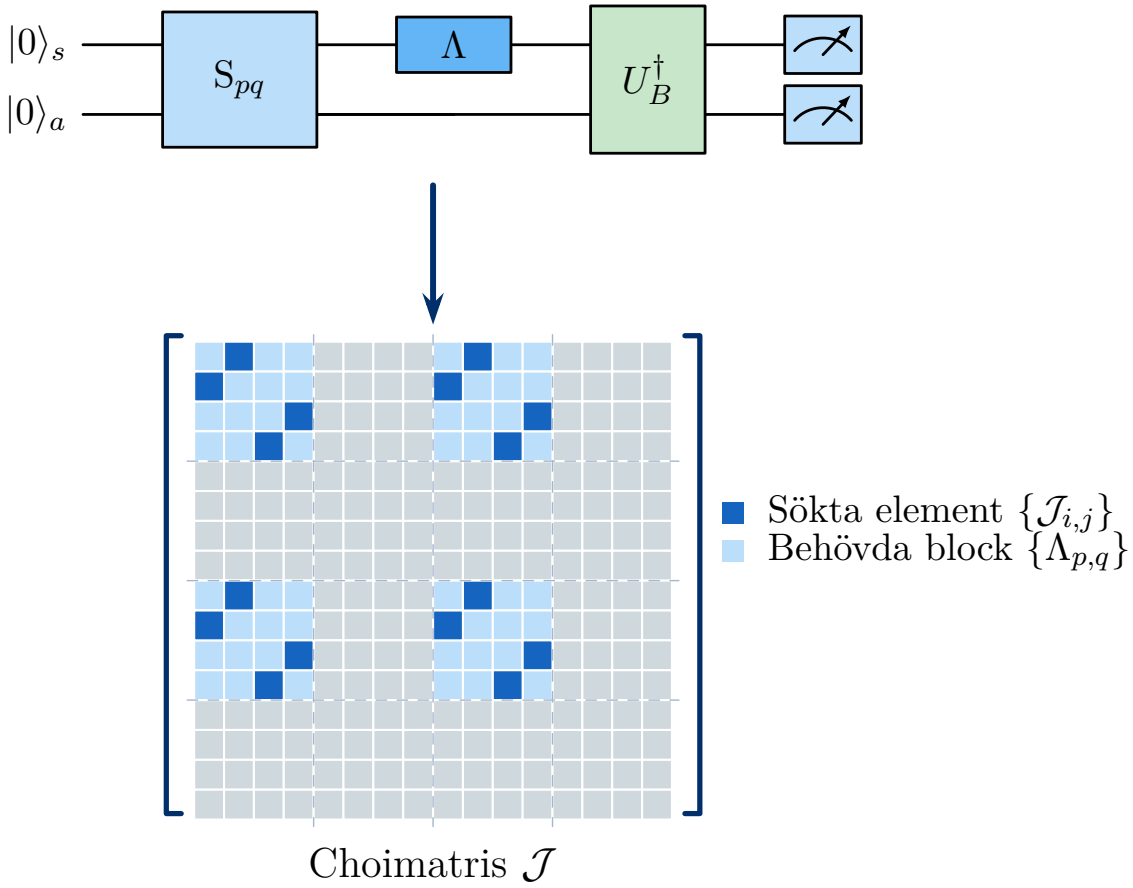


Selektiv hjälpkvantbitsassisterad kvantprocesstomografi

Fabian Boberg
Esse Brodén
Julia Mårtensson
Wiggo Nimvall
Alexander Schmeling
Elsa Selmarker

Institutionen för mikroteknologi och nanovetenskap

Chalmers Tekniska Högskola
Göteborg 2026
www.chalmers.se

Kandidatarbete 2026

Selektiv hjälpkvantbitsassisterad kvantprocesstomografi

Selective Ancilla-Assisted Quantum Process Tomography

Fabian Boberg
Esse Brodén
Julia Mårtensson
Wiggo Nimvall
Alexander Schmeling
Elsa Selmarker



CHALMERS

Institutionen för mikroteknologi och nanovetenskap
Chalmers Tekniska Högskola
Göteborg 2026

Selektiv hjälpkvantbitsassisterad kvantprocesstomografi

Fabian Boberg, Esse Brodén, Julia Mårtensson, Wiggo Nimvall, Alexander Schmeling, Elsa Selmarker

© Fabian Boberg, Esse Brodén, Julia Mårtensson, Wiggo Nimvall, Alexander Schmeling, Elsa Selmarker, 2026.

Handledare:
Anton Frisk Kockum
Institutionen för mikroteknologi och nanovetenskap
Akshay Gaikwad
Institutionen för mikroteknologi och nanovetenskap

Examinator:
Per Lundgren
Institutionen för mikroteknologi och nanovetenskap

Kandidatarbete 2026
Institutionen för mikroteknologi och nanovetenskap
Chalmers Tekniska Högskola
SE-412 96 Göteborg
Telefon +46 31 772 1000

Omslagsbild: Illustration av ett selektivt mätprotokoll för kvantprocesstomografi med hjälpkvantbitar, där S_{pq} betecknar förberedelsen av ingångstillstånd, Λ är kvantprocessen som ska karaktäriseras och $\mathcal{J}$ är processens Choimatris vars utvalda element ska rekonstrueras.

Skriven i LaTeX
Göteborg, 2026

Selektiv hjälpkvantbitsassisterad kvantprocesstomografi

Fabian Boberg, Esse Brodén, Julia Mårtensson, Wiggo Nimvall, Alexander Schmeling, Elsa Selmarker
Institutionen för mikroteknologi och nanovetenskap
Chalmers Tekniska Högskola

Sammandrag

Kvanttomografi används för att karakterisera kvanttillstånd och kvantprocesser genom mätningar och rekonstruktion från experimentell data. Kvanttomografin möjliggör att karakterisera, analysera och diagnostisera kvantsystem vilket underlättar utvecklingen av kvantteknologi. Fullständig kvanttomografi begränsas dock av en exponentiellt växande resursåtgång då antalet kvantbitar växer. Vi presenterar därför ett protokoll för selektiv hjälpkvantbitsassisterad kvantprocesstomografi, med variabelt antal hjälpkvantbitar. "Selektiv" innebär att endast utvalda delar av en kvantprocess rekonstrueras.

Befintliga selektiva QPT-metoder med hjälpkvantbitar finns idag men de kräver ett stort antal ingångstillstånd, saknar flexibilitet i antalet hjälpkvantbitar och begränsar möjligheten att fritt välja vilka element i processen som rekonstrueras. Vårt protokoll syftar därför till att bemöta dessa problem. Vidare använder protokollet gradientnedstigning för att effektivt lösa det tillhörande optimeringsproblemet i kvanttomografin. Vi utvärderar protokollet och dess komponenter genom simuleringar med upp till fem kvantbitar samt analytiska resonemang. Resultaten visar att protokollet kan välja nära optimala ingångstillstånd för selektiv kvantprocesstomografi varierande antal hjälpkvantbitar. Protokollet använder selektiv och effektiv kvanttillståndstomografi, så antalet mätkretsar som behövs begränsas till maximalt $2|\mathcal{T}|$, där $|\mathcal{T}|$ är det totala antalet sökta element i Choimatrisen. Vidare observeras att rekonstruktionsfelet i Choimatrisen avtar med antalet mätningar N per mätkrets som $1/\sqrt{N}$ vid närvaro av brus. För ett ändligt N bildas ett väldefinierat felgolv som begränsar rekonstruktionens precision.

Implementationen av vårt protokoll kräver dock stora och mer komplicerade tillståndsförberedelser och mätkretsar jämfört med traditionella metoder. Vårt protokolls gradientnedstigning behandlar dessutom hela Choimatrisen, även fast endast en delmängd av dess element är sökta. Minnesanvändningen skalar därmed i samma takt som Choimatrisen, vilket gör optimeringen ohanterbar på en vanlig dator redan för sex systemkvantbitar. Vidare forskning behövs för att undersöka protokollets experimentella genomförbarhet och undersöka möjligheten att utföra selektiv optimering av en del av Choimatrisen.

Nyckelord: Kvantprocesstomografi, kvanttillståndstomografi, selektiv tomografi, hjälpkvantbitar, Choimatris, gradientnedstigning, SEEQPT, SEEQST.

Abstract

Quantum tomography is used to characterize and diagnose errors in quantum states and quantum processes through measurements and reconstruction from experimental data. Quantum tomography enables the characterization, analysis, and diagnosis of quantum systems, which in turn facilitates the development of quantum technologies. Since the number of parameters in arbitrary quantum states and processes grows exponentially with the number of qubits, full tomography is infeasible for anything but very small systems. We have developed a protocol for selective ancilla-assisted quantum process tomography with variable ancilla qubits. "Selective" means that only chosen parts of a quantum process are reconstructed rather than the entire process, which reduces the resource requirements of tomography.

Existing selective QPT methods with ancillary qubits exist today, but they require a large number of input states, lack flexibility in the number of ancilla qubits and restrict the ability to freely choose which elements of the process are reconstructed. The described protocol aims to address these issues. Furthermore the protocol uses gradient descent for the accompanying optimization problem in tomography. We evaluate the protocol through simulations and analytical results. Our protocol produces near optimal input states for selective process tomography with variable ancilla qubits. By using selective and efficient quantum state tomography the number of measurement circuits is limited to $2|\mathcal{T}|$, where $|\mathcal{T}|$ is the total number of target elements in Choi matrix. The reconstruction error with shot noise for a finite number of measurements N per quantum circuit decreases as $1/\sqrt{N}$, and is the limiting factor to the protocol's accuracy.

The drawbacks of the protocol are that it requires more complex input states and measurement circuits than traditional methods for quantum process tomography. The protocol does gradient descent optimization on the whole Choi matrix even though only a subset of elements are targeted. The memory usage therefore scales at the same rate as the Choi matrix, which makes the optimization infeasible on a normal computer beyond five system qubits. Further research needs to be conducted to see if our protocol can be efficiently experimentally implemented, and to investigate the possibility of selective optimization of the Choi matrix.

Keywords: Quantum process tomography, quantum state tomography, selective tomography, ancilla qubits, Choi matrix, gradient descent, SEEQPT, SEEQST.

Förord

Vi vill tacka våra handledare Anton Frisk Kockum och Akshay Gaikwad för deras engagemang, vägledning och uppmuntran genom hela projektet. Mötena med dem har varit mycket givande för oss och fulla av diskussioner och insikter som drivit arbetet framåt. Vi vill också rikta ett varmt tack till kaffemaskinen i B5-fikarummet på MC2, som tålmodigt försett oss med det bränsle som krävts. Slutligen vill vi också tacka Wallenbergcentret för kvantteknologi (WACQT) på Chalmers för möjligheten att genomföra detta kandidatarbete inom ett aktivt och högaktuellt forskningsområde, samt Knut och Alice Wallenbergs stiftelse för deras stöd till centret.

Författarna, Göteborg, maj 2026

Förkortningar

Nedan följer en lista över förkortningar som används genom hela rapporten, i alfabetisk ordning:

CNOT	Kontrollerad NOT-grind (Controlled NOT gate)
QPT	Kvantprocesstomografi (Quantum process tomography)
QST	Kvanttillståndstomografi (Quantum state tomography)
SEEQST	Selektiv och effektiv kvanttillståndstomografi (Selective and efficient quantum state tomography)
SPAM-fel	Tillståndsförberedelse- och mätfel (State preparation and measurement error)

Innehåll

Förkortningar **viii**

1 Inledning **1**
1.1 Kvantsystem och behovet av kvanttomografi 1
1.2 Utmaningar med kvanttomografi 2
1.3 Syfte och problemformulering 3
1.4 Avgränsningar 4
1.5 Rapportöversikt 4

2 Teori **5**
2.1 Representation av kvanttillstånd 5
2.2 Beskrivning av kvantprocesser och Choi-representationen 5
2.3 Kvanttomografi och mätningar 6
2.4 Selektiv tomografi 8

3 Protokollbeskrivning och utvärderingsmetod **10**
3.1 Selektiva ingångstillstånd 10
3.2 Selektiva mätningar 12
3.3 Rekonstruktion av Choimatris via optimering 13
3.3.1 Parametrisering av Choimatrisen 13
3.3.2 Förlustfunktion och optimeringsstrategi 14
3.4 Tillämpningsexempel: CNOT-grind 15
3.5 Utvärderingsmetod 16
3.5.1 Resurskrav 16
3.5.2 Brustålighet 17

4 Resultat **17**
4.1 Resultat för CNOT-exemplet 17
4.2 Resurskrav 18
4.3 Brustålighet 20

5 Diskussion **21**

A Appendix **I**
A.1 Effektiva mätoperatorer på Choimatrisen för förlustfunktion I
A.2 Pseudokod för girig kanttäckningsalgoritm för ingångstillstånd II
A.3 Pseudokod för Adam III
A.4 Övre gränser för protokollets resurskrav III

1 Inledning

Kvantteknik är ett snabbt växande fält med potential inom flera områden; kvantdatorer kan lösa beräkningsproblem som annars är ogörliga på klassiska datorer, kvantsensorer kan erbjuda mätprecision bortom klassiska sensorer och kvantkommunikation möjliggör säkrare informationsöverföring [1; 2]. Kvantsystem utnyttjar kvantmekaniska fenomen som superposition och sammanflätning, egenskaper som innebär att tillståndet hos n kvantbitar beskrivs av exponentiellt många parametrar [3]. Det är just dessa exponentiellt många parametrar som ger kvantteknik dess fördel och möjliggör tillämpningar inom bland annat optimeringsproblem, partikelfysik, kondenserad materiefysik, kvantkemi och läkemedelsutveckling [4–7].

Samma exponentiella komplexitet gör det dock svårt att kontrollera och verifiera kvantsystem, och noggrann karakterisering är central för att kvantsystem ska kunna utnyttjas och användas på ett tillförlitligt sätt [8–10]. Exempelvis möjliggör karakterisering av kvanttillstånd och kvantkretsar identifiering av systematiska fel och brus, information som är nödvändig för att kunna iterativt förbättra hårdvaran och uppnå den felnivå som krävs för att kunna göra kvantdatorer praktiskt användbara. Verifiering som i princip handlar om att simulera kvantberäkningen på en klassisk dator är per definition inte skalbar förbi beräkningskraften i en klassisk dator. Detta motiverar selektiv verifiering, där stickprov kan ge en probabilistisk verifiering av kvantberäkningen.

1.1 Kvantsystem och behovet av kvanttomografi

Kvantdatorers exponentiella komplexitet har sin grund i kvantbitarnas natur. Medan klassiska bitar är binära och deterministiska (0 eller 1), följer kvantbitar istället kvantmekaniska principer. En kvantbit kan existera i en så kallad superposition, vilket betyder att dess tillstånd $|\psi\rangle$ beskrivs som en linjärkombination av bastillstånden $|0\rangle$ och $|1\rangle$. Detta kan skrivas som

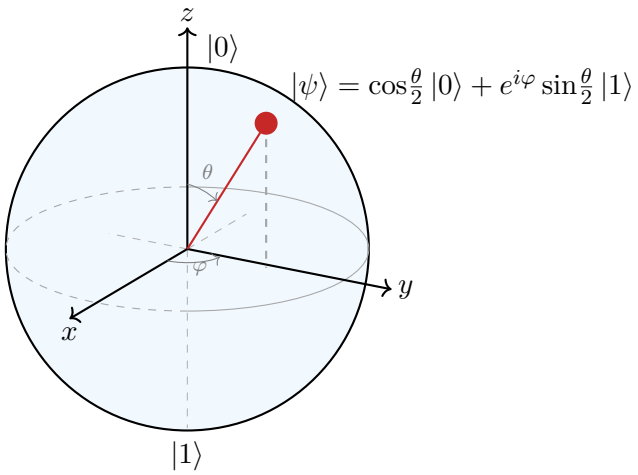
$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\,, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{1}$$

där α och β är sannolikhetsamplituder. Utöver detta möjliggör kvantmekaniken även sammanflätning, vilket innebär att tillståndet av en kvantbit kan vara direkt beroende av tillståndet hos en annan [3].

Ett kvanttillstånd för en kvantbit kan geometriskt illustreras med Bloch-sfären [3], se figur 1. Varje punkt på sfärens yta representerar ett unikt rent kvanttillstånd, parametriserat av vinklarna θ och φ, med $|0\rangle$ och $|1\rangle$ vid nord- respektive sydpolen. Bloch-sfären gör det tydligt att det finns många möjliga mätbaser, inte bara längs z-axeln utan exempelvis längs x- eller y-axeln. Detta är en del i vad som krävs för att kunna utföra mätningar.

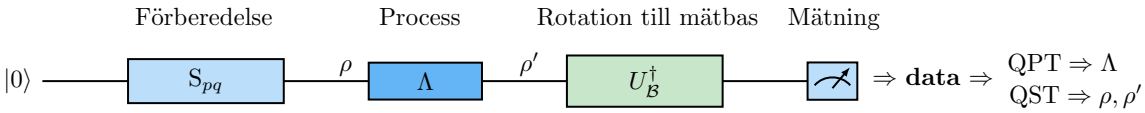
Praktiskt måste $|\psi\rangle$ kunna mätas, men inom kvantmekaniken resulterar en mätning i en kollaps av tillståndet [11]. En mätning (i z-basen) kommer därmed endast ge $|0\rangle$ eller $|1\rangle$ vilket leder till att informationen om α och β går förlorade [3]. Det är således inte möjligt att bestämma ett godtyckligt kvanttillstånd genom att observera det.

För att kringgå detta problem kan tillståndet återskapas statistiskt genom tomografi, så kallat kvanttillståndstomografi, QST [12–15]. Genom att mäta $|\psi\rangle$ många gånger i olika



Figur 1: Bloch-sfären ger en geometrisk representation av ett rent kvanttillstånd $|\psi\rangle$ för en kvantbit. Vinklarna θ och φ parametriserar sfärens yta, med $|0\rangle$ och $|1\rangle$ vid nord- respektive sydpolen. Olika mätbaser motsvarar olika axlar på sfären.

baser kan α och β skattas som sannolikheter ur mätresultaten [3]. På motsvarande sätt används kvantprocesstomografi, QPT, för att rekonstruera en kvantprocess Λ [10], såsom en grind på en kvantdator. Sättet som processen karaktäriseras är genom att skicka en uppsättning ingångstillstånd och låta processen verka på dem för att slutligen använda QST för att analysera de resulterande utgångstillstånden [3]. En illustration över hur en kvantprocess verkar på ett ingångstillstånd samt hur både QST och QPT kopplas till processen kan ses i figur 2.



Figur 2: Schematisk översikt av kvanttomografi. Från $|0\rangle$ förbereds ett ingångstillstånd ρ via S_{pq}, processen Λ appliceras, varefter det resulterande tillståndet ρ' roteras till önskad mätbas med $U_{\mathcal{B}}^{\dagger}$ innan mätning utförs.

1.2 Utmaningar med kvanttomografi

Det finns flera praktiska utmaningar med QPT. Till att börja med förutsätts att allt fel och all osäkerhet ligger i processen [16]. Tillståndsförberedelserna och mätningarna antas då vara felfria vilket är problematiskt i praktiken. En viss grad av SPAM-fel (tillståndsförberedelse- och mätfel) i experimentet är oundviklig, och det är viktigt att implementationer av protokoll för QPT tar hänsyn till dem.

Trots sin användbarhet lider både QST och QPT av allvarliga skalningsproblem som begränsar deras praktiska användning [15; 17–19]. För ett system med n stycken kvantbitar krävs väntevärdet av 4^n olika observerbara storheter [20] för full QST. För att fullständigt karakterisera en kvantprocess krävs kunskap om hur processen verkar på en komplett uppsättning av 4^n ingångstillstånd, vilket leder till att antalet nödvändiga mätningar skalar som $(4^n)^2 = 16^n$ [20].

Denna skalning propagerar genom hela tomografiprocessen vilket resulterar i många experimentuppställningar, stora mängder data och lång beräkningstid. I sin grundform blir därmed full kvanttomografi ogenomförbar för annat än mycket små system. Dessa skalningssvårigheter motiverar utvecklingen av alternativa tomografimetoder som minskar resurskraven [8].

Ett sätt att hantera dessa skalningsproblem är selektiv tomografi, där endast delar av systemet rekonstrueras. Genom att strategiskt välja mätningar och dataprocesseringsmetoder kan mängden experiment, beräkningar och data minska [21]. Selektivitet behöver inte innebära en begränsning, då vissa situationer inte kräver fullständig information. Exempelvis kan det räcka att rekonstruera hur en specifik kvantgrind agerar på en delmängd av tillstånd, snarare än att karakterisera hela processen. Det har även, som framförts av Bendersky och Paz [22], utvecklats algoritmer för selektiv tomografi där det har visats att den erhållna delvisa informationen har varit väsentlig för att fastställa ett val av felkorrigeringsalgoritm och jämförandet av en process med en sökt process. Utöver detta kan selektiv tomografi användas för full tomografi på ett sätt så att rekonstruktionen är paralleliserbar [21].

Ytterligare en strategi för att minska vissa av resurskraven för kvanttomografi är att använda hjälpkvantbitar. Hjälpkvantbitsassisterad kvanttomografi introducerar m stycken extra kvantbitar till systemet som kan användas för att reducera antalet olika ingångstillstånd som behöver förberedas för QPT. Genom att introducera $m = n$ hjälpkvantbitar samt genom att ta fram det maximalt sammanflätade tillståndet mellan systemkvantbitarna och hjälpkvantbitarna kan processen karakteriseras genom upprepade mätningar av hur processen verkar på endast en sorts ingångstillstånd [20; 23; 24].

Trots dessa framsteg kvarstår betydande utmaningar i att utveckla tomografimetoder som både är resurseffektiva och tillräckligt informativa för praktiska tillämpningar. De ovan nämnda metoder har studerats tidigare, selektiv QPT med hjälpkvantbitar [25–29], liksom hjälpkvantbitsfria selektiva metoder [30; 31]. Dessa metoder lider dock av flera begränsningar; de saknar flexibilitet i antalet hjälpkvantbitar, kräver att ett stort antal tillstånd förbereds eller är gjorda specifikt för utvalda hårdvaruplattformar. Gemensamt för dessa är avsaknaden av ett ramverk som tillåter ett variabelt antal hjälpkvantbitar $m \leq n$ och samtidigt möjliggör selektiv rekonstruktion av godtyckliga element i den undersökta processen.

Detta motiverar behovet av att utveckla och utvärdera nya tomografiprotokoll som kombinerar flexibiliteten i antalet hjälpkvantbitar med möjligheten att selektivt välja vilka element i processen som rekonstrueras, för att förbättra skalbarheten och den praktiska genomförbarheten hos kvanttomografi.

1.3 Syfte och problemformulering

Syftet med detta arbete är att utveckla och utvärdera ett protokoll för selektiv, hjälpkvantbitsassisterad kvantprocesstomografi, där antalet hjälpkvantbitar m är mindre än antalet systemkvantbitar n. Målet är att, genom att kombinera och vidareutveckla befintliga metoder, minska beräkningskomplexiteten i tomografin, särskilt med avseende på antalet ingångstillstånd och mätoperatorer, samtidigt som rekonstruktionen uppfyller fysikaliska begränsningar för kvantprocesser.

För att utvärdera protokollet undersöker vi dess förmåga att korrekt rekonstruera selektiva delar ur en kvantprocess. Vi utvärderar modellens robusthet mot brus samt dess beräkningstid. Experimentella resurskrav för protokollet jämförs med andra protokoll för kvantprocesstomografi. Hur dessa faktorer påverkar protokollets känslighet för SPAM-fel diskuteras.

1.4 Avgränsningar

Kvanttomografi är ett väletablerat forskningsområde där ett stort antal metoder och ramverk redan har utvecklats. Syftet med detta kandidatarbete är därför inte att introducera en ny generell tomografimetod, utan att vidareutveckla och analysera en avgränsad del av området. Avgränsningarna motiveras dels av arbetets omfattning, dels av ambitionen att möjliggöra en fördjupad analys snarare än en bred jämförelse mellan existerande metoder.

Vi fokuserar specifikt på utveckling och analys av ett selektivt tomografiprotokoll, med särskilt fokus på att reducera resurskrav såsom antal mätoperatorer, ingångstillstånd och beräkningstid, samt på att härleda analytiska resultat för antalet mätningar och ingångstillstånd som krävs. Optimeringsaspekten behandlas dock inte i form av en jämförelse mellan olika optimeringsmetoder. I stället används gradientnedstigning som en etablerad och effektiv metod för att lösa det aktuella optimeringsproblemet, i enlighet med tidigare forskning [32; 33]. Av samma skäl inkluderas inte alternativa verifieringsmetoder utanför tomografiramverket.

Arbetet är av konceptuell karaktär och syftar till att teoretiskt utveckla metoden samt demonstrera dess genomförbarhet och styrkor genom simulering. Fokus ligger därmed inte på experimentell implementering eller fullständig verifiering, utan på att visa metodens potential genom representativa exempel. Vidare beaktas endast en sorts mätbrus som uppstår då en mätning görs med endast ett ändligt antal experiment.

1.5 Rapportöversikt

I avsnitt 2 Teori, förklarar vi kvanttillstånd, kvantprocesser och kvanttomografi samt de fysikaliska villkoren som måste uppfyllas. Avsnittet avslutas med en beskrivning av selektiv kvanttomografi.

I avsnitt 3 Protokollbeskrivning och utvärderingsmetod, beskriver vi det framtagna protokollet i detalj. Vi visar hur selektiva ingångstillstånd väljs och hur dessa används för selektiva mätningar. Därefter presenterar vi protokollets optimeringssteg. Slutligen beskriver vi den valda utvärderingsmetoden.

I avsnitt 4 Resultat, visar vi hur protokollet fungerar för ett system med två systemkvantbitar och en hjälpkvantbit. Därefter presenterar vi resultatet med avseende på rekonstruktionsnoggrannhet och resurskrav både med och utan brus.

I avsnitt 5 Diskussion, ger vi en analys av protokollets förmåga att rekonstruera kvantprocesser och resurskravet för detta. Vi avslutar avsnittet med en bredare diskussion kring den valda metoden samt vilka framtida arbeten som möjliggörs av detta protokoll.

Appendix innehåller kompletterande matematiska härledningar, däribland den justerade förlustfunktionen, relevanta lemman och satser.

2 Teori

Detta arbete behandlar kvantprocesstomografi. För att möjliggöra detta representeras kvanttillstånd med täthetsmatriser, vilket gör det möjligt att inkludera blandade system samt brus, vilket är nödvändigt för tomografi. Därefter introduceras kvantprocesser och deras representation via Choi-representationen, som utgör ett centralt verktyg för karakterisering av processer. Denna matematiska beskrivning används sedan för att beskriva kvanttomografi och slutligen hur den modifieras för att endast karakterisera specifika delar, som betecknas selektiv kvanttomografi. Detta utgör grunden för vårt protokoll.

2.1 Representation av kvanttillstånd

En tillståndsvektor ger en fullständig beskrivning av vissa kvanttillstånd, men är inte tillräcklig för att beskriva mer generella situationer där öppna kvantsystem blir påverkade av brus. Ett generellt tillstånd beskrivs av en ensemble $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$, där systemet befinner sig i det rena tillståndet $|\psi_i\rangle$ med klassisk sannolikhet p_i. För att kunna beskriva både rena och blandade tillstånd på ett enhetligt sätt introduceras täthetsmatrisen ρ [3].

För ett rent tillstånd, exempelvis en kvantbit beskriven av ekvation (1) i inledningen, ges täthetsmatrisen ρ_{rent} av

$$\rho_{\text{rent}} = |\psi\rangle \langle\psi| . \tag{2}$$

Ett allmänt tillstånd representeras då som en summa över de ingående rena tillstånden i ensemblen

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i| = \sum_i p_i \rho_i, \tag{3}$$

där täthetsmatrisen kan ses som en linjär operator $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Eftersom p_i är sannolikheter gäller att $p_i \in \mathbb{R}$, $\sum_i p_i = 1$ och $p_i \geq 0 \ \ \forall i$, vilket medför att en allmän täthetsmatris är betingad på de tre följande villkoren (4), (5) och (6) respektive, för att den ska vara fysikalisk [3]:

$$\text{Hermitesk:} \quad \rho = \rho^\dagger, \tag{4}$$

$$\text{Normerad:} \quad \text{Tr}[\rho] = 1, \tag{5}$$

$$\text{Positivt semidefinit:} \quad \langle\phi| \rho |\phi\rangle \geq 0 \quad \forall |\phi\rangle \in \mathcal{H}. \tag{6}$$

Dessa tre villkor tolkas fysikaliskt enligt följande: Hermiticitet säkerställer reella väntevärden för observabler, normaliseringen garanterar att sannolikheterna summerar till ett, och positivt semidefinithet innebär att inga negativa sannolikheter förekommer.

2.2 Beskrivning av kvantprocesser och Choi-representationen

I kvantprocesstomografi är målet att bestämma hur ett kvantsystem förändras, vilket beskrivs av en kvantprocess. En kvantprocess beskriver en allmän förändring av ett kvant-

systems tillstånd. Formellt är en kvantprocess en linjär avbildning $\Lambda : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ på rummet av linjära operatorer $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

För att Λ ska vara en fysikalisk process krävs att den bevarar täthetsmatrisernas giltighet. Det innebär att processen ska vara spårbevarande och fullständigt positiv [3]. En spårbevarande process uppfyller att $\mathrm{Tr}(\Lambda(\rho)) = \mathrm{Tr}(\rho)\ \forall\rho$. Att en process är fullständigt positiv innebär att för alla sammansatta system $\mathcal{L}(\tilde{H}) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gäller att $(\mathbb{I}\otimes\Lambda)(\tilde{\rho})$ är positivt semidefinit om $\tilde{\rho}$ är det, där $\tilde{\rho}$ är en täthetsmatris i det sammansatta systemet.

För att kunna arbeta praktiskt med kvantprocesser, exempelvis vid rekonstruktion, är det ofta fördelaktigt att representera dem som matriser. En kvantprocess Λ på ett system av n kvantbitar med Hilbertrum $\mathcal{H}$ kan representeras entydigt av sin Choimatris $\mathcal{J}(\Lambda)$ via den så kallade Choi-Jamiołkowski-isomorfismen [23]. Med hjälp av det onormerade maximalt sammanflätade tillståndet

$$|\Omega\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} |i\rangle \otimes |i\rangle \tag{7}$$

fås Choimatrisen

$$\mathcal{J}(\Lambda) = (\mathbb{I}\otimes\Lambda)(|\Omega\rangle\langle\Omega|) = \sum_{i=0}^{2^n-1}\sum_{j=0}^{2^n-1} |i\rangle\langle j| \otimes \Lambda(|i\rangle\langle j|) =$$
$$= \begin{pmatrix} \Lambda_{0,0} & \Lambda_{0,1} & \dots & \Lambda_{0,2^n-1} \\ \Lambda_{1,0} & \Lambda_{1,1} & \dots & \Lambda_{1,2^n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{2^n-1,0} & \Lambda_{2^n-1,1} & \dots & \Lambda_{2^n-1,2^n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{0,0} & \mathcal{J}_{0,1} & \dots & \mathcal{J}_{0,4^n-1} \\ \mathcal{J}_{1,0} & \mathcal{J}_{1,1} & \dots & \mathcal{J}_{1,4^n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{J}_{4^n-1,0} & \mathcal{J}_{4^n-1,1} & \dots & \mathcal{J}_{4^n-1,4^n-1} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Choimatrisen $\mathcal{J}(\Lambda)$ är en operator på $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{in}} \otimes \mathcal{H}_{\text{ut}})$ och tolkas intuitivt som en $2^n \times 2^n$-blockmatris, där varje block $\Lambda_{i,j} = \Lambda(|i\rangle\langle j|)$ är en $2^n \times 2^n$-matris som ger processens verkan på täthetsmatriselementet $|i\rangle\langle j|$. Choimatrisen har därför dimension $2^n\cdot 2^n \times 2^n\cdot 2^n = 4^n \times 4^n$.

De fysikaliska villkoren för att en process Λ ska vara giltig ger direkt motsvarande villkor på dess Choimatris $\mathcal{J}(\Lambda)$ [34]. Λ är fullständigt positiv om och endast om $\mathcal{J}(\Lambda)$ är positivt semidefinit. Λ är spårbevarande om och endast om $\mathrm{Tr}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{ut}})}[\mathcal{J}] = \mathbb{I}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{in}})}$, där $\mathrm{Tr}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{ut}})}$ är det partiella spåret över det andra av Hilbertrummen i definitionen (8).

Då både tillstånd och processer har matematiska villkor för att vara fysikaliska måste även resultaten från tomografin uppfylla dessa. Tomografiska metoder uppfyller inte de tidigare nämnda kraven automatiskt utan kräver protokoll som tar detta i åtanke. Två vanliga strategier är parametrisering och begränsad optimering. Vid parametrisering väljs en ansats som per konstruktion garanterar giltiga resultat. Exempelvis kan Cholesky-dekomposition användas för att säkerställa positiv semidefinithet hos täthetsmatrisen eller Choimatrisen [32]. Vid begränsad optimering optimeras istället en förlustfunktion under explicita bivillkor, eller så projiceras lösningen i efterhand på det fysikaliskt giltiga rummet [3].

2.3 Kvanttomografi och mätningar

Som introducerats i avsnitt 1 behandlar kvanttomografi frågan om hur ett okänt kvanttillstånd ρ kan bestämmas experimentellt. Till skillnad från klassiska system är det inte

möjligt att direkt observera hela tillståndet i en enskild mätning, utan information måste extraheras statistiskt genom upprepade mätningar på identiskt preparerade system. Vid kvanttillståndstomografi (QST) rekonstrueras därför ρ genom att mäta väntevärden av ett antal mätoperatorer M_k, där väntevärdena teoretiskt ges av $\mathrm{Tr}(M_k\rho)$ [3]. Experimentellt behöver man oftast köra upprepade experiment på kvantsystemet och ta medelvärdet av de stokastiska mätresultaten för att ta fram varje väntevärde.

För att rekonstruktionen ska vara möjlig krävs att de valda mätningarna är tomografiskt kompletta, vilket innebär att de tillsammans innehåller tillräcklig information för att entydigt bestämma ρ. I praktiken motsvarar detta att mätoperatorerna spänner upp operatorrummet för systemet, vilket avgör både om rekonstruktionen är möjlig och hur många mätningar som krävs [3].

Kvantprocesstomografi (QPT) utvidgar denna idé till att bestämma en kvantprocess Λ. Detta är dock en betydligt mer omfattande procedur än QST. För ett system bestående av n kvantbitar är systemets dimension $d = 2^n$. För vanlig QPT utan hjälpkvantbitar behövs $d^2 = 4^n$ ingångstillstånd som utgör en tomografiskt komplett uppsättning [20]. För varje tillstånd förbereds systemet och processen verkar på det. Detta ger ett utgångstillstånd på vilket QST kan användas för att bestämma tillståndet. För QST behöver man på varje tillstånd mäta väntevärdena av de 4^n mätoperatorerna $\{\mathbb{I}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}^{\otimes n}$. Detta upprepas för alla ingångstillstånden tills hela processen är beskriven av deras linjärkombination [3; 20]. För vanlig QPT behöver alltså $4^n \cdot 4^n = 16^n$ väntevärden bestämmas [20]. Med full hjälpkvantbitsassisterad QPT där man har $m = n$ hjälpkvantbitar utöver de n systemkvantbitarna behövs endast ett ingångstillstånd [20; 24]. Detta ingångstillstånd är dock av dimension $2^{2n} = 4^n$. Genom att sedan låta processen verka på ingångstillståndet och sedan göra QST på utgångstillståndet kan processen fullständigt karakteriseras med endast ett sorts ingångstillstånd. Nackdelen är dock att tillståndet är större vilket innebär att QST behöver väntevärden för $4^{2n} = 16^n$ mätoperatorer [20]. Det totala antalet väntevärden blir alltså det samma i båda fallen.

För kvantbitar på en kvantdator utförs mätningar naturligt i beräkningsbasen, vilket motsvarar mätning av Paulioperatorn σ_z på varje kvantbit [35]. Ofta vill man dock mäta någon annan mätoperator, vilket görs genom att utföra en rotation $U_B^\dagger$ på kvantsystemet så att mätoperatorns egentillstånd avbildas på beräkningsbasen. Som ett exempel tas Paulioperatorn

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

σ_x har egenstillstånden

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{10}$$

Rotationen som avbildar $|+\rangle$ och $|-\rangle$ på $|0\rangle$ och $|1\rangle$ ges av

$$U_B^\dagger = \begin{pmatrix} | & | \\ |+\rangle & |-\rangle \\ | & | \end{pmatrix}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Just denna rotation kallas ofta för en Hadamardgrind H.

För kvanttomografi med flera kvantbitar används ofta tensorprodukter av identitetsmatrisen samt de tre Paulimatriserna

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

som mätoperatorer. Att mäta dessa operatorer på en kvantbit kan tolkas geometriskt som att mäta en kvantbit längs x, y eller z-axeln på Bloch-sfären 1. De tre Paulimatriserna kommuterar ej inbördes, men tensorprodukter av flera av dem i olika ordningar kan kommutera [35].

2.4 Selektiv tomografi

Vårt protokoll bygger delvis på ett protokoll för selektiv och effektiv kvanttillståndstomografi (SEEQST) som nyligen demonstrerades av Patel m. fl. [21]. Då SEEQST är en central komponent av vårt protokoll ges här en beskrivning av de relevanta delarna för SEEQST.

Det är främst två viktiga resultat av SEEQST som vi använder i vårt protokoll. Det första är att elementen i en täthetsmatris ρ för n kvantbitar systematiskt kan delas upp i 2^n olika disjunkta delmängder, där varje delmängd kan bestämmas oberoende av de andra med en bestämd mängd mätoperatorer. SEEQST [21] grupperar element i täthetsmatrisen ρ utifrån den bitvisa pariteten i dess index i, j. Då ρ är en $2^n \times 2^n$-matris går varje element i ρ att uttrycka på formen

$$\rho_{i,j} = \langle i_1 i_2 ... i_n | \, \rho \, | j_1 j_2 ... j_n \rangle \, , \tag{13}$$

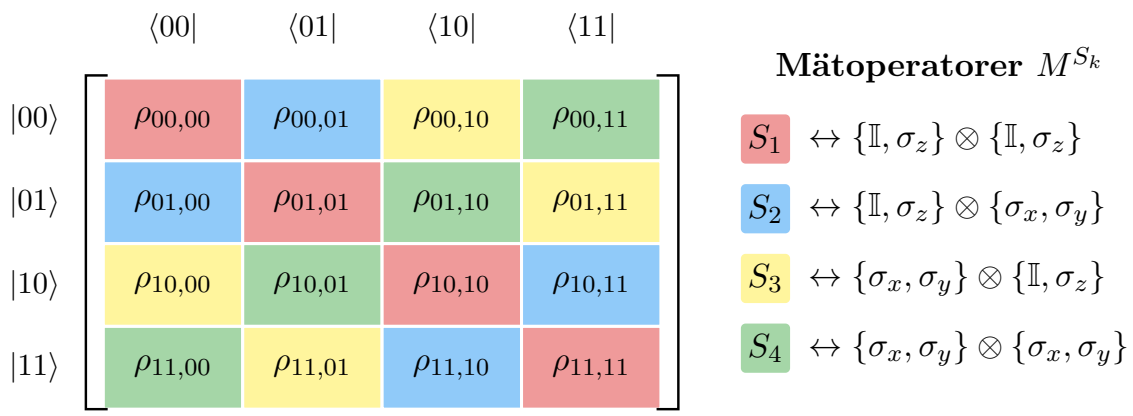
där $i_1 ... i_n$ och $j_1 ... j_n$ är i respektive j skrivna på binär form. Elementen ordnas systematiskt i de 2^n delmängderna $S_1, S_2, ..., S_{2^n}$ utefter om $i_l = j_l$ eller $i_l \neq j_l$ för vardera l. För varje delmängd S_k ges en tomografiskt mängd mätoperatorer för elementen i S_k av

$$M^{S_k} = \bigotimes_{l=1}^{n} \begin{cases} \{\mathbb{I}, \sigma_z\}, & \text{om } \ i_l = j_l \\ \{\sigma_x, \sigma_y\}, & \text{om } \ i_l \neq j_l. \end{cases} \tag{14}$$

Fallet $n = 2$ visas som exempel. Varje element i ρ kan uttryckas enligt $\rho_{i,j} = \rho_{i_1 i_2, j_1 j_2} = \langle i_1 i_2 | \, \rho \, | j_1 j_2 \rangle$, där $i_1 i_2$ och $j_1 j_2$ är indexet i binär notation. Uppdelningen i S_1–S_4 ges av indexen som

$$S_1 = \{\rho_{i_1 i_2, j_1 j_2} | i_1 = j_1, i_2 = j_2\}, \tag{15}$$
$$S_2 = \{\rho_{i_1 i_2, j_1 j_2} | i_1 = j_1, i_2 \neq j_2\}, \tag{16}$$
$$S_3 = \{\rho_{i_1 i_2, j_1 j_2} | i_1 \neq j_1, i_2 = j_2\}, \tag{17}$$
$$S_4 = \{\rho_{i_1 i_2, j_1 j_2} | i_1 \neq j_1, i_2 \neq j_2\}. \tag{18}$$

Hur dessa delmängder delar upp täthetsmatrisen samt vilka mätoperatorer som bildar tomografiskt kompletta mängder för dem visas grafiskt i figur 3.



Figur 3: Färgkodad täthetsmatris ρ för ett system med två kvantbitar, uppdelad i de fyra delmängderna S_1–S_4 (15). Tabellen till höger anger de mätoperatorer M^{S_k} som krävs för att bestämma elementen i respektive delmängd.

Det andra viktiga resultatet från SEEQST [21] som vi använder är att SEEQST ger ett effektivt sätt att göra mätningar på mätoperatorerna i varje delmängd M^{S_k}, vilket exponentiellt reducerar det totala antalet mätkretsar som behövs för QST. Delmängden S_1 består enbart av diagonala element ($i_l = j_l \ \forall l$) och $M^{S_1} = \{\mathbb{I}, \sigma_z\}^{\otimes n}$. Mätoperatorerna i M^{S_1} kommuterar trivialt och alla M^{S_1} kan därför bestämmas från en mätning i beräkningsbasen. Varje övrig mängd mätoperatorer M^{S_k} delas istället upp i två delmängder av inbördes kommuterande mätoperatorer: $\mathcal{E}(M^{S_k})$ där antalet σ_y i tensorprodukten är jämnt och $\mathcal{O}(M^{S_k})$ där antalet σ_y i tensorprodukten är udda. Eftersom alla mätoperatorerna i $\mathcal{E}(M^{S_k})$ respektive $\mathcal{O}(M^{S_k})$ kommuterar inbördes kan de alla mätas i ett experiment genom att göra en mätning i deras gemensamma egenbas. Efter omindexering av kvantbitarna så att de t kvantbitarna med $i_l \neq j_l$ kommer först kan de gemensamma egentillstånden uttryckas som

$$\mathcal{E}(M^{S_k}): \quad |e^{\pm}_{p\tilde{p}q}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|p\rangle \pm |\tilde{p}\rangle)\,|q\rangle\,, \tag{19}$$

$$\mathcal{O}(M^{S_k}): \quad |o^{\pm}_{p\tilde{p}q}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|p\rangle \pm i\,|\tilde{p}\rangle)\,|q\rangle\,, \tag{20}$$

där $|p\rangle \in |0\rangle \otimes |0\rangle, |1\rangle^{\otimes(t-1)}$, $|\tilde{p}\rangle$ är det bitvisa komplementet till $|p\rangle$ och $|q\rangle \in |0\rangle, |1\rangle^{\otimes(n-t)}$. Den första kvantbiten i $|p\rangle$ fixeras till $|0\rangle$ för att undvika att skapa en upprepad kopia av alla egentillstånden. För de två egenbaserna för $\mathcal{E}(M^{S_k})$ och $\mathcal{O}(M^{S_k})$ kan två mätkretsar $U_{\mathcal{E}}$ och $U_{\mathcal{O}}$ bestämmas så att de transformerar de gemensamma egentillstånden till beräkningsbasen [21]. Med dessa kan därför alla mätoperatorer i varje M^{S_k} mätas med endast två experimentuppställningar per delmängd S_k.

För full QST reducerar SEEQST antalet mätkretsar från standardmetodens 3^n, som kommer ifrån att direkt mäta alla $\{\mathbb{I}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}^{\otimes n}$, till $2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$, som kommer från att M^{S_1} mäts med en krets och $M^{S_2}, ..., M^{S_{2^n}}$ mäts med två kretsar vardera [21]. I det selektiva fallet behöver SEEQST som mest $2 \cdot n_S$ mätkretsar för att göra tomografiskt kompletta mätningar för en mängd element i täthetsmatrisen som tillhör n_S olika av delmängderna $\{S_k\}$. En nackdel med SEEQST är dock att de gemensamma mätkretsarna $U_{\mathcal{E}}$ och $U_{\mathcal{O}}$ konstrueras med sammanflätande CNOT-grindar som tenderar att vara mer kostsamma att använda än enkvantbitsgrindar.

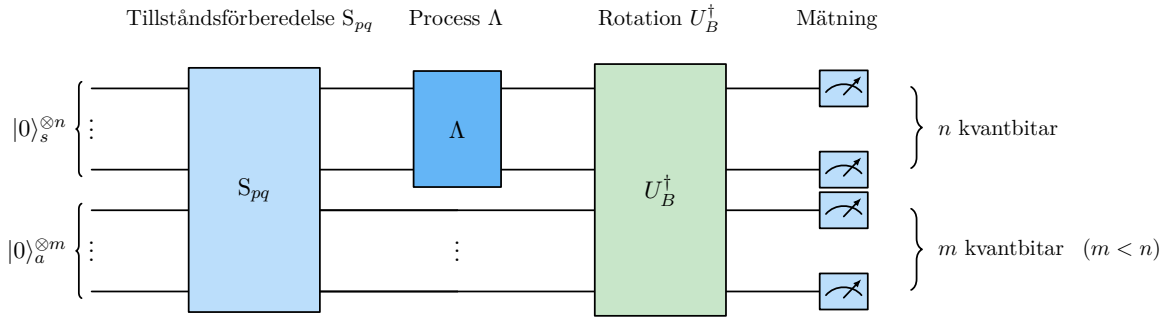
3 Protokollbeskrivning och utvärderingsmetod

Protokollet behandlar sammansatta system av m hjälpkvantbitar och n systemkvantbitar, där $0 < m < n$. Protokollet utgår från att man har en process Λ som man vill karakterisera, där processen verkar på de n systemkvantbitarna, och att man endast är intresserad av en selektiv delmängd av elementen i processens Choimatris. De sökta matriselementen kan beskrivas som en mängd

$$\mathcal{T} = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), ...\}, \tag{21}$$

där (i, j) är index för element i Choimatrisen som därför uppfyller $i, j \in 0, ..., 4^n - 1$.

Protokollet består av två delar, en som beskriver experimenten som ska utföras och en som gör databearbetningen för att bestämma matriselementen utifrån mätdatan. Den experimentella delen av protokollet bestämmer vilka ingångstillstånd som behövs samt vilka mätoperatorer på vilka av tillstånden som behövs för att kunna entydigt bestämma de sökta Choimatriselementen. Databearbetningsdelen av protokollet används sedan på insamlad mätdata för att bestämma en giltig Choimatris som bäst passar mätdatan, varifrån de sökta matriselementen sedan direkt kan plockas ut. Ett kretsschema för hur protokollet samlar in mätdatan illustreras i figur 4.



Figur 4: Kvantkretsschema för protokollets experimentella del. Tillståndsförberedelsekretsen S_{pq} verkar på de n systemkvantbitarna och de m hjälpkvantbitarna och förbereder ingångstillståndet $|\psi\rangle$ enligt ekvation (22). Processen Λ appliceras därefter på enbart systemkvantbitarna medan hjälpkvantbitarna förblir opåverkade. Slutligen mäts samtliga kvantbitar i en viss bas B med hjälp av mätkretsen $U_B^\dagger$.

3.1 Selektiva ingångstillstånd

För att experimentellt utföra QPT krävs en förberedelse av ingångstillstånd. Vårt protokoll tar fram ingångstillstånd efter selektiv princip. Selektiviteten innebär att endast några element i Choimatrisen är sökta och då olika ingångstillstånd ger olika element av Choimatrisen kan man implementera selektivitet i detta steg.

Ingångstillstånden som protokollet använder är rena tillstånd på formen

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{i=0}^{2^m-1} |i\rangle_A \otimes |p_i\rangle_{S_{\text{in}}} \quad \text{där} \quad p_i \in \{0, ..., 2^n - 1\}, \tag{22}$$

som är en superposition där 2^m olika tillstånd i beräkningsbasen för systemkvantbitarna $|p_i\rangle_{S_{\text{in}}}$ sammanflätas med ett hjälpkvantbitstillstånd $|i\rangle_A$ vardera. För enkelhets skull

använder protokollet alltid sorterade p_i, det vill säga att $i_2 > i_1 \Leftrightarrow p_{i_2} > p_{i_1}$. Efter verkan av processen Λ på ett ingångstillstånd fås ett tillstånd

$$\rho' = (\mathbb{I}_A \otimes \Lambda_{S_{\text{in}}})(|\psi\rangle\langle\psi|) = \frac{1}{2^m} \sum_{i=0}^{2^m-1} \sum_{j=0}^{2^m-1} |i\rangle\langle j|_A \otimes \Lambda(|p_i\rangle\langle p_j|)_{S_{\text{ut}}}. \tag{23}$$

Ingångstillstånden i ekvation (22) har fördelen att element i utgångstillståndet direkt motsvarar element i Choimatrisen. Ingångstillståndet $|\psi\rangle$ innehåller därför Choimatrisblocken $\Lambda(|p_i\rangle\langle p_j|) = \Lambda_{p_i,p_j}$ för $i, j = 0, ..., 2^m - 1$. Med exempelvis $n = 2$, $m = 1$ och $|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}\left(|0\rangle_A \otimes |1\rangle_{S_{\text{in}}} + |1\rangle_A \otimes |3\rangle_{S_{\text{in}}}\right)$ fås ρ' som

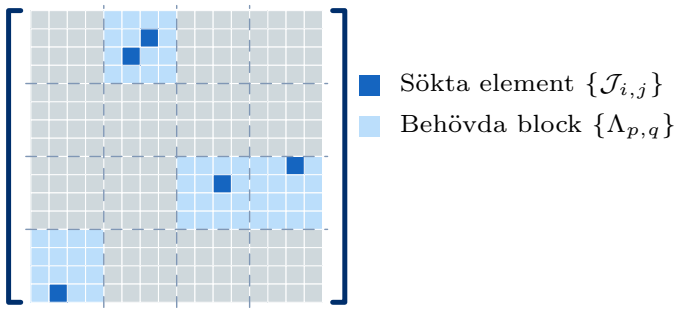
$$\rho' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \Lambda_{1,1} & \Lambda_{1,3} \\ \Lambda_{3,1} & \Lambda_{3,3} \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{J} = \begin{pmatrix} \Lambda_{0,0} & \Lambda_{0,1} & \Lambda_{0,2} & \Lambda_{0,3} \\ \Lambda_{1,0} & \Lambda_{1,1} & \Lambda_{1,2} & \Lambda_{1,3} \\ \Lambda_{2,0} & \Lambda_{2,1} & \Lambda_{2,2} & \Lambda_{2,3} \\ \Lambda_{3,0} & \Lambda_{3,1} & \Lambda_{3,2} & \Lambda_{3,3} \end{pmatrix}, \tag{24}$$

där kopplade block i Choimatrisen och tillståndet har markerats med rosa färg. Notera att utgångstillstånden kan tolkas som en blockmatris.

För att bestämma vilka ingångstillstånd som behövs för QPT bestämmer protokollet först vilka Choimatrisblock som alla sökta matriselement $\mathcal{T}$ ingår i. Blocken som innehåller de sökta elementen fås som

$$\mathcal{B} = \{(p, q) \mid \exists (i, j) \in \mathcal{T} \text{ s.a. } \mathcal{J}_{i,j} \in \Lambda_{p,q}\}.$$

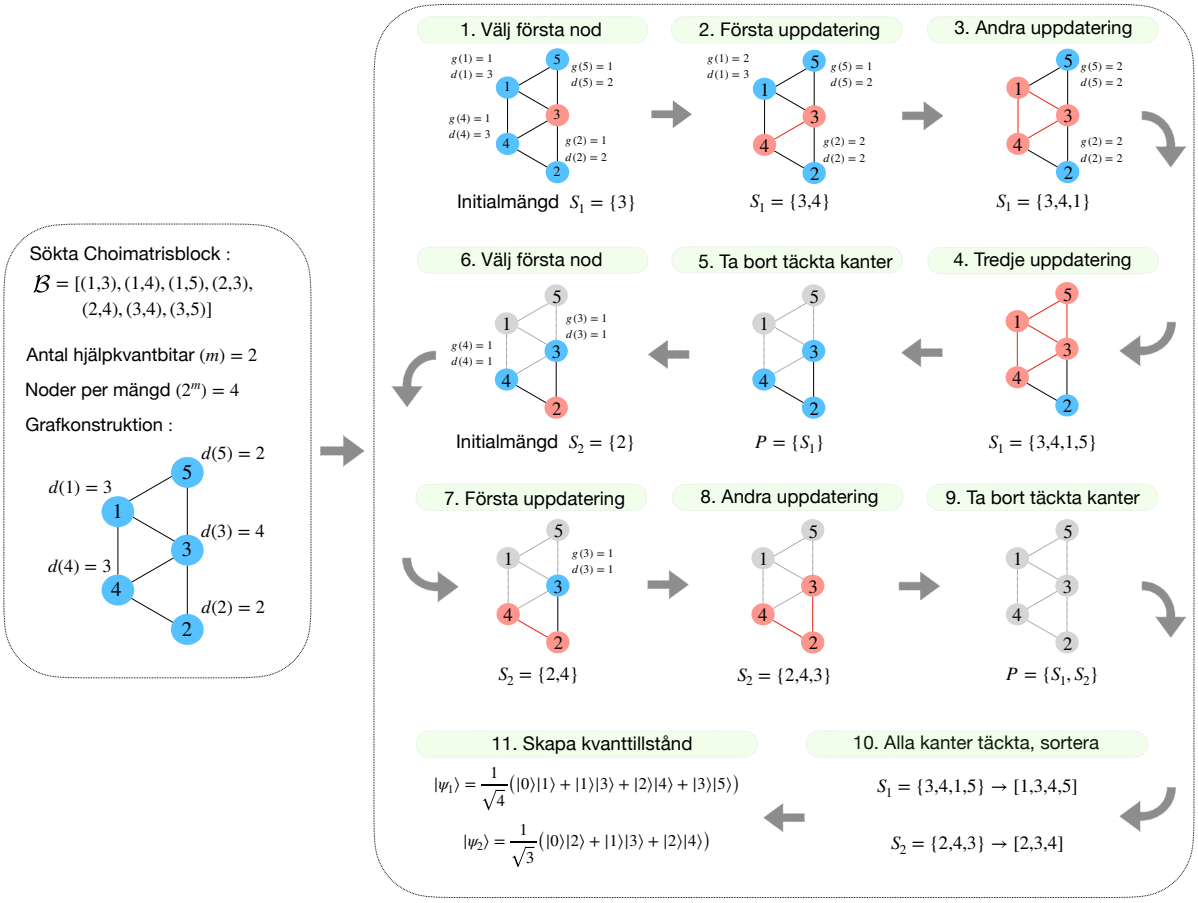
Hur de sökta Choimatriselementen $\{\mathcal{J}_{i,j}\}$ bestämmer vilka block $\{\Lambda_{p,q}\}$ som behövs tydliggörs med ett exempel i figur 5.



Figur 5: Exempel på hur de sökta Choimatriselementen bestämmer vilka block som ingångstillstånden behöver täcka. Antal systemkvantbitar $n = 2$, vilket innebär att Choimatrisen är en blockmatris av 4×4 block, där varje block $\Lambda_{p,q}$ är en 4×4-matris.

Därefter kan problemet att bestämma det minimala antalet ingångstillstånd som behövs omformuleras med hjälp av grafteori. I en oviktad graf med noder $1, ..., 2^{n-m}$ representeras varje sökt blockindex $(p, q) \in \mathcal{B}$ av en kant mellan nod p och nod q. Kanterna är oriktade eftersom tillstånd på formen från ekvation (22) som innehåller block $\Lambda_{p,q}$ även innehåller block $\Lambda_{q,p}$. Problemet blir då att täcka alla kanter i grafen med det minsta antalet tillstånd, där varje tillstånd består av 2^m noder och täcker alla de nodernas inbördes

kanter. Detta problem är ett sorts mängdövertäckningsproblem (*set cover problem*), som är NP-svårt [36]. Protokollet använder därför en girig heuristisk kanttäckningsalgoritm för att komma fram till en approximativ lösning i rimlig tid. Den giriga algoritmen försöker vid varje steg att lägga till den nod som direkt maximerar antalet täckta kanter. Algoritmen illustreras bäst med ett exempel, som ses i figur 6. Fullständig pseudokod för algoritmen finns i appendix A.2.



Figur 6: Överblicksillustration av den giriga kanttäckningsalgoritmens steg för att konstruera ingångstillstånd för QPT. Indata består av de sökta Choimatrisblockindexen $\mathcal{B}$, representerade som kanter i en graf, där varje nods grad $d(i)$ anger antalet block innehållande index i. Med $m = 2$ hjälpkvantbitar söker algoritmen mängder om maximalt $2^m = 2^2 = 4$ noder. Algoritmen itererar och väljer girigt den nod med flest grannar $g(i)$ i mängden tills mängden är full varefter täckta kanter tas bort från grafen. Vid lika g väljs nästa nod baserat på högst grad d. Om d är lika väljs en ny nod slumpmässigt. Processen upprepas till alla kanter är täckta.

3.2 Selektiva mätningar

En viss selektivitet fås genom att välja ingångstillstånd men för ytterligare selektivitet krävs även strategiska val av mätoperatorer. För att bestämma vilka mätoperatorer och i vilken bas som ska mätas används metoden SEEQST som introducerades av Patel m. fl. [21]. Hur man tillämpar SEEQST för att bestämma vilka mätningar som behövs för att kunna bestämma specifika element i täthetsmatrisen beskrivs i avsnitt 2.4.

För att använda SEEQST behöver protokollet dock först bestämma vilka de sökta elementen i varje tillstånd är. Eftersom protokollets utgångstillstånd består av block direkt från Choimatrisen [se ekvation (23) och (24)] innebär detta att varje Choimatriselement $\mathcal{J}_{i,j}$ helt enkelt måste omindexeras från Choimatrisens index (i, j) till motsvarande element i det utgångstillståndet $\rho'_{\xi,\eta}$ som innehåller elementet. Visuellt är detta enkelt att göra och kan ses i figur 5.

Matematiskt görs omindexeringen av varje $\mathcal{J}_{i,j}$ med $(i, j) \in \mathcal{T}$ genom att först hitta dess block $\Lambda_{p,q}$ som

$$p = i//2^n, \quad q = j//2^n. \tag{25}$$

Därefter bestäms blockets motsvarande blockindex i utgångstillståndet med hjälp av att ingångstillståndet är känt och ger ett utgångstillstånd på formen i ekvation (22). Om tillståndet skapas med indexen $A = [p_0, ..., p_{2^m-1}]$, där p_i är definierat enligt ekvation (22), fås blockindexen $(\tilde{p}, \tilde{q})$ i tillståndet som

$$\tilde{p} = \text{index}(p, A), \quad \tilde{q} = \text{index}(q, A), \tag{26}$$

där $\text{index}(x, A)$ innebär att hitta indexet av element x i listan A. Till sist kan elementets lokala index (ξ, η) i utgångstillståndet ρ' bestämmas som

$$\xi = \tilde{p} \cdot 2^m + i \bmod 2^n, \quad \eta = \tilde{q} \cdot 2^m + j \bmod 2^n. \tag{27}$$

3.3 Rekonstruktion av Choimatris via optimering

Hittills ger vårt protokoll metoden för att samla in datan vilket gör att problemet som återstår är att ta fram den giltiga Choimatrisen som bäst passar mätdatan. Uppgiften kan sammanfattas som att givet experimentellt uppmätta väntevärden Y_i för observabler M_i på system-hjälpkvantbit-tillstånd ρ_i, hitta de parametrar $\boldsymbol{\theta}$ som minimerar en viss förlustfunktion $L(\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}))$ för den givna datan.

Protokollet använder gradientnedstigning för att minimera förlustfunktionen $L(\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}))$. Mer specifikt används optimeringsalgoritmen Adam, som ger parameteruppdateringar enligt [37]

$$\boldsymbol{\theta}_t = \boldsymbol{\theta}_{t-1} - \frac{\eta \widehat{\boldsymbol{m}}_t}{\sqrt{\widehat{\boldsymbol{v}}_t} + \varepsilon}, \tag{28}$$

där $\boldsymbol{\theta}_t$ är parametrarna vid iteration t och η är stegstorleken. $\widehat{\boldsymbol{m}}_t$ och $\widehat{\boldsymbol{v}}_t$ är biaskorrigerade exponentiella medelvärden av första- respektive andramoment av gradienten $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} L(\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}_t))$ vid tidsteg t. Komplett pseudokod för Adam visas i appendix A.3.

3.3.1 Parametrisering av Choimatrisen

För att konstruera förlustfunktionen behövs en parametrisering $\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta})$ som ger en Choimatris $\mathcal{J}(\Lambda)$ som funktion av parametrarna $\boldsymbol{\theta}$. Protokollet använder en parametrisering som alltid ger en giltig Choimatris oavsett parametervärden. Detta har fördelen att vanlig gradientnedstigning utan bivillkor på parameteruppdateringarna kan användas för optimering. För att en Choimatris $\mathcal{J} : S_{\text{in}} \to S_{\text{ut}}$ ska vara giltig krävs som nämnt i avsnitt 2.2 att

$$\mathcal{J} \text{ är positivt semidefinit} \tag{29}$$

$$\text{Tr}_{S_{\text{ut}}}[\mathcal{J}] = \mathbb{I}_{S_{\text{in}}}. \tag{30}$$

Det innebär att $\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta})$ måste uppfylla (29) och (30) för alla möjliga $\boldsymbol{\theta}$.

Protokollet representerar parametrarna $\boldsymbol{\theta}$ med en komplex $4^n \times R$-matris A, där varje element är en fri parameter och där $R \in \mathbb{N}$ är rangen på ansatsen som bestämmer antalet parametrar. Genom att skapa produkten $AA^\dagger$ fås en positivt semidefinit matris. Denna matris uppfyller dock ej nödvändigtvis ekvation (30). Låt därför $\rho_e = \mathrm{Tr}_{S_{\mathrm{ut}}}[AA^\dagger]$ och gör en så kallad Cholesky-dekomposition av $\rho_e + \varepsilon \mathbb{I}_{S_{\mathrm{in}}}$ till en matris L sådan att $LL^\dagger = \rho_e + \varepsilon \mathbb{I}_{S_{\mathrm{in}}}$, där $\varepsilon \mathbb{I}_{S_{\mathrm{in}}}$ är en liten diagonalkomponent adderad för att garantera positiv definithet. Cholesky-dekomposition är alltid möjlig ty ρ_e är positivt semidefinit till följd av att $AA^\dagger$ är det samt att det partiella spåret bevarar positiv semidefinithet. Beräkna sedan inversen L^{-1}, vilket är möjligt ty $\rho_e + \varepsilon \mathbb{I}_{S_{\mathrm{in}}}$ är positivt definit och saknar därmed nollegenvärden tack vare diagonalkomponenten. Slutligen kan sedan en giltig Choimatris konstrueras som

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}) = (L \otimes \mathbb{I}_{S_{\mathrm{ut}}}) \left(AA^\dagger + \frac{\varepsilon}{2^n} \mathbb{I}_{S_{\mathrm{in}} \otimes S_{\mathrm{ut}}} \right) ((L^{-1})^\dagger \otimes \mathbb{I}_{S_{\mathrm{ut}}}). \tag{31}$$

$\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta})$ är uppenbart positivt semidefinit. Den uppfyller även ekvation (30) eftersom

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_{S_{\mathrm{ut}}}[\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta})] =& L^{-1} \mathrm{Tr}_{S_{\mathrm{ut}}} \left[AA^\dagger + \frac{\varepsilon}{2^n} \mathbb{I}_{S_{\mathrm{in}} \otimes S_{\mathrm{ut}}} \right] (L^{-1})^\dagger \\
=& L^{-1} (\mathrm{Tr}_{S_{\mathrm{ut}}} \left[AA^\dagger \right] + \varepsilon \mathbb{I}_{S_{\mathrm{in}}}) (L^\dagger)^{-1} = L^{-1} (\rho_e + \varepsilon \mathbb{I}_{S_{\mathrm{in}}}) (L^\dagger)^{-1} \\
=& L^{-1} L L^\dagger (L^{-1})^\dagger = \mathbb{I}_{S_{\mathrm{in}}}.
\end{aligned}$$

3.3.2 Förlustfunktion och optimeringsstrategi

Förlustfunktionen för gradientnedstigningen är inspirerad av en förlustfunktion för kvanttillståndstomografi introducerad av Gaikwad m. fl. [33]. Eftersom Choimatrisen kan tolkas som ett onormaliserat kvanttillstånd kan denna förlustfunktion direkt uttryckas som

$$L[\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta})] = \sum_k [Y_k - \mathrm{Tr}[\Pi_k \mathcal{J}(\boldsymbol{\theta})]]^2 + \lambda \|\boldsymbol{\theta}\|_{l_1}, \tag{32}$$

där Y_k är experimentellt uppmätta väntevärden, Π_k är mätningarnas motsvarande effektiva mätoperatorer på Choimatrisen, $\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta})$ är Choimatrisen givet parametrarna och $\lambda \geq 0$ är en justerbar regulariseringsfaktor.

För att kunna använda ekvation (32) i protokollet måste dock de effektiva mätoperatorerna på Choimatrisen Π_k bestämmas utifrån ingångstillstånden ρ_k och mätoperatorerna M_k som faktiskt användes för att uppmäta Y_k. För att göra det uttrycks väntevärdet av en mätoperator på ett utgångstillstånd ρ_k' som

$$\mathrm{Tr}\Big[M_k \underbrace{(\mathbb{I}_A \otimes \Lambda)\rho_k}_{\rho_k'}\Big] = \mathrm{Tr}\left[\mathrm{Tr}_A\left[(M_k \otimes \mathbb{I}_{S_{\mathrm{in}}})(\rho_k^{T_{S_{\mathrm{in}}}} \otimes \mathbb{I}_{S_{\mathrm{ut}}})\right] \mathcal{J}\right] = \mathrm{Tr}\left[\Pi_k \mathcal{J}\right], \tag{33}$$

där olika tensorprodukter av hjälpkvantbitsrummet A och systemkvantbitsrummen S_{in} samt S_{ut} används. Notera att $\rho_k, M_k \in A \otimes S_{\mathrm{in}}$ samt att $\Pi_k, \mathcal{J} \in S_{\mathrm{in}} \otimes S_{\mathrm{ut}}$. $\rho_k^{T_{S_{\mathrm{in}}}}$ betecknar här det partiella transponatet av ρ_k över hilbertrummet S_{in}. Vårt bevis av ekvation (33) visas i appendix A.1. Den sista raden i ekvationen ger direkt ett uttryck för Π_k som funktion av de använda ingångstillstånden ρ_k och de faktiska mätoperatorerna M_k som mättes på ρ_k. Med det kan den slutgiltiga förlustfunktionen uttryckas som

$$L[\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta})] = \sum_k \left[Y_k - \mathrm{Tr}\left[\mathrm{Tr}_A\left[(M_k \otimes \mathbb{I}_{S_{\mathrm{in}}})(\rho_k^{T_{S_{\mathrm{in}}}} \otimes \mathbb{I}_{S_{\mathrm{ut}}})\right] \mathcal{J}(\boldsymbol{\theta})\right]\right]^2 + \lambda \|\boldsymbol{\theta}\|_{l_1} \tag{34}$$

3.4 Tillämpningsexempel: CNOT-grind

För att tydliggöra hur protokollet fungerar och visa på dess funktion används ett exempel. Vi söker elementen $\mathcal{J}_{0,5}$, $\mathcal{J}_{5,5}$, $\mathcal{J}_{11,5}$ och $\mathcal{J}_{14,5}$ med $n = 2$ systemkvantbitar och $m = 1$ hjälpkvantbit i Choimatrisen för en CNOT-grind. CNOT-grinden beskrivs av den unitära matrisen

$$U_{\text{CNOT}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{35}$$

vilket ger Choimatrisen

$$\mathcal{J}_{\text{CNOT}} = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} |i\rangle\langle j| \otimes U_{\text{CNOT}} |i\rangle\langle j| U_{\text{CNOT}}^{\dagger}. \tag{36}$$

Protokollet genererar ingångstillstånden

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle) \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |2\rangle) \\ |\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |3\rangle) \end{aligned} \tag{37}$$

som spänner upp delar av Choimatrisen enligt

$$\mathcal{J}_{\text{CNOT}} = \begin{pmatrix} \Lambda_{0,0} & \Lambda_{0,1} & \Lambda_{0,2} & \Lambda_{0,3} \\ \Lambda_{1,0} & \Lambda_{1,1} & \Lambda_{1,2} & \Lambda_{1,3} \\ \Lambda_{2,0} & \Lambda_{2,1} & \Lambda_{2,2} & \Lambda_{2,3} \\ \Lambda_{3,0} & \Lambda_{3,1} & \Lambda_{3,2} & \Lambda_{3,3} \end{pmatrix}, \tag{38}$$

där varje block $\Lambda_{p,q}$ är en 4×4-matris. De röda blocken spänns upp av $|\psi_1\rangle$, de gula av $|\psi_2\rangle$ och de blå av $|\psi_3\rangle$. Det lila blocket täcks av alla tre tillstånden. De sökta elementen $\mathcal{J}_{0,5}$, $\mathcal{J}_{5,5}$, $\mathcal{J}_{11,5}$ och $\mathcal{J}_{14,5}$ tillhör $\Lambda_{0,1}$, $\Lambda_{1,1}$, $\Lambda_{2,1}$ respektive $\Lambda_{3,1}$.

Med hjälp av hur blocken $\Lambda_{p,q}$ ordnas i utgångstillstånden

$$\rho^{(1)} = \begin{pmatrix} \Lambda_{0,0} & \Lambda_{0,1} \\ \Lambda_{1,0} & \Lambda_{1,1} \end{pmatrix}, \quad \rho^{(2)} = \begin{pmatrix} \Lambda_{1,1} & \Lambda_{1,2} \\ \Lambda_{2,1} & \Lambda_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \rho^{(3)} = \begin{pmatrix} \Lambda_{1,1} & \Lambda_{1,3} \\ \Lambda_{3,1} & \Lambda_{3,3} \end{pmatrix}, \tag{39}$$

översätts de sökta Choimatrisindexen $\mathcal{J}_{i,j}$ till index i tillstånden $\rho^{(k)}_{\xi,\eta}$ enligt avsnitt 3.2 som:

$$\mathcal{J}_{0,5} \to \rho^{(1)}_{0,5} = \rho^{(1)}_{000,101} \qquad \mathcal{J}_{5,5} \to \rho^{(1)}_{5,5} = \rho^{(1)}_{101,101} \tag{40}$$

$$\mathcal{J}_{11,5} \to \rho^{(2)}_{7,5} = \rho^{(2)}_{111,101} \qquad \mathcal{J}_{14,5} \to \rho^{(3)}_{6,5} = \rho^{(3)}_{110,101} \tag{41}$$

Protokollet bestämmer därefter de mätoperatorer som krävs för att extrahera de sökta elementen med SEEQST på vardera utgångstillstånd enligt avsnitt 2.4:

$$M^{\rho^{(1)}_{000,101}} = \{\sigma_x, \sigma_y\} \otimes \{\mathbb{I}, \sigma_z\} \otimes \{\sigma_x, \sigma_y\} \quad M^{\rho^{(1)}_{101,101}} = \{\mathbb{I}, \sigma_z\}^{\otimes 3} \tag{42}$$

$$M^{\rho^{(2)}_{111,101}} = \{\mathbb{I}, \sigma_z\} \otimes \{\sigma_x, \sigma_z\} \otimes \{\mathbb{I}, \sigma_z\} \quad M^{\rho^{(3)}_{110,101}} = \{\mathbb{I}, \sigma_z\} \otimes \{\sigma_x, \sigma_y\} \otimes \{\sigma_x, \sigma_y\} \tag{43}$$

För varje av dessa grupper förutom $M^{\rho^{(1)}_{101,101}}$ ger SEEQST två mätkretsar $U_{\mathcal{E}}$ och $U_{\mathcal{O}}$ som används för att bestämma alla mätoperatorer i gruppen. Då $\rho_{101,101}$ är ett diagonalelement kan $M^{\rho^{(1)}_{101,101}}$ mätas direkt i beräkningsbasen med endast en mätkrets (mätkretsen är att ej göra någon rotation före mätning).

Mätningar för mätoperatorerna ovan på utgångstillstånden simuleras och deras väntevärden används för rekonstruktion av Choimatrisen enligt avsnitt 3.3. Resultatet av optimeringen för detta exempel redovisas i avsnitt 4.

3.5 Utvärderingsmetod

Vi utvärderar protokollet genom att implementera alla dess delar i kod och köra simuleringar med dessa. Protokollet utvärderas både i form av dess separata beståndsdelar och som helhet. En simulering av hela protokollet innefattar att givet n, m, sökta element $\mathcal{T}$, en sann process Λ och dess Choimatris $\mathcal{J}(\Lambda)$ köra alla delar av protokollet för att få fram en selektiv rekonstruktion av Choimatrisen.

3.5.1 Resurskrav

Protokollets resurskrav utvärderas delvis genom att jämföra vilka experimentella resurser som behövs för att genomföra vanlig QPT, full hjälpkvantbitsassisterad QPT samt vårt protokolls selektiva hjälpkvantbitsassisterade QPT. Övre gränser för antal ingångstillstånd, mätkretsar, experiment samt väntevärden som behövs för vårt protokoll beräknas under antagandet att $\mathcal{T}$ är så ofördelaktigt valda som möjligt.

En annan intressant fråga är hur många ingångstillstånd som kanttäckningsalgoritmen ger samt hur optimala de ingångstillstånden är. Ett fall där detta enkelt går att undersöka är om alla block i Choimatrisen ska täckas av tillstånden. I så fall kan en undre gräns för antalet tillstånd på formen i ekvation (22) bestämmas till den så kallade Schönheims undre gräns som

$$|\mathcal{P}| \geq \left\lceil \frac{\binom{2^n}{2}}{\binom{2^m}{2}} \right\rceil = 2^{n-m} \left\lceil \frac{2^n - 1}{2^m - 1} \right\rceil. \tag{44}$$

Uttrycket kommer från att dela det totala antalet kanter i grafen med antalet kanter som varje tillstånd optimalt kan täcka om inget överlapp sker. Uttrycket är även ett exempel på en mer allmän undre gräns för mängdövertäckningsproblem som först studerades av Schönheim [38]. För stora n och m beter sig gränsen som $\sim 4^{n-m}$. Antalet tillstånd som protokollets heuristiska algoritm ger jämförs med den kända undre gränsen i avsnitt 4.2.

Ett annat sätt som protokollets resurskrav utvärderas är att testa beräkningstiden som krävs för att nå en viss felnivå för olika systemstorlekar n. För att göra det behövs ett mått på hur nära en selektivt rekonstruerad Choimatris $\tilde{\mathcal{J}}$ är den sanna Choimatrisen $\mathcal{J}(\Lambda)$ för en viss process. Ett mått som används i delar av resultatet är det så kallade medelabsolutfelet över de sökta elementen, vilket definieras som

$$\text{medelabsolutfel} = \frac{1}{|\mathcal{T}|} \sum_{(i,j)\in\mathcal{T}} \left| \tilde{\mathcal{J}}_{i,j} - \mathcal{J}_{i,j} \right|. \tag{45}$$

Medelabsolutfelet är dock inte direkt jämförbart mellan system av olika storlek då medelstorleken på element i Choimatrisen avtar med systemets storlek till följd av kravet om spårbevaring. Detta gör att en ”dålig” gissning av Choimatrisen i genomsnitt ger ett lägre fel för större n än för lägre n, om allt annat är lika. För utvärdering av protokollet används bland annat slumpmässiga Choimatriser dragna från ensemblen introducerad av Bruzda m. fl. [39]. Dessa Choimatriser har att

$$\mathbb{E}[|\mathcal{J}_{i,j}|] \sim \sqrt{\mathbb{E}[|\mathcal{J}_{i,j}|^2]} = \frac{1}{4^n}\,\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{4^m-1}\sum_{j=0}^{4^m-1}|\mathcal{J}_{i,j}|^2\right] = \frac{1}{4^n}\,\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\left[\mathcal{J}^2\right]\right] = \frac{1}{4^n}, \tag{46}$$

där sista likheten kommer från att $\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\left[\mathcal{J}^2\right]\right] = 1$ i ensemblen [39]. I fall där fel måste jämföras mellan systemstorlekar används därför ett normaliserat medelabsolutfel definierat som

$$\text{normaliserat medelabsolutfel} = \frac{4^n}{|\mathcal{T}|}\sum_{(i,j)\in\mathcal{T}}\left|\tilde{\mathcal{J}}_{i,j} - \mathcal{J}_{i,j}\right|. \tag{47}$$

3.5.2 Brustålighet

En central del av protokollets praktiska användbarhet är dess robusthet mot statistiskt brus. Protokollets brustålighet testas därför genom att köra hela simuleringar där mätbrus introduceras i väntevärdena som protokollet mäter. De ideala mätningarna som protokollet gör ger väntevärden $Y_k \in [-1, 1]$ med hjälp av den sanna processen. Vid en experimentell implementation av protokollet skulle mätningar istället utföras genom att köra upprepade experiment och beräkna medelvärdet av mätutfallen. Då varje mätoperator som protokollet använder har egenvärden ± 1 blir varje experimentellt mätutfall alltid $+1$ eller -1. Varje mätutfall för mätoperator M_k ges därför av en oberoende slumpvariabel med utfallsrum $\{-1, 1\}$ och sannolikhetsfunktion

$$p_k(-1) = \frac{1 - Y_k}{2}, \quad p_k(1) = \frac{1 + Y_k}{2}. \tag{48}$$

En form av experimentellt mätbrus simuleras därför genom att göra ett ändligt antal dragningar N för varje mätkrets som protokollet ger, och att sedan beräkna de experimentella väntevärdena för motsvarande mätoperatorer utifrån medelvärdena av deras egenvärden för alla mätutfallen. Därefter jämför vi hur väl protokollets selektiva rekonstruktion fungerar för olika N och jämfört med det ideala brusfria fallet, som kan tolkas som gränsvärdet då $N \to \infty$.

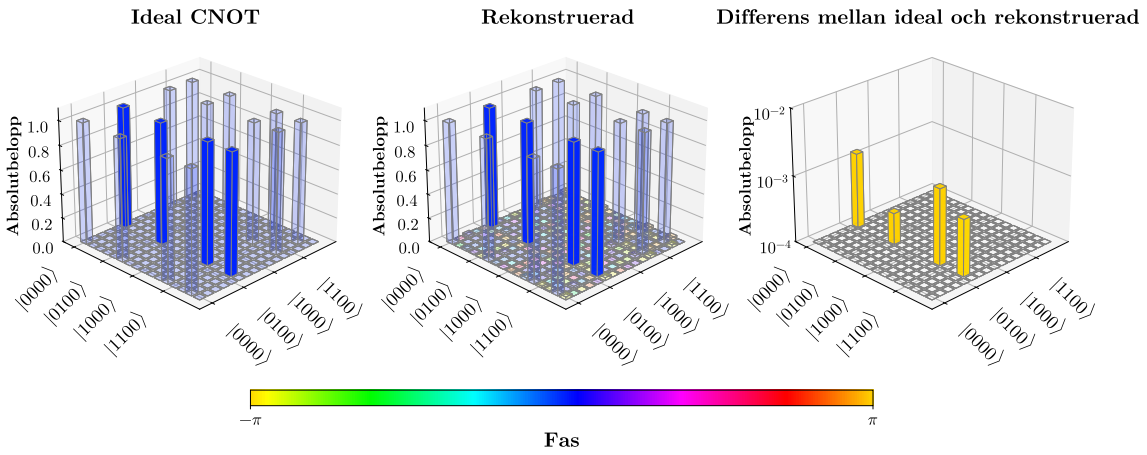
4 Resultat

Här utvärderas protokollet utifrån dess förmåga att rekonstruera processer, dess resurskrav samt robusthet mot statistiskt mätbrus.

4.1 Resultat för CNOT-exemplet

För tillämpningsexemplet i avsnitt 3.4 visar figur 7 den ideala Choimatrisen för en CNOT-grind och protokollets rekonstruerade Choimatris, elementen som var sökta har full opacitet. Differensen mellan den ideala CNOT-grindens och protokollets rekonstruktion finns

också redovisad i den tredje plotten. I figuren ses att även de ickesökta elementen i Choimatrisen rekonstrueras väl, vilket troligtvis beror på att de sökta elementen är tillräckliga för att fullständigt bestämma CNOT-grindens Choimatris. Detta beror på att en CNOT-grind är en unitär process vilket innebär att den har betydligt färre frihetsgrader än en godtycklig kvantprocess.



Figur 7: Figuren visar hur protokollet rekonstruerade de sökta Choimatriselementen från avsnitt 3.4 ($\mathcal{J}_{0,5}$, $\mathcal{J}_{5,5}$, $\mathcal{J}_{11,5}$, $\mathcal{J}_{14,5}$) jämfört med den ideala CNOT-grindens Choimatris. De mer mättade elementen är de sökta elementen. Inställningarna som användes var $n = 2$, $m = 1$, batchstorlek=16, $\eta = 0{,}01$, $R = 16$ och 2000 iterationer.

4.2 Resurskrav

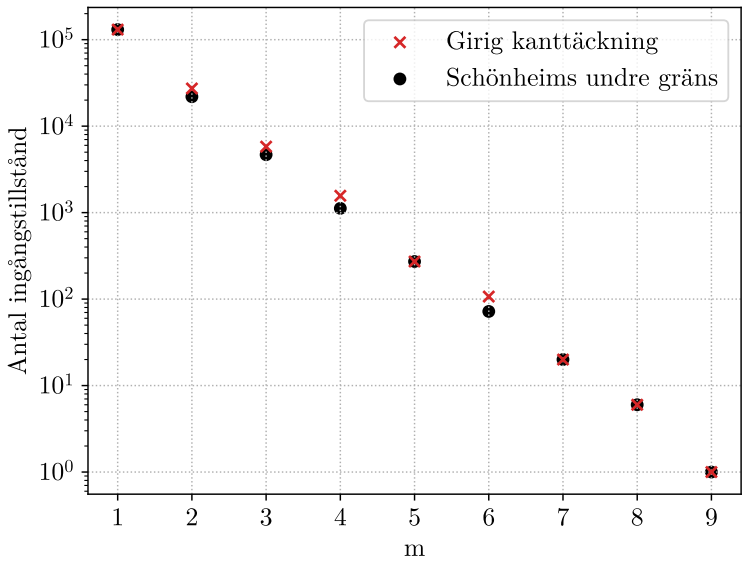
En viktig aspekt av protokollet är dess experimentella resurskrav och hur det jämför sig med icke-selektiva protokoll för QPT. En jämförelse mellan vanlig QPT, full hjälpkvantbitsassisterad QPT och vårt protokoll visas i tabell 1. Då vårt protokoll är selektivt beror många av egenskaperna på exakt vilka Choimatriselement $\mathcal{T}$ som söks och hur många de är. I tabellen visas därför det värsta fallet för protokollet som övre gräns, vilket främst fås då $\mathcal{T}$ är få och slumpmässigt fördelade. I många fall behöver protokollet egentligen betydligt färre resurser än vad den övre gränsen i 1 visar. Exempelvis behöver varje element som ska bestämmas i varje utångstillstånd generellt två mätkretsar för SEEQST, $U_{\mathcal{E}}$ och $U_{\mathcal{O}}$, enligt 2.4. Mätningar med dessa mätkretsar är tomografiskt kompletta för alla element i delmängden S_k av elementen i utgångstillståndet, vilket innebär att om flera sökta element tillhör samma mängd S_k i uppdelningen av täthetsmatrisen bestäms de samtidigt med endast två mätkretsar. Detta överlapp gäller inte enbart inom samma tillstånd utan det gäller för alla utgångstillstånd i protokollet. Det innebär att alla sökta element vars lokala index enligt (27) i sitt utgångstillstånd tillhör samma delmängd S_k, använder exakt samma två mätkretsar, istället för att två nya mätkretsar behövs för vardera av elementen.

En annan aspekt av protokollets resurskrav är hur väl dess algoritmer och databehandling fungerar. I figur 8 utvärderas protokollets giriga kanttäckningsalgoritm genom att jämföra antalet ingångstillstånd som algoritmen ger med den teoretiska undre gränsen (44) för full

Tabell 1: Jämförelse av de experimentella resurskraven för vanlig QPT, full hjälpkvantbitsassisterad QPT och vår selektiva hjälpkvantbitsassisterade QPT. För vårt selektiva protokoll beror många egenskaper på exakt vilka element $\mathcal{T}$ som söks och hur många de är. Egenskaperna visas därför med olikheter där den övre gränsen är det värsta fallet för protokollet, som främst uppstår om $\mathcal{T}$ är få och slumpmässigt fördelade. Egenskaperna för vanlig QPT och full hjälpkvantbitsassisterad QPT är hämtade från [20] respektive [20; 23]. De övre gränserna för vårt selektiva protokoll härleds i appendix A.4.

Egenskap	**Vanlig QPT**	**Full hjälpkvantbits-assisterad QPT**	**Selektiv hjälpkvant-bitsassisterad QPT**
Hjälpkvantbitar	0	n	$1 \leq m \leq n$
Totala kvantbitar	n	$2n$	$n + m$
Selektiv	Nej	Nej	Ja
Ingångstillstånd	4^n	1	$\leq \lceil 2^{1-m}\lvert\mathcal{T}\rvert \rceil$
Unika mätkretsar	3^n	9^n	$\leq 2\lvert\mathcal{T}\rvert$
Unika experiment	12^n	9^n	$\leq \lceil 2^{2-m}\lvert\mathcal{T}\rvert \rceil$
Väntevärden	16^n	16^n	$\leq 2^{n+1}\lvert\mathcal{T}\rvert$

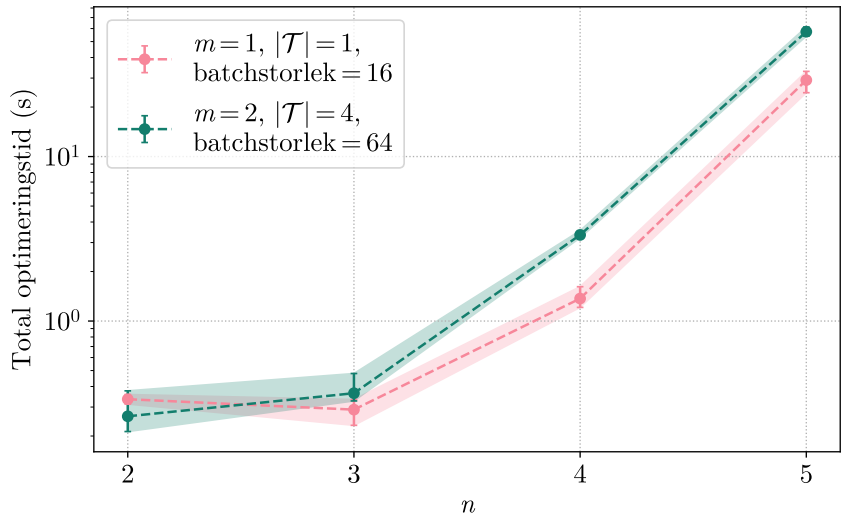
QPT med $n = 9$ och olika m. Figuren visar att den giriga heuristiken ger antal tillstånd som är i samma storleksordning som den teoretiska undre gränsen för alla m. För flera värden på m matchar antalet tillstånd exakt till den undre gränsen vilket visar att den giriga heuristiken faktiskt hittar det globala minimat till kanttäckningsproblemet.



Figur 8: Antal ingångstillstånd som protokollets giriga heuristik behöver för att täcka alla block i Choimatrisen jämfört med Schönheims undre gräns (44). Antal systemkvantbitar $n = 9$ och antal hjälpkvantbitar $1 \leq m \leq 9$.

Figuren visar även nyttan av att använda fler hjälpkvantbitar om de finns tillgängliga. Antalet ingångstillstånd som behövs avtar exponentiellt med antalet hjälpkvantbitar som används. I gränsen då $m = n$ behövs endast ett ingångstillstånd eftersom Choitillståndet (7) per definition ger hela Choimatrisen enligt (8). Användning av fler hjälpkvantbitar innebär dock att av varje tillstånd blir mer komplicerat att förbereda vilket kan leda till ökade SPAM-fel.

Optimeringstiden som protokollet behöver för att uppnå ett normaliserat medelabsolutfel $< 10^{-3}$ med olika antal systemkvantbitar n redovisas i figur 9. Beräkningstiden ökar exponentiellt med n, men är ändå väldigt kort för små n. Den längsta optimeringstiden var cirka en minut för $n = 5$ och antalet sökta element $|\mathcal{T}| = 4$, vilket visar på snabbheten i den gradientnedstigning som protokollet använder. Optimeringen kördes på en vanlig dator med 32 GB minne. $n > 5$ testades ej då optimeringskoden behövde mer minne än vad som fanns tillräckligt för $n > 5$.



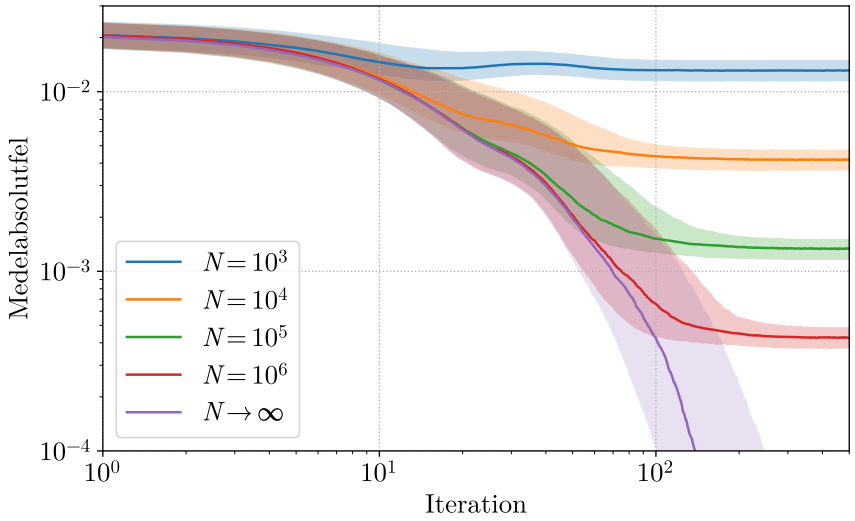
Figur 9: Optimeringstiden som krävs för att nå ett normaliserat medelfel $< 10^{-3}$ för olika n för två val av m och antal sökta element $|\mathcal{T}|$. Graferna visar median och undre 16-percentilen samt övre 84-percentilen för 30 körningar med helt slumpmässiga processer och slumpmässigt valda sökta element $\mathcal{T}$. Notera att y-axeln är i log-skala. Inställningarna som användes var $\eta = 0{,}005$ och $R = 4^n$.

4.3 Brustålighet

Protokollets brustålighet testades genom att simulera mätbrus som uppstår när endast ett ändligt antal N experiment görs per mätkrets som protokollet använder. I figur 10 visas medelabsolutfelet som funktion av optimeringsiteration för olika antal mätningar per mätkrets N. Graferna visar att mätbruset får optimeringen att konvergera till en Choimatris med större medelabsolutfel för de sökta elementen jämfört med det ideala fallet då $N \to \infty$. För varje testat ändligt N är spridningen i slutfelet mellan körningar relativt liten, vilket tyder på att varje N ger ett väldefinierat felgolv som är den begränsande faktorn till hur väl elementen i Choimatrisen kan rekonstrueras. Slutfelet avtar med N ungefär som $1/\sqrt{N}$ vilket överensstämmer med hur variansen i de brusiga väntevärdena

avtar då de är statistiska medelvärden av N slumpvariabler.

I relation till arbetets syfte visar dessa resultat att protokollets prestanda inte enbart bestäms av dess teoretiska egenskaper, utan även av statistiska begränsningar i mätprocessen. Trots detta uppvisar metoden ett stabilt och förutsägbart beteende även vid brusnivåer som är representativa för dagens kvanttekniska hårdvara. Detta indikerar att protokollet är robust nog för praktisk användning, samtidigt som det möjliggör en kvantitativ avvägning mellan resurskrav (antal mätningar) och rekonstruktionsnoggrannhet. En sådan avvägning är särskilt värdefull i selektiv kvantprocesstomografi, där målet är att minimera experimentella resurser utan att förlora relevant information.



Figur 10: Medelabsolutfel som funktion av optimeringsiteration för olika antal mätningar per mätkrets N. Graferna visar att större N leder till lägre slutgiltigt fel. Fallet $N \to \infty$ motsvarar ideala mätningar utan statistiskt brus. Graferna visar median samt undre 16-percentilen och övre 84-percentilen för 500 körningar med helt slumpmässiga processer. Inställningarna som användes var $n = 3$, $m = 1$, $|\mathcal{T}| = 16$, $\eta = 0.01$, $R = 4^3$ och batchstorlek = 64.

5 Diskussion

Vårt protokoll möjliggör QPT med en flexibel avvägning mellan tillståndsförberedelser och mätkretsar genom att variera antalet hjälpkvantbitar. Eftersom valet av ingångstillstånd och mätningar är selektivt blir protokollet dessutom mycket resurssnålt när endast en delmängd av Choimatrisen söks. Parametriseringen och optimeringen för att uppfylla fysikaliska villkor arbetar dock på hela Choi-matrisen och kräver beräkningsresurser därefter. Resultaten visar även att protokollets optimeringsmetod kan rekonstruera de sökta elementen i Choimatrisen med hög noggrannhet på ett fysikaliskt giltigt vis under både ideala och brusiga förhållanden.

En viktig aspekt av protokollet är hur tåligt det är mot SPAM-fel. Denna fråga har inte besvarats direkt av resultatet men en del kvalitativa resonemang kan göras. Fördelarna med protokollet från ett SPAM-fels-perspektiv är att protokollet reducerar antalet unika

tillståndsförberedelser och mätkretsar som behövs för QPT, vilket kan göra att varje experimentuppställning kan kalibreras bättre. Ett reducerat antal mätkretsar ger även en direkt minskning av en viss sorts mätbrus. Som sågs i figur 10 begränsas noggrannheten i rekonstruktionen av Choimatrisen av ett brusgolv som bestäms av antalet mätningar per mätkrets N. Genom att protokollet minskar antalet mätkretsar som behövs kan man med samma antal totala experimentkörningar göra fler experiment med varje mätkrets. Detta ökade N möjliggör i sin tur en mer korrekt rekonstruktion än om fler mätkretsar hade behövts.

En nackdel med protokollet är att både tillståndsförberedelsekretsarna och mätkretsarna är större och kräver mer komplicerade grindar än de för vanlig QPT, vilket kan leda till ökade SPAM-fel. Mätkretsarna för SEEQST har testats experimentellt av Patel m. fl. [21] på system med upp till fem kvantbitar. De fann att QST fungerade lika bra med SEEQST-mätkretsarna som med de mindre komplicerade men till antalet fler vanliga QST-mätkretsarna. Hur väl tillståndsförberedelsekretsarna för ingångstillstånden (22) fungerar experimentellt är något som behöver testas vidare. Tillståndsförberedelsen för (22) är även viktig då den är ekvivalent med att implementera QRAM (*quantum random access memory*) som är en viktig komponent i flera kvantalgoritmer [40].

En stor begränsning av protokollets databehandling är den stora mängden minne som behövs vid optimeringen. Oavsett hur få element i Choimatrisen som söks behöver protokollet alltid konstruera och optimera på en hel Choimatris för att garantera att elementen som bestäms kan vara del av en fysikaliskt giltig Choimatris. Detta innebär att optimeringskodens minnesanvändning i huvudsak skalar med Choimatrisens antal element som 16^n, vilket gör optimeringen svårbehandlad på vanliga datorer redan för $n = 6$ kvantbitar. En potentiell lösning på detta problem kan vara att rekonstruera varje utgångstillstånd var för sig med QST och att direkt extrahera de sökta Choimatriselementen från de rekonstruerade tillstånden. Detta skulle reducera optimeringens minnesanvändning till $\mathcal{O}(4^{n+m})$, vilket för $m << n$ innebär att tomografi av nästan dubbelt så högt n blir genomförbar med samma minne. Även beräkningstiden bör reduceras av förändringen då gradientnedstigningen tar exponentiellt mer tid på större system. Denna lösning har dock nackdelen att under icke-ideala förhållanden finns det ingen garanti att de rekonstruerade elementen kan vara del av en fysikaliskt giltig Choimatris. Hur mycket detta påverkar optimeringens förmåga att korrekt bestämma de sökta Choimatriselementen under brusiga förhållanden är något som också bör undersökas i framtida forskning.

Referenser

[1]E. R. MacQuarrie, C. Simon, S. Simmons och E. Maine, ”The emerging commercial landscape of quantum computing”, Nature Reviews Physics **2**, 596–598 (2020).

[2]A. Acín, I. Bloch, H. Buhrman m. fl., ”The quantum technologies roadmap: a European community view”, New Journal of Physics **20**, 080201 (2018).

[3]M. A. Nielsen och I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, 10th Anniversary Edition (Cambridge University Press, [2010]).

[4]A. Abbas, A. Ambainis, B. Augustino m. fl., ”Challenges and opportunities in quantum optimization”, Nature Reviews Physics **6**, 718–735 (2024).

[5]A. M. Dalzell, S. McArdle, M. Berta m. fl., *Quantum Algorithms: A Survey of Applications and End-to-end Complexities* (Cambridge University Press, [2025]).

[6]S. McArdle, S. Endo, A. Aspuru-Guzik, S. C. Benjamin och X. Yuan, ”Quantum computational chemistry”, Reviews of Modern Physics **92**, 015003 (2020).

[7]J. C. L. Chow, ”Quantum Computing in Medicine”, Medical Sciences **12**, 67 (2024).

[8]J. Eisert, D. Hangleiter, N. Walk m. fl., ”Quantum certification and benchmarking”, Nature Reviews Physics **2**, 382–390 (2020).

[9]A. Hashim, L. B. Nguyen, N. Goss m. fl., ”Practical Introduction to Benchmarking and Characterization of Quantum Computers”, PRX Quantum **6**, 030202 (2025).

[10]V. Gebhart, R. Santagati, A. A. Gentile m. fl., ”Learning quantum systems”, Nature Reviews Physics **5**, 141–156 (2023).

[11]C. Cohen-Tannoudji, B. Diu och F. Laloë, *Quantum Mechanics*, vol. 2 (Wiley, New York, [1977]).

[12]D. F. V. James, P. G. Kwiat, W. J. Munro och A. G. White, ”Measurement of qubits”, Physical Review A **64**, 052312 (2001).

[13]Y. Liu, L. F. Wei och F. Nori, ”Tomographic measurements on superconducting qubit states”, Physical Review B **72**, 014547 (2005).

[14]A. I. Lvovsky och M. G. Raymer, ”Continuous-variable optical quantum-state tomography”, Reviews of Modern Physics **81**, 299 (2009).

[15]T. Baumgratz, D. Gross, M. Cramer och M. B. Plenio, ”Scalable Reconstruction of Density Matrices”, Physical Review Letters **111**, 020401 (2013).

[16]Y. Hu, C. Zhen, X. Wang m. fl., ”Quantum process overlapping tomography: Theory and experiment”, Physical Review Applied **23**, 064042 (2025).

[17]C. A. Riofrío, D. Gross, S. T. Flammia m. fl., ”Experimental quantum compressed sensing for a seven-qubit system”, Nature Communications **8**, 15305 (2017).

[18]J. Li, S. Huang, Z. Luo m. fl., ”Optimal design of measurement settings for quantum-state-tomography experiments”, Physical Review A **96**, 032307 (2017).

[19]J. Cotler och F. Wilczek, ”Quantum Overlapping Tomography”, Physical Review Letters **124**, 100401 (2020).

[20]M. Mohseni, A. T. Rezakhani och D. A. Lidar, ”Quantum-process tomography: Resource analysis of different strategies”, Physical review **77**, 10.1103/PhysRevA.77.032322 (2008).

[21]A. Patel, A. Gaikwad, T. Huang, A. F. Kockum och T. Abad, ”Selective and efficient quantum state tomography for multiqubit systems”, Physical Review Research **8**, 013339 (2026).

[22]A. Bendersky och J. P. Paz, ”Selective and efficient quantum state tomography and its application to quantum process tomography”, Phys. Rev. A **87**, 012122 (2013).

[23]D. W. Leung, ”Choi’s proof as a recipe for quantum process tomography”, Journal of Mathematical Physics **44**, 528–533 (2003).

[24]J. B. Altepeter, D. Branning, E. Jeffrey m. fl., ”Ancilla-Assisted Quantum Process Tomography”, Physical Review letters **90**, 193601 (2003).

[25]A. Bendersky, F. Pastawski och J. P. Paz, ”Selective and Efficient Estimation of Parameters for Quantum Process Tomography”, Phys. Rev. Lett. **100**, 190403 (2008).

[26]A. Bendersky, F. Pastawski och J. P. Paz, ”Selective and efficient quantum process tomography”, Phys. Rev. A **80**, 032116 (2009).

[27]A. Gaikwad, D. Rehal, A. Singh, Arvind och K. Dorai, ”Experimental demonstration of selective quantum process tomography on an NMR quantum information processor”, Phys. Rev. A **97**, 022311 (2018).

[28]A. Gaikwad, K. Shende, Arvind och K. Dorai, ”Implementing efficient selective quantum process tomography of superconducting quantum gates on IBM quantum experience”, Scientific Reports **12**, 3688 (2022).

[29]Z. Wang, Q. He och Z. Zhang, ”Efficient non-destructive direct characterization of arbitrary many-body quantum channels”, npj Quantum Information **12**, 11 (2025).

[30]C. T. Schmiegelow, A. Bendersky, M. A. Larotonda och J. P. Paz, ”Selective and Efficient Quantum Process Tomography without Ancilla”, Phys. Rev. Lett. **107**, 100502 (2011).

[31]S. Roncallo, L. Maccone och C. Macchiavello, ”Pauli transfer matrix direct reconstruction: channel characterization without full process tomography”, Quantum Science and Technology **9**, 015010 (2023).

[32]S. Ahmed, F. Quijandría och A. F. Kockum, ”Gradient-Descent Quantum Process Tomography by Learning Kraus Operators”, Physical Review Letters **130**, 10.1103/PhysRevLett.130.150402 (2023).

[33]A. Gaikwad, M. S. Torres, S. Ahmed och A. F. Kockum, ”Gradient-descent methods for fast quantum state tomography”, Quantum Science and Technology **10**, 045055 (2025).

[34]J. Watrous, *The Theory of Quantum Information* (Cambridge University Press, [2018]).

[35]M. M. Wilde, *Quantum Information Theory*, 2nd, Andra upplagan (Cambridge University Press, Cambridge, [2017]).

[36]T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest och C. Stein, *Introduction to Algorithms*, 3. utg. (The MIT Press, [2009]).

[37]D. P. Kingma och J. Ba, ”Adam: A Method for Stochastic Optimization”, https://doi.org/10.48550/arXiv.1412.6980 (2017).

[38]J. Schönheim, ”On coverings”, Pacific Journal of Mathematics **14**, 1405–1411 (1964).

[39]W. Bruzda, V. Cappellini, H.-J. Sommers och K. Życzkowski, ”Random quantum operations”, Physics Letters A **373**, 320–324 (2009).

[40]V. Giovannetti, S. Lloyd och L. Maccone, ”Quantum Random Access Memory”, Phys. Rev. Lett. **100**, 160501 (2008).

A Appendix

A.1 Effektiva mätoperatorer på Choimatrisen för förlustfunktion

Lemma 1. Låt A vara ett hjälpkvantbitsrum, S_{in} vara systemets ingångstillståndsrum och S_{ut} vara systemets utgångstillståndsrum med samma dimension som S_{in}. Verkan av en process $\Lambda : S_{\text{in}} \to S_{\text{ut}}$ på ett system-hjälpkvantbittillstånd $\rho \in A \otimes S_{\text{in}}$ kan ges av

$$(\mathbb{I}_A \otimes \Lambda)\rho = \text{Tr}_{S_{\text{in}}}[(\rho^{T_{S_{\text{in}}}} \otimes \mathbb{I}_{S_{\text{ut}}})(\mathbb{I}_A \otimes \mathcal{J})] \tag{49}$$

där $\mathcal{J}$ är Choimatrisen definierad enligt $J = \sum_{i,j} |i\rangle \langle j|_{S_{\text{in}}} \otimes \Lambda(|i\rangle \langle j|)_{S_{\text{ut}}}$.

Bevis.

$$\begin{aligned}
&\text{Tr}_{S_{\text{in}}}[(\rho^{T_{S_{\text{in}}}} \otimes \mathbb{I}_{S_{\text{ut}}})(\mathbb{I}_{\mathbb{A}} \otimes \mathcal{J})] = \sum_{i,j} \text{Tr}_{S_{\text{in}}}[(\rho^{T_{S_{\text{in}}}} \otimes \mathbb{I}_{S_{\text{ut}}})(\mathbb{I}_A \otimes |i\rangle \langle j|_{S_{\text{in}}} \otimes \Lambda(|i\rangle \langle j|)_{S_{\text{ut}}})] = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sum\limits_{k,l,m,n} \rho_{k,l,m,n} |k\rangle \langle l|_A \otimes |m\rangle \langle n|_{S_{\text{in}}}, \\ \text{där } |k\rangle_A, \, |m\rangle_{S_{\text{in}}} \text{ är ortogonala basvektorer för } A \text{ och } S_{\text{in}} \end{array} \right\} = \\
&= \sum_{i,j,k,l,m,n} \text{Tr}_{S_{\text{in}}}[\rho_{k,l,m,n}(|k\rangle \langle l|_A \otimes |n\rangle \langle m|_{S_{\text{in}}} \otimes \mathbb{I}_{S_{\text{ut}}})(\mathbb{I}_{\mathbb{A}} \otimes |i\rangle \langle j|_{S_{\text{in}}} \otimes \Lambda(|i\rangle \langle j|)_{S_{\text{ut}}})] = \\
&= \sum_{j,k,l,m,n} \text{Tr}_{S_{\text{in}}}[\rho_{j,k,l,m,n}(|k\rangle \langle l|_A \otimes |n\rangle \langle j|_{S_{\text{in}}} \otimes \Lambda(|m\rangle \langle n|)_{S_{\text{ut}}}] = \\
&= \sum_{k,l,m,n} \rho_{k,l,m,n} |k\rangle \langle l|_A \otimes \Lambda(|m\rangle \langle n|)_{S_{\text{ut}}} = (\mathbb{I}_A \otimes \Lambda)\rho
\end{aligned}$$

□

Sats 1. Låt M vara en mätoperator på system-hjälpkvantbittillståndet $\rho \in A \otimes S_{\text{in}}$. Väntevärdet av M efter verkan av processen $\Lambda : S_{\text{in}} \to S_{\text{ut}}$ på ρ kan uttryckas med hjälp av Choimatrisen $\mathcal{J}$ enligt

$$\text{Tr}[M \underbrace{(\mathbb{I}_A \otimes \Lambda)\rho}_{\rho'}] = \text{Tr}[\text{Tr}_A[(M \otimes \mathbb{I}_{S_{\text{in}}})(\rho^{T_{S_{\text{in}}}} \otimes \mathbb{I}_{S_{\text{ut}}})]J]. \tag{50}$$

Bevis.

$$\begin{aligned}
&\text{Tr}[M(\mathbb{I}_A \otimes \Lambda)\rho] \overset{\text{Lemma 1}}{=} \text{Tr}_{A,S_{\text{ut}}}[M(\text{Tr}_{S_{\text{in}}}[(\rho^{T_{S_{\text{in}}}} \otimes \mathbb{I}_{S_{ut}})(\mathbb{I}_A \otimes J)])] = \\
&= \text{Tr}_{A,S_{\text{in}},S_{\text{ut}}}[(M \otimes \mathbb{I}_{S_{\text{in}}})(\rho^{T_{S_{\text{in}}}} \otimes \mathbb{I}_{S_{\text{ut}}})(\mathbb{I}_A \otimes J)] = \\
&= \text{Tr}_{S_{\text{in}},S_{\text{ut}}}[\text{Tr}_A[(M \otimes \mathbb{I}_{S_{\text{in}}})(\rho^{T_{S_{\text{in}}}} \otimes \mathbb{I}_{S_{\text{ut}}})]J] = \\
&= \text{Tr}[\text{Tr}_A[(M \otimes \mathbb{I}_{S_{\text{in}}})(\rho^{T_{S_{\text{in}}}} \otimes \mathbb{I}_{S_{\text{ut}}})]J]
\end{aligned}$$

□

A.2 Pseudokod för girig kanttäckningsalgoritm för ingångstillstånd

Algoritm 1 Girig kanttäckning för selektiva ingångstillstånd

Input: Sökta Choimatrisblockindex $\mathcal{B}$
$E \leftarrow \mathcal{B}$ ▷ Kanter som ska täckas
$\mathcal{C} \leftarrow \emptyset$ ▷ Mängder av 2^m noder
$V \leftarrow \{1, ..., 2^m\}$
while $E \neq \emptyset$ **do**
    Seed $S \leftarrow \{\text{argmax}_{v \in V} (\text{degree}_E(v))\}$
    while $|S| < 2^m$ **do**
        $v_{best} \leftarrow$ null
        $max_saturation \leftarrow -1$
        for $v \in V \setminus S$ **do**
            $sat_degree \leftarrow |\{(u, v) \in E \mid u \in S\}|$ ▷ Antal kanter från v till noder redan i S
            if $sat_degree > max_saturation$ **then**
                $max_saturation \leftarrow sat_degree$
                $v_{best} \leftarrow v$
            else if $sat_degree = max_saturation$ **then**
                if $\text{degree}_E(v) > \text{degree}_E(v_{best})$ **then**
                    $v_{best} \leftarrow v$
                end if
            end if
        end for
        $S \leftarrow S \cup \{v_{best}\}$
    end while
    $E_{covered} \leftarrow \{(u, v) \in E \mid u \in S \wedge v \in S\}$
    $E \leftarrow E \setminus E_{covered}$
    $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \{S\}$
end while
$\mathcal{P} \leftarrow \emptyset$
for each $S \in \mathcal{C}$ **do**
    Define

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^m-1} |i\rangle_A \otimes |S_i\rangle_{S_{\text{in}}}$$

    $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{|\psi\rangle\}$
end for
Output: Mängden selektiva ingångstillstånd $\mathcal{P}$

A.3 Pseudokod för Adam

Vi använder den stokastiska optimeringsalgoritmen Adam [37]. Adam använder exponentiellt avtagande medelvärden av gradienten och gradienten i kvadrat för att göra uppdateringar av parametrarna. Adam är särskilt viktig när gradienterna blir väldigt små.

Algoritm 2 Adaptive Moment Estimation

Input: $L(\boldsymbol{\theta})$ (förlustfunktion av parametrar $\boldsymbol{\theta}$), η (steglängd), n_i (antal iterationer), α (avtagningsfaktor)
Output: θ_{n_i} (optimerade parameterar)
Initialize: $\boldsymbol{\theta}_0$ (ansats), $\beta_1 = 0.9$, $\beta_2 = 0.999$, $\boldsymbol{m}_0 = 0$, $\boldsymbol{v}_0 = 0$, $\epsilon = 10^{-6}$, $\eta_0 = \eta$
for $t \leftarrow 1, \ldots, n_i$ **do**
    $\eta_t \leftarrow \alpha \cdot \eta_{t-1}$ ▷ Avtagande steglängd
    $\boldsymbol{G}_t \leftarrow \nabla L(\boldsymbol{\theta}_{t-1})$ ▷ Gradienter m.a.p. $\boldsymbol{\theta}_t$
    $\boldsymbol{m}_t \leftarrow \beta_1 \cdot \boldsymbol{m}_{t-1} + (1 - \beta_1) \cdot \boldsymbol{G}_t$ ▷ Biaserat 1:a moment
    $\boldsymbol{v}_t \leftarrow \beta_2 \cdot \boldsymbol{v}_{t-1} + (1 - \beta_2) \cdot \boldsymbol{G}_t^2$ ▷ Biaserat 2:a moment
    $\hat{\boldsymbol{m}}_t \leftarrow \boldsymbol{m}_t / (1 - \beta_1^t)$ ▷ Biaskorrigerat 1:a moment
    $\hat{\boldsymbol{v}}_t \leftarrow \boldsymbol{v}_t / (1 - \beta_2^t)$ ▷ Biaskorrigerat 2:a moment
    $\boldsymbol{\theta}_t \leftarrow \boldsymbol{\theta}_{t-1} - \eta_t \cdot \hat{\boldsymbol{m}}_t / (\sqrt{\hat{\boldsymbol{v}}_t} + \epsilon)$ ▷ Uppdaterade parametrar
end for
return $\boldsymbol{\theta}_{n_i}$ ▷ Optimerade parametrar

A.4 Övre gränser för protokollets resurskrav

Här härleds gränserna från tabell 1 för antalet ingångstillstånd, mätkretsar, experiment och väntevärden som protokollet behöver för n systemkvantbitar, m hjälpkvantbitar och sökta Choimatrisindex $\mathcal{T} = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), ...\}$. Ingångstillstånden på formen 22 behöver som mest, då inga av elementens blockindex överlappar, två blockindex p_1, p_2 för att täcka ett givet elements block (p_1, p_2), Detta innebär att tillstånden som innehåller upp till 2^m olika blockindex alltid kan täcka minst $2^m/2 = 2^{m-1}$ blocks element. För alla $\mathcal{T}$ element krävs därför maximalt

$$\left\lceil \frac{|\mathcal{T}|}{2^{m-1}} \right\rceil = \lceil 2^{1-m} |\mathcal{T}| \rceil$$

stycken ingångstillstånd.

Antalet mätkretsar som behövs begränsas av att SEEQST som mest behöver två mätkretsar per element som ska bestämmas i en täthetsmatris, se avsnitt 2.4 och [21]. Om inga sökta elements lokala index i deras utgångstillstånd överlappar innebär det att det som mest behövs $2|\mathcal{T}|$ mätkretsar. Antalet unika experimentuppställningar fås i värsta fallet om $2^{1-m}|\mathcal{T}|$ ingångstillstånd behövs och varje sökt element också behöver två mätkretsar, vilket ger gränsen $2^{1-m}|\mathcal{T}| \cdot 2 = 2^{2-m}|\mathcal{T}|$. Antalet väntevärden som behöver bestämmas av mätningarna fås ur hur SEEQST grupperar elementen i de $n + m$ kvantbitar stora utgångstillstånden. Då varje selektiv grupp element S_k i utgångstillstånden innehåller 2^{n+m} mätoperatorer (14) innebär det $2^{n+m}|\mathcal{T}|$ väntevärden som mest behöver bestämmas, i fallet då alla sökta elements lokala index i deras utgångstillstånd tillhör olika S_k.

INSTITUTIONEN FÖR MIKROTEKNOLOGI OCH NANOVETENSKAP
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg, Sverige
www.chalmers.se



CHALMERS