$\mathcal{F} = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}, f \text{ holomorf, injektiv och } f(0) = 0\}.$$

Första steget i beviset blir att visa att denna mängd inte är tom. Vår strategi för att inse detta är att visa att vi utan inskränkning kan anta att $\Omega \subset \mathbb{D}$ och att $0 \in \Omega$. I så fall vet vi att \mathcal{F} inte är tom då $f(z) = z$ tillhör \mathcal{F} .

Steg 1: Ω kan antas vara en delmängd av \mathbb{D} som innehåller origo

Eftersom Ω inte får vara hela \mathbb{C} , vet vi att det existerar ett α som inte tillhör Ω , och därmed vet vi även att $z - \alpha$ aldrig blir 0 på Ω . Alltså är $1/(z - \alpha)$ en väldefinierad holomorf funktion på Ω . Eftersom Ω är öppen och enkelt sammanhängande har denna funktion enligt Sats 2.7 en primitiv på Ω . Alltså existerar en holomorf funktion $g(z)$ på Ω , sådan att $g'(z) = 1/(z - \alpha)$. Då gäller att:

$$\frac{d}{dz} \left((z - \alpha)e^{-g(z)} \right) = e^{-g(z)} - (z - \alpha)g'(z)e^{-g(z)} = 0,$$

och då Ω är sammanhängande, vet vi att:

$$z - \alpha = Ce^{g(z)},$$

för någon konstant $C \neq 0$. Vi definierar nu

$$f(z) = \log(z - \alpha) = g(z) - \log(C).$$

Genom att exponentiera båda sidor av funktionen och erhålla $e^{f(z)} = z - \alpha$ kan vi konstatera att f är injektiv ty om $f(z) = f(w)$ så är $e^{f(z)} = e^{f(w)}$ och därmed $z - \alpha = w - \alpha$.

Om vi fixerar en punkt $w \in \Omega$ är $f(z) \neq f(w) + 2\pi i$ för alla $z \in \Omega$, ty om så inte vore fallet skulle vi kunna exponentiera båda sidor precis som tidigare och komma fram till att $f(w) = f(z)$ vilket är en motsägelse. Vi hävdar att $f(z)$ håller sig strikt borta från $f(w) + 2\pi i$ i den bemärkelsen att det finns en disk med centrum i $f(w) + 2\pi i$ som inte innehåller någon punkt av bilden av $f(\Omega)$. Om så inte vore fallet skulle man kunna finna en följd av punkter $\{z_n\}$ som ligger i Ω sådan att $f(z_n) \rightarrow f(w) + 2\pi i$. Om vi exponentierar detta får vi att $z_n \rightarrow w$ och därmed även att $f(z_n) \rightarrow f(w)$, eftersom att f är en kontinuerlig funktion, vilket återigen är en motsägelse. Speciellt innebär det att funktionen

$$F(z) = \frac{1}{f(z) - (f(w) - 2\pi i)},$$

är begränsad. Därmed kan $F(\Omega)$ translateras och skalas till ett område som är en delmängd till enhetsdisken och innehåller origo. Vidare kan vi även direkt konstatera att funktionen är holomorf och injektiv, ty f är holomorf och injektiv. Alltså vet vi att Ω är biholomorft ekvivalent med någon öppen delmängd av \mathbb{D} som innehåller nollan och följaktligen är \mathcal{F} ej tom.

I fortsättningen betecknar vi $\tilde{\Omega}$ som en öppen enkelt sammanhängande delmängd av enhetsdisken som innehåller nollan, och vi låter

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{f : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{D}, f \text{ holomorf, injektiv och } f(0) = 0\}.$$

Steg 2: Speciellt villkor på den surjektiva funktionen

Nu när vi har förenklat området Ω koncentrerar vi oss på surjektiviteten hos den funktion $f \in \tilde{\mathcal{F}}$ som vi vill finna. Det vore bra om det fanns någonting som särskilde denna funktion, som vi kallar \tilde{f} , från övriga funktioner i $\tilde{\mathcal{F}}$. Det visar sig att \tilde{f} (om den existerar) är den funktion i $\tilde{\mathcal{F}}$ som har störst derivata i origo, det vill säga

$$|\tilde{f}'(0)| \geq |f'(0)| \text{ för alla } f \in \tilde{\mathcal{F}}.$$

Låt f vara en funktion i $\tilde{\mathcal{F}}$ som inte är surjektiv, det vill säga att det finns ett $\alpha \in \mathbb{D}$ sådant att $f(z) \neq \alpha$. Betrakta följande automorfi av enhetsdisken:

$$\phi_\alpha = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}.$$

Eftersom området $\tilde{\Omega}$ är enkelt sammanhängande och $\phi_\alpha \circ f$ är injektiv, så är även $(\phi_\alpha \circ f)(\tilde{\Omega})$ enkelt sammanhängande. Dessutom noterar vi att den sammansatta funktionens bild inte innehåller origo eftersom $\phi_\alpha(\alpha) = 0$. Därför kan vi med samma resonemang som innan definiera $\log(z)$ på detta område och mer specifikt definiera avbildningen:

$$g(w) = e^{\frac{1}{2} \log(w)}.$$

Härnäst betraktar vi funktionen

$$F = \phi_{g(\alpha)} \circ g \circ \phi_\alpha \circ f.$$

Denna funktion är en holomorf avbildning från $\tilde{\Omega}$ till \mathbb{D} , ty f avbildar $\tilde{\Omega}$ in i \mathbb{D} medan resten är holomorfa funktioner som avbildar \mathbb{D} på \mathbb{D} . Man kan enkelt verifiera att $F(0) = 0$ och att F är injektiv. Vi har nämligen att f är injektiv per definition då den tillhör $\tilde{\mathcal{F}}$, vi vet att ϕ_α och $\phi_{g(\alpha)}$ är automorfier och slutligen kan man visa att g är injektiv genom att föra ett liknande resonemang som vi gjorde ovan då vi visade att $\log(z - \alpha)$ var injektiv. Därmed uppfyller F alla kriterier för att ingå i familjen $\tilde{\mathcal{F}}$.

Om vi nu låter $h(w) = g^{-1}(w) = w^2$ ser vi att

$$f = \phi_\alpha^{-1} \circ h \circ \phi_{g(\alpha)}^{-1} \circ F = \Phi \circ F. \quad (3.1)$$

Då h inte är injektiv kan inte heller $\Phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ vara det. Sista delen av Schwarz lemma (Sats 2.2) ger därför att $|\Phi'(0)| < 1$ (eftersom Φ ej kan vara en rotation). Deriverar vi nu båda sidor av ekvation (3.1) och sätter in 0 får vi

$$|f'(0)| = |\Phi'(0)||F'(0)| < |F'(0)|.$$

Detta visar att en funktion i $\tilde{\mathcal{F}}$ med maximal derivata i origo, om den existerar, är surjektiv ty om så inte vore fallet skulle man alltid kunna bilda en ny funktion i $\tilde{\mathcal{F}}$ som har större derivata i origo.

Steg 3: Existensen av den surjektiva funktionen

Det som återstår nu är alltså att försöka visa att det finns en funktion $f \in \tilde{\mathcal{F}}$ som maximerar $|f'(0)|$. Det första vi noterar är att denna derivata är ändlig på grund av Cauchys olikhet

$$|f^{(n)}(0)| \leq \sup_{|z|=R} \frac{n!|f(z)|}{R^n},$$

och det faktum att alla funktioner i $\tilde{\mathcal{F}}$ till belopp är likformigt begränsade av 1, då de antar värden i enhetsdisken.

Vi kan nu definiera:

$$s = \sup_{f \in \tilde{\mathcal{F}}} |f'(0)|,$$

där vi använder supremum istället för maximum eftersom vi ännu inte vet om det existerar någon funktion i $\tilde{\mathcal{F}}$ vars derivata är maximal. För att visa att det faktiskt gör det definierar vi följderna $\{f_n\} \subset \tilde{\mathcal{F}}$ sådan att $|f'_n(0)| \rightarrow s$ då $n \rightarrow \infty$. $\tilde{\mathcal{F}}$ uppfyller förutsättningarna för Montels sats (Sats 2.6) eftersom den är likformigt begränsad på hela $\tilde{\Omega}$ och därmed också på kompakta delmängder av densamma. Som en konsekvens av Montels sats vet vi att det finns en delföljd till $\{f_n\}$ som konvergerar likformigt på kompakta delmängder av $\tilde{\Omega}$ mot någon funktion f med egenskapen att $|f'(0)| = s$. Om vi kan visa att denna funktion tillhör $\tilde{\mathcal{F}}$, är beviset klart.

Vi konstaterar att alla funktioner i följderna är holomorfa och eftersom de som tidigare nämnts konvergerar likformigt på kompakta delmängder till $\tilde{\Omega}$ så vet vi från Sats 2.8 att funktionen f också är holomorf. Vidare har vi att alla funktioner i följderna är injektiva och att $|f'(0)| \geq 1$ (eftersom identiteten ingår i $\tilde{\mathcal{F}}$). Funktionen f är alltså inte konstant och enligt Proposition 2.11 måste den då vara injektiv.

Dessutom har vi att $|f(z)| \leq 1$ (eftersom $|f_n(z)| \leq 1$ för alla n) och genom att tillämpa maximumprincipen (Sats 2.1) får vi att $|f(z)| < 1$ på $\tilde{\Omega}$ då f inte är konstant. Till sist noterar vi att $f(0) = 0$ ty om $\{f_n\}$ konvergerar likformigt, konvergerar de även punktvis. Därmed har vi funnit en funktion $f \in \tilde{\mathcal{F}}$ sådan att $|f'(0)| = s$, vilket betyder att f är en biholomorf avbildning från $\tilde{\Omega}$ till \mathbb{D} sådan att $f(0) = 0$. Om f multipliceras med lämpligt komplext tal av absolutbelopp 1 får vi även att $f'(0) > 0$.

Steg 4: Unikhet

Det enda som återstår att bevisa är att denna biholomorfa avbildning är unik. Detta gör vi genom att anta att det finns två stycken avbildningar F och G som uppfyller förutsättningarna. Med dessa bildar vi avbildningen $H = F \circ G^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$. Eftersom H är en automorfi som fixerar origo, så är H en rotation (ty enligt Sats 2.4 är dessa de enda automorfier som fixerar origo). Vi kan alltså skriva $H(z) = e^{i\theta}z$ för något $\theta \in \mathbb{R}$, vilket ger $H'(0) = e^{i\theta}$ vilket i sin tur leder till att $e^{i\theta} = 1$ ty annars är inte $H'(0) > 0$. Detta implicerar att $H(z) = z$ och speciellt att $G = F$. Därmed är avbildningen unik och beviset för Riemanns avbildningssats klart.

3.2 Andra beviset

Efter det första beviset av Riemanns avbildningssats går vi direkt vidare till det andra mer konstruktiva beviset. Detta bevis kommer att ligga till grund för MATLAB-simuleringarna som kommer att diskuteras senare och är ganska annorlunda gentemot det första på det sättet att vi här inte bara bevisar existensen av avbildningarna utan även skapar en algoritm för att bilda dem. Precis som i bevis 1 är tanken att visa att vi kan hitta en sekvens F_n , men denna gång explicit, som konvergerar mot en biholomorf avbildning $F : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ och därmed kan vi precis som i bevis 1 anta att Ω är en öppen enkelt sammanhängande delmängd av \mathbb{D} som innehåller origo. Vi definerar en sådan mängd på följande vis.

Definition 3.1. En *Koebe mängd* \mathcal{K} är en öppen enkelt sammanhängande delmängd av \mathbb{D} som innehåller origo.

En idé är att nu försöka bilda sekvenser $\{\mathcal{K}_n\}_{n=0}^{\infty}$ och funktioner $F_n : \mathcal{K}_n \rightarrow \mathcal{K}_{n+1}$ som ger oss större och större Koebe mängder, i den bemärkelsen att \mathcal{K}_{n+1} fyller ut mer av \mathbb{D} än \mathcal{K}_n . För att få ett matematiskt mått på hur stor en Koebe mängd är inför vi begreppet inre radien för en Koebe mängd.

Definition 3.2. Den *inre radien* av en Koebe mängd definieras som $r_{\mathcal{K}} = \sup\{\rho \geq 0 : \mathbb{D}_{\rho}(0) \subset \mathcal{K}\}$, där $\mathbb{D}_{\rho}(0)$ är en disk med centrum i origo och radien ρ .

Vi vill alltså finna funktioner $F_n : \mathcal{K}_n \rightarrow \mathcal{K}_{n+1}$ sådana att $r_{\mathcal{K}_{n+1}} > r_{\mathcal{K}_n}$. De funktioner som har den här egenskapen kallar vi för expansioner.

Definition 3.3. En funktion $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{D}$ kallas för en *expansion* om $f(0) = 0$, f är holomorf och injektiv, och $|f(z)| > |z|$ för alla $z \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$.

En expansion $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{D}$ avbildar uppenbarligen en Koebe mängd \mathcal{K} , på en annan Koebe mängd $\tilde{\mathcal{K}}$, eftersom den avbildar på en delmängd till enhetsdisken och specifikt origo på origo. Då expansionen även är injektiv kan vi vidare garantera att $\tilde{\mathcal{K}}$ är enkelt sammanhängande eftersom \mathcal{K} är det.

För att inse att $\tilde{\mathcal{K}}$ fyller ut mer av \mathbb{D} (eller i alla fall lika mycket) tar vi ett $|z_0| < r_{\mathcal{K}}$ och väljer r sådan att $|z_0| < r < r_{\mathcal{K}}$. Då är f holomorf på $\overline{\mathbb{D}_r(0)}$ och $|f(z)| > r$ för $|z| = r$. Speciellt blir då

$$|f(z)| > |z_0|.$$

Enligt Rouchés sats (Sats 2.10) har $f(z)$ och $g(z) = f(z) - z_0$ lika många nollställen i $\mathbb{D}_r(0)$, och eftersom $f(z)$ har exakt ett nollställe ($z = 0$) finns något z_1 sådant att $g(z_1) = 0$, det vill säga $f(z_1) = z_0$. Då z_0 är godtyckligt vald med $|z_0| < r_{\mathcal{K}}$ måste $r_{\tilde{\mathcal{K}}} \geq r_{\mathcal{K}}$.

Med detta i åtanke väljer vi att definiera vår sekvens av funktioner $\{F_n\}_{n=1}^\infty$, på följande vis:

$$F_n(z) = f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_0(z) : \mathcal{K}_0 \rightarrow \mathbb{D}.$$

där alla f_n är expansioner och \mathcal{K}_0 är den Koebe mängd som vi utgår ifrån. Beviset som följer delas upp i två steg och i det första konstruerar vi explicita expansioner f_n för att bilda F_n .

Steg 1: Konstruktion av sekvensen

För att konstruera sekvensen $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ behöver vi först lämpliga f_n . Vi bildar dessa med hjälp av en automorfi av enhetsdisken. Låt \mathcal{K}_0 vara ett Koebe område och välj ett α på randen, så att $|\alpha| = r_{\mathcal{K}_0}$. Eftersom $\phi_\alpha(\mathcal{K}_0)$ är enkelt sammanhängande och inte innehåller origo så är $S(z) = e^{\log(z)/2}$ en väldefinierad holomorf funktion då $z \in \phi_\alpha(\mathcal{K}_0)$. Välj nu β sådant att $S(\alpha) = \beta$. Om vi sätter $f = \phi_\beta \circ S \circ \phi_\alpha$, så kan vi direkt se att f är både holomorf och injektiv. Vi vill även visa att f är en expansion. För att göra detta börjar vi med att konstatera att $f(0) = 0$ och att f har inversen

$$f^{-1} = \phi_\alpha \circ g \circ \phi_\beta,$$

där $g(z) = z^2$. Notera att f^{-1} är holomorf på hela enhetsdisken, så enligt Schwarz lemma (Sats 2.2) gäller att

$$|f^{-1}(w)| \leq |w|,$$

där likhet bara kan gälla i origo, ty annars skulle f^{-1} enligt del två av Schwarz lemma vara en rotation, vilket är en motsägelse ty $f^{-1}(\beta) = \alpha = \beta^2$ och $|\beta^2| < |\beta|$ för alla $0 < |\beta| < 1$. Alltså har vi att

$$|f^{-1}(w)| < |w| \text{ för alla } z \in \mathbb{D} \setminus \{0\},$$

vilket, om vi sätter $w = f(z)$, ger oss

$$|z| < |f(z)| \text{ för alla } z \in \mathcal{K} \setminus \{0\}.$$

Eftersom $f = \phi_\beta \circ S \circ \phi_\alpha$ också är holomorf och injektiv, så är den en expansion och därför en kandidat till f_n .

Låt nu $f_n = \phi_{\beta_n} \circ S \circ \phi_{\alpha_n}$ och $F_n = f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_0$, där α_n och β_n definieras som innan, för varje \mathcal{K}_n . Nästa steg blir att visa att någon delsekvens av dessa funktioner konvergerar mot något $F : \mathcal{K}_0 \rightarrow \mathbb{D}$.

Steg 2: Konvergens av sekvensen

Det vi har kvar att undersöka är om denna sekvens konvergerar mot en funktion $F : \mathcal{K}_0 \rightarrow \mathbb{D}$. För att visa detta använder vi ett liknande resonemang som i tredje steget för första beviset. Vi måste visa att sekvensen, eller en delsekvens, överhuvudtaget konvergerar, och därtill att den funktion den konvergerar mot har de önskade egenskaperna. Dessa egenskaper är att F skall vara holomorf, injektiv, surjektiv och unik samt att $F(0) = 0$ och $F'(0) > 0$.

För att visa att sekvensen konvergerar börjar vi med att konstatera att $\{F_n\}$ är holomorfa och likformigt begränsade, ty $\{f_n\}$ är holomorfa och $|f_n(z)| < 1$ för alla n och alla $z \in \mathcal{K}_n$. Enligt Montels Sats (Sats 2.6) finns det då en delsekvens av $\{F_n\}$ som konvergerar likformigt på kompakta delmängder av \mathcal{K}_0 mot en funktion F . Enligt Sats 2.8 är även F holomorf. Då alla f_n är injektiva leder detta till att alla F_n också är injektiva, och enligt Proposition 2.11 är då F antingen injektiv eller konstant. Vi vill visa att $|F'_n(0)| = |f'_n(0) \cdot F'_{n-1}(0)| = |f'_n(0) \cdot \dots \cdot f'_0(0)| > 1$, så F är inte konstant.

För att se detta studerar vi $g(z) = f(z)/z$, där $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{D}$ är en expansion. Eftersom singulariteten i 0 är hävbar är g holomorf. Vidare gäller att

$$f'(z) = g(z) + zg'(z),$$

$$|f'(0)| = |g(0)|,$$

och då $|f(z)| > |z|$ i $\mathcal{K} \setminus \{0\}$ har vi att

$$|g(z)| > 1 \text{ för alla } z \in \mathcal{K} \setminus \{0\}.$$

Eftersom origo är en inre punkt i \mathcal{K} , så måste $g(0)$ vara en inre punkt i $g(\mathcal{K})$ och därmed är även $|g(0)| > 1$ och, följaktligen har vi visat att

$$|f'_n(0)| > 1, \text{ för alla } n, \quad (3.2)$$

vilket i sin tur ger att $|F'_n(0)| = |f'_n(0) \cdot \dots \cdot f'_0(0)| > 1$. Därmed är F_n ej konstant och alltså är F injektiv.

Att visa att F är surjektiv kräver lite mer arbete. Om $r_{F_n(\mathcal{K}_0)} \rightarrow 1$ och $r_{F(\mathcal{K}_0)} \geq r_{F_n(\mathcal{K}_0)}$ då $n \rightarrow \infty$ så garanterar detta att F fyller ut hela \mathbb{D} . För att visa att $r_{F_n(\mathcal{K}_0)} \rightarrow 1$ deriverar vi $f_n = \phi_{\beta_n} \circ S \circ \phi_{\alpha_n}$ i origo och tar belopp för att erhålla

$$|f'_n(0)| = \frac{1 + r_{\mathcal{K}_n}}{2\sqrt{r_{\mathcal{K}_n}}}. \quad (3.3)$$

Derivatans innehåller $r_{\mathcal{K}_n}$ så om vi kan hitta ett gränsvärde för denna derivata då $n \rightarrow \infty$, kan vi räkna ut vad $r_{\mathcal{K}_n}$ går mot. För att hitta detta gränsvärde deriverar vi $F_n(z)$ i origo:

$$F'_n(0) = \prod_{k=0}^n f'_k(0). \quad (3.4)$$

Om vi tar beloppet på båda sidor av (3.4) erhåller vi en följd av reella tal. En följd av reella tal konvergerar om den är uppåt begränsad och växande. Att denna följd är växande ges av (3.2), då detta garanterar att samtliga faktorer är större än ett. Vidare kan vi använda Sats 2.3 på $F_n : \mathcal{K}_0 \rightarrow \mathcal{K}_{n+1}$ genom att välja en disk i \mathcal{K}_0 med centrum i origo och radie $|\alpha_0|$ (där α_0 är definierad som α_n tidigare) och konstatera att denna disk kommer att avbildas till en öppen delmängd av enhetsdisken. Sista delen av satsen ger då att $|F'_n(0)| < 1/|\alpha_0| < \infty$. Alltså är $\{|F'_n(0)|\}_{n=0}^\infty$ en sekvens av reella tal som är växande och uppåt begränsad.

Detta medför att $\lim_{n \rightarrow \infty} |f'_n(0)| = 1$, vilket i kombination med (3.3) ger att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + r_{\mathcal{K}_n}}{2\sqrt{r_{\mathcal{K}_n}}} = 1.$$

Om vi sätter

$$\tau_n = \frac{1 + r_{\mathcal{K}_n}}{2\sqrt{r_{\mathcal{K}_n}}},$$

har vi att $\tau_n \rightarrow 1$ då $n \rightarrow \infty$. Löser vi ut $r_{\mathcal{K}_n}$ får vi att

$$r_{\mathcal{K}_n} = \pm \sqrt{(1 - 2\tau_n^2)^2 - 1} - 1 + 2\tau_n^2 \rightarrow 0 - 1 + 2 = 1 \text{ då } n \rightarrow \infty.$$

Att $r_{F(\mathcal{K}_0)} \geq r_{F_n(\mathcal{K}_0)}$ följer enkelt från påståendet att $F \circ F_n^{-1}$ är en expansion av \mathcal{K}_n , ty om så är fallet vet vi att

$$r_{F \circ F_n^{-1}(\mathcal{K}_n)} \geq r_{\mathcal{K}_n},$$

men

$$F_n^{-1}(\mathcal{K}_n) = F_n^{-1}(F_n(\mathcal{K}_0)) = \mathcal{K}_0,$$

så $r_{F(\mathcal{K}_0)} \geq r_{\mathcal{K}_n}$. Nu återstår bara problemet att visa att $F \circ F_n^{-1}$ är en expansion.

Betrakta funktionen $F_k \circ F_n^{-1}$. Eftersom $F_k \rightarrow F$ likformigt på kompakta delmängder av \mathcal{K}_0 och $F_n^{-1} : \mathcal{K}_n \rightarrow \mathcal{K}_0$ är biholomorf, får vi att

$$F_k \circ F_n^{-1} \rightarrow F \circ F_n^{-1}$$

likformigt på kompakta delmängder av \mathcal{K}_n . Vi vet att $F \circ F_n^{-1}$ är holomorf och injektiv, eftersom den är en sammansättning av sådana funktioner. Kvar att visa är alltså att $|(F \circ F_n^{-1})(z)| > |z|$ för alla $z \in \mathcal{K}_n \setminus \{0\}$. Om $k > n$ har vi att

$$|(F_k \circ F_n^{-1})(z)| = |f_k \circ \dots \circ f_{n+1}(z)| > |f_{n+1}(z)| > |z|.$$

Låter vi nu $k \rightarrow \infty$, får vi att $|(F \circ F_n^{-1})(z)| > |z|$ och vi är klara.

Alltså är $F : \mathcal{K}_0 \rightarrow \mathbb{D}$ en biholomorf avbildning. Att $F(0) = 0$, $F'(0) > 0$ och att F är unik visas på exakt samma sätt som i det tidigare beviset för Riemanns avbildningssats.

3.3 Tredje beviset

Det tredje beviset bygger på att Dirichletproblemet alltid är lösbart (med vissa begränsningar på randen). Vi kommer ägna kapitel 4 åt att bevisa detta. Närmare bestämt att följande sats är sann:

Sats 3.2. *Låt Ω vara ett öppet sammanhängande område i \mathbb{C} och f en given kontinuerlig funktion. Om Ω uppfyller det yttre triangelvillkoret, Definition 4.11, finns det alltid en funktion u sådan att*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{i } \Omega, \\ u = f & \text{på } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.5)$$

Notera att det finns områden som inte uppfyller det yttre-triangelvillkoret men på vilket det ändå existerar en lösning till Dirichletproblemet. Det yttre-triangelvillkoret är alltså ett tillräckligt villkor men inte nödvändigt. När vi senare diskuterar Dirichletproblemet och det står att det yttre-triangelvillkoret måste vara uppfyllt syftar vi alltså på satsen ovan och inte på det allmänna fallet.

Antag nu att denna sats redan är bevisad. Då är det möjligt att utifrån detta bevisa Riemanns avbildningssats.

Om $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ är en biholomorf avbildning sådan att $\Phi(z_0) = 0$, där $z_0 \in \Omega$, kan vi skriva Φ på formen

$$\Phi(z) = (z - z_0)G(z),$$

där $G(z)$ är holomorf och skild från noll på Ω . Alltså har G en logaritm på Ω (som är enkelt sammanhängande). Detta visas på samma sätt som existensen av en logaritm på ett enkelt sammanhängande område som inte innehåller α , som i steg 1 i det första beviset av Riemanns avbildningssats, men genom att betrakta $G'(z)/G(z)$ istället för $1/(z - \alpha)$.

Detta medför vi kan skriva $G(z) = e^{H(z)}$, för en lämplig holomorf funktion H . Om $u = \operatorname{Re} H$ så är u harmonisk. Vidare kan vi utifrån observationen att $|\Phi(z)| = 1$ på $\partial\Omega$ dra slutsatsen att $u(z) = \log(1/|z - z_0|)$ för $z \in \partial\Omega$. Det går att visa att man kan vända på argumentet. Antag att vi kan hitta en funktion u som uppfyller (3.5) där $f(z) = \log(1/|z - z_0|)$. Med hjälp av u kan vi nu konstruera funktionen H och från denna den sökta biholomorfa funktionen Φ . För ett fullständigt bevis av att omvändningen gäller se Nevanlinna och Paatero [6].

Det svåraste i detta bevis är att bevisa att Dirichletproblemet alltid är lösbart. Resten av denna första del ägnas åt detta bevis och den teori som ligger bakom.

Kapitel 4

Dirichletproblemet

Det tredje beviset av Riemanns avbildningssats såg till synes väldigt enkelt och rättfram ut, men det beror på att vi antog att Dirichletproblemet alltid är lösbart. Detta kapitel ägnas åt att bevisa när Dirichletproblemet är lösbart och det kommer då framgå att det tredje beviset faktiskt är ganska mycket krångligare och svårare än de andra två. Det kommer visa sig att Dirichletproblemet är lösbart under den begränsningen att området Ω som problemet definieras på måste uppfylla det så kallade yttre triangelvillkoret. Innan vi kan bevisa detta måste vi dock avhandla en del teori, först Hilbertrum och sedan harmoniska funktioner. I tredje avsnittet behandlas kärnan i kapitlet, lösningen av Dirichletproblemet.

4.1 Hilbertrumsteori

Definition 4.1. En mängd \mathcal{H} kallas för ett *Hilbertrum* om den uppfyller följande egenskaper:

- (i) \mathcal{H} är ett vektorrum över \mathbb{C} .
- (ii) \mathcal{H} har en seskvi-linjär skalärprodukt (\cdot, \cdot) , sådan att $(f, g) = \overline{(g, f)}$.
- (iii) \mathcal{H} har normen $\|f\| = (f, f)^{1/2} \geq 0$ där likhet gäller om och endast om $f = 0$.
- (iv) \mathcal{H} är fullständig i sin metrik, det vill säga varje sekvens $\{f_n\} \subset \mathcal{H}$ som uppfyller $\|f_n - f_m\| \rightarrow 0$ då $n, m \rightarrow \infty$, (en sådan sekvens kallas Cauchy-sekvens) konvergerar mot ett element i \mathcal{H} .
- (v) \mathcal{H} är separabelt, det vill säga det finns en uppräknelig mängd av element $\{f_k\}$ i \mathcal{H} sådan att mängden av dess linjärkombinationer är tät i \mathcal{H} .

Ett exempel på ett Hilbertrum är det \mathbb{C}^n med den vanliga euklidiska skalärprodukten $(a, b) = \sum_{j=1}^n a_j \overline{b_j}$.

Ett annat exempel på Hilbertrum är $L^2(\mathbb{C})$. Att detta är ett Hilbertrum är dock inte alls självklart, och i själva verket behöver man införa en mer allmän integrationsteori för att detta skall vara sant. Denna integral kallas Lebesgue-integral och man kan då integrera mer allmänna funktioner än med Riemann-integralen. För kontinuerliga funktioner stämmer dock båda integralerna överens. Eftersom vi endast är intresserad av denna egenskap och att $L^2(\mathbb{C})$ är fullständig hänvisar vi till exempel Stein och Shakarchi [2] för en beskrivning av integrationsteori.

Ett annat begrepp som vi kommer att använda från integrationsteori är att en mängd har Lebesguemått noll. En mängd har Lebesguemått noll om den för varje $\epsilon > 0$ kan täckas med en uppräknelig union av bollar, sådant att bollarnas totala volym är högst ϵ . Om en egenskap är uppfylld utanför en mängd av lebesguemått noll, säger man att egenskapen är uppfylld nästan överallt eller att den är uppfylld för nästan alla x .

I beviset för Dirichletproblemet kommer det att dyka upp ett vektorrum som uppfyller alla egenskaperna förutom (iv) ovan. Ett sådant vektorrum kallas för ett pre-Hilbertrum (som vi betecknar \mathcal{H}_0). Följande sats visar att det alltid går att tillsluta ett sådant rum och därmed bilda ett Hilbertrum \mathcal{H} med hjälp av det.

Sats 4.1. *Till varje pre-Hilbertrum \mathcal{H}_0 finns det en tillslutning \mathcal{H} . Det vill säga om \mathcal{H}_0 har skalärprodukten $(f, g)_0$ så finns det ett Hilbertrum \mathcal{H} , med skalärprodukt (f, g) sådant att:*

- (i) $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$.
- (ii) $(f, g)_0 = (f, g)$ för alla $f, g \in \mathcal{H}_0$.
- (iii) \mathcal{H}_0 är tät i \mathcal{H} .

För ett fullständigt bevis se [2] kapitel 4 Proposition 2.7.

Anledningen till att vi vill studera Hilbertrum är för att vi med hjälp av dessa tillåts studera funktioner på ungefär samma sätt som vi studerar vektorer och vektorrum i linjär algebra. Ett första exempel på detta är att Cauchy-Schwarz olikhet och triangelolikheten gäller i alla Hilbertrum. Cauchy-Schwarz är en direkt konsekvens av egenskap (i) och (ii). Tag nämligen $f, g \in \mathcal{H}$ och $\lambda \in \mathbb{C}$ och studera

$$0 \leq \|f - \lambda g\|^2 = (f - \lambda g, f - \lambda g) = \|f\|^2 + |\lambda|^2 \|g\|^2 - \bar{\lambda}(f, g) - \lambda \overline{(f, g)}.$$

Väljer vi nu $\lambda = (f, g)/\|g\|^2$ och förenklar så får vi att

$$0 \leq \|f\|^2 + \frac{(f, g)^2}{\|g\|^4} \|g\|^2 - 2 \frac{|(f, g)|^2}{\|g\|^2} = \|f\|^2 - \frac{|(f, g)|^2}{\|g\|^2}.$$

Slutligen flyttar vi över den andra termen till vänsterledet och multiplicerar med $\|g\|^2$.

Triangelolikheten följer nu från Cauchy-Schwarz olikhet på följande sätt. Vi har att

$$\|f + g\|^2 = (f + g, f + g) = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2 \operatorname{Re}(f, g) \leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2|(f, g)|. \quad (4.1)$$

där $2 \operatorname{Re}(f, g) = (f, g) + \overline{(f, g)}$. Om vi nu applicerar Cauchy-Schwarz olikhet på detta och skriver om erhåller vi

$$\|f + g\|^2 \leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\|\|g\| \leq (\|f\| + \|g\|)^2.$$

Drar vi roten ur båda leden i olikheten får vi triangelolikheten.

Andra begrepp från linjär algebra som går att överföra till Hilbertrum, och är viktigare för oss, är begreppen ortogonalitet, slutna delrum och ortogonal projektion.

Definition 4.2. Två element $f, g \in \mathcal{H}$ sägs vara *ortogonal* om $(f, g) = 0$.

Notera att då $(f, g) = 0$, det vill säga när f, g är ortogonal, så får vi från (4.1) Pythagoras sats

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

Definition 4.3. Ett *slutet linjärt delrum* \mathcal{S} till \mathcal{H} är ett delrum till \mathcal{H} med den extra egenskapen att om $\{f_n\} \subset \mathcal{S}$ konvergerar till en funktion $f \in \mathcal{H}$, så ligger f i \mathcal{S} .

Med hjälp av dessa båda definitioner kan vi formulera och bevisa en sats motsvarande en välkänd sats i linjär algebra.

Sats 4.2. *Antag att \mathcal{S} är ett slutet delrum till \mathcal{H} och att $f \in \mathcal{H}$. Då gäller att:*

(i) Det finns ett unikt element $g_0 \in \mathcal{S}$ sådant att det är närmare f än alla andra element i \mathcal{S} , i den meningen att

$$\|f - g_0\| = \inf_{g \in \mathcal{S}} \|f - g\|.$$

(ii) Elementet $f - g_0 \in \mathcal{H}$ är ortogonalt mot \mathcal{S} , det vill säga $(f - g_0, g) = 0$ för alla $g \in \mathcal{S}$.

Bevis. Vi kan anta att $f \notin \mathcal{S}$ ty om $f \in \mathcal{S}$ så väljer vi bara $g_0 = f$ och beviset är klart. Låt nu $d = \inf_{g \in \mathcal{S}} \|f - g\|$ och notera att $d > 0$ eftersom $f \notin \mathcal{S}$ och \mathcal{S} är slutet. Betrakta nu en sekvens $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ i \mathcal{S} som uppfyller att $\|f - g_n\| \rightarrow d$ då $n \rightarrow \infty$. Vi påstår nu att $\{g_n\}$ är en Cauchy-sekvens. För att visa detta använder vi oss av parallelogramlagen

$$\|A + B\|^2 + \|A - B\|^2 = 2(\|A\|^2 + \|B\|^2),$$

(denna är enkel att verifiera genom att bara skriva om normerna till skalärprodukter) och erhåller då med $A = f - g_n$ och $B = f - g_m$:

$$\|2f - g_n - g_m\|^2 + \|g_m - g_n\|^2 = 2(\|f - g_n\|^2 + \|f - g_m\|^2). \quad (4.2)$$

Men $\frac{1}{2}(g_n + g_m)$ tillhör \mathcal{S} så

$$\|2f - (g_n + g_m)\| = 2\|f - \frac{1}{2}(g_n + g_m)\| \geq 2d.$$

Detta och (4.2) ger att

$$\begin{aligned} \|g_m - g_n\|^2 &= 2(\|f - g_n\|^2 + \|f - g_m\|^2) - 2\|f - \frac{1}{2}(g_n + g_m)\|^2 \\ &\leq 2(\|f - g_n\|^2 + \|f - g_m\|^2) - 4d^2. \end{aligned}$$

Tillsammans med att $\|f - g_n\| \rightarrow d$ och $\|f - g_m\| \rightarrow d$, då $n, m \rightarrow \infty$ får vi nu att

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|g_m - g_n\|^2 \leq 2(d^2 + d^2) - 4d^2 = 0.$$

Alltså är $\{g_n\}$ en Cauchy-sekvens och vidare vet vi att den konvergerar mot ett element $g_0 \in \mathcal{S}$ eftersom \mathcal{S} är slutet. Från antagande vet vi även att detta g_0 uppfyller att $\|f - g_0\| = d$.

Antag nu att det finns en annan punkt $\tilde{g}_0 \in \mathcal{S}$ sådan att $\|f - \tilde{g}_0\| = d$. Vi får då från del (ii) av satsen, som bevisas snart, att $(f - \tilde{g}_0, g_0 - \tilde{g}_0) = 0$. Alltså är dessa element ortogonala och vi kan tillämpa Pytagoras sats

$$\|f - \tilde{g}_0\|^2 = \|f - g_0\|^2 + \|g_0 - \tilde{g}_0\|^2$$

och då $\|f - \tilde{g}_0\|^2 = \|f - g_0\|^2$ så fås $\|g_0 - \tilde{g}_0\| = 0$, vilket visar att g_0 är unik.

För (ii) betraktar vi en liten störning $\epsilon \in \mathbb{C}$ av $g_0 \in \mathcal{S}$, definierad som $g_0 - \epsilon g$ där $g \in \mathcal{S}$. Då får vi att

$$\|f - (g_0 - \epsilon g)\|^2 \geq \|f - g_0\|^2.$$

Om vi utvecklar vänsterledet genom att skriva om det med skalärprodukter får vi att

$$\|f - (g_0 - \epsilon g)\| = \|f - g_0\| + \epsilon^2 \|g\| + 2\epsilon \operatorname{Re}(f - g_0, g).$$

Stoppa vi sedan in detta i olikheten erhåller vi

$$2\epsilon \operatorname{Re}(f - g_0, g) + \epsilon^2 \|g\|^2 \geq 0.$$

Om realdelen ovan är negativ, så kan vi bara välja ϵ tillräckligt liten och positiv för att få en motsägelse. På samma sätt väljer vi ϵ liten och negativ för att få en motsägelse om realdelen är positiv. Alltså måste $\operatorname{Re}(f - g_0, g) = 0$. Vi kan föra ett analogt resonemang med störningen $g_0 - i\epsilon g$ istället, vilket kommer att ge oss resultatet $\operatorname{Im}(f - g_0, g) = 0$. Alltså är $(f - g_0, g) = 0$ och beviset är klart. \square

Definition 4.4. *Ortogonalkomplementet* \mathcal{S}^\perp till ett delrum $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$ definieras som $\mathcal{S}^\perp = \{f \in \mathcal{H} : (f, g) = 0 \text{ för alla } g \in \mathcal{S}\}$.

Som en konsekvens av Sats 4.2 kan vi sluta oss till att om \mathcal{S} är ett slutet delrum till \mathcal{H} , så kan samtliga element i \mathcal{H} bildas genom att ta summan av ett element i \mathcal{S} och ett element i \mathcal{S}^\perp . Man säger att detta \mathcal{H} kan skrivas som en direkt summa av \mathcal{S} och \mathcal{S}^\perp , och betecknar $\mathcal{H} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^\perp$.

Sats 4.3. *Antag att \mathcal{S} är ett slutet delrum av ett Hilbertrum \mathcal{H} . Då gäller att $\mathcal{H} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^\perp$, det vill säga varje $f \in \mathcal{H}$ kan skrivas som $f = g + h$, där $g \in \mathcal{S}$, $h \in \mathcal{S}^\perp$ är unika.*

Bevis. Låt $f \in \mathcal{H}$ och välj g_0 som i Sats 4.2. Vi kan nu skriva om f som $f = g_0 + (f - g_0)$, men enligt del (ii) av Sats 4.2 tillhör $f - g_0 \in \mathcal{S}^\perp$. För att även inse att elementen är unika antar vi att $f = g + h = \tilde{g} + \tilde{h}$ där $g, \tilde{g} \in \mathcal{S}$ och $h, \tilde{h} \in \mathcal{S}^\perp$. Omflyttning ger att $g - \tilde{g} = h - \tilde{h}$ och detta måste uppenbarligen vara 0 eftersom $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^\perp = 0$. Alltså är $g = \tilde{g}$ och $h = \tilde{h}$ och därmed är elementen unika. \square

Givet ett slutet delrum $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$ kan vi med denna uppdelning av \mathcal{H} definiera en projektion $P_{\mathcal{S}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{S}$ som

$$P_{\mathcal{S}}(f) = g, \text{ där } f = g + h \text{ och } g \in \mathcal{S}, h \in \mathcal{S}^\perp.$$

Denna projektion kallas en *ortogonalprojektion* om den uppfyller följande egenskaper:

- (i) $P_{\mathcal{S}}$ är linjär.
- (ii) $P_{\mathcal{S}}(f) = f$ om $f \in \mathcal{S}$.
- (iii) $P_{\mathcal{S}}(f) = 0$ om $f \in \mathcal{S}^\perp$.

4.2 Harmoniska funktioner

Vi kommer nu vända oss till att studera harmoniska funktioner, det vill säga funktioner som uppfyller $\Delta u = 0$. Vi inleder avsnittet med den från kapitel 1 utlovade diskussionen om varför Dirichletproblemet på en disk löses av den så kallade Poissonintegralen. Vi börjar dock med en noggrannare definition av vad en Poissonkärna och Poissonintegral är.

Definition 4.5. *Poissonkärnan* $P : \mathbb{D} \times \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ är definierad som

$$P(z, \zeta) := \operatorname{Re} \left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right) = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}, \quad (|z| < 1, |\zeta| = 1).$$

Definition 4.6. Låt $D = \mathbb{D}_\rho(w)$ vara en disk med centrum i w och radie ρ , samt låt $\phi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ vara en integrabel funktion. Då definieras *Poissonintegralen* $P_D\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ som

$$P_D\phi(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P \left(\frac{z - w}{\rho}, e^{i\theta} \right) \phi(w + \rho e^{i\theta}) d\theta,$$

där $z \in D$.

För att erhålla en mer explicit formel för Poissonintegralen stoppar vi helt enkelt in punkterna i Poissonkärnan, det vill säga vi låter $z = w + re^{it}$ där $0 \leq r \leq \rho$ och $t \in \mathbb{R}$. Efter en del förenklingar och omskrivningar erhåller vi Poissonintegralen

$$P_D\phi(w + re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\theta - t) + r^2} \phi(w + \rho e^{i\theta}) d\theta,$$

Notera att om vi nu sätter $\rho = 1$ och $w = 0$, erhåller vi Poissonintegralen (1.2). Vi kan nu visa att lösningen till Dirichletproblemet på en godtycklig disk alltid går att lösa med hjälp av en Poissonintegral.

Sats 4.4. *Poissonintegralen $P_D\phi$ är harmonisk på D . Om ϕ är kontinuerlig på ∂D , så löser $P_D\phi$ Dirichletproblemet på D .*

Bevis. För att visa att $P_D\phi$ är harmonisk börjar vi med att konstatera att vi kan anta att $w = 0$ och $\rho = 1$. Alltså befinner vi oss på enhetsdisken och av definitionen av Poissonkärnan följer nu att

$$P_D\phi(z) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \phi(e^{i\theta}) d\theta \right).$$

Alltså är $P_D\phi(z)$ realdelen av en holomorf funktion och därmed harmonisk.

För ett bevis av att $P_D\phi$ uppfyller randvillkoret och därmed löser Dirichletproblemet se [3] Kapitel 1 Theorem 1.2.4. \square

I resten av det här avsnittet kommer vi att nöja oss med att bevisa samtliga satser i $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ även om de flesta av dem gäller även i \mathbb{R}^n . Anledningen till detta är att vi endast är intresserade av \mathbb{C} eftersom det är där Riemanns avbildningssats gäller, och på detta sätt kommer vi att undvika en hel del av de tekniska svårigheter som dyker upp i högre dimensioner.

Det visar sig att teorin för harmoniska funktioner i planet, i många avseenden är väldigt lik den för holomorfa funktioner. Detta kommer att synas tydligt i de två följande satserna. Den första är identitetsprincipen och den andra är maximumprincipen. Båda dessa satser kan härledas med hjälp av dess motsvarande satser för holomorfa funktioner.

Sats 4.5. *Låt u och v vara harmoniska funktioner på ett öppet, enkelt sammanhängande område $\Omega \subset \mathbb{C}$. Om $u = v$ på en icke-tom, öppen delmängd U av Ω , så är $u = v$ på hela Ω .*

Bevis. Vi kan anta att $v = 0$, ty om så inte är fallet kan vi välja $\tilde{u} = u - v = 0$. Då u är harmonisk vet vi att den är realdelen av någon holomorf funktion $f = u + iw$, där w är imaginärdelen av f . Om vi deriverar f och använder Cauchy-Riemanns ekvationer erhåller vi

$$f' = g = u_x - iu_y.$$

Derivatans g är holomorf på Ω , ty den uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer

$$u_{xx} = -u_{yy} \quad \text{och} \quad u_{xy} = u_{yx},$$

där den första likheten gäller på grund av att u är harmonisk, och den andra på grund av att u och w uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer. Vidare vet vi att $g = 0$ på U eftersom $u = 0$ där. Från motsvarande identitetssats för holomorfa funktioner följer att $g = 0$ på hela Ω , alltså är även $u_x = 0$ och $u_y = 0$ på hela Ω . Detta medför att u är lika med en konstant och eftersom $u = 0$ på U , måste denna konstant vara noll. \square

Nu kan vi formulera och bevisa maximumprincipen för harmoniska funktioner i planet.

Sats 4.6. (Maximumprincipen) *Om u är en harmonisk funktion på ett öppet, enkelt sammanhängande område $\Omega \subset \mathbb{C}$, och u antar sitt maximum på Ω , så är u konstant.*

Bevis. Antag att u antar ett lokalt maximum i $w \in \Omega$. Då är $u \leq u(w)$ på $\mathbb{D}_r(w)$ för något $r > 0$. Eftersom u är harmonisk så existerar det en holomorf funktion f på $\mathbb{D}_r(w)$ sådan att $\operatorname{Re} f = u$. Alltså antar $|e^f| = |e^{u+iv}| = e^u$ maximum på $\mathbb{D}_r(w)$ och därför måste e^f enligt maximumprincipen för holomorfa funktioner, (Sats 2.1), vara konstant. Därmed måste även u vara konstant på $\mathbb{D}_r(w)$ och enligt identitetssatsen ovan måste då u vara konstant på hela Ω och beviset är färdigt. \square

Nästa viktiga resultat är att en harmonisk funktion uppfyller den så kallade medelvärdesegenskapen och omvänt att en funktion som uppfyller medelvärdesegenskapen är harmonisk.

Definition 4.7. En kontinuerlig funktion u definierad på $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uppfyller *medelvärdesegenskapen* om

$$u(w_0) = \frac{1}{m(B)} \int_B u(w) dw,$$

för varje boll B med centrum i w_0 , vars slutna hölje \overline{B} ligger i Ω .

Här betecknar $m(B)$ det så kallade Lebesguemåttet av B , och ger oss storleken på B . I en dimension får vi ut längden, i två dimensioner arean, i tre dimensioner volymen och så vidare.

För våra syften, i två dimensioner kommer det dock till att börja med att vara praktiskt att formulera medelvärdesegenskapen i termer av medelvärden över cirklar. Det blir då att

$$u(w) = \frac{1}{2\pi} \int_B u(w + e^{i\theta}) d\theta \quad (4.3)$$

för alla v sådana att $\overline{\mathbb{D}_r(w)}$ ligger i Ω . Vi kommer dock också behöva att detta medför medelvärdesegenskapen på bollar vilket följer från följande resonemang. Betrakta

$$\frac{1}{m(b)} \int_B u(w) dA(w) = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} u(w_0 + se^{i\theta}) s d\theta ds.$$

Tillämpning av (4.3) ger att

$$\frac{1}{\pi r^2} \int_0^r 2\pi u(w_0) s ds = \frac{2u(w_0)}{r^2} \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^r = u(w_0).$$

Sats 4.7. Låt u vara en harmonisk funktion på en öppen mängd $\Omega \subset \mathbb{C}$, och låt $D = \mathbb{D}_r(w)$ vara en disk sådan att $\overline{D} \subset \Omega$. Då gäller medelvärdesegenskapen (4.3). Omvänt, om $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion och det för varje $w \in \Omega$ finns ett tal $\rho > 0$ sådant att (4.3) gäller för alla $r < \rho$, så är u harmonisk på Ω .

Bevis. Antag först att u är harmonisk på Ω och definiera $\tilde{r} > r$ så att u är harmonisk på disken $\mathbb{D}_{\tilde{r}}(w)$. Precis som tidigare vet vi att det finns en holomorf funktion f på $\mathbb{D}_{\tilde{r}}(w)$ sådan att $\operatorname{Re} f = u$. Då får vi med Cauchys integralformel

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r(w)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta.$$

Variabelbytet $\zeta = w + re^{i\theta}$ ger

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + re^{i\theta}) d\theta. \quad (4.4)$$

Om vi nu tar realdelen av båda sidor av (4.4) får vi (4.3), och därmed är första delen av beviset klart.

Antag nu istället att u är en kontinuerlig funktion på Ω . Vi konstaterar först att det räcker att visa att u är harmonisk på varje öppen disk D sådan att $\overline{D} \subset \Omega$. Fixera en sådan disk D och definiera en funktion $v : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ sådan att

$$v = \begin{cases} u - P_D u & \text{på } D, \\ 0 & \text{på } \partial D. \end{cases}$$

Då vet vi att v är kontinuerlig på \overline{D} . Vidare uppfyller v medelvärdesegenskapen på D då u uppfyller den enligt antagande och $P_D u$ gör det på grund av första delen av satsen då $P_D u$ är harmonisk. Eftersom \overline{D} är kompakt så måste v anta ett maximalt värde M i någon punkt på \overline{D} . För att kunna utnyttja detta faktum inför vi de två mängderna

$$A = \{z \in D : v(z) < M\} \quad \text{och} \quad B = \{z \in D : v(z) = M\}.$$

Mängden A är uppenbarligen öppen eftersom v är kontinuerlig. Lite mer förvånande är kanske att även mängden B är öppen. Detta följer från att v uppfyller medelvärdesegenskapen och därmed har vi att om v antar maximalt värde M i en punkt z så måste $v = M$ på godtyckligt små diskar med centrum i z . Eftersom dessa båda områden är öppna, disjunkta och D är sammanhängande måste ett av dem vara tomt. Det första alternativet är att $A = D$ och $B = \emptyset$. Detta leder till att v antar sitt maximala värde på randen, alltså $M = 0$. För det andra alternativet $A = \emptyset$ och $B = D$, har vi att $u \equiv M$ och därmed $M = 0$ även här. Alltså måste $v \leq 0$. Samma resonemang, tillämpat på $-v$ ger oss att $v \geq 0$. Alltså är $u = P_D u$ på D vilket leder till slutsatsen att v är harmonisk på D eftersom $P_D u$ är det. Beviset är klart. □

Den andra viktiga satsen är en direkt följd av att en funktion är harmoniska om och endast om den uppfyller medelvärdesegenskapen.

Sats 4.8. *Antag att $\{u_n\}$ är en sekvens av harmoniska funktioner på $\Omega \subset \mathbb{C}$ som konvergerar likformigt mot en funktion u på kompakta delmängder av Ω . Då är u harmonisk.*

Bevis. Låt $\mathbb{D}_r(w)$ vara en disk sådan att $\overline{\mathbb{D}_r(w)} \subset \Omega$. Då varje u_n antas vara harmonisk får vi från den första delen av medelvärdesegenskapen (Sats 4.7) att

$$u_n(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(w + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

för varje $\rho < r$. Från likformig konvergens får vi nu att även u måste uppfylla denna egenskap och därmed är u harmonisk enligt den andra delen av Sats 4.7. □

Den tredje och sista viktiga satsen i detta avsnitt behandlar någonting som kallas för svagt harmoniska funktioner.

Definition 4.8. En funktion u kallas för *svagt harmonisk* på en öppen mängd $\Omega \subset \mathbb{C}$ om $(u, \Delta\psi) = 0$, för varje $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, där $C_0^\infty(\Omega)$ betyder att funktionen är oändligt deriverbar på Ω och har kompakt stöd i Ω (det vill säga $\psi(z) = 0$ om $z \notin \Omega$).

Notera att en svagt harmonisk funktion, till skillnad från en harmonisk, inte behöver vara två gånger deriverbar, det räcker att den är integrabel. Dessutom är alla harmoniska funktioner uppenbarligen även svagt harmoniska. Partialintegrerar vi två gånger, får vi nämligen att

$$(\Delta\psi, u) = (\psi, \Delta u) = 0 \tag{4.5}$$

eftersom u är harmonisk. Det visar sig att det givet en svagt harmonisk funktion u finns en harmonisk funktion \tilde{u} sådan att $u(z) = \tilde{u}(z)$ för nästan alla z , det vill säga de skiljer sig endast åt på ett område av Lebesguemått noll. Vi kan alltså givet en svagt harmonisk funktion modifiera denna på en försumbart liten mängd och därigenom få en en harmonisk funktion. För att kunna bevisa detta behöver vi först en hjälpsats. Denna hjälpsats är ytterligare en applicering av medelvärdesegenskapen för holomorfa funktioner men innan vi kan formulera den behöver vi införa begreppet approximation av enheten.

Definition 4.9. Låt $\varphi \in C^\infty(\mathbb{C})$ och antag att: φ har kompakt stöd, $\varphi \geq 0$, $\int_{\mathbb{C}} \varphi(z) dz = 1$ och $\varphi(z) = \varphi(|z|)$. Låt nu $\varphi_r(z) = r^{-n} \varphi(z/r)$ för $r > 0$. Då kallas familjen av funktioner $\{\varphi_r\}_{r>0}$ för en approximation av enheten.

Poängen med en approximation av enheten är följande. Låt u vara en lokalt integrabel funktion definierad på en mängd $\Omega \subset \mathbb{C}$, det vill säga

$$\int_K |u| dz < \infty$$

för varje kompakt delmängd K av Ω . Om $\{\varphi_r\}_{r>0}$ är en approximation av enheten så gäller att $(u * \varphi_r) \in C^\infty(\Omega)$ och att $(u * \varphi_r) \rightarrow u(z)$ punktvis för nästan alla $z \in \Omega$ då $r \rightarrow 0$, det vill säga man kan approximera en godtycklig integrerbar funktion med glatta funktioner.

Lemma 4.9. Om u uppfyller medelvärdesegenskapen (Sats 4.7) i en öppen mängd $\Omega \subset \mathbb{C}$, och det slutna höljet av disken $\{z : |z - z_0| < r\}$ ligger i Ω , så är

$$u(z_0) = (u * \varphi_r)(z_0), \quad (4.6)$$

där $\varphi_r(w) = r^{-2} \varphi(w/r)$.

Bevis. Vi har att

$$u * \varphi_r(z_0) = \int \varphi_r(w) u(z_0 - w) dA(w) = \int \frac{\varphi(|w|/r)}{r^2} u(z_0 - w) dA(w).$$

Koordinatbytet $w = \rho e^{i\theta}$ ger att

$$\int \frac{\varphi(|w|/r)}{r^2} u(z_0 - w) dA(w) = \int_0^\infty \frac{\varphi(\rho/r)}{r^2} \rho \int_0^{2\pi} u(z_0 - \rho e^{i\theta}) d\theta d\rho.$$

Enligt medelvärdesegenskapen är den inre integralen $2\pi u(z_0)$, vilket ger oss

$$2\pi u(z_0) \int_0^\infty \frac{\varphi(\rho/r)}{r^2} \rho d\rho = u(z_0) \int_0^\infty \frac{\varphi(\rho/r)}{r^2} s \int_0^{2\pi} d\theta d\rho.$$

Byter vi nu tillbaka till de ursprungliga koordinaterna blir detta

$$u(z_0) \int \frac{\varphi(w/r)}{r^2} dA(w) = u(z_0) \int \varphi_r(w) dA(w) = u(z_0),$$

då φ är en approximation av enheten. □

Sats 4.10. Varje svagt harmonisk funktion u på $\Omega \subset \mathbb{C}$ kan korrigeras på en mängd av Lebesguemått noll, så att den resulterande funktionen är harmonisk.

Bevis. Låt $\Omega_\epsilon = \{z \in \Omega : d(z, \partial\Omega) > \epsilon\}$ där $\epsilon > 0$ och $d(z, \partial\Omega)$ betecknar avståndet mellan punkten z och randen $\partial\Omega$. Då vet vi att regularisationen $u_r = u * \phi_r$ är definierad på Ω_ϵ för $r < \epsilon$. Vidare vet vi från tidigare diskussion att funktionen u_r är glatt (oändligt många gånger deriverbar). Härnäst konstaterar vi att u_r faktiskt är svagt harmonisk. Låt nämligen $\psi \in C_0^\infty(\Omega_\epsilon)$. Då gäller att:

$$\begin{aligned} (u_r, \Delta\psi) &= (u * \phi_r, \Delta\psi) = \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} u(z - rw) \varphi(w) \Delta\psi(z) dA(w) dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \varphi(w) \left(\int_{\mathbb{C}} u(z - rw) \Delta\psi(z) dA(z) \right) dA(w) \end{aligned}$$

Notera nu att den inre integralen är $(u, \Delta\psi_r)$, med $\psi_r = \psi(z + rw)$, och därmed lika med noll då u enligt antagande är svagt harmonisk. Alltså får vi att

$$(u_r, \Delta\psi) = (u * \phi_r, \Delta\psi) = 0$$

och därmed är $u * \phi_r$ svagt harmonisk.

Vidare har vi redan konstaterat att u_r är glatt och därför kan vi med partialintegration erhålla $(u_r, \Delta\psi) = (\Delta u_r, \psi) = 0$. Alltså måste u_r vara harmonisk.

Vidare vill vi nu visa att

$$u * \varphi_{r_1}(z) = u * \varphi_{r_2}(z) \tag{4.7}$$

när $z \in \Omega_\epsilon$ och $r_1 + r_2 < \epsilon$. Notera att $(u * \varphi_{r_1}) * \varphi_{r_2} = u * \varphi_{r_1}$ gäller enligt Lemma 4.8, men dessutom får vi från kommutivitet av faltning att $(u * \varphi_{r_1}) * \varphi_{r_2} = (u * \varphi_{r_2}) * \phi_{r_1} = u * \varphi_{r_2}$ så (4.7) gäller. Om vi nu låter $r_1 \rightarrow 0$ medan r_2 hålls fix, får vi som tidigare diskuterats, att $u * \varphi_{r_1}(z) \rightarrow u(z)$ för nästan varje $x \in \Omega_\epsilon$. Alltså har vi att $u(z) = u * \varphi_{r_2}(z)$ för nästan alla $z \in \Omega_\epsilon$. Eftersom $u * \varphi_{r_2}(z)$ är harmonisk på Ω_ϵ , har vi härmed visat att u kan korrigeras på Ω_ϵ så att den är harmonisk här. Låter vi nu $\epsilon \rightarrow 0$ får vi samma resultat på Ω . \square

4.3 Dirichletproblemet

Vi har redan stött på Dirichletproblemet några gånger i rapporten. Första gången var i början när vi använde det som ett motiverande exempel till varför det är intressant att titta på Riemanns avbildningsats. Andra gången var i det tredje beviset av Riemanns avbildningssats där vi vände på resonemanget och visade att Riemanns avbildningssats följer från Dirichletproblemet lösbarhet. Tredje gången var i avsnittet om harmoniska funktioner där vi diskuterade lösbarheten av Dirichletproblemet i en godtycklig disk. Nu har det äntligen blivit dags att visa att Dirichletproblemet är lösbart i allmänhet, det vill säga bevisa Sats 3.2.

Definition 4.10. *Dirichletproblemet* går ut på att givet en funktion $f \in C(\partial\Omega)$, hitta en funktion $u \in C^2(\Omega)$ sådan att

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{i } \Omega, \\ u = f & \text{på } \partial\Omega, \end{cases}$$

där Ω är ett öppet, begränsat sammanhängande område i \mathbb{C} och $\partial\Omega$ är randen till Ω . Dessa definitioner av f och Ω gäller under hela detta avsnitt om inget annat nämns.

Låt oss nu studera den så kallade *Dirichletintegralen*

$$\mathcal{D}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(z)|^2 dA(z).$$

Den första, och kanske viktigaste, observation vi gör är att den funktion $u \in C^2(\Omega)$ som minimerar $\mathcal{D}(u)$ är harmonisk. Denna observation kallade Riemann för Dirichletprincipen.

Sats 4.11. (Dirichletprincipen) *Antag att det finns en funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$ som minimerar $\mathcal{D}(u)$ bland alla $U \in C^2(\overline{\Omega})$ med $U|_{\partial\Omega} = f$. Då är u harmonisk i Ω .*

Bevis. För två funktioner F och G i $C^2(\overline{\Omega})$ definierar vi följande skalärprodukt

$$(F, G) = \int_{\Omega} \nabla F \cdot \overline{\nabla G} ds.$$

Med denna skalärprodukt blir $\mathcal{D}(u) = (u, u)$. Om vi definierar en funktion $v \in C^2(\bar{\Omega})$ sådan att $v|_{\partial\Omega} = 0$ gäller för alla störningar ϵ att

$$\mathcal{D}(u + \epsilon v) \geq \mathcal{D}(u),$$

eftersom $u + \epsilon v = f$ på $\partial\Omega$. Om vi ser $\mathcal{D}(u + \epsilon v)$ som $(u + \epsilon v, u + \epsilon v)$ får vi dock att

$$\mathcal{D}(u + \epsilon v) = \mathcal{D}(u) + \epsilon^2 \mathcal{D}(v) + \epsilon(u, v) + \epsilon(v, u),$$

vilket tillsammans med olikheten ovan implicerar att

$$\epsilon^2 \mathcal{D}(v) + \epsilon(u, v) + \epsilon(v, u) \geq 0.$$

Genom att föra ett likadant resonemang som i beviset för del (ii) av Sats 4.2 kan vi konstatera att $(u, v) = 0$, eftersom störningen ϵ kan vara både positiv och negativ. Partialintegration ger nu att

Detta ger att $\Delta u = 0$ på randen eftersom likheten ovan skall gälla för samtliga $v \in C^2(\bar{\Omega})$ sådana att $v|_{\partial\Omega} = 0$. \square

Man kan lätt tro (vilket både Dirichlet och Riemann gjorde) att Dirichletprincipen härigenom är bevisad, men detta visade sig vara felaktigt. Problemet är nämligen att det inte alltid behöver existera ett minimum till $\mathcal{D}(u)$. Vi övergår därför nu till att bevisa när detta gäller och som vi kommer att upptäcka är detta allt annat än enkelt att visa, och det är här som den abstrakta Hilbertrumsteorin från avsnitt 4.1 och teorin för harmoniska funktioner från avsnitt 4.2 kommer att spela en avgörande roll.

Till att börja med noterar vi att för att en funktion skall vara harmonisk måste den naturligtvis vara två gånger deriverbar, men tack vare Sats 4.10 vet vi att om u är svagt harmonisk så kan vi göra den harmonisk. Av denna anledning kan vi lyfta kravet att u ska vara två gånger deriverbar och istället betrakta alla funktioner som är en gång deriverbara, det vill säga alla $u \in C^1(\bar{\Omega})$. I ett första försök att göra detta betraktar vi $C^1(\bar{\Omega})$ som ett vektorrum med den tillhörande skalärprodukten

$$(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dA.$$

Notera att denna skalärprodukt ger oss att $\mathcal{D}(u)$ är normen i vårt vektorrum, så från och med nu kommer vi skriva $\mathcal{D}(u) = \|u\|$. Låt

$$\mathcal{A} = \{u \in C^1(\bar{\Omega}) : u = f \text{ på } \partial\Omega\},$$

och låt vidare

$$d = \inf_{\omega \in \mathcal{A}} \|\omega\|.$$

Då $u \equiv 0$ inte ligger i \mathcal{A} , är \mathcal{A} inte ett linjärt delrum av $C^1(\bar{\Omega})$, utan ett så kallat affint delrum. Geometriskt kan vi tänka på \mathcal{A} som en linje eller ett plan i $C^1(\bar{\Omega})$ som inte går genom origo. Alltså kan vi tänka på det $u \in \mathcal{A}$ som minimerar $\|u\|$, som den punkt på linjen eller planet \mathcal{A} som har det minsta avståndet till origo. Låt nu $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en sekvens av funktioner i \mathcal{A} sådana att $\|u_n\| \rightarrow d$ då $n \rightarrow \infty$.

Då vi hellre vill arbeta med funktioner som är noll på randen, definierar vi nu en ny sekvensen $v_n = F - u_n$, där $F \in C^1(\bar{\Omega})$ har egenskapen att $F = f$ på $\partial\Omega$. Vi kommer tills vidare anta att f kan skrivas på detta sätt, se Lemma 4.15 och den efterföljande diskussionen nedan. Vi betecknar mängden av alla funktioner i $C^1(\bar{\Omega})$ som är noll på randen med \mathcal{S}_0 , det vill säga

$$\mathcal{S}_0 = \{w \in C^1(\bar{\Omega}) : w = 0 \text{ på } \partial\Omega\},$$

och noterar att $v_n \in \mathcal{S}_0$, för alla n .

Nästa steg blir att undersöka om $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ konvergerar, och om den i så fall konvergerar mot ett element i \mathcal{S}_0 . Det är här vi stöter på stora svårigheter. Vi har nämligen ingen aning om $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ konvergerar överhuvudtaget i ett så godtyckligt vektorrum som det vi befinner oss i. Om vi däremot hade befunnit oss i ett Hilbertrum hade vi haft mycket större utsikter att lyckas, eftersom vi har mycket större kunskap om dessa rum. Problemet är dock att $C^1(\bar{\Omega})$ inte är ett Hilbertrum. Ett Hilbertrum måste ju som bekant till exempel ha egenskapen att $\|w\| = 0$ om och endast om $w = 0$, men i $C^1(\bar{\Omega})$ är även $\|c\| = 0$ för alla $c \in \mathbb{C}$. Detta hinder kan vi överkomma genom att bilda så kallade ekvivalensklasser. Dessa ekvivalensklasser fås av att vi betraktar funktioner som skiljer sig på en konstant som identiska. Vi bildar alltså ett nytt rum

$$\mathcal{H}_0 = \{[w] : w \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ och } [w] = [v] \text{ om } w = v + c \text{ för något } c \in \mathbb{C}\},$$

där $[w]$ betecknar ekvivalensklasser av w . Vi kommer i fortsättningen skriva w istället för $[w]$.

Vi noterar först att $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{H}_0$. Detta kan vi sluta oss till eftersom två olika funktioner i \mathcal{S}_0 inte kan bli lika i \mathcal{H}_0 under ekvivalensrelationen. Detta rum \mathcal{H}_0 är dock inte heller ett Hilbertrum, utan ett pre-Hilbertrum. Från Sats 4.1 vet vi dock att \mathcal{H}_0 har en tillslutning \mathcal{H} sådan att $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$, där \mathcal{H} är ett Hilbertrum. Alltså måste $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{H}$ och vidare finns det då även ett slutet delrum $\mathcal{S} = \bar{\mathcal{S}}_0$ i \mathcal{H} .

Efter denna utsvävning kan vi arbeta i vårt nya Hilbertrum \mathcal{H} istället för i $C^1(\bar{\Omega})$. Vi har nu att $u_n \in \mathcal{H}$ och $v_n \in \mathcal{S}$ för alla n . För att se att $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ konvergerar visar vi att den är Cauchy. Detta gör vi genom att tillämpa parallelogramlagen på $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ på precis samma sätt som vi gjorde på $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ i beviset av Sats 4.2 del (i). Alltså är $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ en Cauchy-sekvens och då \mathcal{S} är ett slutet delrum av ett Hilbertrum innebär detta att det finns ett element $v \in \mathcal{S}$, sådant att $\|v_n - v\| \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$. Detta medför i sin tur att även $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ konvergerar i \mathcal{H} .

Vi kan vidare konstatera att det måste vara så att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = P_{\mathcal{S}}(F),$$

där $P_{\mathcal{S}}$ betecknar ortogonal projektionen från \mathcal{H} till \mathcal{S} , eftersom detta uppenbarligen minimerar $u_n = v_n - F$. Vi har dock ingen aning om vad $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ konvergerar mot men som tur är kan vi med hjälp av följande lemma visa att $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ konvergerar även i L^2 -norm.

Lemma 4.12. *Låt Ω vara en öppen, begränsad och sammanhängande delmängd av \mathbb{C} . Antag vidare att $v \in C^1(\bar{\Omega})$ och att $v|_{\partial\Omega} = 0$. Då är*

$$\int_{\Omega} |v(z)|^2 dA(z) \leq c_{\Omega} \int_{\Omega} |\nabla v(z)|^2 dA(z). \quad (4.8)$$

Bevis. Vi bygger beviset på följande observation. Antag att $f \in C^1(I)$, där $I = (a, b)$ är ett intervall i \mathbb{R} . Om $f = 0$ vid en av ändpunkterna, till exempel $f(a) = 0$, så kan detta naturligtvis skrivas som

$$f(s) = \int_a^s f'(t) dt.$$

Cauchy-Schwarz olikhet, med funktionerna $f'(t)$ och 1, ger att

$$|f(s)|^2 \leq |I| \int_a^s |f'(t)|^2 dt.$$

Integration över I med avseende på s ger nu att

$$\int_I |f(s)|^2 ds \leq |I|^2 \int_I |f'(t)|^2 dt. \quad (4.9)$$

För att bevisa (4.8) skriver vi $z = (x, y)$, där $\operatorname{Re}(z) = x$ och $\operatorname{Im}(z) = y$. Vi kan nu betrakta den öppna mängden $J(y) = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in \Omega\}$, där y är fix. Applicering av (4.9) på $J(y)$ ger

$$\int_{J(y)} |v(x, y)|^2 dx \leq |J(y)|^2 \int_{J(y)} |\nabla v(x, y)|^2 dx.$$

Detta tillsammans med att $|J(y)| \leq d(\Omega)$ och integration över y ger (4.8). \square

Om vi nu utnyttjar Lemma 4.12 på $v_n - v_m$ kan vi dra slutsatsen att $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ och därmed även $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ är Cauchy i L^2 -normen, vilket innebär att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = F - P_S(F) \in L^2(\Omega).$$

Från $u = F - P_S(F)$ och Sats 4.2 del (ii) vet vi nu att, om $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ så är $(u, \psi) = 0$. Alltså gäller att $(u_n, \psi) \rightarrow 0$, men genom partialintegration får vi att

$$(u_n, \psi) = \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla \psi dA = - \int_{\Omega} u_n \Delta \psi dA = -(u_n, \Delta \psi)_{L^2(\Omega)}.$$

Alltså har vi att $(u, \Delta \psi) = 0$ för alla $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, vilket betyder att u är svagt harmonisk. Från Sats 4.10 vet vi att u kan göras harmonisk genom att korrigeras på en obetydlig mängd.

Låt oss nu återvända en kort stund till formuleringen av Dirichletproblemet i Definition 4.10. Vad vi har lyckats visa hittills är att om det finns en funktion $F \in C^1(\bar{\Omega})$ sådan att $F = f$ på $\partial\Omega$ så kan vi hitta en funktion u , sådan att $\Delta u = 0$ i Ω . Det som återstår är att visa dels hur vi kan hitta F , och dels att u har rätt randvillkor.

Vi börjar med att försöka visa att u uppfyller de randvillkor som problemet ställer. För att göra detta behöver vi definiera vad yttre triangelvillkoret är för något.

Definition 4.11. Låt T vara en likbent triangel vars lika långa sidor har längden l . Låt vinkeln mellan dessa sidor vara α och kalla punkten där de lika långa sidorna möts för A . Ett område Ω uppfyller *yttre triangelvillkoret*, om det för varje punkt $z \in \partial\Omega$ finns en triangel kongruent med T , för l och α fixa, sådan att $A = z$ och T är disjunkt med $\bar{\Omega}$.

Det är enkelt att hitta områden som uppfyller yttre triangelvillkoret, till exempel alla områden med glatt rand. Ett exempel på ett område som är enkelt sammanhängande, men som inte uppfyller yttre triangelvillkoret, är enhetsdisken med intervallet $(-1, 0]$ borttaget. För detta område kommer alltså vår metod inte att fungera, även om Dirichletproblemet är lösbart för alla enkelt sammanhängande mängder i \mathbb{C} .

Det är även enkelt att hitta mängder som är varken enkelt sammanhängande eller uppfyller yttre triangelvillkoret, till exempel den punkterade enhetsdisken.

Lemma 4.13. För varje $\Omega \subset \mathbb{C}$ som satisfierar det yttre triangelvillkoret finns det två konstanter $c_1 < 1$ och $c_2 > 1$ sådana att

$$\int_{B_{c_1\delta}(w)} |v(z)|^2 dA(z) \leq C\delta^2 \int_{B_{c_2\delta}(w) \cap \Omega} |\nabla v(z)|^2 dA(z).$$

där w är en punkt i Ω på avståndet δ från $\partial\Omega$, $v \in C^1(\bar{\Omega})$ och $v|_{\partial\Omega} = 0$.

Beviset av detta lemma är långt tekniskt och elementärt, så för att inte ta fokus från Dirichletproblemet väljer vi att inte presentera detta bevis, för den intresserade läsaren hänvisar vi till till exempel [2] kapitel 5 Proposition 4.13 och den efterföljande diskussionen.

För att bevisa att $u|_{\partial\Omega} = f$ räcker det, tack vare kontinuiteten av f på $\partial\Omega$, att visa att det för varje $w_0 \in \partial\Omega$ och varje sekvens $w_k \in \Omega$, sådana att $w_k \rightarrow w_0$ när $k \rightarrow \infty$, är så att $u(w_k) \rightarrow f(w_0)$. Vi tittar nu på medelvärden av F och u_n tagna över en disk med centrum w , ett för stunden fixerat, w och med radie $c_1\delta(w)$. Vi betecknar dessa medelvärden med $\text{Av}(F)$ respektive $\text{Av}(u_n)$, det vill säga

$$\text{Av}(F)(w) = \frac{1}{\pi(c_1\delta)^2} \int_{B_{c_1\delta}(w)} F(z) dA(z) \quad \text{och} \quad \text{Av}(u_n)(w) = \frac{1}{\pi(c_1\delta)^2} \int_{B_{c_1\delta}(w)} u_n(z) dA(z). \quad (4.10)$$

Om vi tittar på beloppet av skillnaden mellan dessa medelvärden får vi

$$\begin{aligned} |(\text{Av}(F) - \text{Av}(u_n))(w)|^2 &= \left| \frac{1}{\pi(c_1\delta)^2} \int_{B_{c_1\delta}(w)} F(z) dA(z) - \frac{1}{\pi(c_1\delta)^2} \int_{B_{c_1\delta}(w)} u_n(z) dA(z) \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\pi(c_1\delta)^2} \int_{B_{c_1\delta}(w)} (F - u_n)(z) dA(z) \right|^2. \end{aligned}$$

Applicering av Cauchy-Schwarz olikhet på $F - u_n$ och 1 ger nu att

$$\left| \frac{1}{\pi(c_1\delta)^2} \int_{B_{c_1\delta}(w)} (F - u_n)(z) dA(z) \right|^2 \leq \frac{1}{\pi(c_1\delta)^2} \int_{B_{c_1\delta}(w)} |(F - u_n)(z)|^2 dA(z).$$

Då $F - u_n \in C^1(\bar{\Omega})$ och $F - u_n = 0$ på $\partial\Omega$ kan vi tillämpa Lemma 4.13 på denna integral och får att den begränsas av

$$\frac{C\delta^2}{\pi(c_1\delta)^2} \int_{B_{c_2\delta}(w) \cap \Omega} |\nabla(F - u_n)(z)|^2 dA(z). \quad (4.11)$$

Eftersom δ^2 förkortas bort kommer ekvation (4.11) gå mot noll då $\delta \rightarrow 0$ ty då integrerar vi över mindre och mindre diskar. Samtidigt vet vi att $\text{Av}(u_n) = u_n$, och därmed gäller även att $\text{Av}(u) = u$ då $n \rightarrow \infty$, enligt medelvärdesegenskapen för harmoniska funktioner (Sats 4.7) och att första integralen i (4.10) går mot $f(w_0)$. Allt detta tillsammans ger att

$$u(w_k) \rightarrow f(w_0) \text{ då } k \rightarrow \infty,$$

och därmed har vi visat att vår lösning uppfyller $u|_{\partial\Omega} = f$ och att u är kontinuerlig upp till randen.

Det sista som återstår är antagandet att det givet $f \in C(\partial\Omega)$ existerar en funktion $F \in C^1(\bar{\Omega})$ sådan att $F|_{\partial\Omega} = f$. För detta behöver vi två lemmor.

Lemma 4.14. *Låt f vara en kontinuerlig funktion på en kompakt delmängd Γ av \mathbb{C} . Då existerar det en kontinuerlig funktion G på \mathbb{C} , sådan att $G|_{\Gamma} = f$.*

Bevis. Vi börjar med att observera att om vi har två disjunkta kompakta mängder K_0 och K_1 så finns det en funktion $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ sådan att $0 \leq g(z) \leq 1$, $g = 0$ på K_0 och $g = 1$ på K_1 . Låt nämligen $d(z, K)$ beteckna avståndet från z till K och definiera

$$g(z) = \frac{d(z, K_0)}{d(z, K_0) + d(z, K_1)}. \quad (4.12)$$

Vi kan utan inskränkning anta att f är en positiv funktion uppåt begränsad av 1 på Γ . Definiera de disjunkta mängderna

$$K_0 = \{z \in \Gamma : 0 \leq f(z) \leq \frac{1}{3}\} \quad \text{och} \quad K_1 = \{z \in \Gamma : \frac{2}{3} \leq f(z) \leq 1\}$$

Vi kan från den inledande observationen ovan, genom omskalning av (4.12), garantera att det existerar en funktion $G_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ med $0 \leq G_1(z) \leq 1/3$ på \mathbb{C} , som antar värdet 0 på K_0 och $1/3$ på K_1 . Från detta får vi att

$$0 \leq f(z) - G_1(z) \leq \frac{2}{3} \text{ för alla } z \in \Gamma.$$

Om vi upprepar samma argument med $f - G_1$ istället för f , där vi nu låter K_0 och K_1 definieras av olikheterna $0 \leq f(z) - G_1(z) \leq 1/3 \cdot 2/3$ och $2/3 \cdot 2/3 \leq f(z) - G_1(z) \leq 2/3$, finns det en funktion $G_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ med $0 \leq G_2(z) \leq 1/3 \cdot 2/3$ som antar värdet 0 på K_0 och $1/3 \cdot 2/3$ på K_1 , sådan att

$$0 \leq f(z) - G_1(z) - G_2(z) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Återupprepning av detta förfarande ger

$$0 \leq f(z) - G_1(z) - G_2(z) - \dots - G_N(z) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^N$$

och $0 \leq G_N \leq 1/3 \cdot (2/3)^{N-1}$ på hela \mathbb{C} .

Om vi nu definierar

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(z) \quad (4.13)$$

så är G kontinuerlig och $G(z) = f(z)$ på Γ . □

Lemma 4.15. *Antag att Γ är en kompakt delmängd av \mathbb{C} , och att f är en kontinuerlig funktion på Γ . Då existerar det en sekvens $\{F_n\}$ av oändligt deriverbara funktioner på \mathbb{C} sådana att $F_n \rightarrow f$ likformigt på Γ .*

Bevis. Låt φ vara en approximation av enheten och definiera

$$F_\epsilon(z) = \int G(w)\varphi_\epsilon(z-w)dA(w).$$

där $\epsilon > 0$ och $G(z)$ ges av (4.13) i Lemma 4.14. För varje fixt $\epsilon > 0$ är F_ϵ en oändligt deriverbar funktion och om vi betraktar skillnaden mellan F_ϵ och $G(z)$ får vi att

$$F_\epsilon(z) - G(z) = \int (G(w) - G(z))\varphi_\epsilon(z-w)dA(w),$$

då integralen av en approximation av enheten är ett.

Eftersom integrationen är begränsad till $|z-w| \leq \epsilon$, får vi slutligen att

$$|F_\epsilon(z) - G(z)| \leq \sup_{|z-w| \leq \epsilon} |G(z) - G(w)| \int \varphi_\epsilon(z-w)dA(w),$$

där den kvarvarande integralen återigen är ett. Då G är likformigt kontinuerlig nära Γ går högerledet mot noll likformigt med ϵ . Väljer vi nu $\epsilon = 1/n$ är beviset klart. □

Istället för att lösa ett Dirichletproblem löser vi nu en rad Dirichletproblem på formen

$$\begin{cases} \Delta U_n = 0 & \text{i } \Omega, \\ U_n = F_n & \text{på } \partial\Omega. \end{cases}$$

Från Lemma 4.15 vet vi att $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ kan väljas som en sekvens av oändligt deriverbara funktioner sådana att $F_n \rightarrow f$ likformigt, då $n \rightarrow \infty$. Då följer det från maximumprincipen (Sats 4.6) att $\{U_n\}$ konvergerar likformigt mot en funktion u som är kontinuerlig och uppfyller att $u|_{\partial\Omega} = f$. Då konvergensen är likformig följer det från Sats 4.8 att u är harmonisk på Ω . Därmed är beviset färdigt.

Del II

Programmering

Kapitel 5

Numeriska simuleringar

Detta kapitel kommer att vigas till att förklara hur vi numeriskt har tagit fram avbildningar för några valda områden. För detaljerad kod, se appendix.

5.1 Första algoritmen

Den första algoritm vi använder baseras på beviset i avsnitt 3.2. Detta är en iterativ algoritm, som vi får köra i några hundra steg för att få en approximativ lösning. Algoritmen vi använder för att hitta transformen i varje steg är:

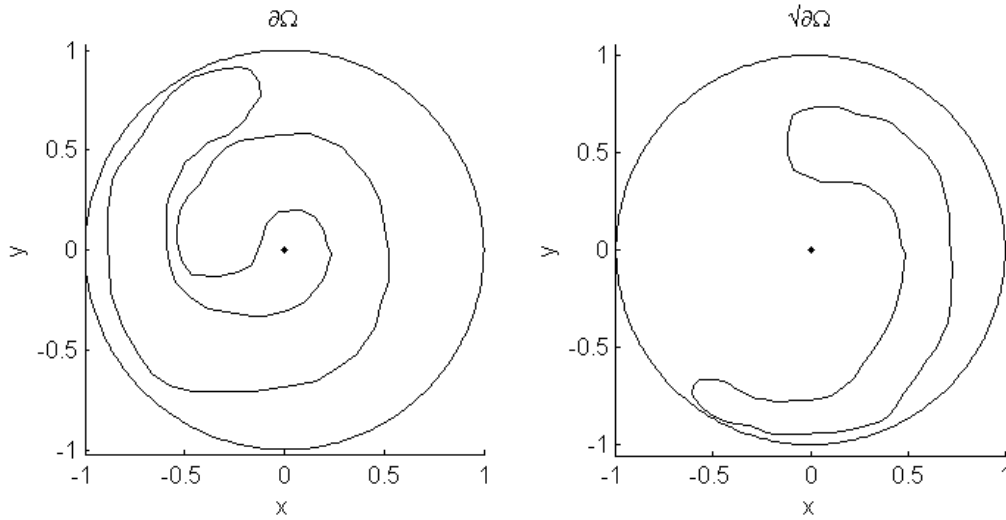
1. Hitta den punkt på randen till området som ligger närmast origo, döp den till α . Transformera området med $\varphi_\alpha(z) = \frac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z}$.
2. Definiera en roten ur funktion, kalla den S . Transformera området med $S(z)$.
3. Låt $\beta = S(\alpha)$, transformera området med $\varphi_\beta(z)$.

Vi har, för att koden skall bli så enkel som möjligt, antagit att steg 1 i första beviset (avsnitt 3.1) redan är utfört, så att området Ω vi vill hitta en avbildning från redan ligger inuti \mathbb{D} och innehåller origo. Det vi i koden börjar med är att låta användaren trycka in en serie med punkter som bildar hörnen till en polygon vars sidor blir randen på området.

Det första problem vi stöter på är att definiera en kontinuerlig kvadratrotfunktion. Eftersom principalroten är diskontinuerlig längs med negativa realaxeln blir det problem om vår rand (efter transformationen i steg 1) korsar denna. I `goodsqrt` har vi skrivit en funktion som tar in en vektor av komplexa tal. Den använder sedan den inbyggda `sqrt` funktionen i MATLAB tillsammans med att den håller reda på när kurvan passerar negativa realaxeln för att kunna ge en kvadratrotfunktion som är kontinuerlig på den givna polygonen, se figur 5.1. På grund av det sätt som vi har definierat vår rot, får vi problem när vi ska välja $\beta = S(\alpha)$. När vi definierar vår rot gör vi så att den blir kontinuerlig på $\varphi_\alpha(\partial\Omega)$, medan α inte ligger på den kurvan, då blir problemet att avgöra om $S(\alpha) = \sqrt{\alpha}$ eller $S(\alpha) = -\sqrt{\alpha}$ skall användas. Vid rätt val av β får vi en ny Koebe mängd med en större inre radie (markerad med en liten cirkel). Vid fel val av β får vi att randen inte omsluter origo. I figur 5.2 ser vi i sista rutan exempel på båda valen av β . Den metod som vi använder i koden för att välja β är att kontrollera vilket β som uppfyller

$$\min_{z \in \partial\Omega} \varphi_\beta \circ S \circ \varphi_\alpha(z) < \varphi_\beta \circ S \circ \varphi_\alpha(\alpha).$$

Empiriska studier visar att detta stämmer om och endast om vi har valt rätt β .



Figur 5.1: Exempel på en kurva $\partial\Omega$ i $z = x + iy$ planet och $\sqrt{\partial\Omega}$

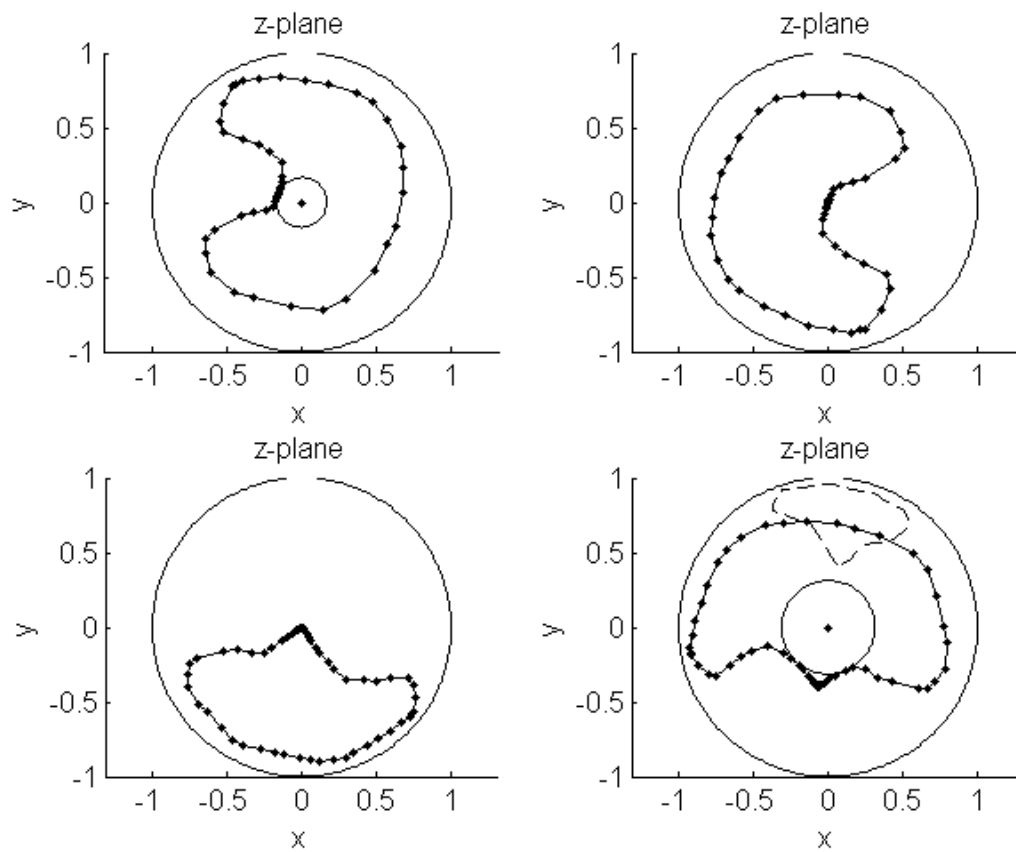
När vi upprepar många iterationer av denna algoritm går bilden av randen mot enhetscirkeln, se figur 5.3 för ett exempel. Hittills har vi tagit fram bilden av randen. Låt $f_n(z) = \varphi_{\beta_n} \circ S_n \circ \varphi_{\alpha_n}(z)$ vara de expansioner som vi definierar i andra beviset, avsnitt 3.2, då har vi efter N iterationer avbildningen

$$F_N(z) = f_N \circ f_{N-1} \circ \dots \circ f_1(z).$$

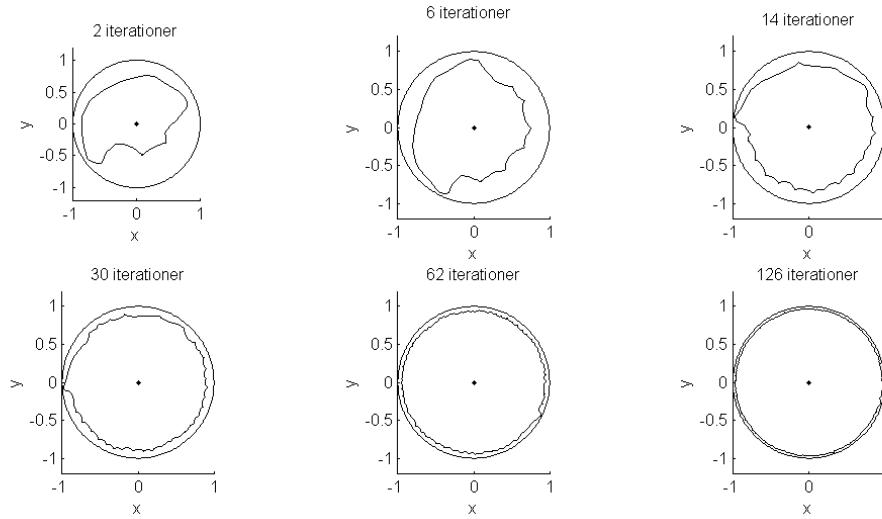
Om vi vill använda F_N för att transformera inre punkter i mängden stöter vi på problemet att vi måste lyckas definiera $S_n(z)$ i varje steg även för inre punkter, vilket visar sig vara problematiskt. För att undvika detta kollar vi istället inversen av F_N . Eftersom $\varphi_{\alpha}^{-1}(z) = \varphi_{\alpha}(z)$ och $S_n^{-1}(z) = z^2$ har vi att $f_n^{-1} = \varphi_{\alpha_n} \circ S_n^{-1} \circ \varphi_{\beta_n}(z)$ och

$$F_N^{-1}(z) = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ \dots \circ f_N^{-1}(z).$$

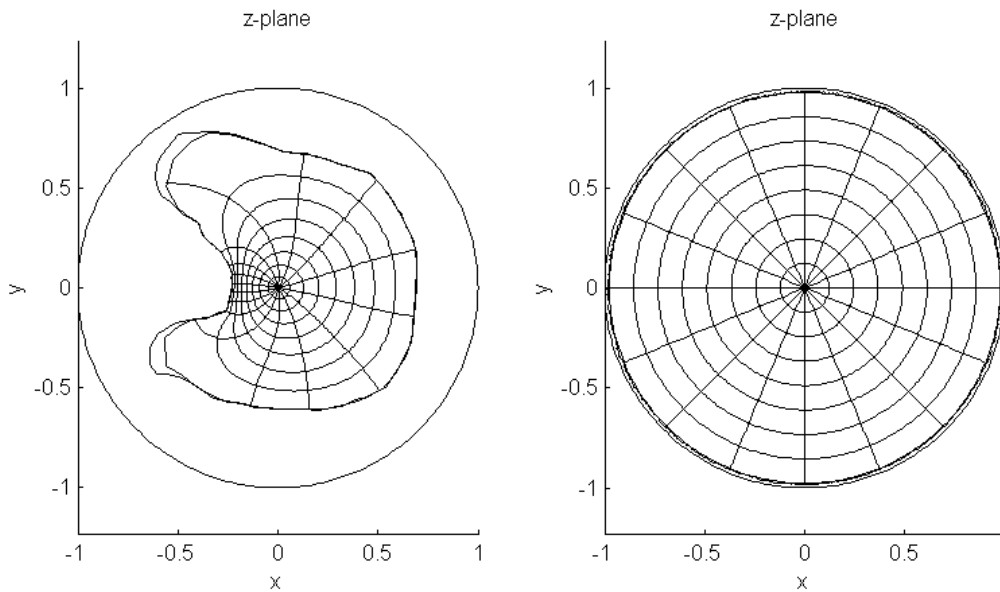
Denna funktion är inga problem att evaluera och ger därför en bra approximation på en avbildning $F : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$. I figur 5.4 syns ett exempel på hur det kan se ut när man transformerar även de inre punkterna.



Figur 5.2: Här ser vi i ordning, från vänster till höger, uppifrån och ner, exempel på $\partial\Omega$, $\varphi_\alpha(\partial\Omega)$, $S \circ \varphi_\alpha(\partial\Omega)$ och $\varphi_\beta \circ S \circ \varphi_\alpha(\partial\Omega)$. I sista bilden visas även $\varphi_{-\beta} \circ S \circ \varphi_\alpha(\partial\Omega)$ av streckad linje.



Figur 5.3: Här ser vi exempel på bilden av $\partial\Omega$ efter fler och fler iterationer.



Figur 5.4: Till vänster syns Ω . Till höger syns bilden $F_{126}(\Omega)$ där randen ligger nära \mathbb{D} . I båda bilderna finns även kurvor i det inre av området avbildade.

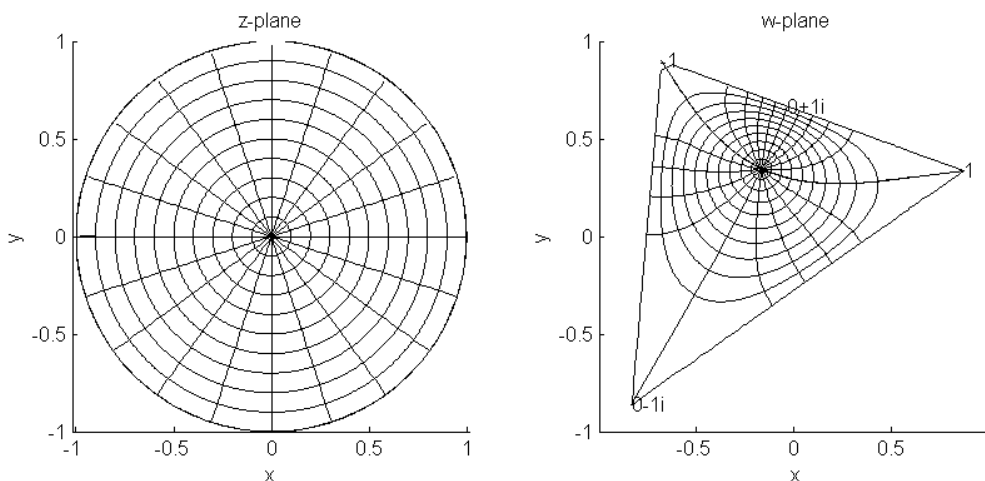
5.2 Andra algoritmen

Den andra metoden vi har använt för att numeriskt ta fram avbildningar kallas Schwarz-Christoffel avbildningar. Denna metod baseras på ett uttryck som ger en avbildning mellan \mathbb{D} och godtycklig n -hörning. Låt $f_0 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad av

$$f_0(z) := \int_0^z \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{\gamma}{z_i}\right)^{\alpha_i - 1} d\gamma,$$

där $|z_i| = 1$, $0 \leq \alpha_i \leq 2$, $\sum \alpha_i = n - 2$, och z_1, \dots, z_n är ordnade moturs på enhetscirkeln. Då avbildar f_0 enhetsdisken på en polygon med inre vinklar $\pi\alpha_i$ och z_i avbildas på polygonens hörn.

För $n = 3$ är det ett ganska enkelt problem att lösa integralen i MATLAB och få fram sådana avbildningar. När vi har löst integralen behöver vi bara skala, translatera och rotera bilden för att hamna på den givna triangel. För ett exempel på en avbildning mellan enhetsdisken och en triangel se figur 5.5.



Figur 5.5: En avbildning mellan \mathbb{D} och en triangel med hjälp av en Schwarz-Christoffel avbildning.

Om $n = 4$ kan vi inte välja vilka z_i som helst. Då räcker det inte med att bestämma polygonens vinklar för att få en polygon som är kongruent med någon given polygon. För att bilden skall bli kongruent med en fyrhörning given av vertexen v_1, v_2, v_3, v_4 måste de valda z_i uppfylla

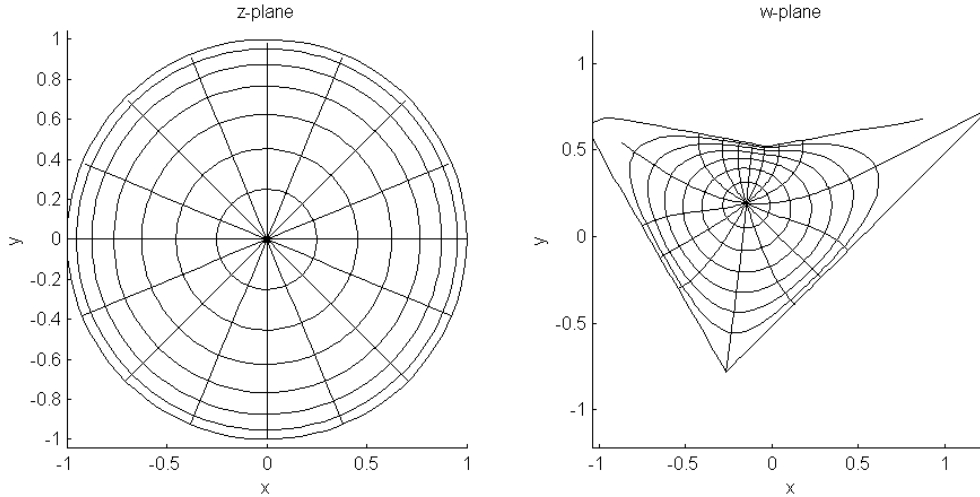
$$\frac{\left| \int_{z_2}^{z_3} f_0'(\gamma) d\gamma \right|}{\left| \int_{z_1}^{z_2} f_0'(\gamma) d\gamma \right|} = \frac{|v_3 - v_2|}{|v_2 - v_1|}.$$

Eftersom f_0' är holomorf kan vi välja att integrera längs med vilken väg vi vill. I `eq4.m` har vi valt att integrera längs med räta linjer från integrationsgränserna till origo som vi har parametriserat med $\gamma = tz_i$. Då kan vi skriva om uttrycket ovan på ett sätt som gör det lätt att evaluera med `quad`,

$$\left| \int_1^0 f_0'(tz_2) z_2 dt + \int_0^1 f_0'(tz_3) z_3 dt \right| |v_2 - v_1| - \left| \int_1^0 f_0'(tz_1) z_1 dt + \int_0^1 f_0'(tz_2) z_2 dt \right| |v_3 - v_2| = 0.$$

När vi bestämmer längden på sidorna av en fyrhörning med givna vinklar som skall vara kongruent med en given fyrhörning, har vi endast en frihetsgrad. Därför kan vi välja z_2, z_3, z_4 hur vi vill, och vi har

valt $z_2 = -1$, $z_3 = -i$, $z_4 = 1$. Först försökte vi använda `fzero`, en inbyggd MATLAB-funktion för att hitta nollställen, men detta var problematiskt då `fzero` avbryter så fort den stöter på en singularitet. Vi skrev istället en mycket mindre känslig funktion, `findz4`, som lyckas hitta nollställen mycket oftare i vårt fall. Ett exempel på detta syns i figur 5.6. Man kan även använda denna algoritm på en polygon



Figur 5.6: En avbildning mellan \mathbb{D} och en fyrhörning med hjälp av en Schwarz-Christoffel avbildning.

med godtyckligt antal hörn men det leder till att man behöver lösa ett komplicerat ekvationssystem. För en godtycklig polygon med $n \geq 5$ vertex, finns det nämligen $n - 3$ frihetsgrader i valet av z_i för att få en bild som är kongruent med en given polygon. Vi kan välja $z_{n-2} = -1$, $z_{n-1} = -i$, $z_n = 1$ och bestämma z_1, \dots, z_{n-3} utifrån ekvationssystemet

$$\frac{\left| \int_{z_j}^{z_{j+1}} f'_0(\gamma) d\gamma \right|}{\left| \int_{z_1}^{z_2} f'_0(\gamma) d\gamma \right|} = \frac{|v_{j+1} - v_j|}{|v_2 - v_1|}, \quad j = 2, \dots, n - 2,$$

för att få en bild kongruent med en polygon med vertex v_1, \dots, v_n . Dessa komplicerade ekvationssystem ger problem om vi vill använda samma metod för att lösa detta system som vi använde i fallet med endast en okänd, vilket blir väldigt knöligt i flera dimensioner.

Appendix A: Första algoritmen

getboundary.m

getboundary körs när man vill trycka in en serie punkter som hörn till en polygon som man vill transformera.

```
[Cx,Cy]=unitcircle;
set(0,'DefaultAxesColorOrder',[0 0 0])
figure(1)
clf
myFigure(2,2,1)
[a,b]=ginput(1);
bound1=a+b*1i;
plot(bound1,'.')
title('z-plane')
while abs(bound1(end)-bound1(1))>0.05 || length(bound1)<3
    [a,b]=ginput(1);
    bound1(end+1)=a+b*1i;
    plot([bound1(end-1) bound1(end)])
    plot(bound1(end),'.')
end
bound1(end+1)=bound1(1);
plot([bound1(end-1) bound1(end)])
myFigure(2,2,1)
[bound4,bound3,bound2,bound1] = bigger( bound1 );

plot(bound1)
plot(bound1,'.')
b1=min(abs(bound1));
plot(Cx*b1,Cy*b1)

myFigure(2,2,2)
plot(bound2)
plot(bound2,'.')

myFigure(2,2,3)
plot(bound3)
plot(bound3,'.')
```

```

myFigure(2,2,4)
plot(bound4)
plot(bound4, 'r')
b4=abs(min(bound4));
plot(Cx*b4,Cy*b4)

```

iter.m

Detta script körs gärna efter att man har tryckt in en polygon med `getboundary.m`, eller när man på annat vis har lämplig vektor sparad i `bound1`. Efter körning plottas randen på området ut efter olika många iterationer.

```

bound=bound1;
figure(2)
clf
alphas=[];
betas=[];
for ex=1:6
    for dex=1:2^(ex+2)
        [bound,~,~,~,a,b]=bigger(bound);
        alphas=[alphas a];
        betas=[betas b];
    end
    myFigure(2,3,ex)
    plot(bound)
end

```

afteriter.m

Om du har kört `iter.m` och har en bild av randen och värden från `iter.m` sparade i `alphas` och `betas` så kommer denna filen ge dig en plot med polära axlar inne i \mathbb{D} och dess bild i området du har från körningen av `getboundary.m`.

```

\%bound innehåller randen
\%alphas och betas innehåller alla alpha och beta värden.
\%generera polära axlar:
r = min(abs(bound));
axer=r*(-1:0.02:1)';
axes=[];
C = r*(Cx+Cy*1i)';
circles = C;
noa=8; \%Number of axes
for n=1:noa
    axes = [axes axer*exp(1i*pi*n/noa)];
    circles = [circles C*(noa-n+1)/noa];
end
axes2=axes;
circles2=circles;

```

```

for n=0:length(alphas)-1
    axes2=phialfa(axes2,betas(end-n));
    circles2=phialfa(circles2,betas(end-n));
    axes2=axes2.^2;
    circles2=circles2.^2;
    axes2=phialfa(axes2,alphas(end-n));
    circles2=phialfa(circles2,alphas(end-n));
end
figure(3)
clf
myFigure(1,2,1)
plot(bound1)
plot(axes2)
plot(circles2)
myFigure(1,2,2)
plot(bound)
plot(axes)
plot(circles)

```

bigger.m

Denna funktion kör en iteration av algoritmen.

```

function [bound4,bound3,bound2,bound1,alfa,beta1] = bigger( bound1 )
    %bound4 is boundary of bigger koebe domain
    %bound3 and 2 is boundaries of intermediate steps.
    for rep=1:20
        in=find(abs(bound1)==min(abs(bound1)),1);
        if in==1 || in==length(bound1)
            new1=(bound1(1)+bound1(2))/2;
            new2=(bound1(end)+bound1(end-1))/2;
            bound1=[bound1(1) new1 bound1(2:end-1) new2 bound1(end)];
        else
            new1=(bound1(in-1)+bound1(in))/2;
            new2=(bound1(in)+bound1(in+1))/2;
            bound1=[bound1(1:in-1) new1 bound1(in) new2 bound1(in+1:end)];
        end
    end
    in=find(abs(bound1)==min(abs(bound1)),1);
    alfa=bound1(in);
    alfaarg=alfa/abs(alfa);

    bound2=phialfa(bound1,alfa);

    [bound3,passes]=goodsqrt(bound2);
    beta1=sqrt(alfa);
    bound4=phialfa(bound3,beta1);
    betaarg=beta1/abs(beta1);
    if abs(bound4(in))==min(abs(bound4))

```

```

\%För om man väljer fel rot så verkar
\%phialfa(0) ha minimalt belopp

    beta1=-beta1;
    bound4=phialfa(bound3,beta1);
    betaarg=-betaarg;
end
%bound4=bound4*alfaarg/betaarg; %Denna rotation påstår jag gör att serien
%konvergerar, att kommentera bort denna gör
%det mkt enklare att köra avbildningen
%baklänges när man bara behöver spara alpha
%och beta värden.

end

```

phialfa.m

```

function z=phialfa(z,alfa)
z=(alfa-z)/(1-conj(alfa)*z);

```

goodsqrt.m

Denna funktion ger en kontinuerlig kvadratrots-funktion på en polygon.

```

function [OUT,passes]=goodsqrt(IN)
OUT=zeros(size(IN));
OUT(1)=sqrt(IN(1));
passes=passoveraxis(IN);
for i=2:length(IN)
    OUT(i) = sqrt(IN(i))*(-1)^sum(passes(1:i));
end

```

passoveraxis.m

Denna funktion hittar de ställen på vilka en polygon passerar över negativa realaxeln, används av goodsqrt.m.

```

function k = passoveraxis(IN)
k=zeros(length(IN),1);
for i=2:length(IN)
    zr=real(IN(i));
    zi=imag(IN(i));
    wr=real(IN(i-1));
    wi=imag(IN(i-1));
    A=[zr 1;wr 1];
    b=[zi; wi];
    if cond(A)>1000
        if sign(zi) ~= sign(wi) && zr<0

```

```

        k(i)=1;
    end
else
    x=A\b;
    if sign(x(1)) == sign(x(2)) && sign(zi) ~= sign(wi)
        k(i)=1;
    end
end
end
if mod(sum(k),2)~=0
    ind=find(abs(IN)==min(abs(IN)),1);
    k(ind)=1-k(ind);
end
end

```

myFigure.m

Denna funktion gör en ny ruta i ett plotfönster med förinställda egenskaper.

```

function k = passoveraxis(IN)
k=zeros(length(IN),1);
for i=2:length(IN)
    zr=real(IN(i));
    zi=imag(IN(i));
    wr=real(IN(i-1));
    wi=imag(IN(i-1));
    A=[zr 1;wr 1];
    b=[zi; wi];
    if cond(A)>1000
        if sign(zi) ~= sign(wi) && zr<0
            k(i)=1;
        end
    else
        x=A\b;
        if sign(x(1)) == sign(x(2)) && sign(zi) ~= sign(wi)
            k(i)=1;
        end
    end
end
end
if mod(sum(k),2)~=0
    ind=find(abs(IN)==min(abs(IN)),1);
    k(ind)=1-k(ind);
end
end

```

Returnar två vektorer med x respektive y-värden på punkter på enhetscirkeln.

unitcircle.m

```

function [Cx,Cy] = unitcircle()
Cx=zeros(1,300);

```

```
Cy=Cx;
rad=linspace(0,2*pi,300);
for n=1:300
    Cx(n)=cos(rad(n));
    Cy(n)=sin(rad(n));
end
```


Appendix B: Andra algoritmen

getfour.m

Detta script låter användaren mata in hörnen på en fyrhörning.

```
\%Kör detta script och mata in hörnen på en fyrhörning moturs.
```

```
C=unitcircle(100,1);
```

```
figure(1)
```

```
clf
```

```
myFigure(2,2,1)
```

```
[a,b]=ginput(1);
```

```
bound1=a+b*1i;
```

```
plot(bound1,'.')
```

```
title('z-plane')
```

```
while length(bound1)<4
```

```
    [a,b]=ginput(1);
```

```
    bound1(end+1)=a+b*1i;
```

```
    plot(bound1(end),'.')
```

```
end
```

```
[zed,alf]=getzedalf4(bound1);
```

```
if sum(isnan(zed)+isinf(zed)) > 0
```

```
    disp('failed to get zed')
```

```
    break
```

```
end
```

```
axer=(-1:0.03:1)';
```

```
axes=[];
```

```
circles = C;
```

```
noa=8; \%Number of axes
```

```
for n=1:noa
```

```
    axes=[axes axer*exp(1i*pi*n/noa)];
```

```
    circles = [circles C*(1+noa^2-n^2)/noa^2]; \%mer cirklar nära randen, intressantare så
```

```
end
```

```
plot(circles,'-g')
```

```
plot(axes)
```

```

myFigure(2,2,2)
scale=[0; 1];
corn2=map2four(zed,alf,1i.(1:4),scale);
axes2=map2four(zed,alf,axes,scale);
circles2=map2four(zed,alf,circles,scale);

plot(circles2,'-g')
plot(axes2)
for n=1:4
    text(real(corn2(n)),imag(corn2(n)),num2str(1i^n));
end

myFigure(2,2,3)
f2corns=map2four(zed,alf,zed,scale);
A=[1 f2corns(1);1 f2corns(2)];
b=[bound1(1); bound1(2)];
scale=A\backslash b;
if sum(isnan(scale)+isinf(scale)) > 0
    disp('failed to scale')
    break
end
corn3=map2four(zed,alf,1i.(1:4),scale);
axes3=map2four(zed,alf,axes,scale);
circles3=map2four(zed,alf,circles,scale);

plot(circles3,'-g')
plot(axes3)
for n=1:4
    text(real(corn3(n)),imag(corn3(n)),num2str(1i^n));
end

myFigure(2,2,4)
circles4=[];
for n=1:noa+1

    circles4(:,n) = refine(circles(:,n),zed);
end
corn4=map2four(zed,alf,zed,scale);
axes4=map2four(zed,alf,axes,scale);
circles4=map2four(zed,alf,circles4,scale);

plot(circles4,'-g')
plot(corn4,'*r')
plot(axes4,'-')
for n=1:4
    text(real(corn4(n)),imag(corn4(n)),num2str(round(zed(n)*1000)/1000));
end
plot(bound1,'bx')

```

getzedalf4.m

getzedalf4 är en funktion som hämtar värden på konstanter som behövs i transformen i map2four.

```
function [ zed, alf ] = getzedalf4( bound )
    %bound är koordinater till en triangel
    %zed är punkter på enhetscirkeln
    %alf är vinklarna mellan bound
    zed = [1i -1 -1i 1];
    alf=zeros(1,4);
    bound = [bound(end) bound bound(1)];
    for n=1:4
        m=n+1;
        alf(n) = mod(arg(bound(m-1))-arg(bound(m)))-arg(bound(m+1)-bound(m)),2*pi)/pi;
    end

    %Här väljer vi ett värde på zed(1) som ger kongruens
    zed(1)=findz4(zed,alf,bound(2:(end-1)));

end
```

map2four.m

map2four utför en transform från enhetsdisken till en fyrhörning med givna inre vinklar och sedan utför den en given skalning.

```
function f = map2four( zed, alf, xes, scale )
    %zed är punkter på enhetscirkeln som mappas til hörnen av en triangel
    %alf är vinklarna/pi vid dessa hörn
    %xes är punkter inuti D som man vill ha till fyrhörningen
    f = zeros(size(xes));
    for n=1:numel(xes)
        %för varje punkt x man vill transformera:
        %t = |x|
        %ar = punkten på enhetscirkeln som har samma argument som x
        t=abs(xes(n));
        ar=xes(n)/t;
        f(n) = quad(@(l)(integ(l*ar,zed,alf)*ar), 0, t);
    end
    %scale innehåller två parametrar som skalar den till rätt polygon.
    f = scale(1)+scale(2)*f;
end
```

findz4.m

Hittar nollstället till en funktion för att få fram rätt värde till zed(1).

```
function z1 = findz4( zed, alf, v )
```

```

\%z2phi = @(z)-log(1-1i./log(z)); \%används aldrig
phi2z = @(phi)exp(1i*pi./(1+exp(-phi)));
\%phi1 = fzero(@(p)eq4([phi2z(p) zed(2:4)],alf,v),1);
\%fzero är problematisk eftersom den sällan hittar nollställena.
phi1=0;
for m=[5 1 0.1]
    ppp=ones(1,21);
    interval=(-m:m/10:m)+phi1;
    for n=1:21
        ppp(n)=eq4([phi2z(interval(n)) zed(2:4)],alf,v);
    end
    phi1=interval(find(abs(ppp)==min(abs(ppp)),1));
    if isempty(phi1)
        disp('failed to find any values at all for zed')
        break;
    end
end
z1 = phi2z(phi1);
end

```

eq4.m

Funktionen vars nollställe skall hittas i findz4.

```

function [ val ] = eq4(zed, alf, v )
int23 = abs(quad(@(k)(integ(k*zed(2),zed,alf).*zed(2)), 1, 0) +...
            quad(@(k)(integ(k*zed(3),zed,alf).*zed(3)), 0, 1));
int12 = abs(quad(@(k)(integ(k*zed(1),zed,alf).*zed(1)), 1, 0) +...
            quad(@(k)(integ(k*zed(2),zed,alf).*zed(2)), 0, 1));
val = int23*abs(v(2)-v(1))-int12*abs(v(3)-v(2));

end

```

integ.m

En inre funktion i eq4.

```

function I = integ(x, zed, alf )
I=ones(size(x));
for n=1:min(length(zed),min(length(alf)))
    I = I.*(1-x/zed(n)).^(alf(n)-1);
end

```

refine.m

Denna funktion förfinar upplösningen på en kurva som ska avbildas om kurvan går nära ett hörn på polygonen.

```

function C = refine( C, zed )
\%C is a boundary that needs refining close to zed
for z=zed
    arz=arg(z);
    arC=arg(C);
    if arz<arg(C(1)) && (min(arC)==arC(1) || arz>arC(end))
        C = [z*abs(C(1)); C];
    else
        for n=2:length(C)
            if arC(n-1)<arz && arz<arC(n)
                C = [C(1:(n-1)); z*(abs(C(n-1))+abs(C(n)))/2; C(n:end)];
            end
        end
    end
end
end
for z=zed
    for rep=1:5
        in=find(abs(C-z)==min(abs(C-z)),1);
        if in==1 || in==length(C)
            new1=(C(1)+C(2))/2;
            new2=(C(end)+C(end-1))/2;
            C=[C(1); new1; C(2:end-1); new2; C(end)];
        else
            new1=(C(in-1)+C(in))/2;
            new2=(C(in)+C(in+1))/2;
            C=[C(1:in-1); new1; C(in); new2; C(in+1:end)];
        end
    end
end
end
end

```

arg.m

Används för att ta fram argumentet för en vektor av komplexa tal.

```

function argument = arg( z )
x=real(z);
y=imag(z);
argument=atan(y./x)+pi/2*sign(y).*(1-sign(x));
ind=find(x==0);
for n=ind
    argument(n)=pi/2*sign(y(n));
end
end

```

myFigure.m

Denna funktion gör en ny ruta i ett plotfönster med förinställda egenskaper.

```

function myFigure(x,y, num )
C=unitcircle(100,1);
subplot(x,y,num)
hold on
axis([-1 1 -1 1])
axis equal
xlabel('x')
ylabel('y')
title('z-plane')
plot(0,0,'.')
plot(C)
end

```

unitcircle.m

Ger en vektor av komplexa tal som ligger jämt utspridda på enhetscirkeln.

```

function C = unitcircle(N,v)
\%returnerar N punkter på enhetscirkeln, utspridda över v varv
C=zeros(N,1);
rad=linspace(0,2*pi,N);
for n=1:N
    C(n)=exp(v*1i*rad(n));
end

```

Litteraturförteckning

- [1] Stein, E. M. & Shakarchi, R. (2003). *Complex analysis*. Princeton: Princeton University Press.
- [2] Stein, E. M. & Shakarchi, R. (2005). *Real analysis*. Princeton: Princeton University Press.
- [3] Ransford, T. (1995). *Potential theory in the complex plane*. Cambridge: University of Cambridge.
- [4] Driscoll, T. A. Trefethen L. N. (2003). *Schwarz-Christoffel Mapping*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [5] Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis*. Singapore: McGraw-Hill.
- [6] Nevanlinna, R. Paatero, V. (2007). *Introduction to complex analysis*. United States: American Mathematical Society.