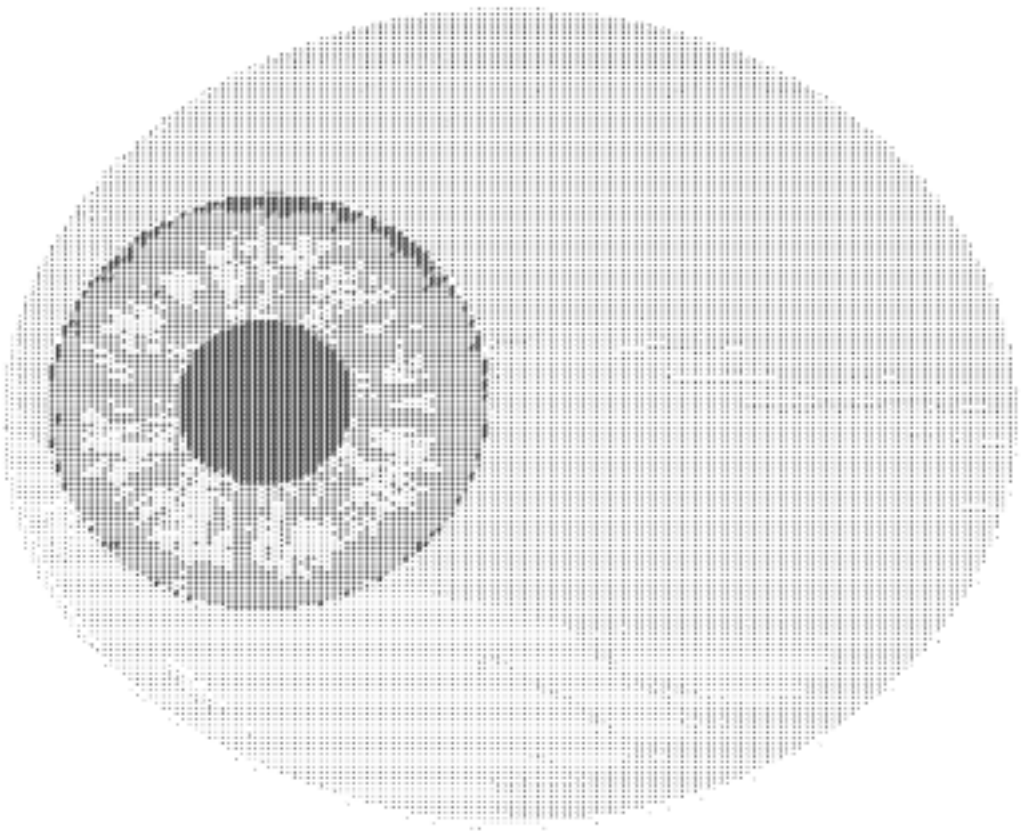
CHALMERS



Numerisk modell av det mänskliga ögat

Tillämpning av Fourieroptiska metoder vid jämförelse av tre ögonmodeller samt undersökning av myopia, hyperopia, astigmatism, presbyopia och ögonsjukdomen keratokonus.

Kandidatarbete

Bruno Fernandez
Sofia Karlsson
Sebastian Pantin Liljevall
Kim Pietarila
Martin Sech

Handledare: Elsebeth Schröder, Maria Sundin
Examinator: Vessen Vassilev

Institutionen för Mikroteknologi och Nanovetenskap (MC2)
Chalmers University of Technology
Göteborg, Sverige 2017

Numerisk modell av det mänskliga ögat - Tillämpning av Fourieroptiska metoder vid jämförelse av tre ögonmodeller samt undersökning av myopia, hyperopia, astigmatism, presbyopia och ögonsjukdomen keratokonus.

Bruno Fernandez, Sofia Karlsson, Sebastian Pantin Liljevall, Kim Pietarila, Martin Sech, 2017.

Institutionen för Mikroteknologi och Nanovetenskap
Kvantkomponentfysik
Chalmers tekniska högskola
SE-412 96 Göteborg
Sverige

Framsida: En bild på ett öga. Hämtad från [1].

Skriven i LaTeX
Institutionen för Mikroteknologi och Nanovetenskap, Chalmers tekniska högskola
Göteborg, Sverige 2017

Sammanfattning

Numerisk modell av det mänskliga ögat:
Tillämpning av Fourieroptik vid jämförelse av tre olika ögonmodeller, samt vid undersökning av synfelen myopia, hyperopia, astigmatism, presbyopia och keratokonus.

Ögat är en komplex del av den mänskliga kroppen. Att kunna simulera det med hjälp av matematiska modeller gör det enklare att förstå hur synen fungerar, samt hur denna påverkas av eventuella synfel. Syftet med detta projekt är att ta fram en sådan numerisk modell och undersöka synfelen myopia (närsynthet), hyperopia (långsynthet), astigmatism, presbyopia (åldersynthet) och keratokonus. Modellerna skapades i MATLAB och baserades på Fourieroptik som tillämpades på tre olika ögonmodeller; Gullstrand-Emsleymodellen, Klassiska Emsleymodellen och Exakta Gullstrandsögat. Intensitetsfördelningen längs ljusets propagationssträcka och på näthinnan jämfördes för de olika ögonmodellerna. Det undersöktes även hur synfelen påverkade intensitetsfördelningen. Vid simulering av det friska ögat blir modellen närsynt för samtliga ögonmodeller. Bäst resultat fås med den Klassiska Emsleymodellen och därmed bedöms den fungera bäst med projektets metod. Vidare lyckas simulering av myopia och hyperopia ge en förskjutning av brännpunkten och astigmatism ger flera brännpunkter. Den förenklade keratokonusmodellen ger ökad närsynthet och synmodellen med åldersberoende blir mer närsynt än den icke-åldersberoende. De mer avancerade synfelen, så som presbyopia och keratokonus, behöver dock utvecklas ytterligare för att bli verklighetstrogna. I framtiden skulle det också vara av intresse att komplettera koden så att glasögon och korrigeringslinser kan simuleras.

Nyckelord: ögonmodell, Fourieroptik, intensitetsfördelning, myopia, presbyopia, astigmatism, keratokonus, MATLAB

Abstract

Numerical model of the human eye:
Application of Fourier optics when comparing three different eye models and analysis of the following visual impairments: myopia, hyperopia, astigmatism, presbyopia and keratoconus

The eye is a complex part of the human body. To be able to simulate it using mathematical models makes it easier to understand how the human vision works and how it is affected by visual impairments. The purpose of this project is to create such a numerical model and to evaluate myopia (nearsightedness), hyperopia (farsightedness), astigmatism, presbyopia (age-dependent visual impairment) and keratoconus. The models were created using MATLAB and were based on Fourier optics applied to three different eye models; the Gullstrand-Emsley model, the Classic Emsley model and the Exact Gullstrand Eye. The intensity plots along the propagation distance of the light and on the retina were compared between the eye models. How the eye diseases affected the intensity distribution was also reviewed. When simulating the healthy eye, the model becomes nearsighted for all eye models. The Classic Emsley model yields the best results and therefore it is deemed to work best for the method of this project. Furthermore the simulations of myopia and hyperopia give a displacement of the focal point and astigmatism gives many focal points. The simplified model of keratoconus gives increased nearsightedness and the model for age-dependence becomes more nearsighted than the non age-dependent model. The more advanced visual impairments, such as presbyopia and keratoconus, need to be developed more in order to become realistic. In the future it might also be of interest to improve upon the code so that glasses and corrective lenses can be simulated.

Key words: eye model, Fourier optics, intensity distribution, myopia, presbyopia, astigmatism, keratokonus, MATLAB

Innehåll

1 Inledning **1**
- 1.1 Syfte . . . 1
- 1.2 Problemformulering . . . 1

2 Teori **2**
- 2.1 Ögats struktur . . . 2
- 2.2 Ögonmodeller . . . 3
- 2.3 Några synfel och ögonsjukdomar . . . 3
  - 2.3.1 När- och långsynthet . . . 3
  - 2.3.2 Astigmatism . . . 4
  - 2.3.3 Ögats åldrande . . . 4
  - 2.3.4 Keratokonus . . . 5
- 2.4 Synskärpa . . . 5
- 2.5 Ljuspropagation med Fourieroptik . . . 5
  - 2.5.1 Vinkelspektrat för elektromagnetiska vågor . . . 6
  - 2.5.2 Propagation av vinkelspektrat . . . 7
  - 2.5.3 Den tunna linsens roll i Fourieroptik . . . 7
- 2.6 Raytracing . . . 7

3 Metod **8**
- 3.1 Modell av det friska ögat . . . 8
  - 3.1.1 Modellering av hornhinna och lins . . . 8
  - 3.1.2 Modellering av kammarvätska och glaskropp . . . 9
  - 3.1.3 Beräkning av intensitetsfördelning vid näthinnan . . . 9
  - 3.1.4 Metod för att propagera strålar . . . 9
- 3.2 Simulering av synfel och ögonsjukdomar . . . 9
- 3.3 Jämförelse av bildkvalitet . . . 10

4 Resultat **11**
- 4.1 Resultat för friskt öga . . . 11
- 4.2 Påverkan på synen av myopia, hyperopia och astigmatism . . . 12
- 4.3 Påverkan på synen av presbyopia . . . 14
- 4.4 Minskning av hornhinnans kurvaturradie . . . 15

5 Diskussion **15**
- 5.1 Jämförelse mellan ögonmodeller . . . 15
- 5.2 Utvärdering av ögonproblemssimulering . . . 16
  - 5.2.1 De vanliga synfelens inverkan på synen . . . 16
  - 5.2.2 Effekten av inlagt åldersberoende . . . 16
  - 5.2.3 Förenklad simulering av keratokonus . . . 17
- 5.3 Modell mot verklighet . . . 17
- 5.4 Fourieroptik mot raytracing . . . 17
- 5.5 Framtida förbättringar till modellen . . . 18

6 Slutsatser **18**

Referenser **19**

A Datatabeller till ögonmodeller **i**

B Diffraktion **ii**

C Mer om raytracing **iii**

D Övriga resultat **iii**

E Kod **iv**

1 Inledning

Ungefär en tiondel av världens befolkning har någon typ av synfel [2]. För att förklara hur dessa fel påverkar synen har det skapats flertalet modeller av ögat, av varierande komplexitetsgrad. Att korrigera enklare synfel som lång- och närsynthet är inget problem i dagsläget, och kan göras på många olika sätt. När det gäller mer komplicerade ögonsjukdomar finns det dock sällan tillfredsställande metoder för korrigering av synen.

Bland de mer komplicerade synfelen hittas exempelvis astigmatism och keratokonus. Det finns korrigerande hjälpmedel för dessa problem, men de är sällan optimala i funktion eller i komfort för patienten. För att kunna utveckla bättre hjälpmedel behövs en tydlig uppfattning om hur ljuset bryts i ögat. Ett sätt att undersöka detta är med numeriska modeller som kan vidareutvecklas till att bli sjukdomsspecifika. Dessa skulle ge underlag för att underlätta utformandet av hjälpmedel och korrigeringar till patienter med ovanliga synfel, och på så vis förbättra deras livskvalitet.

1.1 Syfte

Syftet med detta projekt är ta fram, jämföra och utvärdera olika numeriska modeller för ett mänskligt öga. Dessa modeller ska därefter kunna användas för vidare studier av ögat och underlätta simuleringar av diverse synfel, bland annat närsynthet, långsynthet och keratokonus.

1.2 Problemformulering

Projektets huvuduppgift är att konstruera numeriska modeller som beskriver ljusets brytning genom ett friskt öga. Modellerna baseras huvudsakligen på Fourieroptik och kommer skapas i programvaran MATLAB. Utifrån dessa skall så småningom synfel kunna modelleras, genom att ändra parametrar och lägga till funktioner i koden. Tanken är att modellen ska kunna användas för att förstå villkoren i framställandet av synhjälpmedel och behandlingar. Att ta fram behandlingar är dock något som ligger utanför arbetets ramar, och detta projekt fokuserar enbart på att arbeta med modellen för ögat samt dess synfel och ögonsjukdomar.

En förutsättning för att kunna hantera synfel av varierande svårighetsgrad är att den ursprungliga modellen är av tillräckligt hög komplexitet. Ett exempel är ögonsjukdomen keratokonus, där hornhinnan blir konformad. För att enkelt kunna anpassa modellen till detta synfel krävs att den ursprungliga ögonmodellen tar hänsyn till hornhinnans geometri och tjocklek.

Det är nästintill omöjligt att göra en exakt numerisk modellering av ett öga eftersom modellen snabbt skulle bli mycket avancerad, beroende på hur många empiriska faktorer som tas hänsyn till. Därmed kommer detta projekt behöva arbeta med en förenklad modell. Att avgöra vilka delar som tas med i modellen blir därför en viktig del i arbetet.

Ett exempel på en funktion hos ögat som anses vara för komplex för att modellera är variationen av linsens form. Linsens tjocklek varierar med hjälp av ciliarmuskeln för att hjälpa till att fokusera bilden. Ifall ljusöverföring in i ögat undersöks på konstant avstånd blir denna faktor helt ointressant att studera. Eventuell påverkan från tjockleken på linsen har bedömts vara svårt att modellera och kommer ej diskuteras i detta arbete.

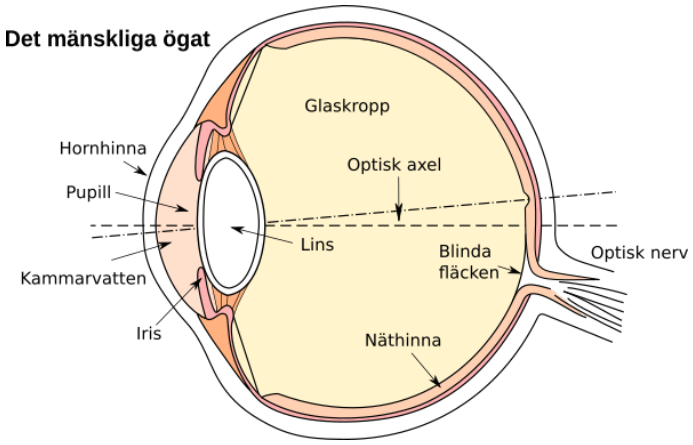
Vidare syftar detta projekt enbart till att göra en optisk modell av synen, för att kunna behandla brytningsrelaterade fel. Därför är det naturligt att ignorera biologiska delar av ögat, exempelvis hur informationen går från näthinnan till hjärnan, eller hur antalet samt fördelningen av tappar och stavar påverkar bilden.

2 Teori

För att kunna skapa en bra numerisk modell för ett öga krävs både kunskaper kring ögats struktur och hur ljus sprider sig. Ögats struktur beskrivs tillsammans med en förklaring av de olika ögonmodellerna som används i arbetet. Synfelen som behandlas i den här rapporten förklaras också i detalj. Det krävs någon form av modell för ljusspridningen. En vanlig metod är Fourieroptik och nedan följer en teoretisk bakgrund till bland annat detta eftersom det är den metoden som rapporten fokuserar på. Det finns även en kort introduktion till raytracing, en alternativ metod för ljusspridning som är vanlig inom datorgrafik.

2.1 Ögats struktur

Människans öga består av flera delar med varierande funktion och brytningsförmåga, se Figur 1. Det yttersta, synliga lagret av ögat består av den genomskinliga hornhinnan och därefter ögonvitan, som är en del av senhinnan. Innanför ögonvitan finns den främre ögonkammaren, som är fylld med så kallat kammarvatten. Denna genomskinliga vätska är en vattenlösning innehållande elektrolyter och har som uppgift att nära både hornhinnan och ögats lins. Även regnbågshinnan, eller irisen som den också kallas, gränsar till den främre ögonkammaren. Den cirkulära öppningen i irisen kallas pupill och med hjälp av ringmusklerna kan den variera i storlek. Vid högre ljusintensiteter dras pupillen ihop, medan den vidgas i det motsatta fallet [3]. Pupillens möjliga diameterintervall är ungefär 1.5–10 mm [4].



Figur 1: En schematisk bild av ett människoöga. Hämtad från [5].

Likt hornhinnan är linsen genomskinlig men består av circa 35 % av proteiner och resten vatten. Linsen kan variera i form och storlek beroende på om ciliarmuskeln, som är fäst till linsen, kontraherar eller avslappnas. I det kontraherade läget är linsen tjockare än i det avslappnade. Detta fenomen, kallat ackommodation, gör att linsen kan variera sin brytningseffekt på inkommande ljus vilket är en förutsättning för att synskärpan ska vara anpassningsbar till olika avstånd. Utan ackommodation skulle det till exempel vara omöjligt att fokusera på objekt som befinner sig på olika avstånd från ögat [3]. På grund av linsens inhomogena struktur fås ett brytningsindex som varierar genom linsen, generellt på så sätt att brytningsindexet liknar en parabolisk funktion av avståndet till linsens centrum. Således har inte linsen två brytningsytor, utan oändligt många [6]. Notera att även om både hornhinnan och linsen är viktiga för ljusets brytning i ögat, så sker den största brytningen när ljuset träffar hornhinnan [7].

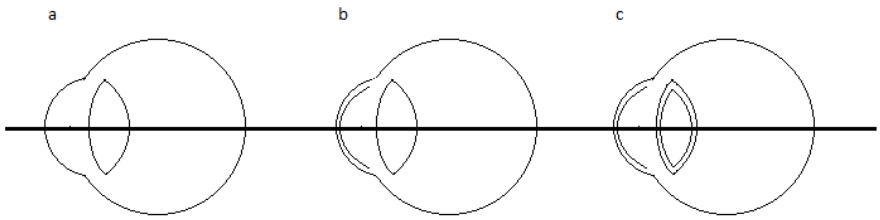
Bakom linsen finns glaskroppen, en genomskinlig gel bestående av bland annat sammanbindande kollagenfibrer. Längst bak i ögats insida befinner sig näthinnan vars främsta uppgift är att omvandla energin från det inkommande ljuset till elektrisk energi. Dessa elektriska signaler

skickas därefter till hjärnan via nerverna. De två olika typerna av fotoreceptorer som konverterar ljusenergin kallas stavar och tappar. Stavarna är framförallt viktiga för seende i svagare ljus, samt för periferiseendet. Tapparna är däremot ansvariga för färg- och detaljseende. Medan stavarna är någorlunda utspridda på näthinnan så är tapparna koncentrerade i den så kallade gula fläcken, belägen i närheten av näthinnans mitt. Under den gula fläcken finns området där nerverna samlar sig och via den optiska nerven går ut till det centrala nervsystemet. Området kallas således för blinda fläcken då den saknar plats för fotoreceptorer [3].

2.2 Ögonmodeller

Det finns en rad olika modeller av människoögat och tre av dessa är Gullstrand-Emsleymodellen, den Klassiska Emsleymodellen och det Exakta Gullstrandögat [4]. Datatabeller till dessa finns i Appendix A. Den förstnämnda modellen, vars data syns i Tabell 3, är den enklare av de tre. I denna antas det både att hornhinnan kan approximeras till en yta istället för två, samt att linsen är homogen. Observera att det finns olika varianter av Gullstrand-Emsleymodellen, men att detta är den senare, reviderade varianten.

Den Klassiska Emsleymodellen, se Tabell 4, liknar den föregående modellen med skillnaden att hornhinnan har en tjocklek och därmed även både en fram- och baksida. Det Exakta Gullstrandögat, se Tabell 5, tar dessutom hänsyn till att linsen inte är helt homogen. Istället delar modellen upp linsen i en inre och yttre del, som har olika brytningsindex. I samtliga tre ögonmodeller förutsätts det att ciliarmuskeln som anpassar linsens form är helt avslappnad. För en bild som schematiskt visar modellerna, se Figur 2.



Figur 2: Schematisk bild av a) Gullstrand-Emsleymodellen, b) Klassiska Emsleymodellen, c) Exakta Gullstrandögat.

Gemensamt för ovanstående modeller är att de inte tar full hänsyn till linsens icke-homogena struktur, även om det Exakta Gullstrandögat delvis försöker åtgärda det faktumet [4]. Mer komplicerade ögonmodeller, så kallade GRIN-modeller (Gradient Refractive Index), tar hänsyn till denna gradient i brytningsindexet [6].

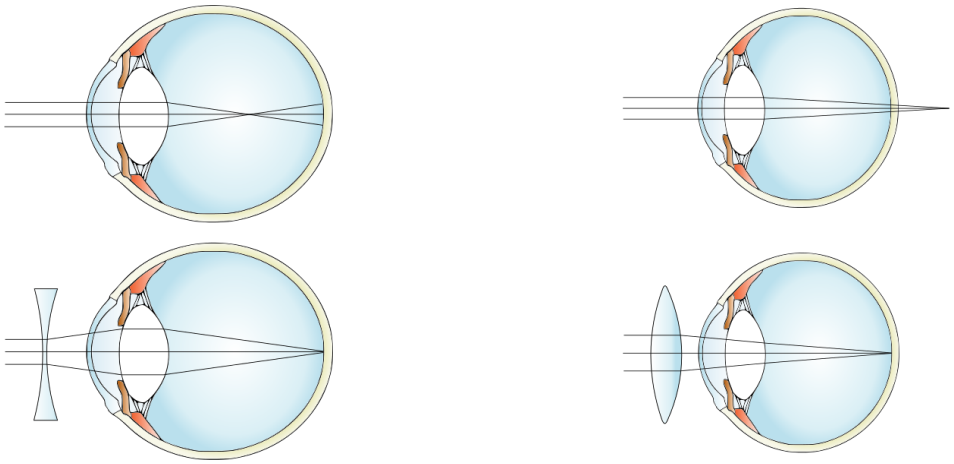
2.3 Några synfel och ögonsjukdomar

Olika typer av synfel och sjukdomar gör att strukturen på ögat och dess funktioner skiljer sig från den för ett friskt öga, vilket i sig påverkar strålgången och därmed den resulterande synen. Nedan följer ett antal olika synproblem som har undersökts i projektet.

2.3.1 När- och långsynthet

Ett vanligt synfel är närsynthet (myopia) som innebär att brännpunkten, där bilden skapas, hamnar före näthinnan istället för direkt på denna. I de flesta fall beror detta på att ögat är för långt, men i vissa fall kan det bero på att hornhinnan är för böjd, vilket leder till för

stark brytningskraft. Omvänt innebär långsynthet (hyperopia) att brännpunkten hamnar efter näthinnan. Det beror oftast på att ögat är för kort och i sällsynta fall på att hornhinnan är för platt. En individ som har antingen när- eller långsynthet kan med hjälp av en konkav respektive konvex lins korrigera synen, som visas i Figur 3 [4].



(a) Korrigering av närsynthet med konkav lins.

(b) Korrigering av långsynthet med konvex lins.

Figur 3: När- respektive långsynthet, med och utan korrigering. Hämtade från [8] samt [9].

2.3.2 Astigmatism

Om hornhinnan, eller linsen i mer sällsynta fall, inte är rotationssymmetrisk kan detta resultera i astigmatism, vilket innebär att flera mindre brännpunkter hamnar på näthinnan istället för en enda koncentrerad brännpunkt. Ofta är brytningsytan mer ellipsformad än för ett friskt öga, men det kan även bero på att brytningsytan är oregelbunden. En oregelbunden brytningsyta kan orsakas av olika typer av ögonsjukdomar eller av skador. Regelbunden astigmatism kan justeras med hjälp av linser som har speciell kurvatur [4].

2.3.3 Ögats åldrande

Åldrande påverkar ögat på en rad olika sätt. Främst försämras synen av att linsen hårdnar och att ciliarmuskeln blir svagare, vilket minskar ögats fokuseringsförmåga. Ögats minskade förmåga till ackommodation kallas för ålderssynthet eller presbyopia [3]. Med ökande ålder minskar även ögonkammarens tjocklek, linstjockleken ökar och beloppet av kurvaturradien minskar både för linsens fram- och baksida, se Tabell 1 [10]. Dessutom minskar den maximala pupilldiametern med åldern [4].

Tabell 1: Några ögonparametrar som funktion av ålder A (år). Data hämtad från [11]. Brytningsindex är hämtade från den Klassiska Emsleymodellen och är därmed åldersoberoende.

Yta	Kurvaturradie (mm)	Brytningsstyrka (m^{-1})	Avstånd till nästa yta (mm)
Hornhinna framsida	7.79	48.4	0.579
Hornhinna baksida	6.53	-6.080	$3.291-0.01 \cdot A$
Lins framsida	$12.7-0.058 \cdot A$	$\frac{82.6}{12.7-0.058 \cdot A}$	$2.93+0.0236 \cdot A$
Lins baksida	$-5.9 + 0.0015 \cdot A$	$\frac{8.4}{5.9-0.0015 \cdot A}$	$16.79-0.0136 \cdot A$

2.3.4 Keratokonus

Keratokonus är en relativt sällsynt ögonsjukdom där hornhinnan blir tunnare, vilket leder till deformationer. Hornhinnan blir oftast konformad och orsakar svår astigmatism hos patienten [3]. Keratokonus drabbar oftast tonåringar och är en framåtskridande sjukdom vars utveckling pågår fram till 30–40 års ålder. Att korrigera synen med glasögon är endast möjligt i tidiga skeden av sjukdomen men när sjukdomen utvecklat sig blir formen på hornhinnan alltför komplex för att kunna korrigeras på detta sätt. Istället används kontaktlinser för att korrigera keratokonus, vilket fungerar bättre när sjukdomen har utvecklats [12].

2.4 Synskärpa

Även om en synskärpa sägs vara perfekt ur ett medicinskt perspektiv så finns det ett antal faktorer som egentligen begränsar denna fysikaliskt sett [4]. En sådan faktor är aberrationer, det vill säga avbildningsfel, så som sfärisk aberration. Denna typ av aberration uppstår på grund av att sfäriska ytor bryter ljuset på olika sätt beroende på vilken del av ytan ljuset propagerar igenom och således fås inte en entydig brännpunkt. En annan typ är monokromatisk aberration, som uppstår på grund av att brytningsindexet varierar med våglängden, vilket också leder till varierande brytning och därmed till flera svagare brännpunkter. Vidare kan också diffraktion begränsa synskärpan, eftersom ljuset från objektet kommer att sprida ut sig i ett interferensmönster. En mer djupgående bakgrund till diffraktion ges i Appendix B.

Ytterligare en begränsning är att bilden som skickas från näthinnan till hjärnan egentligen inte är kontinuerlig. Detta beror på att fotoreceptorerna har begränsade ytor och således inte täcker näthinnan i varje punkt. Dessutom är det bara tapparna som kan ge fullt detaljseende. Oavsett denna begränsning, eller de tidigare nämnda, kan en människa utan synfel se skarpa bilder på grund av att hjärnan behandlar den fysikaliska informationen så att den resulterande bilden blir felfri [4].

För att visa ett kvantitativt samband mellan relativ bildintensitet och avstånd eller vinkel till ett objekt, så används en så kallad punktspridningsfunktion (PSF). Denna behandlar hur en punkt på objektet smetas ut till en fläck på bilden [4].

2.5 Ljuspropagation med Fourieroptik

Fourieroptik är en metod som kan användas för att modellera komplexa optiska system både analytiskt och numeriskt. För detta behöver ljus behandlas som elektromagnetiska vågor som sedan kan studeras med hjälp av Fouriertransformer. Elektromagnetiska fält är i verkligheten inte komplexvärda men genom att skriva dem på komplex form fås både rums- och tidsberoendet med på ett enkelt sätt. Fälten är oftast harmoniskt varierande vilket medför att tidsberoendet kan elimineras, men det är ändå enklare att skriva fälten på komplex form. Det elektriska fältet kan då skrivas $\vec{\mathbf{E}}(x,y,z,t) = \vec{E}(x,y,z)e^{-j\omega t}$, där den första delen motsvarar det rumsliga beroendet och den exponentiella delen motsvarar tidsvariationen [13]. Notera att tecken i fetstil markerar hela fältet med tidsberoende medan smalt tecken motsvarar fältet utan tidsberoende. Det verkliga fältet vid en viss tid t i en punkt (x,y,z) ges av realdelen av det elektriska fältet på komplex form. Om fältet skrivs på komplex form med tidsberoende blir de två första tidsderivatorna:

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = j\omega \vec{\mathbf{E}}, \qquad \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{\mathbf{E}}. \tag{1}$$

Vågekvationen, $\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}$ med ljushastigheten $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$, blir då:

$$\nabla^2 \vec{E} = -\omega^2 \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r E \tag{2}$$

där μ_r är den relativa permeabiliteten, μ_0 är permeabiliteten i vakuum som har värdet $4\pi \cdot 10^{-7}$ m kg/C^2, ε_r är den relativa permittiviteten och ε_0 är motsvarande för vakuum med ett värde på ungefär $8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m [14].

Det kan antas att den enda rumsliga variationen av det elektromagnetiska fältet sker i z-riktning och inte i x- och y-riktning. Det vill säga att vågens ytor av konstant fas är oändliga plan vinkelräta mot propagationsriktningen. Detta medför då att derivatorna $\frac{\partial \vec{E}}{\partial x}$, $\frac{\partial \vec{E}}{\partial y}$ kan sättas till noll.

Genom att anta att det elektriska fältet bara har en riktningskomponent, exempelvis i z-riktning, kan vågekvationen förenklas till:

$$\frac{d^2 E_z}{dz^2} + \omega^2 \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r E_z = 0. \tag{3}$$

Ansätt en lösning som har formen:

$$E_z = E_0 e^{-jkz} \tag{4}$$

där E_0 är vågens amplitud. Genom insättning i Ekv.(3) fås att lösningen är giltig om $k = \omega\sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}$ vilket ger att den kompletta lösningen är:

$$E_z = E_0 e^{j(\omega t - kz)}. \tag{5}$$

2.5.1 Vinkelspektrat för elektromagnetiska vågor

Den komplexa plana vågen som ges av Ekv. (5) används för att härleda vinkelspektrat för ett elektromagnetiskt fält. Vinkelspektrat kan sedan användas för att propagera fältet genom ett medium, till exempel luft, ett visst avstånd. Propagationen ges genom att dela upp det komplexvärda elektromagnetiska fältet i ett oändligt antal plana vågor, som ges av Ekv. (5), och deras bidrag i det sökta planet. Denna metod kallas för 'Propagation of angular spectrum', PAS. Låt $U(x, y, 0)$ vara en komplex amplitud för ett fält från en plan monokromatisk våg, given på formen från Ekv. (5), som propagerar längst z-axeln i positiv riktning, åt höger, och infallande mot xy-planet. Det sökta fältet är då $U(x, y, z)$ som uppkommer vid ett avstånd z till höger om det första planet. Över $z = 0$ planet har funktionen U en två-dimensionell Fouriertransform som ges av:

$$\tilde{A}(u, v) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} U(u, v, 0) e^{-j2\pi(ux+vy)} dxdy. \tag{6}$$

Fouriertransformen går att betrakta som en uppbrytning av komplicerade funktioner till en samling av simplare komplexvärda exponentialfunktioner. U kan då skrivas som en invers Fouriertransform av sitt vinkelspektra. Betrakta nu en plan våg med likformig amplitud som propagerar längs enhetsvektorn $\vec{u}$ i riktning given av cosinusriktningen (α, β, γ). Cosinusriktningen är definierad som cosinus av vinklarna mellan enhetsvektorn och koordinataxlarna. Denna plana våg kan beskrivas som:

$$\vec{B}(x, y, z) = e^{\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z)}. \tag{7}$$

Genom att använda denna plana våg inses att Ekv.(6) kan skrivas om till:

$$\tilde{A}(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z = 0) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} U(u, v, 0) e^{-\frac{j2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y)} dxdy \tag{8}$$

vilket kallas vinkelspekrat för störningen $U(x, y, 0)$.

2.5.2 Propagation av vinkelspektrat

Genom att sätta $\vec{u} = \frac{\vec{k}\lambda}{2\pi}$ kan Ekv.(8) skrivas om till:

$$\tilde{A}(k_x, k_y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy. \tag{9}$$

Antag två stycken plan där avståndet mellan de två planen är z, då ska relationen mellan $\tilde{A}_0(k_x, k_y, 0)$ och $\tilde{A}(k_x, k_y, z)$ hittas. $U(x, y, z)$ kan skrivas som en invers Fouriertransform och blir:

$$U(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(k_x, k_y) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \tag{10}$$

$\vec{U}$ måste uppfylla Helmholtz ekvation, $(\nabla^2 + k^2)\vec{U} = 0$, i alla punkter där det saknas en källa. Genom insättning av Ekv.(10) i Helmholtz ekvation och genom att definiera $k_z = \sqrt{k^2 - {k_x}^2 - {k_y}^2}$ med den paraxiella approximationen, där den imaginära delen av k_z är större eller lika med noll, fås att vinkelspektrat i plan 2 blir:

$$\tilde{A}(k_x, k_y, z) = \tilde{A}(k_x, k_y, 0) e^{jk_z z}. \tag{11}$$

2.5.3 Den tunna linsens roll i Fourieroptik

Betrakta en lins med brytningsindex $n > 1$ i vilken ljuset propagerar långsammare än i vakuum. Denna lins kan anses vara en tunn lins om en stråle som infaller i en punkt med koordinaterna (x, y) utträder i ungefär samma punkt på andra sidan linsen. Det har då skett en försumbar förflyttning av strålen. Detta innebär att en tunn lins endast fördröjer den infallande vågen proportionellt mot linsen tjocklek i varje punkt (x, y). Genom att definiera linsens maximala tjocklek som Δ_0 och dess tjocklek i punkten (x, y) som $\Delta(x, y)$ kan den totala fasfördröjningen beskrivas med:

$$\phi(x, y) = kn\Delta(x, y) + k(\Delta_0 - \Delta(x, y)). \tag{12}$$

Linsens brytningsindex ges då av n och dess fasfördröjning av $kn\Delta(x, y)$. Sträckan mellan de två planen som uppkommer vid den tjockaste delen av linsen ger upphov till fasfördröjningen som ges av den sista termen, $k(\Delta_0 - \Delta(x, y))$. Linsen kan då beskrivas med en fasomvandlingsfunktion enligt:

$$T(x, y) = e^{jk\Delta_0} e^{jk(n-1)\Delta(x,y)}. \tag{13}$$

Låt det komplexa fältet direkt till vänster om linsen ges av $E(x, y)$ i enlighet med Ekv.(4) och fältet direkt till höger av $E'(x, y)$. Då kan fältet efter linsen beräknas genom att multiplicera linsens fasomvandlingsfunktion, se Ekv.(13), med det infallande fältet och detta fält fås genom att beräkna:

$$E'(x, y) = E(x, y)T(x, y). \tag{14}$$

2.6 Raytracing

Raytracing, strålgång på svenska, är en metod som används för att beräkna hur ljusstrålar utbreder sig i rummet. Metoden används också till att beräkna eventuella kollisionspunkter med objekt under propagationen. Vid en kollision beräknas intensiteten och ljusstrålens nya vinkel med hjälp av geometrisk optik, se Appendix C. Den här processen upprepas ett begränsat antal gånger och ger sedan upphov till en bild. Det skulle teoretiskt sett gå att låta processen fortsätta i all oändlighet men det saknar fysikalisk betydelse. Detta då det inte skulle påverka bilden nämnvärt eftersom att strålarnas energi snabbt minskar och blir obetydlig.

Ett allmänt sätt att utföra raytracing är att beräkna hur alla ljusstrålar från en ljuskälla studsar genom rummet och sedan utvärdera vilka som hamnar i ögat, men eftersom det handlar om

ofantligt många strålar är det inte ett realistiskt alternativ med begränsad datorkraft. Exempelvis skulle en vanlig 40W-lampa i ett rum teoretiskt skicka ut $1.11 \cdot 10^{20}$ fotoner per sekund. Därför är det vanligt att angripa problemet baklänges. Genom att låta strålarna börja i ögat och sedan betrakta deras utbredning genom rummet fås en förenklad, men tillräckligt bra bild av vad ögat ser [15].

3 Metod

Fokus under arbetet var att modellera ett friskt öga för att sedan introducera olika synfel och undersöka hur de påverkar bilden på näthinnan. Genom att dela upp ögat i olika delar kunde detta åstadkommas. Uppdelningen krävdes för att göra den matematiska modellen tillräckligt noggrann, men även för att kunna dela upp arbetet på ett sätt som lämpar sig för samarbete och vidareutveckling av koden. Modellen skapades i programvaran MATLAB. För samtliga resultat, om inget annat anges, har följande värde på parametrar valts; objektavståndet är 5 m, våglängden på ingående ljus är 550 nm och pupilldiametern är 4 mm.

3.1 Modell av det friska ögat

Grunden för modellen var att med hjälp av Fourieroptik studera hur ett elektromagnetiskt fält ändras när det propagerar genom ögats olika delar, fram till näthinnan. På grund av att den paraxiella approximationen användes i modellen så undersöktes enbart rakt inkommande ljus. Det elektromagnetiska fältet skapades baserat på samplingsavstånd, storlek på bilden i objektplanet och standardfunktionen för en komplexvärd cirkulär våg. Först propagerades fältet till framkanten av hornhinnan, vilket är den första delen av ögat som påverkar fältet. Hornhinnan modellerades som en tunn optisk komponent med formen av en positiv menisk, en halvmåne, där ytan mot det infallande ljuset är konvex och den andra ytan är konkav [16]. Efter hornhinnan kommer kammarvätskan, som enbart modellerades som ett medium med ett specifikt brytningsindex. Propagation genom denna simulerades med PAS, 'Propagation of angular spectrum'. Linsen därefter modellerades också som en tunn optisk komponent. Bakom linsen är glaskroppen som modellerades likt kammarvätskan. Sist kommer näthinnan, där intensitetsfördelningen av slutgiltig bild beräknades. Tre modeller av ögat gjordes enligt denna metod, med konstanter hämtade ifrån Gullstrand-Emsley modellen, Klassiska Emsleymodellen samt det Exakta Gullstrandögat. Den modell som gav bäst resultat för det friska ögat användes sedan vid simulering av synfelen.

3.1.1 Modellering av hornhinna och lins

Hornhinnan och linsen i ögat har valts att modelleras som tunna optiska komponenter, vilket introducerades i avsnitt 2.5.3. Dessa har skapats som separata objekt med linser som samlingsnamn. De konstanter som beskriver linsobjekten är brytningsindex i linsen, brytningsstyrka för första ytan, brytningsstyrka för andra ytan och tjocklek hos linsen. Utifrån dessa beräknades brytningsstyrkan och fasomvandlingsfunktionen för linsen. Utgående elektromagnetiska fält efter en tunn optisk komponent ges av produkten av fasomvandlingsfunktionen och inkommande elektromagnetiska fält, enligt Ekv.(14). Fasomvandlingsfunktionen för både hornhinnan och linsen beskrevs på samma sätt i MATLAB. Linsens fasomvandlingsfunktion beräknades genom att bestämma tjockleken $\Delta(x, y)$ i Ekv.(12) med hjälp av den paraxiella approximationen samt att dela upp linsen i två lika stora delar. Då kunde Ekv.(13) för både linsen och hornhinnan skrivas om till

$$T(r) = e^{-jkr^2/(2f)} \tag{15}$$

där k är vågtalet, r är en matris med avstånden från origo till godtycklig sampelpunkt i xy-planet och f är fokallängden.

3.1.2 Modellering av kammarvätska och glaskropp

Glaskroppen och kammarvätskan har olika brytningsindex, vilket gör att fältet förändras när det passerar dem. De kan dock inte utformas som tunna optiska komponenter då deras tjocklek ej är försumbar. Det elektromagnetiska fältets ändring genom dessa två medium beräknades med metoden PAS, som beskrevs i Avsnitt 2.5.1. Enligt Ekv.(9) gavs vinkelspektrat som en dubbelintegral över fältet. En integral kan ses som en summa av integrandens värde multiplicerat med de infinitesimala stegen dx och dy. Eftersom en dator använder ändliga steg kunde ekvationen för vinkelspektrat skrivas om som en dubbelsumma av fältet multiplicerat med fasfaktorn, som var beroende av samplingsavstånden i det aktuella planet. Med hjälp av MATLABs inbyggda fouriertranform-funktion och med Ekv.(6) kunde vinkelspektrat i objektplanet skrivas som

$$A = \frac{a^2}{4\pi^2} \cdot FFT(E) \tag{16}$$

där a är sampelavståndet i objektplanet, och beräknas i MATLAB.[1] I enlighet med Ekv.(10) och (11) samt tidigare resonemang gällande MATLABs inbyggda funktion för Fouriertransform kunde fältet efter propagation beräknas med

$$E_2 = \Delta k^2 \cdot N^2 \cdot IFFT(A_2) \tag{17}$$

där Δk och A_2 är samplingsavståndet i k-planet samt vinkelspektrat i planet efter propagation och N är matrisstorleken från objektet i plan 1.

3.1.3 Beräkning av intensitetsfördelning vid näthinnan

För att beräkna intensitetsfördelningen vid näthinnan är det viktigt att ingående elektromagnetiska fält och originalbilden har samma samplingsavstånd och storlek. Först beräknades punktspridningsfunktionen av fältet, vilket sedan faltades med intensiteten av bilden i synplanet. Efter att detta inverstransformerats gavs intensitetsfördelningen vid näthinnan som en matris. Denna kunde sedan användas för att rita upp bilden, rita intensitetsfördelningar och jämföra bildkvalitet.

3.1.4 Metod för att propagera strålar

För att komplettera koden skapades även en variant där värdet hos det elektromagnetiska fältet beräknades i många punkter mellan hornhinnan och näthinnan. Metoden för detta kallas beam propagation [17]. Genom att propagera med små steg kan strålgången illustreras, vilket liknar en tvådimensionell variant av raytracing. Detta är hjälpsamt för att förstå strålgången vid olika synfel, och ett bra komplement till den ursprungliga metoden.

I modellen har beam propagation method utförts genom att använda PAS flera gånger med mycket liten propagationssträcka. På så sätt ändrades det elektromagnetiska fältet små steg i taget. Slutligen kunde fältet vid näthinnan till en intensitetsfördelning, enligt tidigare metod.

3.2 Simulering av synfel och ögonsjukdomar

Synfelen myopia och hyperopia beror oftast på att glaskroppen är för kort eller för lång. Detta modellerades enkelt, då endast längden på propagationssträckan i glaskroppen behövde ändras. Fallen då myopia eller hyperopia beror av krökningsradien på hornhinnan har inte behandlats, men skulle gå att modellera genom att ändra hornhinnans krökningsradie. För att utföra det behövs dock data på hur krökningsradien ser ut.

[1] För ytterligare kod, se Appendix E.

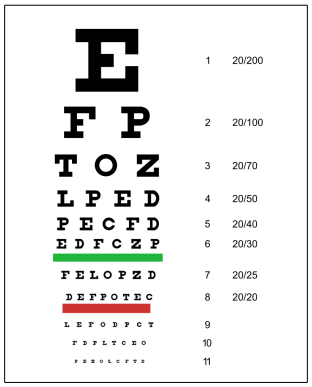
Astigmatism modellerades genom att kombinera hornhinnans fasomvandlingsfunktion med funktionen för en cylindrisk lins när fältet beräknades efter hornhinnan. På den cylindriska linsen skapades en ojämn yta genom att använda Ekv. (15) men istället för att ge en matris med alla avstånd från origo till godtycklig sampelpunkt gavs en matris med alla sampelpunkter i y-led i bildplanet. Fältet efter hornhinnan blev således en multiplikation av fältet innan med transmissionfunktionen för hornhinnan och den cylindriska linsen.

Ögats åldrande påverkar flera delar av ögats anatomi. Funktioner som beskriver förändringarna i ögats parametrar finns i tabell 1. För att skapa modellen för ett åldrande öga kombinerades dessa parametrar med modellen för det friska ögat.

Keratokonus beror som bekant på att hornhinnan blir deformerad. Att modellera detta är komplicerat, främst på grund av att sjukdomen påverkar ögonstrukturen markant. Inga resultat från tidigare studier på exakt hur hornhinnan påverkas av keratokonus har heller hittats, till exempel hur krökningsradie och tjocklek förändras. På grund av detta finns det inga värden att utgå från. Istället har hornhinnans båda sidor minskats med 10 %, 25 % samt 50 %, trots att detta inte nödvändigtvis behöver vara rimliga värden för keratokonus. Hornhinnans tjocklek antas vara konstant, även om den i verkligheten minskar.

3.3 Jämförelse av bildkvalitet

En viktig del av resultatet ligger i att jämföra kvaliteten på bilden som kommer in i ögat och bilden som når näthinnan. Bilden som användes var en Snellentavla, se Figur 4. I detta projekt jämfördes bilderna först och främst numeriskt med hjälp av inbyggda funktioner i MATLABs Image Processing Toolbox. Dessa funktioner har gemensamt att de räknar ut ett värde på hur lika bilderna är baserat på olika statistiska metoder och egenskaper i bilden. Dock behövde dessa värden kompletteras med en subjektiv uppskattning av bildernas likhet, då människan kan ha andra åsikter om vad som motsvarar en bra bild.



Figur 4: En Snellentavla. Hämtad från [18].

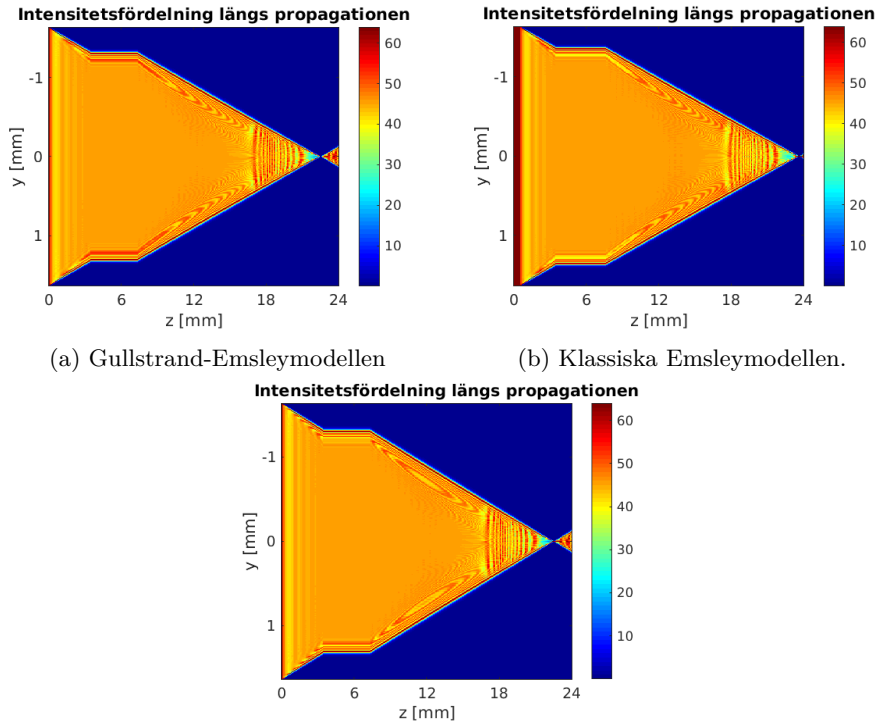
Två stycken olika inbyggda funktioner användes för att beräkna feluppskattningen mellan bilderna. En av dessa var funktionen immse, image mean-squared error, som tar medelkvadratavvikelsen, MSE, mellan två bilder. Detta används speciellt för att jämföra två bilder där den ena är ostörd och den andra har ett pålagt fel. I detta fall var bilden i objektplanet den ostörda bilden och bilden på näthinnan var den störda bilden. Den andra funktionen som också användes var SSIM, vilket står för structural similarity index. Det är ett mått på bildkvalitet som tar hänsyn till luminans, kontrast och struktur i bilden. Värdena ligger i intervallet noll till ett, där ett motsvarar att bilderna är likadana.

4 Resultat

Projektet resulterade i en numerisk modell[2], baserad på Fourieroptik, som kunde användas till att simulera olika ögonmodeller och synfel. På grund av att den Klassiska Emsleymodellen gav minst närsynthet så valdes den för att fortsättningsvis modellera synfelen. Resultaten från modellerna och synfelen presenteras nedan.

4.1 Resultat för friskt öga

Intensitetsfördelningen längs propagationssträckan, i z-riktning, i ögat ses i Figur 5 för de tre olika modellerna för ögat, den simpla Gullstrand-Emsleymodellen, den något mer komplexa Emsleymodellen och den Exakta Gullstrandmodellen. Vid $z = 0$ börjar ögat och motsvarar hornhinnans framsida och näthinnan ligger vid $z = 24$. På grund av att brännpunkten, punkten där fokus ligger, hamnar före näthinnan i respektive modell leder det till att alla modeller motsvarar ett något närsynt öga, men där Emsleymodellen ger bäst syn eftersom att brännpunkten ligger närmast näthinnan. Notera också att det elektromagnetiska fältet är konstant och parallellt med z-axeln under propagation genom hornhinnan och linsen.



(a) Gullstrand-Emsleymodellen

(b) Klassiska Emsleymodellen.

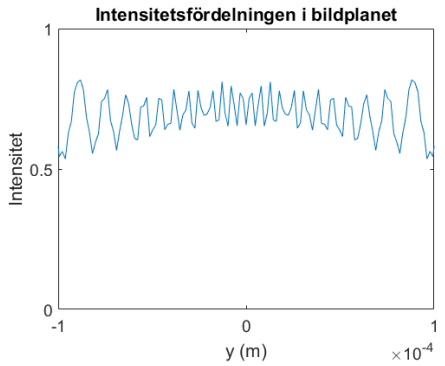
(c) Exakta Gullstrandögat.

Figur 5: Strålgång genom ögat med de olika modellerna. Variabeln y är en skalad höjd och z är djupet in i ögat. Färgskalan anger hur stark strålintensiteten är i en given yz-punkt. I Figur (a) visas strålgången för Gullstrand-Emsleymodellen, i Figur (b) visas strålgången för den Klassiska Emsleymodellen och i Figur (c) visas motsvarande strålgång för det Exakta Gullstrandögat.

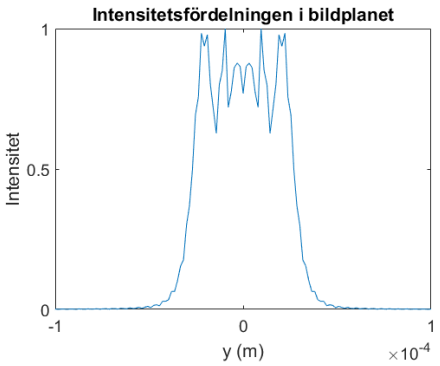
Intensiteten fås genom att beräkna $|E|^2$ och ritas sedan som en funktion av matrisen med y-punkter i bildplanet. Intensitetsfördelningen på näthinnan i bildplanet kan ses i Figur 6 för de tre olika ögonmodellerna. En topp kring $y = 0$ betyder att en stor del av intensiteten hamnar i samma punkt. Detta innebär att fokus hamnar i denna punkt och den eventuella bilden på näthinnan kommer bli fokuserad. Detta innebär att bilden på näthinnan för Exakta Gullstrandögat

[2]Se Appendix E för komplett kod.

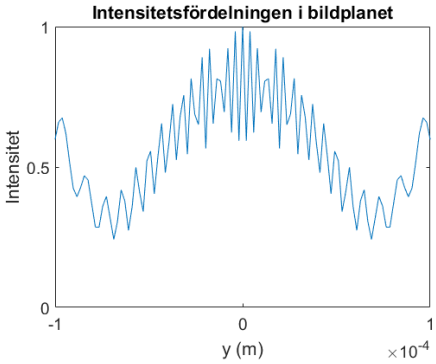
och Gullstrand-Emsleymodellen kommer bli mer ofokuserad än för Emsleymodellen, eftersom att intensiteten är utspridd över bildplanet istället för i en punkt.



(a) Gullstrand-Emsleymodellen.



(b) Klassiska Emsleymodellen.



(c) Exakta Gullstrandögat.

Figur 6: Intensiten på näthinnan där Figur (a) visar Gullstrand-Emsleymodellen, Figur (b) visar den Klassiska Emsleymodellen och Figur (c) visar det Exakta Gullstrandögat. Samtliga figurer visar en intensitet som tyder på att ögat är närsynt.

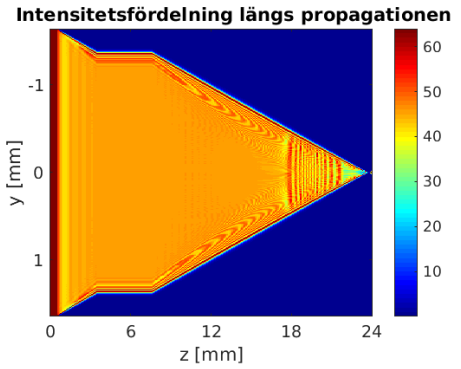
Genom att använda de inbyggda funktionerna i MATLABs Image Processing Tool kunde feluppskattningarna i Tabell 2 beräknas. Även dessa värden bekräftar ovanstående grafer eftersom att exempelvis ett lägre MSE-värde motsvarar en bättre bild. Det går även att se på SSIM-värdet. Emsley-modellen har ett SSIM-värde på cirka 0.7 vilket innebär att bilden på näthinnan är 70 % lik bilden i objektplanet.

Tabell 2: Feluppskattningsvärde för hur bilden på näthinnan skiljer sig från den ingående bilden, för de olika modellerna.

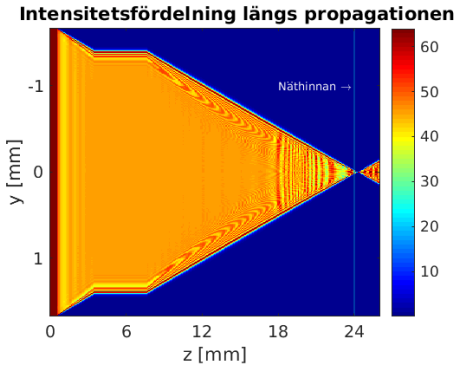
Jämförelseverktyg	Gullstrand-Emsleymodellen	Klassiska Emsley-modellen	Exakta Gullstrandögat
MSE	163.0	83.09	150.7
SSIM	0.5375	0.7080	0.5507

4.2 Påverkan på synen av myopia, hyperopia och astigmatism

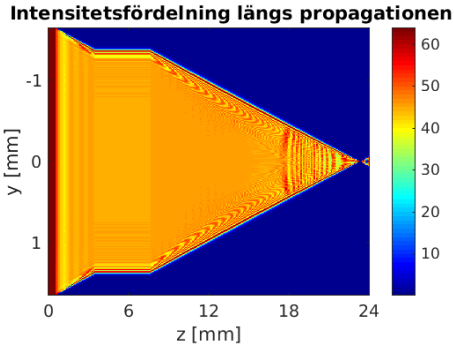
I Figur 7 visas intensitetsfördelningen längs propagationen genom ögat för tre stycken synfel, där Emsley-modellen har använts för samtliga. Dessa är myopia, hyperopia och astigmatism. För myopia hamnar fokus strax innan näthinnan medan det för hyperopia hamnar strax bakom näthinnan. Fokus för astigmatism hamnar en bit framför näthinnan i den här modellen.



(a) Myopia, med tillagt fel i brytningsstyrkan på -0.5170 m^{-1}.



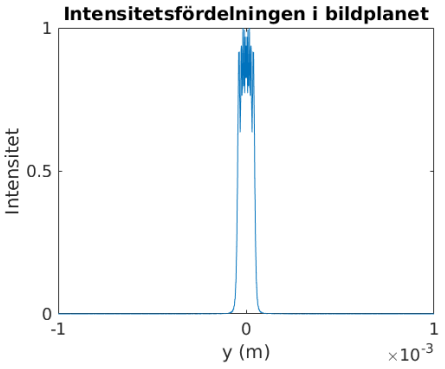
(b) Hyperopia, med tillagt fel i brytningsstyrkan på 0.6887 m^{-1}.



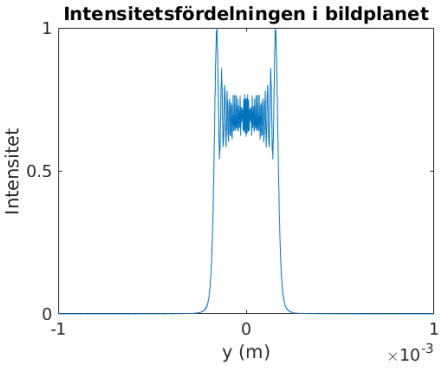
(c) Astigmatism.

Figur 7: Intensitetsfördelningen längs propagationen genom ögat som har beräknats med hjälp av BPM. I Figur (a) visas ett närsynt öga baserad på Emsleymodellen, fokalpunkten ligger strax innan näthinnan. I Figur (b) visas ett långsynt öga baserad på samma modell, notera att fokalpunkten ligger strax efter näthinnan. I Figur (c) visas ett öga som lider av astigmatism baserad på Emsleymodellen.

Intensitetsfördelningen på näthinnan i bildplanet ser i det här fallet ungefär likadant ut för både långsynthet och närsynhet, enligt Figur 8, eftersom fokus ligger strax innan och strax bakom näthinnan vilket kan ses i Figur 7. Astigmatism däremot ger upphov till två stycken maxima på näthinnan.



(a) Intensitetsgraf för myopia.

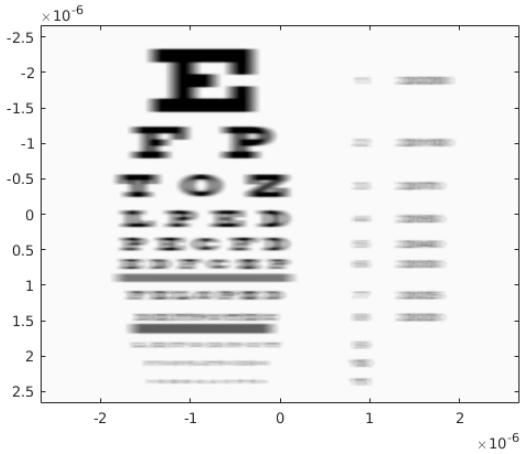


(b) Intensitetsgraf för astigmatism.

Figur 8: Intensiteten på näthinnan för både närsynthet, Figur (a), och astigmatism, Figur (b), där den Klassiska Emsleymodellen används för parametrarna. Notera den tvåuddiga formen för astigmatism som leder till en utsmetad bild på näthinnan.

Dessa två toppar för astigmatism i Figur 8 påverkar synen på så sätt att objektet blir utsmetad, eftersom fokus hamnar på två olika punkter. Genom att falta PSF:en med objektets matris fås en bild av objektet i bildplanet, det vill säga på näthinnan. Detta illusteras bäst genom att

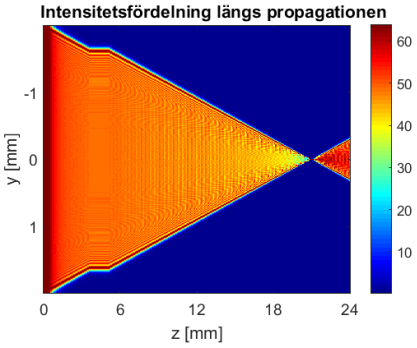
använda en Snellentavla och resultatet ses i Figur 9. Hur Snellentavlan ser ut med myopia och hyperopia återfinns i Appendix D.



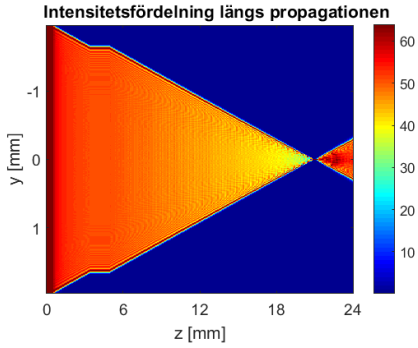
Figur 9: En Snellentavla som visar effekterna av astigmatism.

4.3 Påverkan på synen av presbyopia

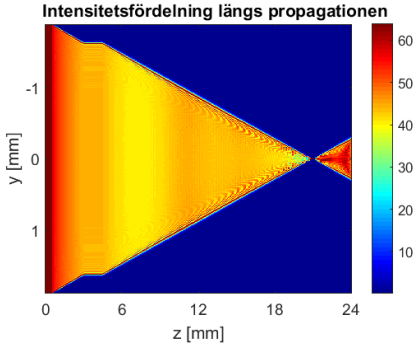
Grafen för linsens åldersberoende fås genom att addera funktionerna som ger brytningsstyrkan för linsens fram- respektive baksida från Tabell 1, vilken återfinns i Appendix D. I Figur 10, syns BPM-grafer för tre olika åldrar; 20 år, 40 år och 80 år.



(a) Syn för öga med åldern 20 år.



(b) Syn för öga med åldern 40 år.

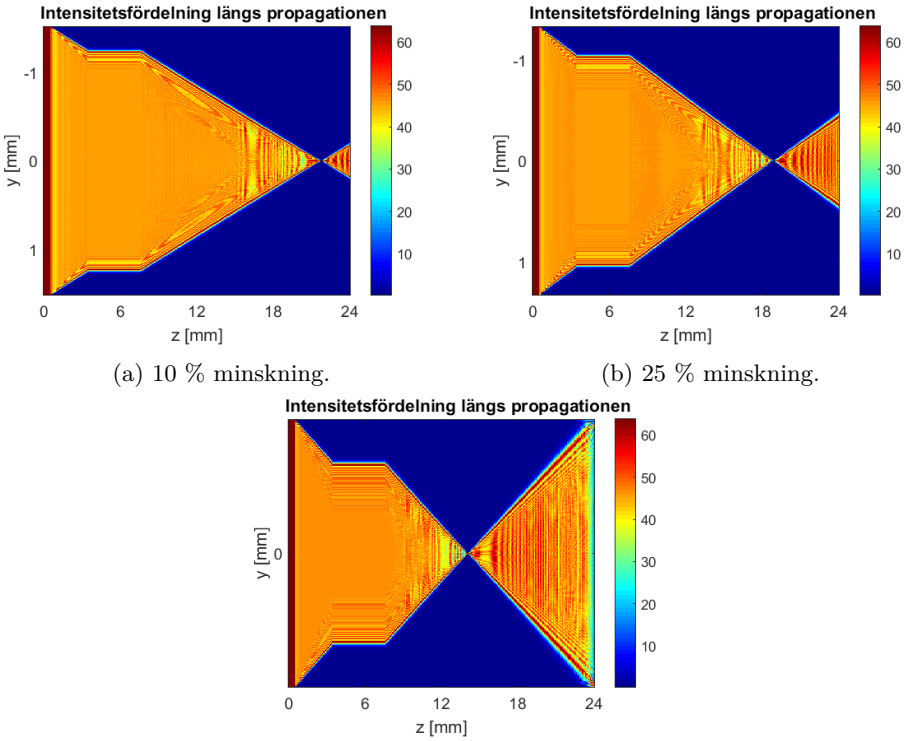


(c) Syn för öga med åldern 80 år.

Figur 10: BPM-grafer för ett öga med olika åldrar. Bygger på både åldermodellen och den Klassiska Emsleymodellen. I Figur (a) visas BPM-graf för ett öga där åldern har satts till 20 år. I Figur (b) visas en likadan graf men åldern har satts till 40 år. I Figur (c) visas också en liknande graf men för åldern 80 år.

4.4 Minskning av hornhinnans kurvaturradie

Figur 11 visar tre olika BPM-grafer, med varierande minskning på krökningsradien hos hornhinnans fram- och baksida. Graferna visar att synen blir sämre desto kraftigare symptom av keratokonus. Detta är en förenklad modell av sjukdomen keratokonus eftersom formen på hornhinnan inte är helt konformad samt då modellen varken tar hänsyn till en tunnare hornhinna eller att avståndet mellan hornhinna och lins ökar.



(a) 10 % minskning.

(b) 25 % minskning.

(c) 50 % minskning.

Figur 11: BPM-grafer med förminskad krökningsradie på både fram- och baksidan av hornhinnan, med den Klassiska Emsleymodellen. I Figur (a) visas BPM-graf för ett öga där krökningsradien har minskat med 10 %. I Figur (b) visas en likadan graf men krökningsradien har minskats med 25 %. I Figur (c) visas motsvarande graf men där krökningsradien har minskats med 50 %.

5 Diskussion

Projektets numeriska modell har lyckats ge resultat som är godtagbara för både det friska ögat samt för fall då enklare synfel appliceras. Oavsett detta är det fortfarande viktigt med en diskussion kring vad som gör modellen mindre verklighetstrogen och vad som realistiskt sett skulle kunna ändras för att motverka detta.

5.1 Jämförelse mellan ögonmodeller

Notera först att alla intensitetsfördelningsgrafer i Figur 5 ger närsynthet. Orsaken till detta är oklar, men det kan möjligtvis bero på approximationer i projektets Fourieroptiksmetod och i ögonmodellernas parametrar. Dock ger användning av den Klassiska Emsleymodellen minst närsynthet. För projektets Fourieroptiksmetod lämpar sig alltså denna modell bäst, trots att den är mindre avancerad än det Exakta Gullstrandögat. Anledningen till detta är troligen hur intensitetsfördelningsgrafen beräknas. I det Exakta Gullstrandsögat delas linsen upp i tre mindre linser, som inte har något avstånd mellan varandra. Således kan TOK-funktionerna till respektive linsdel multipliceras ihop direkt vid uppbyggandet av BPM-grafen till en gemensam TOK-funktion.

Även om det Exakta Gullstrandögat har delat upp linsen i tre delar så kommer detta alltså att ha liten betydelse vid användning av den Fourieroptiksmetod som projektet bygger på. Detta innebär troligen också att en GRIN-lins inte skulle ge bättre resultat, även om det ger en mer verklighetstrogen modell.

Samma slutsats om modellernas kvalité kan dras från intensitetsgraferna i Figur 6. Det syns tydligt att den Klassiska Emsleymodellen, följt av det Exakta Gullstrandögat, ger mest fokuserad bild. De två numeriska jämförelseverktygen, MSE och SSIM, kan användas för att dra samma slutsats.

5.2 Utvärdering av ögonproblemssimulering

De olika synfelen som har undersökts i projektet har varit av olika komplexitet och därmed har kvalitén av respektive simulering varierat. Modellerna för de enklare synfelen har därför varit mer verklighetstrogna i jämförelse med exempelvis keratokonus. Dock är det fortfarande viktigt att påbörja undersökningen av de mer komplexa synfelen, så att det finns en utgångspunkt för framtida utveckling.

5.2.1 De vanliga synfelens inverkan på synen

Påverkan på synen av när- och långsynthet, samt astigmatism, visas i Figur 7. För myopia och hyperopia innebär detta som förväntat en förflyttning av brännpunkten i z-led och medför i övrigt inga andra intressanta ändringar i BPM-grafen. För astigmatism är intensitetsfördelningsgrafen inte ett lika intressant resultat då grafens utseende inte illustrerar uppdelningen av brännpunkten på näthinnan. Istället visar BPM-grafen enbart var den resulterande brännpunkten hamnar. Detta säger något om vilken grad av när- eller långsynthet som astigmatismen medför, vilket kan vara av intresse ifall en enkel överblick för styrkan av synfelet eftertraktas. Figur 8 visar däremot tydligare att astigmatism medför flera brännpunkter. Notera också att oregelbunden astigmatism, som inte har modellerats i detta projekt, skulle leda till att fokusets bryts upp i ännu flera punkter.

5.2.2 Effekten av inlagt åldersberoende

I Figur 10 syns intensitetsfördelningsgrafer för tre olika åldrar. Något som vid första anblick kan verka som ett överraskande resultat är att brytningspunkten och därmed synen i allmänhet, inte verkar påverkas särskilt med åldern. Detta är dock en någorlunda felaktig slutsats på grund av att modellen förutsätter konstant objektavstånd. Ett av de mer markanta problemen som uppstår vid ökande ålder är att förmågan till ackommodation försämras och detta kan inte utvärderas då konstant objektavstånd används. Dock är det korrekt att graferna verkar tyda på att synen vid konstant objektavstånd inte är särskilt åldersberoende. På grund av att hornhinnan står för majoriteten av brytningseffekten och att den inte påverkas av presbyopia, enligt tabell 1, är det rimligt att synen inte skulle påverkas markant vid konstant objektavstånd. Vidare verkar det som att färgen på BPM-grafen, det vill säga strålintensiteten, verkar bli svagare med ökad ålder. Det är dock svårt att dra några slutsatser av vad detta beror på och vad det innebär praktiskt för synen.

Notera även att åldersberoendet för samtliga åldrar verkar medföra mer närsynthet till synen, vilket syns ifall Figur 5b jämförs med Figur 10. Detta beror troligen på att den valda åldersmodellen är bristfällig, eller inte passar tillsammans med den Klassiska Emsleymodellen.

5.2.3 Förenklad simulering av keratokonus

Vidare har även ändringar i hornhinnans kurvaturradie simulerats, vilket syns i Figur 11. Det är en grov förenkling av sjukdomen keratokonus, men ger en bild på hur stor påverkan sjukdomen har på synen. Som förväntat leder minskad kurvaturradie på hornhinnans brytningssidor till sämre syn, mer specifikt till ökad närsynthet. Dock har ingen cylindrisk lins lagt till, så simuleringen ger inte upphov till någon astigmatism, vilket är en av de mer karaktäristiska synfel som keratokonus medför. Detta hade varit ett bra nästa steg, även om det skulle vara svårt eftersom det i projektet saknas tillgång på vilken grad av astigmatism som keratokonus exakt medför. Dessutom skulle det vara önskvärt att minska tjockleken på hornhinnan och öka avståndet mellan hornhinnan och linsen, men även detta blir svårt då det saknas data.

5.3 Modell mot verklighet

För att förenkla de numeriska modellerna har ett flertal faktorer försummats, trots att de egentligen har en påverkan på synen. Exempelvis berörs inte aberrationer och diffraktion, som tas upp i Avsnitt 2.4. Frågan är om dessa skulle resultera i en sådan stor påverkan på synskärpan att det finns intresse i att modellera dem. På grund av att hjärnan dessutom kan hantera de resolutionsstörningar som skulle följa från dessa så finns det liten mening i att ta med dem i modellen. Att modellera aberrationer och diffraktion skulle då istället leda till en modell som anger sämre synskärpa än vad som skulle erhållas i verkligheten. Möjligen skulle det vara intressant att ta med dessa enbart i syftet att att få en ökad förståelse av ögats optik.

Vidare antas det även i beräkningarna att både hornhinnan och linsen kan ses som tunna optiska komponenter. Kvaliteten av detta antagande kan granskas med hjälp av intensitetsfördelningsgraferna, exempelvis de i Figur 5. Detta stämmer inte överens med verkligheten, utan ljusets färdriktning ska peka ungefär mot fokalpunkten, genom hela ögat. Antagandet att linsen är en tunn optisk komponent är därför ett relativt dåligt antagande då det ger upphov till det långa plana intervallet i respektive graf. Dock verkar samma approximation fungera bättre för hornhinnan, eftersom det plana intervallet i början av varje graf inte är lika tydligt .

I modellerna är avståndet till objektet en in-parameter som kan varieras. Oavsett detta så tas ingen hänsyn till ackommodation i koden, det vill säga linsens egenskaper förblir konstanta. Eftersom att de tre olika ögonmodellerna antar att ciliarmuskeln är avslappnad så borde objektavståndet enbart få vara ett stort värde. Notera dock att en fullt avslappnad ciliarmuskel leder till att linsen är så tunn som möjligt och därmed ger maximal fokallängd, så linsen ger i det nuvarande fallet svagare brytningsstyrka än i verkligheten. Detta innebär att en ökning av objektavståndet skulle leda till ännu starkare närsynthet i Figur 5 för samtliga ögonmodeller. Därmed är inte valet av objektavstånd anledningen till närsyntheten i modellerna. Dessutom kan det argumenteras ifall det valda objektavståndet på fem meter är tillräckligt långt för att ciliarmuskeln ska kunna antas vara avslappnad.

5.4 Fourieroptik mot raytracing

Den stora skillnaden mellan Fourieroptik och raytracing är att Fourieroptik betraktar strålarna som fält medan raytracing betraktar de som geometriska linjer. Det gör att Fourieroptik är noggrannare än raytracing, men även att beräkningarna blir betydligt tyngre. Att beräkningarna blir tyngre beror på att ekvationerna som används för att beskriva Fourieroptik är mer komplicerade än de generella ekvationerna som används vid raytracing. Dock går det att göra Fourieroptikberäkningarna enklare genom att göra vissa förenklingar och på liknande sätt kan raytracingberäkningarna göras mer komplicerade genom att ta hänsyn till ytterligare faktorer.

För att bättre kunna modellera synhjälpmedel till ögonsjukdomar där ljuset sprids onormalt,

skulle en tredimensionell raytracingmodell vara ett bra verktyg. På så vis kan ljusets spridning i ögat observeras, för att sedan korrigeras med exempelvis en lins. En raytracing-modell skulle enklare kunna anpassas till geometriändringar i ögat, något som har varit svårt att åstadkomma med Fourieroptikmodellen. Vilken metod som är att föredra beror dock på vad som önskas av modellen, till exempel mer detaljerad ögongeometri eller mer verklighetstrogen optik.

5.5 Framtida förbättringar till modellen

Tanken har under hela projektet varit att arbetet ska kunna ligga till grund för vidare utveckling av programmet. Fokus har därför varit att skapa en fungerande modell för det friska ögat på ett sätt som lämpar sig för vidareutveckling och därför valdes tidigt i processen att arbeta objektorienterat för att få en modulariserad kod. Dock var detta problematiskt eftersom programmeringsspråket som valdes var MATLAB, vilket inte är objektorienterat i grunden. Andra programmeringsspråk så som Python hade troligtvis fungerat bättre.

Projektet syftade till att undersöka olika ögonmodeller och deras synfel. Att simulera synfel kunde dock inte utföras i den mån som önskats. En uppenbar utveckling är därmed att förbättra modellerna för presbyopia och keratokonus samt att lägga till fler synfel. Exempelvis skulle grå starr kunna modelleras genom att skapa ett skikt som släpper igenom delar av ljuset.

En annan utveckling av modellen är att komplettera med kod för att simulera glasögon eller korrigerande linser. Detta skulle kunna göras genom att lägga till ytterligare en tunn optisk komponent på ett litet avstånd ifrån hornhinnans framsida, och använda en propagationsmetod så som PAS däremellan. För ögon som har mer komplicerade synfel kan det på så vis testas numeriskt vilken sorts korrigering som skulle ge bäst bild. Förhoppningen är att detta kan vara ett hjälpmedel i utvecklingen av glasögon och linser för exempelvis patienter med keratokonus.

6 Slutsatser

Under projektet har Fourieroptiska modeller för ögat och synen skapats, och jämförelserna mellan de tre modellerna visar att samtliga modeller gav en viss närsynthet. Dock var den Klassiska Emsleymodellen minst närsynt, och användes därmed till vidare simuleringar av synfel. Vid vidare utveckling av programmet rekommenderas först och främst att undersöka vad denna närsynthet beror på.

Simuleringarna av närsynthet, långsynthet och astigmatism gav verklighetstrogna resultat. Undersökning av åldersberoende gav resultat som pekade på att synen inte påverkas av åldrande, vilket enligt alla andra källor inte stämmer. Detta resultat berodde på att modellen inte tar hänsyn till linsens förmåga till ackommodation, vilket är vad som huvudsakligen påverkas av åldrande.

Det visade sig vara mycket mer komplicerat att modellera keratokonus än förväntat och den primära svårigheten låg i att avbilda den onormala formen hos hornhinnan. Eftersom hornhinnan i modellen antogs vara en tunn optisk komponent och inte en geometrisk form, kunde inte konformad geometri tillämpas i beräkningarna och därmed är simuleringen som utfördes väldigt förenklad.

Ögonmodellen har under projektet använts för att simulera ögat och dess synfel med syftet att öka förståelse. Så som modellen är just nu finns dock inget användningsområde för den. Däremot ser vi en potential i att modellen kan utvecklas för att bli ett stöd i framställandet av lämpliga synhjälpmedel till ovanligare sjukdomar.

Referenser

[1] D. Haupt, "Eye front." hum3d, https://hum3d.com/free/eyeball/, modifierad på http://picascii.com/.

[2] T. V. et Al, "Global, regional, and national incidence, prevalence, and years lived with disability for 310 diseases and injuries, 1990–2015: a systematic analysis for the global burden of disease study 2015," *The Lancet*, vol. 388, nr. 10053, s. 1545 - 1602, 2016.

[3] N. R. Galloway and W. M. K. Amoaku, *Common eye diseases and their management*. New York: Springer, 1999, s. 5-12. Andra upplagan.

[4] I. P. Herman, *Physics of the Human Body*. Springer International Publishing, 2016, s. 733, 742, 755-756, 765-774, 778, 786-787, 807. Andra upplagan.

[5] "Eyesection." Wikipedia, 14 juli 2007. Hämtad (2017–02–01): https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eyesection.svgRedigeradavgrupp2017-02-01.

[6] L. N. Atchison, David A; Thibos, "Optical models of the human eye," *Clinical and Experimental Optometry*, vol. 99, 2016.

[7] E. Hecht, *Optics*. Pearson, 2014, s. 445-471. Fjärde upplagan.

[8] "Myopia and lens correction." Wikipedia, av Gumenyuk I.S, 4 maj 2014. Hämtad (2017–03–02): https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Myopia_and_lens_correction.svg.

[9] "Hypermetropia color." Wikipedia, av Gumenjuk I.S., 24 juli 2014. Hämtad (2017–03–02): https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hypermetropia_color.svg.

[10] B. K. P. George Smith, David A. Atchison, "Modeling the power of the aging human eye," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 9, Dec 1992.

[11] J. A. D. C. P. J. Arasa, "Single dispersive gradient-index profile for the aging human lens," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 25, Jan 2008.

[12] Y. S. Rabinowitz, "Keratoconus," *Survey of Ophthalmology*, vol. 42, nr. 4, s. 297–319, 1998.

[13] M. Vaughan, "Optics," 2014.

[14] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998, s. 295.

[15] P. Shirley and R. K. Morley, *Realistic ray tracing*. Natick, Mass: AK Peters, andra upplagan, 2003.

[16] "Positiv menisk lins." McGraw-Hill Dictionary of Scientific Technical Terms, 6E. 2003. Hämtad (2017–04–06): http://encyclopedia2.thefreedictionary.com/positive+meniscus+lens.

[17] G. Pedrola, *Beam Propagation Method for Design of Optical Waveguide Devices*. Oxford: Wiley-Blackwell, 2015.

[18] "Snellen chart." Wikipedia, av Jeff Dahl, 23 juli 2008. Hämtad (2017–04–30): https://en.wikipedia.org/wiki/Snellen_chart#/media/File:Snellen_chart.svg.

[19] G. King, *Vibrations and waves*. Oxford: Wiley-Blackwell, 2009, s. 161-164, 172-173, 176-177.

[20] C. Schlick, "An inexpensive BRDF model for physically-based rendering," *Computer Graphics Forum*, vol. 13, s. 233–246, aug 1994.

A Datatabeller till ögonmodeller

Tabell 3: Data för mänskligt öga, enligt den reviderade Gullstrand-Emsleymodellen. Värden hämtade från [4].

Medium/yta	Brytningsindex	Kurvaturradie (mm)	Brytningsstyrka (m^{-1})	Avstånd från hornhinnans framsida (mm)
Luft	1.000	-	-	-
Hornhinna framsida	-	7.80	43.1	0
Kammarvatten	1.336	-	-	-
Främre linsyta	-	11.0	7.82	3.60
Lins	1.422	-	-	-
Bakre linsyta	-	−6.48	13.3	7.30
Glaskropp	1.336	-	-	-
Näthinna	-	-	-	24.1

Tabell 4: Data för mänskligt öga, enligt den klassiska Emsleymodellen. Värden hämtade från [4].

Medium/yta	Brytningsindex	Kurvaturradie (mm)	Brytningsstyrka (m^{-1})	Avstånd från hornhinnans framsida (mm)
Luft	1.0003	-	-	-
Hornhinna framsida	-	7.80	48.3	0
Hornhinna	1.3771	-	-	-
Hornhinna baksida	-	6.50	−6.11	0.55
Kammarvatten	1.3374	-	-	-
Främre linsyta	-	10.2	8.10	3.6
Lins	1.4200	-	-	-
Bakre linsyta	-	−6.00	14.0	7.6
Glaskropp	1.3360	-	-	-
Näthinna	-	-	-	24

Tabell 5: Data för mänskligt öga, enligt det Exakta Gullstrandögat. Värden hämtade från [4].

Medium/yta	Brytningsindex	Kurvaturradie (mm)	Brytningsstyrka (m^{-1})	Avstånd från hornhinnans framsida (mm)
Luft	1.000	-	-	-
Hornhinna framsida	-	7.70	48.8	0
Hornhinna	1.376	-	-	-
Hornhinna baksida	-	6.80	−5.88	0.50
Kammarvatten	1.336	-	-	-
Främre linsyta	-	10.0	5.00	3.6
Yttre lins	1.386	-	-	-
Första inre linsyta	-	7.91	2.53	4.1
Inre lins	1.406	-	-	-
Andra inre linsyta	-	−5.76	3.47	6.6
Yttre lins	1.386	-	-	-
Bakre linsyta	-	−6.00	8.33	7.2
Glaskropp	1.336	-	-	-
Näthinna	-	-	-	24

Brytningsstyrkan P för en yta är inversen av fokallängden, det vill säga avståndet mellan brytningsytan och dess brännpunkt, och beräknas allmänt enligt

$$P = \frac{n_2 - n_1}{R} \tag{18}$$

där n_1 och n_2 är brytningsindexen före respektive efter ytan och R är ytans kurvaturradie [4].

B Diffraktion

Diffraktion är ett fysikaliskt fenomen som uppstår då vågor stöter på hinder av något slag och därefter böjer sig runt detta hinder och sprider ut sig. På samma sätt är diffraktion orsaken till att vågor sprider ut sig efter att ha gått igenom någon typ av öppning. Enligt Huygens princip skulle en sådan öppning kunna delas upp i oändligt små bitar som får agera som punktkällor, vilket resulterar i sekundära vågor som kan interferera både konstruktivt och destruktivt [19]. Två vanliga approximationer till diffraktion är Fraunhofer- respektive Fresneldiffraktion. I det förstnämnda fallet antas att den inkommande vågen som böjs är plan, medan det i den sistnämnda antas att den är cirkulär. På grund av att vågen redan har en viss kurvatur när den stöter på hindret vid Fresneldiffraktion så kommer den resulterande fasförskjutningen som orsakas av hindret att vara annorlunda från det andra fallet [19]. Ofta är Fraunhoferdiffraktion bara relevant då vågkällan är på ett större avstånd från hindret, så att ekvationen

$$R > \frac{a^2}{\lambda} \tag{19}$$

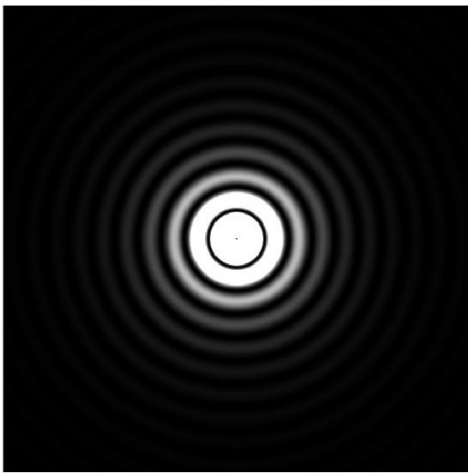
är uppfylld, där R är avståndet mellan hindret och fokalplanet (eller avståndet mellan vågkällan och hindret om det är kortare) och a är den största bredden på hindret.
Vid en cirkulär öppning, så som en pupill, kommer också ett diffraktionsmönster med cirkulär symmetri att uppstå. Om Fraunhoferdiffraktion antas så ges intensiteten I på brännpunkten av

$$I(\theta) = \frac{\varepsilon_A^2 A^2}{2R^2} \left(\frac{2J_1(ka \sin\theta)}{ka \sin\theta} \right)^2 \tag{20}$$

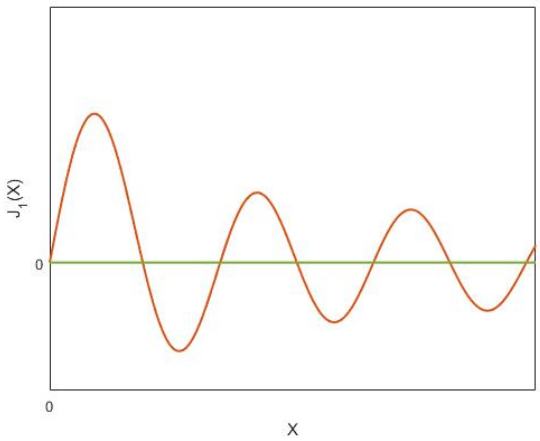
där ε_A är ljusstyrkan hos källan per areaenhet, A är arean hos öppningen, k är vågtalet och θ är vinkeln mellan centrum av öppningen och önskad punkt på fokalplanet, i radial riktning. J_n är en Besselfunktion av första slaget och ges enligt

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m+n} \tag{21}$$

där $\Gamma(x) = (x-1)!$ är gammafunktionen och n är ett heltal. J_1 syns i Figur 12b och i Figur 12a syns diffraktionsmönstret i fallet då öppningen är cirkulär. Den ljusa skivan i mitten, det vill säga centralmaximat, kallas för Airyskivan [7].



(a) Fraunhofer-diffraktionsmönster för cirkulär öppning.



(b) Besselfunktionen av första slaget för $n = 1$.

Figur 12: Jämförelse mellan $I(\theta)$ och $J_1(X)$.

C Mer om raytracing

Eftersom geometrisk optik används vid raytracing innebär det användning av Snells lag för att beräkna hur vinkeln blir vid refraktion.

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{22}$$

där n_1 och n_2 är brytningsindex före respektive efter refraktionsytan. θ_1 och θ_2 är vinklarna mellan ytan och instrålen respektive utstrålen. Sedan behövs Fresnels ekvation för opolariserat ljus för att beräkna hur stor del av ljuset som transmitteras och hur stor del av ljuset som reflekteras. Följande två ekvationer kallas för Fresnels ekvationer [7]. De används för polariserat ljus som reflekteras som sedan förenklas till en ekvation för opolariserat ljus som reflekteras.

$$R_\perp(\theta_1) = \left(\frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2}\right)^2,\ R_\parallel(\theta_1) = \left(\frac{n_2\cos\theta_1 - n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2}\right)^2 \tag{23}$$

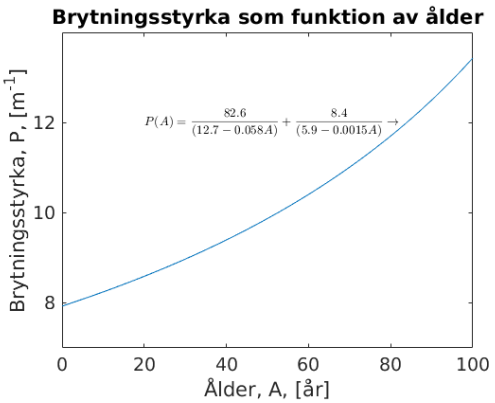
Antagandet görs att medelvärdet av båda ekvationer är tillräckligt bra för att få den opolariserade ekvationen. Den totala reflektansen R ges således av

$$R(\theta_i) = \frac{R_\perp + R_\parallel}{2}. \tag{24}$$

Ovanstående ekvation är fortfarande lite för tung beräkningsmässigt och därför används en förenklad variant av Fresnels ekvation, som kallas för Schlicks approximation. [20]
Vid raytracingberäkningar är det viktigt att göra en bedömning av vad som är viktigast. Fysikalisk noggrannhet eller snygga renderingar. Fysikalisk noggranna modeller kräver tyngre ekvationer och därmed beräkningar än enklare, mer empiriska modeller. Schlick's approximation är en enklare modell som behåller sin fysikaliska relevans genom att respektera fysikens lagar i tillräckligt hög grad samtidigt som ekvationen kräver betydligt färre beräkningar.
Ekvationen fås fram med hjälp av en metod som kallas för *rational fraction approximation*. Den går ut på att hitta de olika termerna som ingår i en bråkfunktion som beskriver den ursprungliga ekvationen tillräckligt väl. Det görs genom att hitta några värden på funktionsgrafen som går att beskriva med hjälp av en integral, en derivata eller något liknande. När några punkter har identifierats ställs ett ekvationssystem upp som löses för att få konstanterna som ingår i den nya funktionen. En utförligare beskrivning av den här metoden finns i [20] .

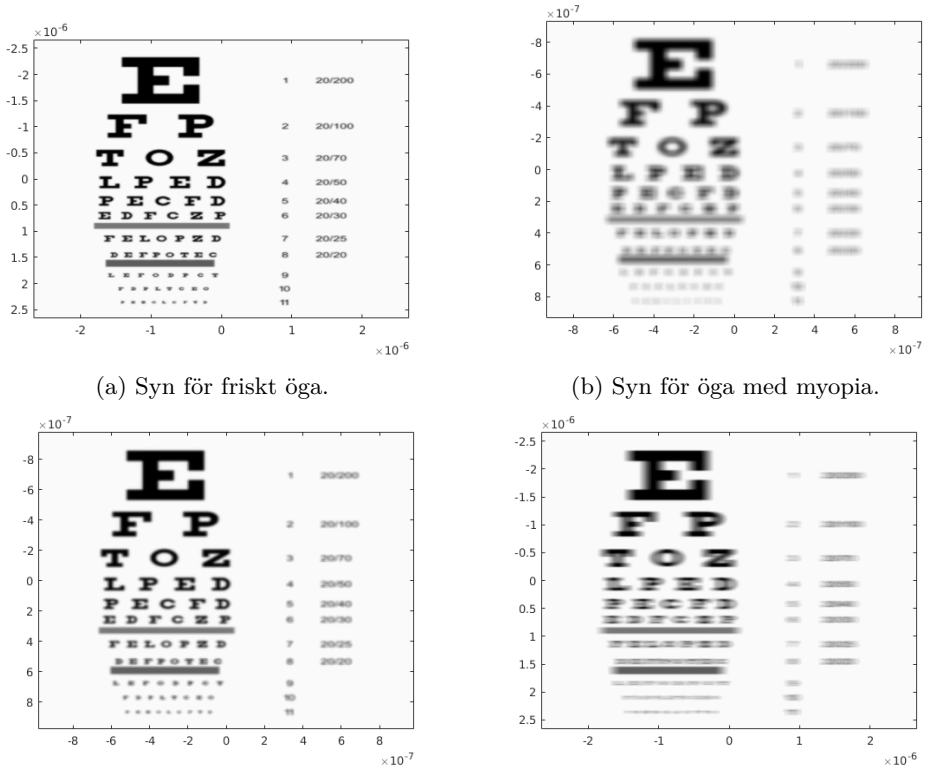
D Övriga resultat

Linsens totala brytningsstyrka som en funktion av åldern ges i Figur 13.



Figur 13: Variationen i linsens brytningsstyrka med åldern.

I Figur 14 visas synfelens inverkan på synen med hjälp av en Snellentavla, samt hur ett friskt öga ser en sådan syntavla.



(a) Syn för friskt öga.

(b) Syn för öga med myopia.

(c) Syn för öga med hyperopia.

(d) Syn för öga med astigmatism.

Figur 14: Synuppskattning med hjälp av en Snellentavla.

E Kod

Den öppna källkoden som har utvecklats under projektets gång finns att hitta på `https://github.com/sebastianalbert/Numerical-method-for-eyes-matlab`.