CHALMERS
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Inverterad dubbelpendel

Design och simulering av regleralgoritmer

Kandidatarbete SSYX02-16-84

JACOB KLINTBERG

Institutionen för Signaler och System
Avdelningen för Reglerteknik, Automation och Mekatronik
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg, Sverige 2016

Kandidatarbete SSYX02-16-84

Inverterad dubbelpendel

Design och simulering av regleralgoritmer

JACOB KLINTBERG

CHALMERS
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Institutionen för Signaler och System
Avdelningen för Reglerteknik, Automation och Mekatronik
Chalmers Tekniska Högskola
Göteborg, Sverige 2016

Inverterad dubbelpendel
Design och simulering av regleralgoritmer
JACOB KLINTBERG

Handledare: Bo Egardt, Institutionen för Signaler och System
Examinator: Anders Grauers, Institutionen för Signaler och System

Kandidatarbete SSYX02-16-84
Institutionen för Signaler och System
Avdelningen för Reglerteknik, Automation och Mekatronik
Chalmers Tekniska Högskola
SE-412 96 Göteborg
Telefon +46 31 772 1000

Typeset in LaTeX
Göteborg, Sverige 2016

Förord

Denna rapport är ett kandidatarbete vid Chalmers tekniska högskola, Göteborg, inom institutionen för Signaler och System. Projektet genomfördes under tredje årskursen på civilingenjörsprogrammet för Elektroteknik under vårterminen år 2016

Ett särskilt stort tack till professor Bo Egardt som handlett mig genom detta kandidatarbete med många goda råd och vägledning.

Jacob Klintberg, Göteborg, Maj 2016

Abstract

This report considers two problems concerning a double inverted pendulum. The first problem is to stabilize the pendulums around their unstable stationary points. An unstable stationary point implies that a small deviation from the point makes the pendulums to fall. The second problem is to perform an upswing of the pendulums from their stable stationary point their upright unstable stationary points.

The aim of the report is to describe the mathematical modeling, control design and simulations of the system. The report could then provide guidance in the construction of a similar system.

The stabilization is made by an LQ-controller and the upswing by an energy based Lyapunov function. The states are estimated by an Extended Kalman Filter.

The results are validated by simulations showing a successful stabilization and a successful upswing. Moreover, the simulations elaborate on the importance of system parameters such as the pendulums length and the length of the rail.

Keywords: Double inverted pendulum, Lagrangian mechanics, LQ-control, energy based Lyapunov function, Extended Kalman Filter.

Sammanfattning

Denna rapport behandlar två problemformuleringar för en inverterad dubbelpendel. Den första problemformuleringen är att stabilisera pendlarna kring deras instabila jämviktspunkter. En instabil jämviktspunkt innebär att en liten avvikelse från jämviktspunkten gör att pendlarna faller. Den andra problemformuleringen är att utföra en uppsvingning av pendlarna från deras stabila jämviktspunkter till deras instabila jämviktspunkter.

Syftet med rapporten är att beskriva matematisk modellering, design av regulatorer och simuleringar av systemet. Rapporten ska kunna användas vid konstruktion av ett liknande system.

Stabiliseringen är gjord med en LQ-regulator och uppsvingningen är gjord med en energibaserad Lyapunovfunktion. Tillstånden är estimerade med ett Extended Kalmanfilter.

Resultaten är utvärderade med simuleringar som visar en lyckad stabilisering och en lyckad uppsvingning. Dessutom visar simuleringarna effekten av olika valda parametervärden såsom längd hos pendlarna och längd hos skenan.

Nyckelord: Inverterad dubbelpendel, Lagrangiansk mekanik, LQ-reglering, Energibaserad Lyapunovfunktion, Extended Kalmanfilter.

Innehåll

Beteckningslista **xiii**

1 Introduktion **1**
1.1 Bakgrund . . . 1
1.2 Syfte . . . 2

2 Elektromekanisk konstruktion **3**
2.1 Prototyp . . . 3
2.2 Styrenhet . . . 4
2.3 Drivenhet . . . 4
2.4 Elektrisk drivkrets . . . 5
2.5 Positionsmätning . . . 5
2.6 Vinkelmätning . . . 5
2.7 Användning av prototyp i projekt . . . 5

3 Matematisk modellering **7**
3.1 Systemöverblick . . . 7
3.2 Modellering av likströmsmotor . . . 8
3.3 Modellering av rörelseekvationer . . . 9
3.3.1 Algebraisk loop . . . 11

4 Regulatordesign 1: Återkoppling av tillstånd **13**
4.1 Stabilisering av pendlar kring instabil jämviktspunkt . . . 13
4.2 Uppsvingning av pendlar . . . 14
4.2.1 Uppsvingning av inre pendeln (Steg 1) . . . 15
4.2.2 Stabilisering av inre pendeln och uppsvingning av yttre pendeln (Steg 2) . . . 16
4.2.3 Stabilisering av båda pendlarna (Steg3) . . . 17

5 Regulatordesign 2: Skattning av tillstånd **19**
5.1 Extended Kalmanfilter . . . 19

6 Resultat **21**
6.1 Stabilisering av pendlar . . . 21
6.1.1 Val av viktmatriser . . . 21
6.1.2 Utvärdering av LQ-regulator: Vinkelavvikelser . . . 22
6.1.3 Utvärdering av LQ-regulator: Störningar . . . 23

6.2 Uppsvingning av pendlar 24

7 Diskussion och slutsats 27

7.1 Slutsats 27

7.2 Fortsatta studier 27

7.2.1 Val av pendlarnas längder 27

7.2.2 Praktisk implementering 28

Bibliography 29

Beteckningslista

Nedan presenteras konstanter och variabler som används i rapporten.

Tabell 0.1: Använda konstanter

Beteckning	Storhet	Värde	Enhet
d_0	Friktion på släde	$1 \cdot 10^{-4}$	[N]
d_1	Luftmotstånd på inre pendel	$1 \cdot 10^{-4}$	[N]
d_2	Luftmotstånd på yttre pendel	$1 \cdot 10^{-4}$	[N]
g	Tyngdacceleration	9.82	$[\frac{m}{s^2}]$
I_1	Tröghetsmoment hos inre pendeln	$8.9 \cdot 10^{-5}$	$[kg\ m^2]$
I_2	Tröghetsmoment hos yttre pendeln	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$[kg\ m^2]$
k_e	EMK-konstant	$2.7 \cdot 10^{-4}$	$[\frac{Nm}{A}]$
k_t	Momentkonstant	$2.7 \cdot 10^{-4}$	$[\frac{Vs}{rad}]$
l_1	Längd på inre pendel	$1.5 \cdot 10^{-1}$	[m]
l_2	Längd på yttre pendel	$4 \cdot 10^{-1}$	[m]
L	Induktans i motor	$8 \cdot 10^{-2}$	[H]
m_0	Massa hos släde	$4.6 \cdot 10^{-1}$	[kg]
m_1	Massa hos inre pendel	$4 \cdot 10^{-2}$	[kg]
m_2	Massa hos yttre pendel	$1 \cdot 10^{-1}$	[kg]
n_G	Växellådans utväxling	5	-
r_b	Radie på remskivan	$2 \cdot 10^{-2}$	[m]
R	Resistans i motor	2.2	[Ω]
u_{a1}	Återkopplingsförstärkning	19	[V]
u_{a2}	Återkopplingsförstärkning	11.5	[V]
μ	Konstant i steg 2 för uppsvingning	$\frac{\pi}{6}$	[rad]

Tabell 0.2: Använda variabler

Beteckning	Storhet	Enhet
E	Elektromotorisk kraft (Back-EMK)	[V]
i	Ström i motor	[A]
q	Position hos släde	[m]
F	Kraft från motor	[N]
U	Spänning över motor	[V]
w_0	Störning på släde	[N]
w_1	Störning på inre pendel	[N]
w_2	Störning på yttre pendel	[N]
θ_1	Vinkelposition hos inre pendel	[rad]
θ_2	Vinkelposition hos yttre pendel	[rad]
ω_m	Motorns rotationshasighet	[rad/s]

1

Introduktion

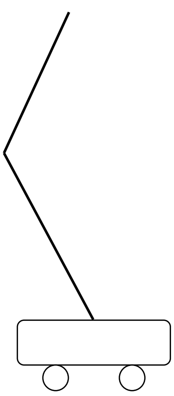
1.1 Bakgrund

Ett värdefullt inslag i teoretisk undervisning är praktiska demonstrationer, som stärker kopplingen mellan teori och verklighet. Genom iögonfallande tillämpningar ökar sannolikt studenternas förståelse för ämnet, samtidigt som mångas intresse kan väckas.

Ett populärt laboratorieexperiment vid undervisning av reglerteknik är en inverterad pendel. Systemet består av en pendel fäst på en släde, där systemet styrs genom förflyttning av släden. Experimentet avser att balansera pendeln i upprätt läge, även om systemet utsätts för störningar. Utöver balanseringen skall systemet även kunna utföra en uppsvingning av pendeln från nedhängande läge.

Kring det upprätta läget är systemet instabilt, vilket innebär att utan ett återkopplat reglersystem kommer pendeln inte kunna balanseras. Detta i kombination med systemets enkelhet gör att den reglertekniska insatsen är enkel att förstå.

I detta arbete har experimentet utökats till en dubbelpendel, se Figur 1.1. Systemets utökning innebär att ytterligare en pendel fästs via en led på toppen av enkelpendeln. Utökningen innebär att systemets komplexitet ökar. Likt enkelpendeln, skall dubbelpendel både stabiliseras kring sitt instabila, upprätta, jämviktsläge och kunna svingas från nedhängande läge till det upprätta jämviktsläget.



Figur 1.1: En inverterad dubbelpendel.

1.2 Syfte

Projektets syfte är att redogöra för reglertekniska lösningar för stabilisering och uppsvingning av en inverterad dubbelpendel. Rapporten skall behandla matematisk modellering, regulatordesign samt simuleringar, och kunna användas som vägledning vid konstruktion av ett likande system.

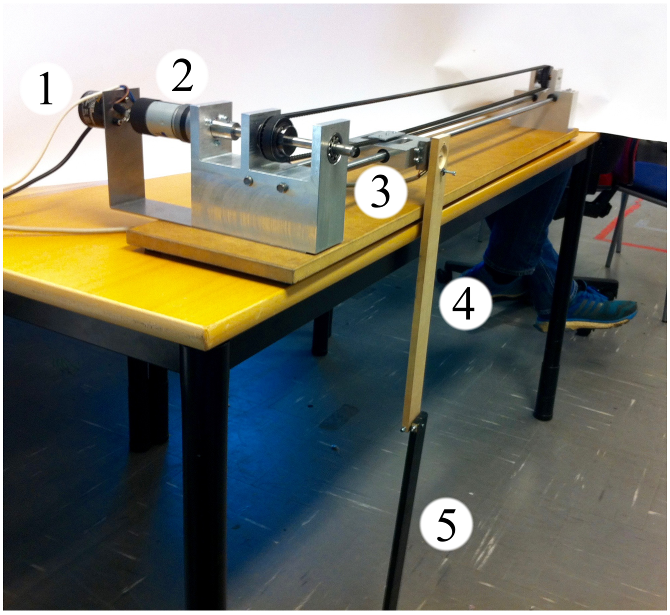
Rapporten skall svara på hur systemets dynamik förändras när systemets parametervärden ändras. Parametervärderna berör längd hos pendlarna och längd hos skenan.

2
Elektromekanisk konstruktion

I detta kapitel presenteras den elektromekaniska konstruktionen. Först ges en överblick av prototypen och sedan presenteras delkomponenterna mer ingående.

2.1 Prototyp

Konstruktionen består av en släde, som rör sig längs en 1 m lång horisontell skena. Släden kan förflyttas med en elmotor som, via en rem, applicerar kraft på släden. Två pendlar är monterade via leder till släden. I Figur 2.1 visas en överblick av prototypen.



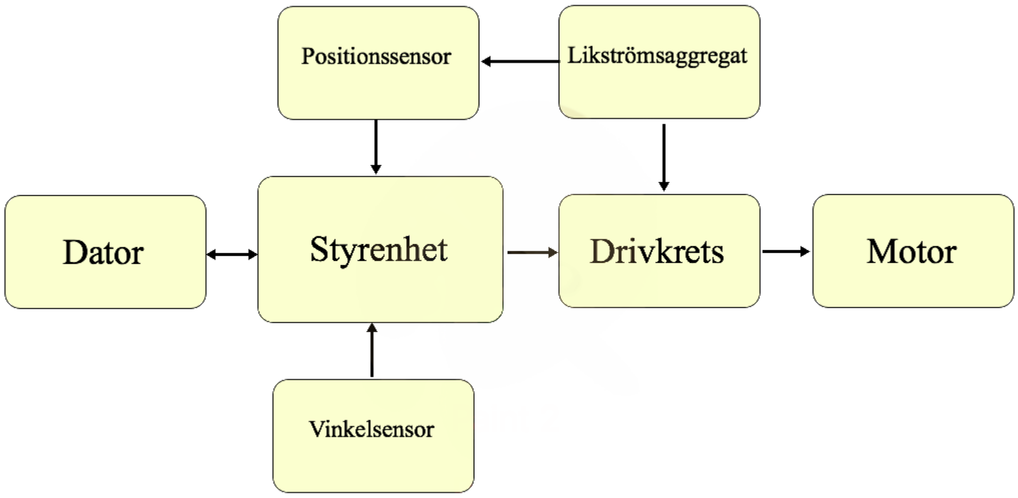
1. Encoder
2. Likströmsmotor
3. Släde.
4. Inre pendel.
5. Yttre pendel.

Figur 2.1: Bild av konstruktion.

Systemet har sensorer för att mäta slädens position och pendlarnas vinkelpositioner. Positionsmätning av slädens position genomförs av en encoder; denna mäter positionen på motoraxeln från vilken slädens position beräknas. Vinkelmätningen genomförs av vinkelsensorer, som är lokaliserade i pendlarnas leder.

Systemets styrsignal är spänningen över elmotorn. En mikroprocessor som får mätdata från position och vinkelmätning ändrar spänningen över motorn beroende av mätdatan. Styrsignalen omvandlas sedan i motorn till en kraft som appliceras på släden.

Figur 2.2 visas ett blockschema över systemets elektriska delar. Det framgår att styrenheten får information från prototypens sensorer för att ge styrsignaler till drivkretsen. Drivkretsen styr i sin tur motorn som driver systemet. Styrenheten programmeras via en dator.



Figur 2.2: Blockschema över det elektriska systemet.

2.2 Styrenhet

Systemets styrenhet är en Arduino Mega 2560. Den har 54 digitala in- och utgångar varav 15 kan generera pulsbreddsmodulerade signaler (PWM-signaler). Utöver detta har den 16 analoga ingångar. Styrenheten kan leverera 5V och ska ha en matningsspänning mellan 7-12V. Klockhasigheten är 16 MHz [1]. Styrenheten kopplas via en USB 2.0-anslutning till en dator för att programmeras via kodgenerering från Simulink.

2.3 Drivenhet

Drivenheten är en permanentmagnetiserad likströmsmotor från Mikro Motors med beteckning E192.12.5. Motorn har nominellt vridmoment på 0.2Nm, matningsspänning 12V och varvtal mellan 510-800 rpm beroende av belastningsgrad [2]. Motorn styrs genom att ändra spänningen över motorn.

2.4 Elektrisk drivkrets

Motordriften genomför av en Arduino Motor Shield R3. Genom att använda PWM-signaler kan spänningen över motorn ändras [3].

2.5 Positionsmätning

Positionen på släden mäts med en Rotar Encoder från Omron Corporation med typbeteckning E6B2-CWZ3E. Upplösningen är 1024 P/R och sensorn matas med 5-12V. Denna sensor mäter motoraxelns position, från vilket slädens position beräknas [4].

2.6 Vinkelmätning

Pendlarnas vinklar mäts med vinkelsensorer från Novotechnik av beteckning P2501-A202. Dessa sensorer har en mätosäkerhet på $\pm 0.01°$. Mekaniska vridningsvinkeln är 360°och elektriska vridningsvinkeln är $345 \pm 2°$[5].

2.7 Användning av prototyp i projekt

Regleralgoritmerna i avsnitt 4 och 5 har inte implementerats i prototypen. Däremot är de designade för att direkt kunna implementeras i ett liknande system. Alla simuleringar i avsnitt 6 är utförda med parametervärden hämtade från prototypen.

3
Matematisk modellering

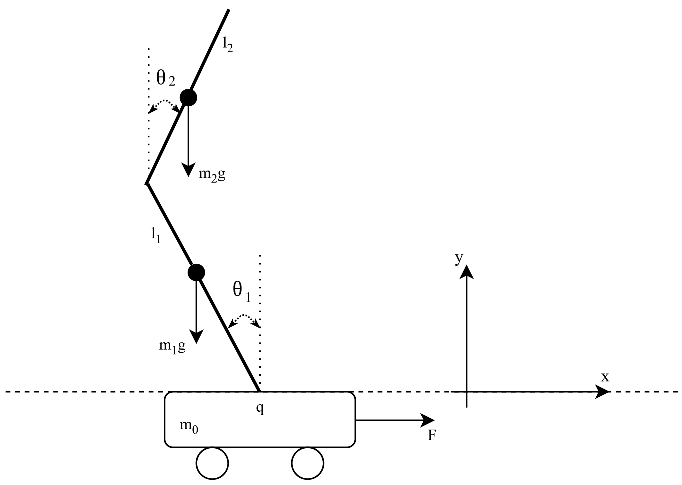
I detta avsnitt presenteras de matematiska ekvationerna som beskriver systemets dynamik. Först ges en systemöverblick, sedan modelleras likströmsmotorn och systemets rörelseekvationer.

3.1 Systemöverblick

Systemet består av en släde, som rör sig längs en skena. Två pendlar är monterade, via leder, till släden. Släden kan röra sig horisontellt, längs skenan, och pendlarna kan röra sig fritt kring sina fästpunkter, se Figur 3.1. Systemet har frihetsgrader i xy-planet.

Systemets styrsignal är spänningen över en likströmsmotor. I likströmsmotorn omvandlas styrsignalen till en kraft som appliceras på släden.

Slädens, inre pendelns och yttre pendelns massor betecknas m_0, m_1 respektive m_2. Pendlarnas massor antas vara lokaliserade på halva pendlarnas totala längd. Längderna på pendlarna betecknas l_1 och l_2 för den inre respektive yttre pendeln.



Figur 3.1: Bild över system.

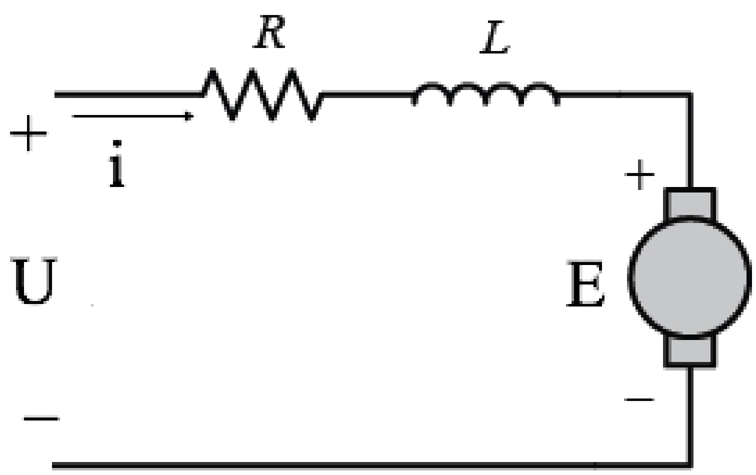
Slädens position, $q = q(t)$, är definierad positiv höger om rälsens origoposition. Vinkelavvikelser hos pendlarna från deras upprätta position betecknas $\theta_1 = \theta_1(t)$ och

$\theta_2 = \theta_2(t)$ för inre respektive yttre pendel, där positivt tecken avser avvikelse medurs.

Denna rapport kommer, i huvudsak, att behandla två olika vinkelkombinationer hos pendlarna. Den första är $\theta_1 = \pi$ och $\theta_2 = \pi$, vilket kommer benämnas som de stabila jämviktspunkterna. Den andra är $\theta_1 = 0$ och $\theta_2 = 0$, som kommer benämnas som de instabila jämviktspunkterna.

3.2 Modellering av likströmsmotor

Systemets drivenhet är en permanentmagnetiserad likströmsmotor. I likströmsmotorn sammankopplas de elektriska och mekaniska delarna genom den kraft som uppstår när strömförande ledare befinner sig i ett magnetfält. Figur 3.2 visar ett ekvivalent schema av en likströmsmotor [6].



Figur 3.2: Ekvivalent schema över likströmsmotor.

Med hjälp av Kirchoffs spänningslag kan följande uttryck från ekvivalenta schemat tecknas:

$$U = iR + L\frac{di}{dt} + E, \tag{3.1}$$

där E betecknar den inducerade spänningen i motorn, vilken ges av [6]:

$$E = k_e\omega_m, \tag{3.2}$$

där ω_m är likströmsmotorns rotationshastighet och k_e är en konstant. Vanligtvis är induktansen så liten att differentialekvationen i (3.1) kan approximeras med en algebraisk ekvation:

$$i = \frac{1}{R}(-k_e\omega_m + U). \tag{3.3}$$

Relationen mellan motorns rotationshasighet och slädens hastighet, $\dot{q}$, är:

$$\omega_m = \frac{\dot{q}}{r_b}, \tag{3.4}$$

där r_b är radien på remskivan som omvandlar roterande kraft till horisontell kraft. Motorns horisontella kraft ges av följande:

$$F = \frac{n_G \cdot k_t \cdot i}{r_b}, \tag{3.5}$$

där n_G betecknar växellådans utväxling och k_t är en motorkonstant.

3.3 Modellering av rörelseekvationer

En vanlig metod för att teckna rörelseekvationer för dynamiska system är att använda Lagrangiansk mekanik [7]. Till skillnad från Newtonsk mekanik, så härleds Lagrangiansk mekanik från principen om den minsta verkan. Detta är ofta en fördel eftersom det ofta är lättare att hitta uttryck för systemets olika energiformer än att direkt teckna systemets rörelseekvationer med hjälp av Newtons lagar. För en detaljerad beskrivning se [7].

För att hitta rörelseekvationer som beskriver den inverterade dubbelpendeln, tecknar vi uttryck för pendelns potentiella och kinetiska energi. Dessa uttryck kan sedan användas för att formulera Euler-Lagrange ekvation som beskriver den minimala verkan och således systemets rörelseekvationer.

För att uttrycka systemets kinetiska och potentiella energi börjar vi med att teckna uttryck för massornas positionskoordinater. Från Figur 3.1 ges att massornas x- respektive y-koordinater kan uttryckas som:

$$p_0 = \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix},\ p_1 = \begin{bmatrix} q + \frac{1}{2} l_1 \sin(\theta_1) \\ \frac{1}{2} l_1 \cos(\theta_1) \end{bmatrix},\ p_2 = \begin{bmatrix} q + l_1 \sin(\theta_1) + \frac{1}{2} l_2 \sin(\theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) + \frac{1}{2} l_2 \cos(\theta_2) \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

Dessa koordinater ger följande uttryck för kinetisk energi i systemet:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}[m_0 \|\dot{p}_0\|^2 + m_1 \|\dot{p}_1\|^2 + m_2 \|\dot{p}_2\|^2] \\ &= \frac{1}{2}\Big\{ m_0 \dot{q}^2 + m_1 \Big[(\dot{q} + \frac{1}{2} l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1))^2 + (\frac{1}{2} l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1))^2 \Big] \\ &\quad + m_2 \Big[(\dot{q} + l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + \frac{1}{2} l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2))^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + \frac{1}{2} l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2))^2 \Big] \Big\}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

Den potentiella energin kan uttryckas som:

$$V = g[\frac{1}{2} m_1 l_1 \cos(\theta_1) + m_2 (l_1 \cos(\theta_1) + \frac{1}{2} l_2 \cos(\theta_2)]. \tag{3.8}$$

Genom att introducera Lagrangianen $L = T - V$ kan Euler-Lagranges ekvation enligt [7], tecknas som:

$$
\begin{aligned}
F + w_0 - d_0\dot{q} &= \frac{d}{dt}\Big\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big\} - \Big\{\frac{\partial L}{\partial q}\Big\} \\
&= a_1\ddot{q} + a_2\ddot{\theta}_1\cos\theta_1 + a_3\ddot{\theta}_2\cos\theta_2 - a_2(\dot{\theta}_1)^2\sin\theta_1 - a_3(\dot{\theta}_2)^2\sin\theta_2, && (3.9a)\\
w_1 - d_1\dot{\theta}_1 &= \frac{d}{dt}\Big\{\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\Big\} - \Big\{\frac{\partial L}{\partial \theta_1}\Big\} \\
&= a_2\ddot{q}\cos\theta_1 + a_4\ddot{\theta}_1 + a_5\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + a_5(\dot{\theta}_1)^2\sin(\theta_1-\theta_2) - b_1\sin\theta_1, && (3.9b)\\
w_2 - d_2\dot{\theta}_2 &= \frac{d}{dt}\Big\{\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\Big\} - \Big\{\frac{\partial L}{\partial \theta_2}\Big\} \\
&= a_3\ddot{q}\cos\theta_2 + a_5\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) + a_6\ddot{\theta}_2 - a_5(\dot{\theta}_1)^2\sin(\theta_1-\theta_2) - b_2\sin\theta_2, && (3.9c)
\end{aligned}
$$

där F ges av (3.5) och w_0, w_1, w_2 är störningar som verkar i x-led på släde, inre pendel respektive yttre pendel. Friktion och luftmotstånd antas verka linjärt och hastighetsberoende på systemet, och där dess storlek beskrivs av konstanterna d_0, d_1 och d_2 för respektive släde, inre pendel och yttre pendel. Följande konstanter används i (3.9):

$$
\begin{aligned}
a_1 &= m_0 + m_1 + m_2 \\
a_2 &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1 \\
a_3 &= \frac{1}{2}m_2 l_2 \\
a_4 &= (\frac{1}{3}m_1 + m_2)l_1^2 \\
a_5 &= \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 \\
a_6 &= \frac{1}{3}m_2 l_2^2 \\
b_1 &= g(\frac{1}{2}m_1 + m_2)l_1 \\
b_2 &= \frac{1}{2}g m_2 l_2
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Utsignalen definieras som: $y = \begin{bmatrix} q & \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix}^T$, vilket ger att (3.9a), (3.9b) och (3.9c) kan skrivas på matrisform enligt:

$$M(y)\ddot{y} = f_1(y, \dot{y}, F, w), \tag{3.11}$$

där:

$$M(y) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2\cos(\theta_1) & a_3\cos(\theta_2) \\ a_2\cos(\theta_1) & a_4 & a_5\cos(\theta_1-\theta_2) \\ a_3\cos(\theta_2) & a_5\cos(\theta_1-\theta_2) & a_6 \end{bmatrix}, \tag{3.12}$$

$$f_1(y, \dot{y}, F, w) = \begin{bmatrix} a_2(\dot{\theta}_1)^2\sin(\theta_1) + a_3(\dot{\theta}_2)^2\sin(\theta_2) \\ -a_5(\dot{\theta}_2)^2\sin(\theta_1-\theta_2) + b_1\sin(\theta_1) \\ a_5(\dot{\theta}_1)^2\sin(\theta_1-\theta_2) + b_2\sin(\theta_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_0\dot{q} \\ d_1\dot{\theta}_1 \\ d_2\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

Eftersom $M(y)$ är inverterbar, det vill säga:

$$\det M(y) = l_1^2 l_2^2 m_2 \Big(m_0 m_1 + m_1^2 \sin^2 \theta_1 + m_1 m_2 \sin^2 \theta_1 + m_0 m_2 \sin^2 (\theta_1 - \theta_2) \Big) > 0, \tag{3.14}$$

förenklar vi (3.11) enligt:

$$\ddot{y} = M^{-1}(y) f_1(y, \dot{y}, F, w). \tag{3.15}$$

Genom att använda följande tillståndsvektor:

$$x := \begin{bmatrix} y^T & \dot{y}^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} q & \theta_1 & \theta_2 & \dot{q} & \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T, \tag{3.16}$$

kan systemet nu skrivas på tillståndsform enligt:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ M^{-1}(y) f_1(y, \dot{y}, F, w) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{y} \\ M^{-1}(y) f_2(y, \dot{y}, w) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{0} \\ M^{-1}(y) f_3(F) \end{bmatrix} = f_4(x, w) + g_1(x, F). \end{aligned} \tag{3.17}$$

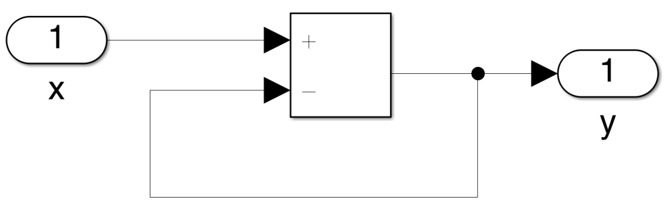
För att få en relation mellan rörelseekvationernas dynamik och systemets styrsignal, vilket beskrivs genom elmotorn, kombineras (3.3), (3.5) och (3.17). Detta ger att:

$$\dot{x} = f(x, w) + g(x, u). \tag{3.18}$$

3.3.1 Algebraisk loop

Då systemet simuleras i en dator genomförs det i diskret tid. När dynamiken i (3.18) diskretiseras uppstår en algebraisk loop. En algebraisk loop innebär att två, eller flera, av varandra beroende variabler måste beräknas i samma tidssteg. Ett sådant beroendeförhållande kan inte simuleras.

Ett exempel är systemet i Figur 3.3. För att beräkna y måste y vara känd. Beroendeförhållandet kan brytas genom en omskrivning från $y = x - y$ till $y = \frac{x}{2}$. På motsvarande sätt kan den algebraiska loopen som uppstår vid diskretisering av (3.11) lösas.



Figur 3.3: System med algebraisk loop.

4

Regulatordesign 1: Återkoppling av tillstånd

Detta kapitel har för avsikt att föreslå regulatorer till systemet. Regulatorer kommer att designas utifrån två problemformuleringar. Den första regulatorn avser stabilisering av pendlarna kring deras instabila jämviktslägen, och den andra regulatorn avser uppsvingning av pendlarna från deras stabila till instabila jämviktslägen.

I detta kapitel antas alla återkopplade tillstånd vara kända. Hur tillstånden kan mätas och estimeras presenteras i kapitel 2 respektive 5.

4.1 Stabilisering av pendlar kring instabil jämviktspunkt

Denna regulator har för avsikt att stabilisera pendlarna kring det instabila jämviktsläget, som ges av:

$$x_0 = \begin{bmatrix} q_0 & \theta_{10} & \theta_{20} & \dot{q}_0 & \dot{\theta}_{10} & \dot{\theta}_{20} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \tag{4.1}$$

Ett vanligt sätt att angripa denna typ av problem är att använda regulatorer baserade på linjära system, även om systemet i verkligheten är olinjärt. Detta för att i små intervall kan ofta olinjära system approximeras med linjära modeller. Den olinjära tillståndsmodellen (3.18) kan på detta sätt beskrivas som en linjär tillståndsmodell:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{4.2}$$

där A och B är Jacobimatriserna som ges av:

$$A = \left.\frac{\partial f(x,w)}{\partial x}\right|_{x=x_0} \tag{4.3a}$$

$$B = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{u=u_0}, \tag{4.3b}$$

och C är matrisen:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

För att stabilisera pendlarna kring jämviktsläget (4.1) införs en återkopplad styrsignal $u = L(x_0 - x)$, där det återkopplade systemets poler kan väljas godtyckligt genom att välja matrisen L.

Ett vanligt sätt är att placera systemets poler så att en kvadratisk kostnadsfunktional minimeras. Detta kallas linjärkvadratisk reglering (LQ-reglering) [8]. Styrsignalen är i detta fall lösningen till följande problem:

$$\min_{u(t),x(t)} \lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} (x_0^T - x^T(\tau))Q(x_0 - x(\tau)) + u^T(\tau)Ru(\tau)\, d\tau \tag{4.5a}$$

$$\text{s.t. } \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{4.5b}$$

där det visar sig att lösningen kan skrivas som:

$$u = R^{-1}B^T P(x_0 - x) = L(x_0 - x), \tag{4.6}$$

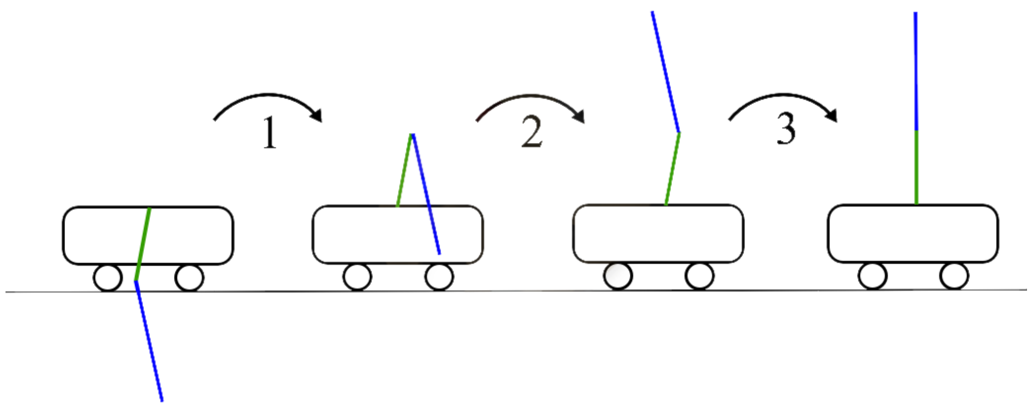
där P ges av den algebraiska Riccatiekvationen:

$$PA + A^T - PBR^{-1}P + Q = 0. \tag{4.7}$$

Notera att R och Q är viktmatriser som väljs för att kalibrera regulatorn.

4.2 Uppsvingning av pendlar

Uppsvingningen av pendlarna sker i tre steg. I det första steget svingas den inre pendeln från sitt stabila jämviktsläge till sitt instabila jämviktsläge. I andra steget stabiliseras den inre pendeln kring sitt instabila jämviktsläge samtidigt som yttre pendeln svingas från sitt stabila till instabila jämviktsläge. I tredje steget stabiliseras båda pendlarna kring sina instabila jämviktslägen. Figur 4.1 visar pendelpositionerna i de olika stegen. Lösningsgången följer den som presenteras i [9].



Figur 4.1: Uppsvingning av dubbelpendel.

4.2.1 Uppsvingning av inre pendeln (Steg 1)

I första steget skall den inre pendeln svingas från sitt stabila jämviktsläge till sitt instabila jämviktsläge. Detta kommer göras med en styrlag som baseras på en Lyapunovfunktion. Vanligtvis används Lyapunovfunktioner för att visa stabilitet för jämviktspunkter hos dynamiska system. De går bara att hitta till stabila jämviktspunkter, vilket innebär att om en Lyapunovfunktion hittas är jämviktspunkten stabil. De villkor som en funktion måste uppfylla för att kvalificeras som Lyapunovfunktion är:

$$V(x) = 0, \;\; x = x_0 \tag{4.8a}$$
$$V(x) > 0, \;\; x \neq x_0 \tag{4.8b}$$
$$\dot{V}(x) < 0, \;\; x \neq x_0, \tag{4.8c}$$

där $V(x)$ är Lyapunovfunktionen, och x_0 är jämviktspunkten [10].

Detta kan, förutom i stabilitetsbevis, även användas för att designa regulatorer. Genom att hitta en funktion $V(x, u)$ och en styrlag $u(x)$ sådana att $V(x, u(x))$ uppfyller villkoren for Lyapunovfunktioner kring en jämviktspunkt x_0 fås ett stabilt återkopplat system kring x_0. Nedan tillämpas denna metodik för att svinga upp den inre pendeln från sitt stabila jämviktsläge till sitt instabila jämviktsläge som ges av $x_0 = [\theta_{10} \; \dot{\theta}_{10}]^T = [0 \; 0]^T$.

I [9], föreslås det att den yttre pendelns inverkan kan försummas när den inre pendeln svingas upp. Detta eftersom uppsvinget av en enkelpendel är robust mot störningar när regulatorns återkopplingsförstärkning är stor [11]. Därför baseras följande kandidat till Lyapunovfunktion endast på inre pendelns energi:

$$V_1 = \frac{1}{2} E_1^2, \tag{4.9}$$

där E_1 är totala energin hos inre pendeln, given av:

$$E_1(\theta_1, \dot{\theta}_1) = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + m_1 g l_1 (\cos(\theta_1) - 1), \tag{4.10}$$

där I_1 är pendelns tröghetsmoment.

Notera att det första villkoret och det andra villkoret i (4.8) är uppfyllda, eftersom $E_1(0, 0) = 0$ och $E_1(\theta_1, \dot{\theta}_1) > 0$ för $\theta_1 \neq \theta_{10}$ och $\dot{\theta}_1 \neq \dot{\theta}_{10}$. Så låt oss nu fokusera på det tredje villkoret.

Sista villkoret innehåller tidsderivatan till V_1, det vill säga:

$$\dot{V}_1 = -m_1 l_1 (E_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1) u_{\theta_1}. \tag{4.11}$$

För att uppfylla (4.8c), väljs styrsignalen som:

$$u_{\theta_1} = u_{a1} \, \mathrm{sign}(E_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1), \tag{4.12}$$

där $u_{a1} > 0$ är återkopplingsförstärkningen och sign$(\cdot)$ betecknar följande funktion:

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}. \tag{4.13}$$

Genom att kombinera (4.11) och (4.12) fås:

$$\dot{V}_1 = -m_1 l_1 (E_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1) u_{a1} \operatorname{sign}(E_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1) \leq 0, \tag{4.14}$$

vilket innebär att V_1 är en avtagande funktion. Notera att villkor (4.8c) kräver att V_1 är en strikt avtagande funktion. Detta uppfylls inte av V_1, men det visar sig inte vara ett praktiskt problem enligt följande resonemang.

Tidsderivatan av V_1 är noll i dessa tre fall:
1. $\cos\theta_1 = 0$
2. $\dot{\theta}_1 = 0$
3. $E_1 = 0$.

Det första och andra fallet kan enligt [9] uteslutas eftersom de inte är jämviktspunkter och därför inte kan upprätthållas utan styrsignal. Alltså är enbart $\dot{V}_1 \equiv 0$ då $E_1 = 0$. Sammantaget innebär detta att det återkopplade systemet är stabilt kring x_0.

Styrlagen som presenteras i (4.12) tar inte hänsyn till skenans begränsade längd. För att förhindra släden från att nå skenans ändpunkter, introduceras följande återkopplade styrsignal u_q:

$$u_q = L_q(x_{q0} - x_q), \tag{4.15}$$

där $x_q = [q\ \dot{q}]^T$ och $x_{q0} = [0\ 0]^T$ samt $L_q > 0$. För att fortsatt uppfylla (4.8c), appliceras endast u_q då $\operatorname{sign}(u_q) = \operatorname{sign}(u_{\theta_1})$. Den totala styrsignalen blir alltså:

$$u = \begin{cases} u_{a1} \operatorname{sign}(E_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1) + u_q, & \operatorname{sign}(u_{\theta_1}) = \operatorname{sign}(u_q) \\ u_{a1} \operatorname{sign}(E_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1), & \operatorname{sign}(u_{\theta_1}) \neq \operatorname{sign}(u_q) \end{cases} \tag{4.16}$$

4.2.2 Stabilisering av inre pendeln och uppsvingning av yttre pendeln (Steg 2)

I detta steg skall den inre pendeln stabiliseras kring sitt instabila jämviktsläge samtidigt som den yttre pendeln svingas upp från sitt stabila till instabila jämviktsläge. I [9] föreslås ett ingenjörsmässigt angreppssätt där stabiliseringen och uppsvingningen betraktas som separata problem. Detta motiveras med att stabiliseringsregulatorn är robust mot störningar.

Först betraktas stabiliseringen av den inre pendeln kring sitt instabila jämviktsläge. I [9] föreslås att inverkan från den yttre pendeln kan betraktas som en störning när stabiliseringsregulatorn designas. Detta innebär att en LQ-regulator kan designas enligt:

$$u_1 = L_1(x_{10} - x_1), \tag{4.17}$$

där $x_1 = [q\ \theta_1\ \dot{q}\ \dot{\theta}_1]^T$ och $x_{10} = [0\ 0\ 0\ 0]^T$ samt $L_1 > 0$.

Uppsvingningen av den yttre pendeln baseras, som i avsnitt 4.2.1, på en Lyapunov-funktion. Som kandidat till Lyapunovfunktion betraktas:

$$V_2 = \frac{1}{2}E_2^2, \tag{4.18}$$

där E_2 är totala energin hos yttre pendeln, given av:

$$E_2 = \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^{\ 2} + m_2 g l_2(\cos(\theta_2) - 1), \tag{4.19}$$

där I_2 är yttre pendelns tröghetsmoment.

Med ett liknande resonemang som i avsnitt 4.2.1, kan det visas att V_2 uppfyller villkoren för en Lyapunovfunktion om styrsignalen väljs enligt:

$$u_2 = u_{a2}\,\mathrm{sign}(E_2\theta_2\cos\theta_2), \tag{4.20}$$

där $u_{a2} > 0$ är återkopplingsförstärkningen.

För att stabiliseringen och uppsvingningen ska kunna betraktas som separata problem måste regulatorerna ha liten inbördes påverkan. I [9] föreslås det att (4.20) endast skall appliceras under korta tidsintervall när yttre pendeln passerar sin stabila jämviktspunkt. Detta kan beskrivas med följande villkor:

$$u_2 = \begin{cases} u_{a2}\,\mathrm{sign}(E_2\theta_2\cos\theta_2), & \sin(\theta_2)\dot{\theta}_2 < 0 \text{ och } \cos\theta_2 < \cos\mu \\ 0, & \sin(\theta_2)\dot{\theta}_2 > 0 \text{ och } \cos\theta_2 < \cos\mu \\ 0, & \cos\theta_2 \geq \cos\mu \end{cases} \tag{4.21}$$

där μ är en konstant.

Genom att kombinera styrsignalerna för stabilisering och uppsvingning, fås den totala styrsignalen:

$$u = u_1 + u_2. \tag{4.22}$$

4.2.3 Stabilisering av båda pendlarna (Steg3)

I detta steg av uppsvingningen skall pendlarna stabiliseras kring deras instabila jämviktlägen. Denna problemformulering är ekvivalent med den som presenteras i avsnitt 4.1, vilket innebär att styrsignalen (4.6) kan användas även här.

5

Regulatordesign 2: Skattning av tillstånd

Detta kapitel presenterar en observatör som estimerar de återkopplade tillstånden. Observatören är ett Extended Kalmanfilter (EKF).

Från kapitel 3 beskrivs de matematiska modellerna med sex tillstånd, som återkopplas i kapitel 4. I den fysiska prototypen är endast tre av tillstånden mätbara, vilket innebär att övriga tillstånd måste estimeras med hjälp av en observatör. De mätbara tillstånden är; slädens position, q, och vinkelpositionerna θ_1 och θ_2.

5.1 Extended Kalmanfilter

En observatör är en algoritm som, baserat på information från modell och mätning, ger en skattning av tillstånden. Ett vanligt förekommande val av observatör är ett Kalmanfilter. Det visar sig att för linjära system, med normalfördelade brusförhållanden, är Kalmanfiltet ett statistiskt optimalt val [12].

Ett EKF är en utökning av Kalmanfiltret där olinjäriteter behandlas med linjärisering kring de aktuella tillstånden i varje tidssampel. Estimeringen sker i två steg. Först genomförs en prediktering, där tillståndsvektorn, x_k^-, och kovariansmatrisen, P_k^-, beräknas från modellen. Sedan genomförs ett uppdateringssteg, där predikteringssteget korrigeras med information från mätningen, y_k. Från detta erhålls den estimerade tillståndsvektorn, x_k, och kovariansmatrisen, P_k.

Den olinjära dynamiken för systemet är beskriven i ekvation (3.18). Om dynamiken diskretiseras och modifieras med process- och mätbrus får vi:

$$x_k = f_d(x_{k-1}, u_{k-1}) + v_{k-1} \tag{5.1a}$$

$$y_k = Cx_k + w_k, \tag{5.1b}$$

där $v_{k-1} \sim \mathcal{N}(0, R_{k-1})$ och $w_k \sim \mathcal{N}(0, Q_k)$ och C ges av (4.4). Vi har då enligt [12] den rekursiva algoritmen:

$$x_k^- = f_d(x_{k-1}, u_{k-1}) \tag{5.2a}$$
$$P_k^- = A_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}^T + Q_{k-1} \tag{5.2b}$$
$$v_k = y_k - Cx_k^- \tag{5.2c}$$
$$S_k = CP_k^-C^T + R_k \tag{5.2d}$$
$$K_k = \tilde{P}_k C^T S_k^{-1} \tag{5.2e}$$
$$x_k = x_k^- + K_k v_k \tag{5.2f}$$
$$P_k = P_k^- - K_k S_k K_k^T, \tag{5.2g}$$

där A är Jacobimatrisen given av:

$$A_{k-1} = \frac{\partial f_d(x_{k-1}, u_{k-1})}{\partial x_{k-1}}\bigg|_{x_{k-1}=\hat{x}_{k-1}}. \tag{5.3}$$

6
Resultat

I detta avsnitt presenteras resultaten i form av simuleringar. Först visas resultat från stabilisering av pendlarna kring deras instabila jämviktslägen och sedan visas uppsvingning av pendlarna från deras stabila till instabila jämviktslägen.

Simuleringarna är gjorda med (3.18), modifierad så att den inte innehåller en algebraisk loop. Alla parametervärden är hämtade från prototypen och finns presenterade i beteckningslistan i rapportens början.

6.1 Stabilisering av pendlar

Detta avsnitt presenterar resultaten för stabilisering av pendlarna kring deras instabila jämviktslägen.

6.1.1 Val av viktmatriser

En LQ-regulator kalibreras genom att välja kostnad för tillstånden att avvika från sina referensvärden samt kostnad för att använda styrsignaler. Den inbördes kostnadsskillnaden, som bestäms av viktmatriserna Q och R, avgör sedan regulatorns beteende. Notera att styrlagen minimerar kostnadsfunktionalen i (4.5), där det framgår att ett stabilt system alltid leder till en lägre kostnad än ett instabilt system. En LQ-regulator kommer således alltid att resultera i ett stabilt återkopplat system förutsatt att modellen beskriver systemet.

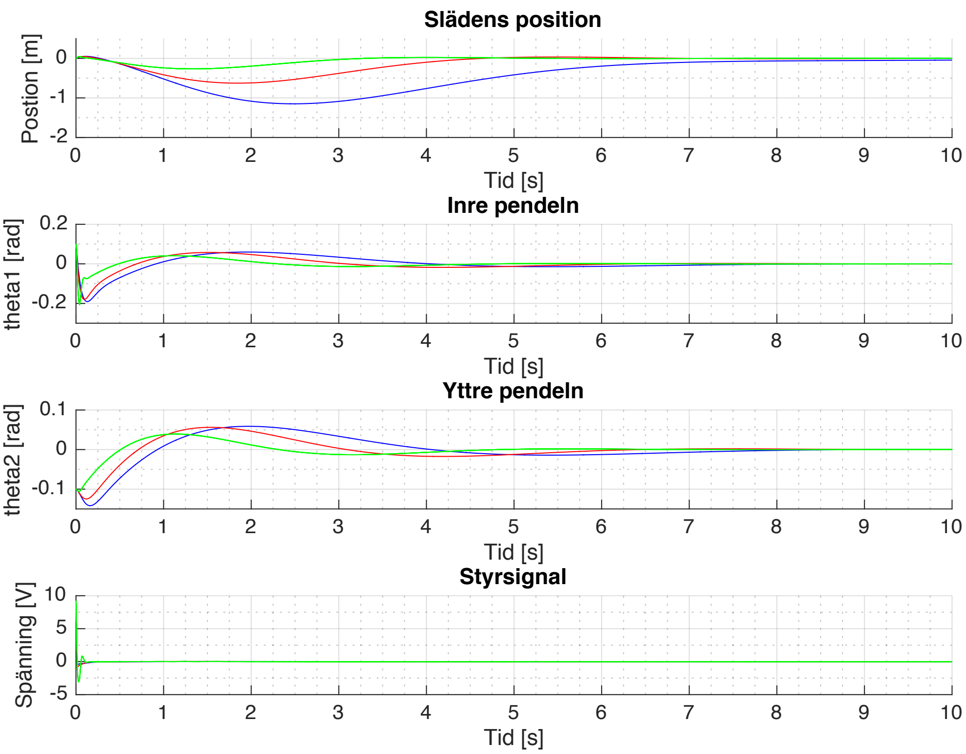
I Figur 6.1 visas tre fall då pendlarna stabiliseras efter en initial vinkelavvikelse på $\theta_1 = 0.1$ rad och $\theta_2 = -0.1$ rad. I dessa fall har följande viktmatriser använts:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 700 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 700 \end{bmatrix}, \tag{6.1}$$

$$R = 1, \tag{6.2}$$

där skillnaden mellan fallen är valet av $Q_{1,1}$, som motsvarar vikt på slädens position. För det blåa fallet är $Q_{1,1} = 5$, för det röda fallet är $Q_{1,1} = 50$ och för det gröna fallet är $Q_{1,1} = 500$.

Det som Figur 6.1 visar är att ett större värde på $Q_{1,1}$ ger en snabbare stabilisering med mindre använd sträcka för släden, kostanden för detta är dock att mer styrsignal används.



Figur 6.1: Stabilisering av pendlarna förutsatt olika vikter hos LQ-regulatorn.

Vi kan se att både det röda fallet och det gröna fallet uppfyller kriteriet att inte använda mer än 1 m av skenans längd. Men eftersom det gröna fallet stabiliserar pendlarna snabbare och med kortare använd längd av skenan, samtidigt som styrsignalen är tillräckligt liten, så kommer det fallet att väljas som LQ-regulator.

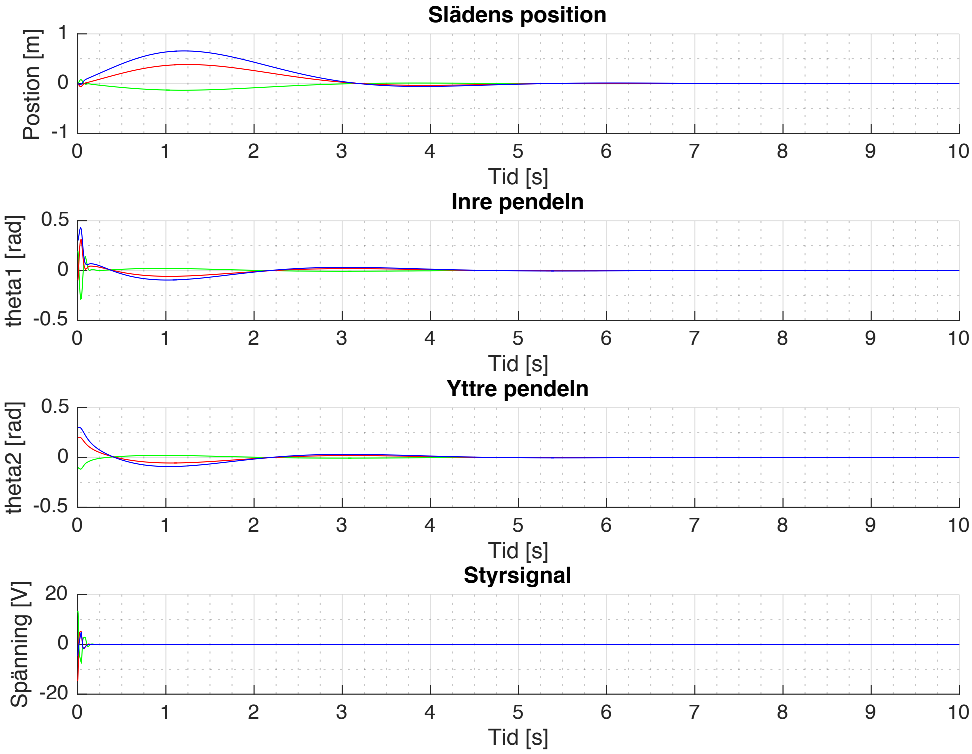
6.1.2 Utvärdering av LQ-regulator: Vinkelavvikelser

I följande avsnitt visas hur den från avsnitt 6.1.1 valda LQ-regulatorn klara av att stabilisera pendlarna förutsatt olika startpositioner för pendlarnas vinkelpositioner.

Tre fall undersöks, se Tabell 6.1, för att illustrera den maximala vinkelavvikelsen som systemet kan stabilisera. I Figur 6.2 visas stabilisering för de tre olika fallen.

Tabell 6.1: Tabell med vinkelpositioner.

Färg	θ_1 [rad]	θ_2 [rad]
Blå	0.3	0.3
Röd	-0.1	0.2
Grön	0.2	-0.1



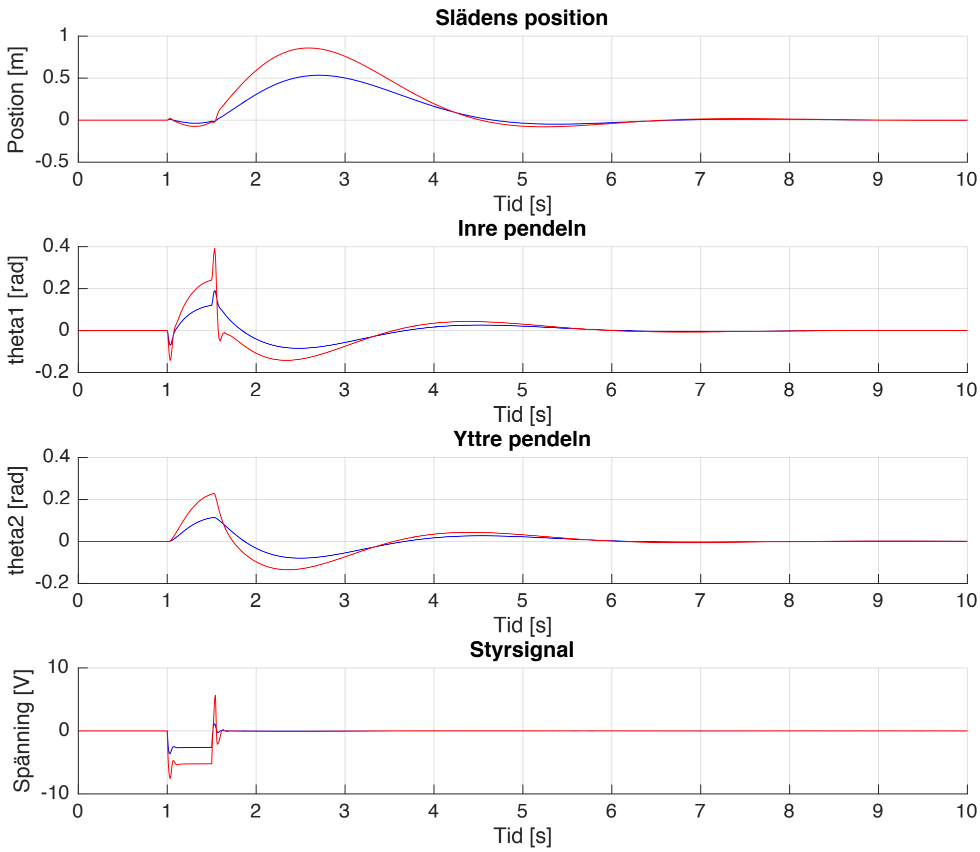
Figur 6.2: Stabilisering av pendlarna med olika initiala vinkelavvikelse.

Från Figur 6.2 kan främst två saker noteras. För det första, att systemet kan stabilisera större vinkelavvikelser om pendlarnas position är på samma sida om de instabila jämviktspunkterna. För det andra, att systemet först försöker att få pendlarna i linje med varandra, innan systemet stabiliserar pendlarna till jämviktspunkterna. Detta indikerar att vinkelskillnaden mellan pendlarna har betydelse för hur stora avvikelser som kan stabiliseras.

6.1.3 Utvärdering av LQ-regulator: Störningar

I detta avsnitt undersöks systemets robusthet gentemot störningar på släden.

Följande scenario beaktas. Systemet befinner sig initialt i vila, med pendlarna i sina instabila jämviktspunkter. Släden utsätts sedan för en kraft som verkar under 0.5 sekunder. Detta illustreras för två olika amplituder, 40 N och 80 N, på kraften i Figur 6.3. Det blåa fallet avser störningen på 40 N och det röda fallet avser störningen på 80 N.



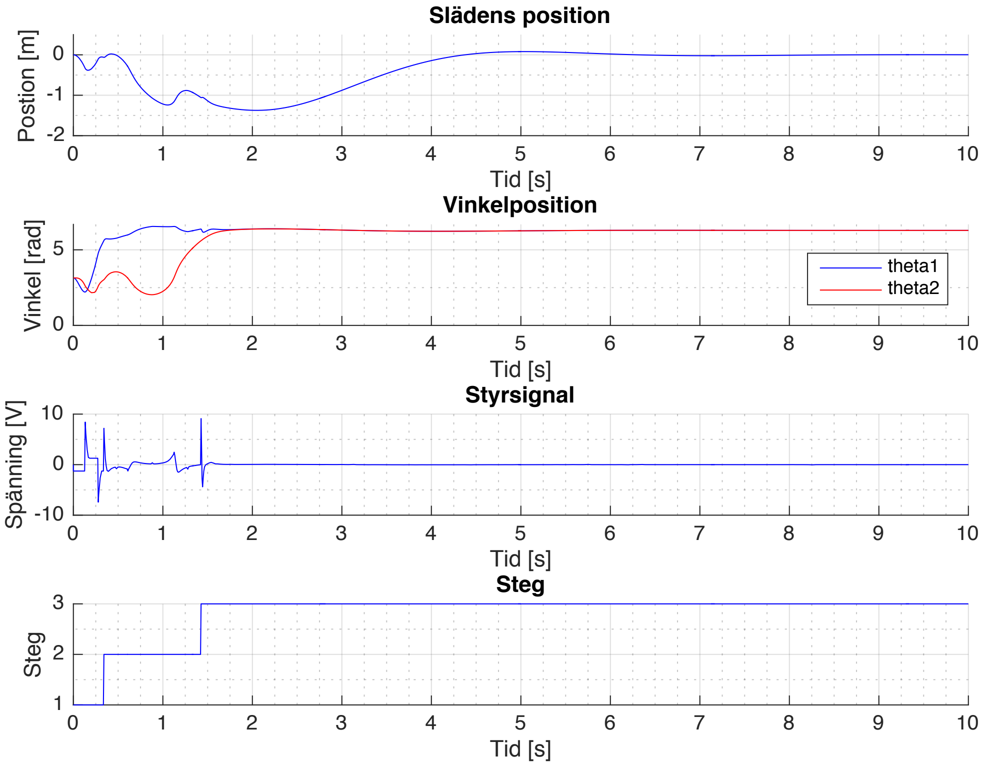
Figur 6.3: System då utsatt för störning på släden.

De två fallen som visas i Figur 6.3 är valda för att illustrera två saker. Det blåa fallet, det vill säga då störningen har amplituden 40 N, visar den maximala störning som systemet kan stabilisera förutsatt att slädens startposition är på mitten av skenan. En större störning medför att släden når skenans ändpunkt. Det röda fallet, dvs då störningens amplitud är 80 N, illustrerar den maximala störning som systemet kan stabilisera. Notera att i detta fall måste systemets startposition vara vid skenans ena ändpunkt för att inte skenans totala längd skall överskridas.

6.2 Uppsvingning av pendlar

Detta avsnitt presenterar resultat för uppsvingning av pendlarna från sina stabila jämviktspunkter till sina instabila jämviktspunkter.

I Figur 6.4 visas en simulering då pendlarna svingas från sina stabila jämviktslägen till sina instabila jämviktslägen med hjälp av styrlagen presenterad i avsnitt 4.2. Styrlagens parametervärden finns presenterade i beteckningslistan.



Figur 6.4: Uppsvingning av dubbelpendel

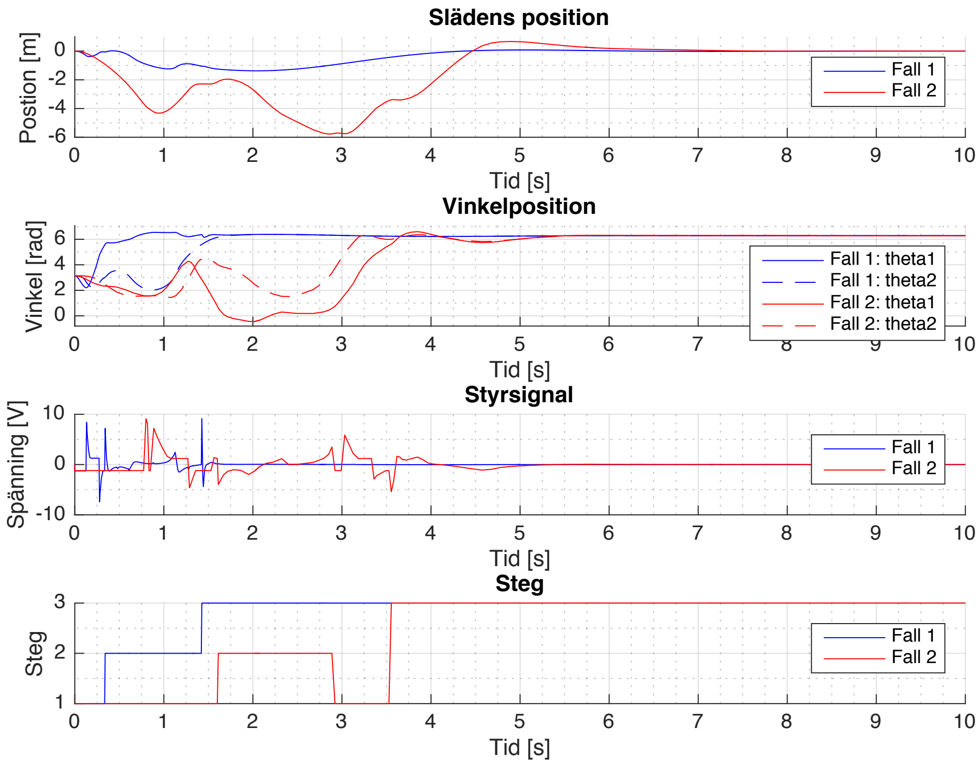
Notera från Figur 6.4 att den inre pendeln svingas upp till sin instabila jämviktspunkt efter cirka 0.3 s. Därefter påbörjas stabilisering av den inre pendeln och uppsvingning av den yttre pendeln. Efter cirka 2 sekunder då pendlarna har svingats upp och stabiliserats, görs en förflyttning av släden mot skenans mittposition.

För att undersöka hur pendlarnas längder och vikter påverkar uppsvingningen betraktas nu två fall med parametervärden enligt Tabell 6.2. Notera att det blåa fallet har samma parametervärden som prototypen och regulatorn är därför kalibrerad på samma sätt som i tidigare experiment. I det röda fallet väljs återkopplingsförstärkningarna till $u_{a1} = 30$ och $u_{a2} = 18$, och LQ-regulatorerna bestäms med samma viktmatriser som tidigare. I Figur 6.5 presenteras uppsvingning av de två olika fallen.

Tabell 6.2: Tabell med olika initiala vinkelpostioner.

Storhet	Blå	Röd	Enhet
L_1	0.15	0.5	[m]
L_2	0.45	0.75	[m]
m_0	0.46	1.5	[kg]
m_1	$0,04$	0.5	[kg]
m_2	$0,1$	0.75	[kg]

Notera att Figur 6.5 visar stora skillnader i uppsvingningen för de två fallen. I det blåa fallet är uppsvingningen snabbare och släden använder en mindre del av skenan jämfört med det röda fallet. Orsaken till detta är att den inre pendeln är kortare i relation till den yttre pendeln i det blåa fallet vilket, av erfarenhet, underlättar kalibreringen av uppsvingningen.



Figur 6.5: Flera fall av uppsvingning av dubbelpendel.

Att det är lättare att genomföra en uppsvingning med en kortare inre pendel kan man intuitivt argumentera om i termer av tidskonstanter. En kort pendel har snabbare dynamik jämfört med en lång pendel, och därmed en kortare tidskonstant. Om den inre pendeln är kortare i relation till den yttre pendeln skapar alltså deras olika tidskonstanter en kaskadkoppling. Denna effekt förstärks om skillnaden mellan pendlarnas längder ökar, vilket även bekräftas av erfarenheter från kalibrering av uppsvingningen.

7
Diskussion och slutsats

I detta kapitel presenteras slutsatser från projektet och tänkbara utökningar till projektet för framtida projekt.

7.1 Slutsats

Sammantaget visar resultaten att det är möjligt att stabilisera pendlarna i deras instabila jämviktslägen samt att det är möjligt att genomföra en uppsvingning av pendlarna från deras stabila jämviktslägen till instabila jämviktslägen.

För att stabilisera pendlarna kring deras instabila jämviktspunkter har en LQ-regulator använts. Denna har designats utifrån en linjär approximation av den annars olinjära modellen. Simuleringar visar att systemet kan stabilisera initiala vinkelavvikelser upp till $\theta_1 = 0.3$ rad och $\theta_2 = 0.3$ rad. Förutsatt att slädens startposition är på mitten av skenan, visar simuleringar att systemet kan hantera en störande kraft av 40 N under 0.5 s på släden utan att pendlarna faller eller att släden når skenans ändpunkt. Om slädens startposition tillåts att vara nära en av skenans ändpunkter, visar simuleringar att amplituden på störningen kan ökas till 80 N utan att pendlarna faller eller att släden når den andra ändpunkten.

En kombination av LQ-regulatorer och styrlagar baserade på Lyapunovfunktioner har använts för uppsvingning av pendlarna. Pendlarna svingas från sina stabila jämviktspunkter till sina instabila jämviktspunkter i tre steg, där LQ-regulatorerna och de övriga styrlagarna verkar på systemet under olika faser. Simuleringar visar att uppsvingning av pendlarna, med denna metod, är möjligt under 2 sekunder.

7.2 Fortsatta studier

Detta arbete är ett kandidatarbete som har genomförts under en begränsad tid, vilket innebär att alla frågor inte har hunnit besvaras. I detta avsnitt presenteras några tänkbara utökningar av arbetet som presenteras i denna rapport.

7.2.1 Val av pendlarnas längder

För prototypen som beskrivs i avsnitt 2 är pendlarnas längder, mer eller mindre, valda på ett godtyckligt sätt. Ur ett vetenskapligt perspektiv vore det intressant att undersöka hur pendlarnas längder påverkar systemets dynamik.

Längdernas påverkan på stabiliseringen kan exempelvis angripas med hjälp av Lyapunovfunktioner. Genom att, givet en begränsad styrsignal från LQ-regulatorn, hitta en Lyapunovfunktion för pendlarnas instabila jämviktslägen går det förmodligen att analysera under vilka förutsättningar stabilitet kan påvisas. Det vill säga, det finns en övre gräns för när funktionen är en Lyapunovfunktion. Sannolikt är denna övre gräns beroende av pendlarnas vinkelavvikelser och längder. Detta kan användas för att dra slutsatser om vilka kombinationer av längder och vinkelavvikelser systemet klarar att stabilisera.

Angående uppsvingning av pendlarna, betrakta Lyapunovfunktionerna (4.9) och (4.18) och notera att det enda kriteriet för att dessa funktioner ska uppfylla villkoren för Lyapunovfunktioner är styrsignalens tecken. Detta innebär, trots en begränsad styrsignal, att det inte finns någon begränsning i pendlarnas längder för att en uppsvingning skall vara möjlig, om man förutsätter oändlig tidshorisont. Detta resonemang är teoretiskt giltigt, men det ska noteras att verkliga begränsningar hos exempelvis motorn och skenan inte beaktas, samt att den ena pendelns inverkan försummas. Därför vore det intressant, för framtida projekt, att hitta en ny Lyapunovfunktion som beaktar dessa begränsningar. Med en sådan funktion kan antagligen en övre gräns för pendlarnas relativa längder hittas, sådan att en framgångsrik uppsvingning inte kan garanteras.

7.2.2 Praktisk implementering

Notera att de metoder som studerats i projektet endast har verifierats med simuleringar. För att verifiera metodernas, och främst modellernas, giltighet bör en praktisk implementering genomföras.

För att exemplifiera skillnader mellan modellerna och prototypen så noterades det under projektets gång att den praktiska prototypen har ett glapp mellan motornaxelns position och slädens position, samt att vinkelmätningen har en död zon. Detta kan givetvis inkluderas i modellerna, men har i detta projekt försummats. Ytterligare förenklingar i modellen inkluderar att hela massan hos en pendel antas vara placerad på halva pendelns längd, samt att motorns dynamik försummas.

Litteraturförteckning

[1] Ardunio Mega 2560; https://www.elfa.se/Web/Downloads/_t/ds/mega2560_eng_tds.pdf?mime=application%2Fpdf [Hämtad: 8 maj 2016]

[2] Motoriduttori-Gear-motors: Series E 192, Italien: Micro Motors; https://www.elfa.se/Web/Downloads/55/07/05445507.pdf?mime=application%2Fpdf [Hämtad: 27 apr 2016]

[3] Dual Full-Bridge Driver: L298; http://www2.st.com/content/ccc/resource/technical/document/datasheet/82/cc/3f/39/0a/29/4d/f0/CD00000240.pdf/files/CD00000240.pdf/jcr:content/translations/en.CD00000240.pdf [Hämtad: 27 apr 2016]

[4] Rotary Encoder: E6C2-C, OMRON Corporation; http://www.mouser.com/ds/2/307/e6c2-c_ds_csm49345645.pdf [Hämtad: 29 apr. 2016]

[5] Rotary Sensor Potentiometer: Series P2500, Massachusetts: Novotechnik, 2007; http://www.novotechnik.com/pdfs/P2500.pdf [Hämtad: 27 apr. 2016]

[6] A. Grauers, *Elteknik*, Göteborg ,Chalmers Tekniska Högskola, 2002

[7] M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *Calculus of Variations I*, 310 vol. Berlin, Springer Berlin Heidelberg, 2004

[8] T. Glad och L. Ljung, *Reglerteori: Flervariabla och olinjära metoder*, 2 uppl. Lund, Studentlitteratur AB, 2003

[9] T. Henmi, M. Deng och A. Inoue, Swing-up Control of a Serial Double Inverted Pendulum", *Proceeding of the 2004 American Control Conference*, 2004, pp. 3992-3997.

[10] S.B. Hsu *Ordinary Differential Equations with Applications*. 2 uppl, Singapore, World Scientific, 2013

[11] K. J. Åström och K.Furuta, Swinging up a pendulum by energy control", *Automatica*, Vol, 36, No, 2. pp, 287-295, 2000

[12] S. Särkkä, *Bayesian Filtering and Smoothing*, Storbritannien, Cambridge University Press, 2013