CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

Icke-standardanalys med tillämpning inom hydrodynamik

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet
Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers

Georg Bökman
Markus Janghede
Elisabeth Sax
Jonathan Weichbrodt

Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Göteborgs universitet
Göteborg 2016

Icke-standardanalys med tillämpning inom hydrodynamik

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet

Markus Janghede Elisabeth Sax

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk fysik vid Chalmers

Jonathan Weichbrodt

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik vid Chalmers

Georg Bökman

Handledare: Maria Roginskaya
Examinator: Ulf Persson

Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Göteborgs universitet
Göteborg 2016

Populärvetenskaplig presentation

Rapporten skildrar en del av det matematiska området icke-standardanalys. Idén om icke-standardanalys grundas i att man i vissa lägen - både vid beräkningar och i teoretiskt syfte - kan ha användning för oändligt små tal: infinitesimaler. Infinitesimaler är tal som är större än noll, men som kan adderas till ett reellt tal[1] utan att man får ett större reellt tal. Rapportens första del syftar till att visa att sådana tal kan existera i matematiken, och en ny talmängd skapas. Talen i denna kallas för hyperreella tal. De hyperreella talen består av de reella talen, infinitesimalerna, oändligt stora tal, samt alla tal som fås genom att addera medlemmar från de olika kategorierna med varandra. Vi vill försäkra oss om att den nya talmängden lyder under samma matematiska regler som de reella talen. Operationer, som addition och multiplikation, ska fungera som vanligt, och de satser (matematiska sanningar) som gäller för de reella talen ska även gälla för de hyperreella. Fokuset för den första delen av rapporten ligger i att bevisa att så är fallet.

Icke-standardanalys har visat sig ha många tillämpningsområden. I denna rapport fördjupar vi oss i området flödesdynamik, vilket handlar om fluiders rörelse. De fluider som finns naturligt på jorden är gaser och vätskor. Vår undersökning utgår från ett system av ekvationer, kända som Navier-Stokes ekvationer. Dessa antas beskriva rörelsen hos en fluid. De kan användas för att beskriva exempelvis hur luft rör sig kring en flygplansvinge eller hur vatten rinner genom ett rör. De kan även användas för klimat- och väderberäkningar. I Navier-Stokes ekvationer återfinns variabler, som trycket i området och kraften som verkar på varje punkt i det. Den har även en konstant, viskositeten, vilken är ett mått på hur trögflytande fluiden är. Lösningen till Navier-Stokes ekvationer är fluidens hastighet. Navier-Stokes ekvationer är så kallade differentialekvationer. Sådana beskriver sambandet mellan en funktion och dess förändringshastighet med avseende på till exempel tiden eller positionen. När vi undersöker fluiden så tänker vi oss att den består av ett oändligt antal partiklar, så när vi skriver om fluidens rörelse så menar vi en oändlig samling av partikelrörelser. Detta tankesätt tillåter varje partikel att ha sin egna hastighet. Om en del av fluiden utsätts för en kraft, till exempel om ett klot slängs ner i en balja med vatten, så kommer olika delar av fluiden reagera på olika sätt. Vid vattenytan kommer vattnet att skvätta åt olika håll medan det vid botten kommer förbli - förhållandevis stilla. Vår specifika uppgift är att visa att det existerar lösningar till Navier-Stokes ekvationer då vi betraktar fluiden i det tre-dimensionella rummet. Vi gör detta genom att anta att fluiden endast består av ett ändligt antal partiklar. Sedan så löses uppgiften för varje partikel seperat. Följaktligen visar vi med hjälp av icke-standardanalysen att alla sådana enskilda lösningar sammantaget löser uppgiften i stort.

[1] Med reellt tal menas det man vanligtvis omnämner som enbart ”tal”. Begreppet innefattar alla heltal och decimaltal.

Sammanfattning

Första delen av rapporten beskriver en mängdteoretisk uppbyggnad av icke-standardanalys utgående från Robinson och Zakons urpsrungliga beskrivning i [RZ69]. Först definieras begreppet superstruktur, vilket används för att konstruera ett formellt språk som sedan används för att formulera satser. Därefter definieras utvidgningar av superstrukturer och det visas att det med hjälp av en ultrapotens går att finna en modell av alla satser som är sanna för superstrukturen av de reella talen, sådan att modellen även innefattar infinitesimaler och oändligt stora tal. Därefter ges exempel på hur satser kan överföras mellan superstrukturen av de reella talen och den nya modellen. Den andra delen av rapporten behandlar ett viktigt tillämpningsområde för icke-standardanalys, nämnligen hydrodynamik. Fokuset ligger här på Navier-Stokes ekvationer, som beskriver rörelsen hos en fluid. Dessa ekvationer förklaras utförligt. Målet är att visa att lösningar existerar till dessa ekvationer i områden som är begränsade. För detta syfte beskrivs grundläggande funktionalanalys. Speciellt förs en genomgång över relevanta Hilbertrum och dess egenskaper. Det är i dessa rum som lösningar till ekvationerna betraktas. Slutligen tillämpas Galerkinmetoden. Med hjälp av metoder ur icke-standardanalys frambringar Galerkinmetoden lösningar till Navier-Stokes ekvationer.

Abstract

The first part of the report describes a set-theoretical construction of non-standard analysis based on Robinson and Zakon's original description in [RZ69]. At first, the concept of superstructures is defined. The concept is later used to construct a formal language which in turn is used to formulate "sentences". Thereafter expansions of superstructures are defined and it is shown that, using ultrapowers, it is possible to find a model of all sentences that are true for the superstructure of the real numbers, such that the model also comprises both infinitesimals and infinitely large numbers. After this the report displays examples of how sentences can be transferred between the superstructures of the real numbers and the new model. The second part of the report explores an important application of non-standard analysis, namely hydrodynamics. The report is focused on Navier-Stokes equations, which describe the motion of fluids. These equations are explained in detail. The aim is to prove the existence of solutions to these equations in bound regions. For this purpose, basic functional analysis is described. In particular the report covers relevant Hilbert spaces and their properties. It is in these spaces the solutions to the Navier-Stokes equations are considered. Finally the Galerkin method is applied. jTogether with methods from non-standard analysis, the Galerkin method yields solutions to the Navier-Stokes equations.

Innehåll

Förord

Avsnitt 2 respektive 3 är utformat av Georg Bökman och Elisabeth Sax respektive Markus Janghede och Jonathan Weichbrodt. Övrig formalia tillskrivs gruppen gemensamt.
Det har förts en loggbok över enskilda medverkandes prestationer.

Tillkännagivanden Avsnitt 2 lånar de flesta definitioner, satser och bevis från Robinson och Zakon [RZ69]. Beviset av sats 2.39 är hämtat från Robinson [Rob67]. Till stor hjälp för förståelse av icke-standardanalys har Goldblatts lärobok [Gol98] och Robinsons bok [Rob66] varit. Vissa exempel är starkt influerade av de två böckerna. Inledningen till avsnitt 3 är influerad av Galdi [Gal11]. Avsnitt 3.1 baserar sig på Muscats bok [Mus14]. Avsnitt 3.2-3.6 grundar sig främst på Cutland och Capinskis bok [CC95]. Det finns spår av influenser från Temam [Tem77] och [Tem83] i avsnitt 3.4 och 3.5.

Vi önskar tacka följande personer för råd och vägledning:
Leif Arkeryd, Åsa Lideström, Maria Roginskaya, Grigori Rozenblioum

1 Inledning

Idén av oändligt små och oändligt stora tal har använts länge, t.ex. i den tidiga definitionen av derivata. Leibniz argumenterade dock för att dessa tal behövde introduceras rigoröst. Han försökte bevisa att samma satser som redan gällde för reella tal gällde även för dessa, men misslyckades med att genomföra detta. Med åren tog den klassiska definitionen av gränsvärden (den så kallade epsilon-delta-definitonen) över. Denna definition var allenarådande fram till 60-talet, då Robinson utvecklade icke-standardanalysen. Han lyckades ge en rigorös uppbyggnad av såväl en utökning av de reella talen till hyperreella tal, innefattande oändligt stora och oändligt små tal, som generella utökningar av mängder, vilket även ger upphov till t.ex. hyperhilbertrum. Nyckeln för att visa att dessa nya entiteter lyder under samma lagverk som de ”gamla”, är överföringsprincipen.

Ett tillämpningsområde för icke-standardanalys är hydrodynamik. Icke-standardanalys kan inom detta område förenkla beräkningar avsevärt, bland annat med hjälp av en så kallad Galerkinapproximation, med vilken vi transformerar en partiell differentialekvation till m stycken ordinära differentialekvationer. En av de viktigaste framstegen inom hydrodynamik gjordes 1759 av Euler, som publicerade en beskrivning av ekvationerna för en fluids rörelse, just i formen av partiella differentialekvationer, som grundar sig i Newtons andra lag. Eulers beskrivning tog dock inte hänsyn till friktionskrafter i fluiden. Navier tog hänsyn till dessa då han 1822 publicerade en modifikation av ekvationen och hade med en term i ekvationen med en proportionalitetskonstant som motsvarar fluidens viskositet. I denna beskrivning av rörelsen antas fluiden vara inkompressibel. Stokes generaliserade beskrivningen ytterliggare genom att beskrivna ekvationen för en kompressibel fluid. Ekvationerna är idag kända som Navier-Stokes ekvationer. Denna rapport fördjupar sig i beskrivningen som tar hänsyn till friktionskraft för en inkompressibel fluid. Speciellt så presenteras ett existensbevis för en så kallad svag lösning till Navier-Stokes ekvationer. Detta bygger till stor del på grundläggande funktionalanalys. Rapporten behandlar även denna och beskriver teori för olika vektorrum och operationer.

2 Uppbyggnad av icke-standardanalys

När Abraham Robinson först formulerade icke-standardanalysen, gjorde han det med hjälp av resultat inom matematisk logik från början av 1900-talet. Först gjordes detta med hjälp av typteori [Rob66], men sedan konstruerades även en enklare uppbyggnad med hjälp av mängdlära [RZ69]. Vår ambition i den första delen av detta arbete är att beskriva Robinson och Zakons mängdteoretiska uppbyggnad av icke-standardanalysen så som den är given i [RZ69], på ett sätt som är förståeligt för matematikstudenter i slutet av sin grundutbildning. Vi hoppas åstadkomma detta genom att utelämna tekniska teoretiska detaljer och genom att belysa definitioner och satser med exempel.

Med icke-standardanalys förstås, löst formulerat, en teori som liknar standardanalysen men som även innefattar koncepten oändligt små (infinitesimala) och oändligt stora tal. Vi vill således utvidga mängden av de reella talen $\mathbb{R}$ till en mängd ${}^*\mathbb{R}$ innefattande de reella talen samt nya infinitesimala och oändligt stora tal. Detta räcker dock inte, utan vi vill även uppnå att alla resultat som gäller för reella tal även ska gälla för den nya mängden ${}^*\mathbb{R}$. Vi måste därför börja med att definiera ett begrepp som beskriver alla delmängder, funktioner, funktioner av funktioner och så vidare av $\mathbb{R}$.

2.1 Superstrukturer

För att formulera icke-standardutvidgningen av en mängd A, behöver vi först en struktur som beskriver alla ”intressanta” konstruktioner på A. Med ”intressanta” konstruktioner menar vi bland annat delmängder av A, relationer på A samt funktioner på A. Det visar sig att dessa konstruktioner alla återfinns i superstrukturen över A, vilken vi ska definiera härnäst. Beskrivningen bygger på att vi mängdteoretiskt kan beskriva alla matematiska begrepp vi är intresserade av (såsom relationer, funktioner med flera).

Definition 2.1 (Superstruktur)**.** Låt A vara en mängd och sätt $A_0 = A$. Definiera sedan induktivt
$A_n = \mathcal{P}\Big(\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k\Big)$ för $n \geq 1$. Här är $\mathcal{P}(S)$ potensmängden av S, alltså mängden som består av alla delmängder av S. Med hjälp av mängderna A_k kan vi introducera begreppet superstruktur. Superstrukturen över A är

$$\hat{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k.$$

För att superstrukturen ska kunna beskriva ovan nämnda intressanta konstruktioner, måste dessa konstruktioner kunna uttryckas som mängder. Till exempel kan funktioner av en variabel beskrivas som mängder av ordnade par. Ordnade par kan i sin tur beskrivas på följande sätt:

Exempel 2.2. Ordnade par (x, y) kan skrivas mängdteoretiskt som $\{x, \{x, y\}\}$ (ty det är entydigt vilket som är det första och vilket som är det andra elementet i paret). Om vi sätter $A_0 = \mathbb{R}$ ser vi att alla ordnade par av reella tal återfinns i mängden A_2 enligt definitionen ovan. Därmed finns de ordnade paren i superstrukturen över $\mathbb{R}$, vilken vi kommer att beteckna med $\hat{\mathbb{R}}$.

Funktioner av flera variabler kan beskrivas som mängder av ordnade listor av tal. En funktion av $n-1$ variabler blir en mängd av ”n-tupler” och beskrivs enligt följande:

Exempel 2.3. Vi kan beskriva n-tupler induktivt från beskrivningen av ordnade par. En 2-tupel definieras då som ett ordnat par och en n-tupel (för $n \geq 3$) skrivs som ett ordnat par av ett element och en $(n-1)$-tupel. Till exempel kan (x, y, z, w) skrivas som

$$\{x, \{x, \{y, \{y, \{z, \{z, w\}\}\}\}\}\}.$$

Utifrån detta fås att varje n-tupel av reella tal återfinns i mängden $A_{2(n-1)}$ i superstrukturen $\hat{\mathbb{R}}$.

Exempel 2.4. ”Större än”-relationen på $\mathbb{R}$ kan beskrivas mängdteoretiskt som mängden av ordnade par (x, y) sådana att $x > y$, alltså mängden $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$. Denna mängd finns då i A_3.

2.2 Monomorfier

Icke-standardanalys bygger på att vi kan hitta en ”större” superstruktur $\hat{B}$, så att vi kan överföra resultat mellan denna och $\hat{A}$. Konstruktionen av $\hat{B}$ kommer att göras med hjälp av så kallad utvidgning, vilken definieras i avsnitt 2.6. I detta avsnitt definierar vi begreppet monomorfi, vilket är en funktion mellan två superstrukturer.

Definition 2.5. [2] Låt A och B vara mängder med tillhörande superstrukturer $\hat{A}$ och $\hat{B}$. En injektiv avbildning $^* : \hat{A} \to \hat{B}$ kallas för en monomorfi från $\hat{A}$ till $\hat{B}$ om vi har att

a) $^*\{x\} = \{^*x\}$, $\forall x \in \hat{A}$,

b) $^*(X \setminus Y) = {}^*X \setminus {}^*Y$ och $^*(X \times Y) = {}^*X \times {}^*Y$, om $X, Y \in \hat{A}$,

c) givet en n-ställig relation[3] $R \in \hat{A}$ och en permutation ρ som permuterar n-tupler, så gäller $^*(\rho R) = \rho(^*R)$,

d) för varje binär relation[4] $R \in \hat{A}$, så gäller $^*D_R = D_{^*R}$, där D_R är domänen av R , och

e) för varje $C \in \hat{A}$ och $R = \{(x, y) : x \in y \in C\}$ gäller att
$^*R = \{(x, y) : x \in y \in {}^*C\}$.

[2] Monomorfier kommer i denna rapport betecknas med en upphöjd asterisk * och vi kommer att skriva $^*x$ för $^*(x)$.

[3] Se definition A.2 i bilaga A

[4] Se definition A.1 i bilaga A för beskrivningar av begreppen binär relation och domän.

Då * verkar på en mängd tolkas den som en mängdoperator. Dess argument är då mängden, sedd som ett element. Vi skiljer på mängdoperatorer från operatorer som arbetar på varje enskilt element i mängden.

Från definition 2.5 följer direkt nedanstående följdsatser.

Följdsats 2.6.

$$^*\emptyset = \emptyset$$

Bevis.

$$^*\emptyset = {}^*(A_0 \setminus A_0) = {}^*A_0 \setminus {}^*A_0 = \emptyset.$$

□

Följdsats 2.7. *$x \in X$ är ekvivalent med $^*x \in {}^*X$.*

Bevis. Vi använder följdsats 2.6 (och monomorfi-definitionen).

$$\begin{aligned} x \in X &\Leftrightarrow \{x\} \setminus X = \emptyset \\ &\Leftrightarrow {}^*(\{x\} \setminus X) = {}^*\emptyset = \emptyset \\ &\Leftrightarrow {}^*\{x\} \setminus {}^*X = \emptyset \\ &\Leftrightarrow \{{}^*x\} \setminus {}^*X = \emptyset \\ &\Leftrightarrow {}^*x \in {}^*X. \end{aligned}$$

□

Även följande satser, vars bevis vi utelämnar genom att hänvisa till Robinson och Zakon[RZ69], följer från definition 2.5.

Följdsats 2.8. $(x_1, ..., x_n) \in R \Leftrightarrow ({}^*x_1, ..., {}^*x_n) \in {}^*R.$

Följdsats 2.9. *För varje n-ställig relation R gäller att $^*R$ också är en n-ställig relation.*

Följdsats 2.10. *Om $x \in S$ för något $S \in {}^*A_n$, gäller att $x \in {}^*A_0 \cup {}^*A_{n-1}$.*

Exempel 2.11. Betrakta åter ”större än”-relationen G från exempel 2.4. Givet en monomorfi $^* : \hat{\mathbb{R}} \to \hat{B}$ följer från definition 2.5 och följdsats 2.9 att G överförs till en binär relation $^*G$ som har domän $^*R$ och kodomän $^*R$ (pga. monomorfins permutationsegenskaper).

Följande definition är viktig för att vi ska kunna överföra likhetsrelationer mellan olika superstrukturer.

Definition 2.12. En monomorfi kallas normal om för varje $C \in \hat{A}$ och för relationen $E = \{(x, x) : x \in C\}$ som beskriver likhet mellan element i C, gäller att $^*E = \{(x, x) : x \in {}^*C\}$, dvs. att $^*E$ beskriver likhet mellan element i $^*C$.

2.3 Interna element och standardelement

Givet en monomorfi $^* : \hat{A} \to \hat{B}$ definierar vi även $^*\hat{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty} {}^*A_k$. Detta är nödvändigt ty $\hat{A} \notin \hat{A}$ så vi kan inte direkt applicera monomorfin på $\hat{A}$.

Definition 2.13. Vi kallar $b \in \hat{B}$ standard om $b = {}^*a$ för något $a \in \hat{A}$.

Definition 2.14. Vi kallar $b \in \hat{B}$ intern om $b \in {}^*\hat{A}$.

En ekvivalent definition av interna element ges av följande.

Definition 2.15. Vi kallar $b \in \hat{B}$ intern om $b \in {}^*S$, för något $S \in \hat{A}$.

Proposition 2.16. *Definitionerna 2.14 och 2.15 är ekvivalenta.*

Bevis. Om b är intern enligt definition 2.14 dvs. $b \in {}^*\hat{A}$, gäller att $b \in {}^*A_n$ för något n. $A_n \in A_{n+1} \subset \hat{A}$ ger nu att b är intern enligt definition 2.15.
Om b är intern enligt definition 2.15 dvs. $b \in {}^*S$ för något $S \in \hat{A}$, gäller att $S \in A_n$ för något n. Följdsats 2.7 ger att ${}^*S \in {}^*A_n$ så vi har att $b \in {}^*S \in {}^*A_n$. Vi kan nu applicera följdsats 2.10 så att vi får att $b \in {}^*A_0 \cup {}^*A_{n-1} \subset {}^*\hat{A}$. Därmed får vi att $b \in {}^*\hat{A}$ vilket innebär att b är intern enligt definition 2.14. □

Proposition 2.17. *Varje standardelement är internt.*

Bevis. Tag ett standardelement ${}^*a$, dvs. sådant att $a \in A_n$ för något n. Från följdsats 2.7 följer nu att ${}^*a \in {}^*A_n \subset {}^*\hat{A}$, så ${}^*a$ är intern enligt definition 2.14. □

Att varje internt element ej nödvändigtvis är standard kommer att visas i ett senare avsnitt (se exempel 2.33).

2.4 Språket $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$-strukturer och modeller

Vi ska nu formalisera vilka resultat som är sanna i en given superstruktur. Det görs med hjälp av ett så kallat formellt språk $\mathcal{L}$ och strukturer över detta. Målet här är att rigoröst kunna överföra resultat mellan olika superstrukturer.

Det finns en rik teori bakom formella språk och strukturer. Vi hänvisar läsaren till Marker [Mar02] eller Rautenberg [Rau10] för en introduktion till denna teori och kommer i denna rapport endast att använda oss av konkreta exempel därur och undvika generella resonemang i så stor utsträckning som möjligt.

Givet en superstruktur $\hat{A}$ definierar vi språket $\mathcal{L}$ enligt följande.

Definition 2.18 (Språket $\mathcal{L}$)**.**

a) Varje objekt i $\hat{A}$ betecknas med en symbol i $\mathcal{L}$. Dessa symboler kallas *konstanter*. Vi väljer för enkelhets skull att använda varje objekts beteckning i $\hat{A}$ som dess symbol i $\mathcal{L}$. Därmed kan vi tänka oss att mängden konstanter i $\mathcal{L}$ motsvaras av $\hat{A}$.

b) Vissa bokstäver betecknar *variabler*.

c) *Atomerna* i $\mathcal{L}$ har utseendet $(x_1, \ldots, x_n) \in y$, där x_k och y är konstanter eller variabler.

d) $\mathcal{L}$ innehåller *konnektiven* $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ och $\Leftrightarrow$, och *kvantifikatorerna* $\forall$ och $\exists$.[5]

e) *Formler* uppstår genom att kombinera atomer med konnektiv och kvantifikatorer och iterera denna process ett ändligt antal gånger. Vi kommer att begränsa oss till att alla kvantifikatorer i formler måste uppträda enligt $\forall x(x \in S \Rightarrow \ldots)$, vilket vi förkortar $\forall x \in S \ldots$ (och på motsvarande sätt för $\exists$). I dessa uttryck måste S vara en konstant och alltså inte en variabel.

f) En formel där varje variabel är bunden av en kvantifikator kallas *sats*.

Exempel 2.19. Låt oss betrakta $\hat{\mathbb{R}}$ och varianten av $\mathcal{L}$ baserad på denna superstruktur. Ett exempel på en atom i $\mathcal{L}$ är $(2,4) \in \mathbb{N}^2$ och ett annat är $(x, \mathbb{N}, 34) \in 2$, där vi tolkar x som en variabel. Vi noterar att dessa atomer i sig är meningslösa om vi inte kan koppla ihop dem med konstanternas objekt i $\hat{\mathbb{R}}$. Detta är målet med att införa begreppet $\mathcal{L}$-struktur.

Definition 2.20 ($\mathcal{L}$-struktur)**.** En $\mathcal{L}$-struktur $\mathcal{M}$ består av en mängd M, kallad $\mathcal{M}$:s universum och en injektiv översättningsavbildning

$$\Psi : C \to M,$$

där C är mängden av konstanter i $\mathcal{L}$.

[5]Sanningsdefinitioner av dessa konnektiv och kvantifikatorer finnes i bilaga A, definition A.5.

Den enklaste $\mathcal{L}$-strukturen fås genom att ta mängden av konstanter $\hat{A}$ i $\mathcal{L}$ och välja identitetsavbildningen som översättningsavbildning. Vi poängterar dock att det även finns andra $\mathcal{L}$-strukturer[6].

Exempel 2.21. Vi kan fortsätta exempel 2.19 genom att tolka de där givna atomerna i den triviala $\mathcal{L}$-strukturen nyss beskriven. Vi ser då att $(2,4) \in \mathbb{N}^2$ är sann, medan $(x, \mathbb{N}, 34) \in 2$ inte är det för något värde på x.

Vi kommer hädanefter att något slarvigt beteckna $\mathcal{L}$-strukturer med samma namn som deras universum. Ur sammanhanget kommer det att gå att utläsa om $\mathcal{L}$-strukturen eller universumet åsyftas.

Definition 2.22 (K-sats)**.** Mängden av alla satser i $\mathcal{L}$ som är sanna i ($\mathcal{L}$-strukturen) $\hat{A}$ kallar vi K. En sats i K kallas en K-sats.

Exempel 2.23. Satsen γ, given av

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(x, 0) \in G,$$

där G är ”större än”-relationen vi definierade i exempel 2.4, är en K-sats eftersom mängden $\mathbb{R}^+$ definitionsmässigt bara innehåller positiva tal.

Definition 2.24 (Modell)**.** Antag att Γ är en mängd av $\mathcal{L}$-satser. En $\mathcal{L}$-struktur $\mathcal{M}$ är en modell av Γ om alla satser i Γ är sanna i $\mathcal{M}$. Vi skriver då $\mathcal{M} \models \Gamma$.

Exempel 2.25. $\hat{A}$ är en definitionsmässigt en modell av K.

Tidigare har vi nämnt att vårt mål är att hitta en så kallad utvidgning av $\hat{\mathbb{R}}$ där alla resultat vi känner till om $\hat{\mathbb{R}}$ fortfarande gäller. Omformulerat innebär det alltså att vi söker en ny modell av K, som också innefattar ”nya” element.

2.5 Överföringsprincipen

Givet en superstruktur $\hat{A}$, med tillhörande $\mathcal{L}$-språk och en monomorfi * från $\hat{A}$ till en annan superstruktur $\hat{B}$ vill vi kunna tolka $\hat{B}$ som en $\mathcal{L}$-struktur. Om $\hat{A}$ har översättningsavbildning $\Psi : C \to \hat{A}$ (där C återigen är $\mathcal{L}$:s konstanter), sätter vi $\hat{B}$:s översättningsavbildning till sammansättningen $(^* \circ \Psi) : C \to \hat{B}$.

Det kommer att visa sig att $\hat{B}$ generellt inte är en modell av K, men att däremot de interna elementen i $\hat{B}$, dvs. $^*\hat{A}$ alltid utgör en modell av K. Detta är anledningen till att begreppet internt element är viktigt. Vi noterar att $^*\hat{A}$ kan tolkas som en $\mathcal{L}$-struktur, med samma översättningsavbildning $(^* \circ \Psi)$ som $\hat{B}$. Detta tack vare att $(^* \circ \Psi)$ avbildar varje konstant i $\mathcal{L}$ på ett standardelement i $\hat{B}$ och samtliga standardelement är interna enligt proposition 2.17.

För att hålla isär tillfällen då en formel eller sats i $\mathcal{L}$ ska tolkas i $\mathcal{L}$-strukturen $\hat{A}$ med tillfällen då den ska tolkas i $\mathcal{L}$-strukturen $^*\hat{A}$ inför vi den så kallade *-transformen.

Definition 2.26. *-transformen av en formel (respektive sats) α är den formel (sats) $^*\alpha$ som fås genom att ersätta varje konstant a i formeln (satsen) med $^*a$.[7]

En *-transformerad sats ska tolkas i $^*\hat{A}$. *-transformering är alltså endast ett notationstekniskt knep för att förenkla läsbarheten.

Exempel 2.27. Satsen γ i exempel 2.23 *-transformeras till

$$^*\gamma = (\forall x \in {^*\mathbb{R}^+})(x, {^*0}) \in {^*G}.$$

[6] Att vi kan tolka formler och satser i $\mathcal{L}$-strukturer bygger på att vi har en grundläggande mängdlära med en väldefinierad tillhörighetsoperator $\in$. Då mängdlära ligger utanför ramen av denna rapport nöjer vi oss med att tolka $\in$ intuitivt och säga att exempelvis satsen $5 \in \{3,4,5\}$ uppenbart är sann medan $5 \in \{2,3,4\}$ inte är sann.

[7] $^*\alpha$ är inte egentligen en formel/sats i $\mathcal{L}$, men däremot i det helt ekvivalenta språk $^*\mathcal{L}$ som är likadant som $\mathcal{L}$ med enda skillnad att varje konstant c i $\mathcal{L}$ bytt beteckning till $^*c$ i $^*\mathcal{L}$. Vi kommer i fortsättningen att ignorera denna skillnad, då det finns en trivial bijektion mellan konstanterna i $\mathcal{L}$ och konstanterna i $^*\mathcal{L}$.

Tack vare följdsats 2.8 vet vi att $^*G$ innehåller alla ordnade par $(^*x, ^*y)$ sådana att $x > y$ och inga andra par av standardelement. Det går att visa (se exempel 2.29) att G:s definierande egenskaper gäller även för $^*G$, för ickestandardtalen i $^*\mathbb{R}$ och att vi därför kan tolka $^*G$ som ”större än”-relationen på $^*\mathbb{R}$. Och satsen $^*\gamma$ säger att $^*\mathbb{R}^+$ endast innehåller positiva tal.

Nu kommer vi till en mycket viktig sats som visar sambandet mellan superstrukturmonomorfier och den ovan definierade *-transformen.

Sats 2.28 (Överföringsprincipen)**.**

a) *En sats α i $\mathcal{L}$ är sann i $\hat{A}$ omm dess *-transform $^*\alpha$ är sann i $^*\hat{A}$.*

b) *Låt E vara mängden av m-tupler $(x_1, \ldots, x_m) \in C$ som uppfyller en formel $\alpha(x_1, \ldots, x_m)$, där $x_1, \ldots, x_m$ är de enda fria variablerna i α, och där $C \in \hat{A}$. Då är $^*E$ mängden av m-tupler $(x_1, \ldots, x_m) \in {}^*C$ som uppfyller $^*\alpha(x_1, \ldots, x_m)$.*

Notera att asteriskerna i satsen betyder olika saker beroende på om de verkar på en sats/formel i $\mathcal{L}$ eller om de verkar på en mängd/superstruktur.

Bevis. För satser utan kvantifikatorer bevisas (a) medelst induktion över antal konnektiv i satsen:

I fallet då α är en atom har vi att α kan skrivas $(a_1, \ldots, a_k) \in b$, vilket enligt följdsats 2.8 är ekvivalent med $(^*a_1, \ldots, {}^*a_k) \in {}^*b$ som, enligt definitionen av *-transformering av en sats, är det samma som $^*\alpha$.

Det är tillräckligt att visa att påståendet håller för konnektiven $\neg$ och $\wedge$, eftersom de tillsammans är sanningsfunktionellt kompletta[8].

Antag att (a) håller för formler med färre konnektiv än k, för något $k \in \mathbb{N}$. Tag en formel α med k stycken konnektiv. α har då utseendet $\beta \wedge \gamma$ eller $\neg\beta$, där β och γ har färre än k konnektiv.

I fallet $\alpha = \beta \wedge \gamma$ har vi från antagandet att

$$\hat{A} \models \beta \Leftrightarrow {}^*\hat{A} \models {}^*\beta \text{ och } \hat{A} \models \gamma \Leftrightarrow {}^*\hat{A} \models {}^*\gamma.$$

Med andra ord har vi

$$(\hat{A} \models \beta \text{ och } \hat{A} \models \gamma) \Leftrightarrow ({}^*\hat{A} \models {}^*\beta \text{ och } {}^*\hat{A} \models {}^*\gamma).$$

Tarskis sanningsdefinition[9] ger oss då att

$$\hat{A} \models \beta \wedge \gamma \Leftrightarrow {}^*\hat{A} \models {}^*\beta \wedge {}^*\gamma.$$

Av definition 2.18 har vi då

$$\hat{A} \models \beta \wedge \gamma \Leftrightarrow {}^*\hat{A} \models {}^*(\beta \wedge \gamma).$$

I fallet $\alpha = \neg\beta$ har vi på motsvarande sätt från antagandet att $\hat{A} \models \beta \Leftrightarrow {}^*\hat{A} \models {}^*\beta$. Med andra ord har vi $\neg(\hat{A} \models \beta) \Leftrightarrow \neg({}^*\hat{A} \models {}^*\beta)$. Tarskis sanningsdefinition ger oss då att $\hat{A} \models \neg\beta \Leftrightarrow {}^*\hat{A} \models \neg{}^*\beta$. Av definition 2.18 har vi då $\hat{A} \models \neg\beta \Leftrightarrow {}^*\hat{A} \models {}^*(\neg\beta)$.

Då beviset av (a) för satser med kvantifikatorer, samt beviset av (b) bygger på samma princip, men är mycket tekniskt, lämnar vi det till den intresserade läsaren att uppsöka i ”A Set-Theoretical Characterization of Enlargements” av A. Robinson och E. Zakon[RZ69].

□

Sats 2.28 är central inom icke-standardanalysen. Satsen ger att varje K-sats är sann i $^*\hat{A}$ för valfri given monomorfi *. Efter att vi i nästa avsnitt visat att vi kan hitta monomorfier som ger upphov till så kallade utvidgningar (som i fallet $A = \mathbb{R}$ alltså kommer att ge upphov till existens av infinitesimaler och oändligt stora tal) kommer vi att kunna överföra satser mellan den vanliga analysen och ickestandard-analysen. Nästa exempel ger ett smakprov på detta.

[8] Alla satser utan kvantifikatorer kan uttryckas med $\neg$ och $\wedge$ som enda konnektiv.

[9] Se bilaga A, definition A.5.

Exempel 2.29. För att vi ska kunna tolka relationen ${}^*G$ från exempel 2.27 som "större än"-relationen på ${}^*\mathbb{R}$ krävs att den uppfyller egenskaperna för strikta totala ordningsrelationer. Egenskaperna gäller för G och ges av följande tre K-satser, där E är relationen som beskriver likhet mellan två tal i $\mathbb{R}$:

$$(\forall a \in \mathbb{R})\Bigg((\forall b \in \mathbb{R})\bigg((\forall c \in \mathbb{R})\Big(\big((a,b) \in G \wedge (b,c) \in G\big) \Rightarrow (a,c) \in G\Big)\bigg)\Bigg) \qquad \text{(transitivitet)}$$

$$(\forall a \in \mathbb{R})\Big(\neg\big((a,a) \in G\big)\Big) \qquad \text{(irreflexivitet)}$$

$$(\forall a \in \mathbb{R})\Bigg((\forall b \in \mathbb{R})\bigg(\neg\big((a,b) \in E\big) \Rightarrow \Big((a,b) \in G \Leftrightarrow \neg\big((b,a) \in G\big)\Big)\bigg)\Bigg) \qquad \text{(trikotomi)}$$

För normala monomorfier (definition 2.12) följer att ${}^*E$ är likhetsrelationen på ${}^*\mathbb{R}$. Vi får nu att *-transformering av ovanstående satser och applicering av Sats 2.28 ger att ${}^*G$ kan tas som "större än"-relationen på ${}^*\mathbb{R}$.

2.6 Utvidgningar av superstrukturer

Det är lätt att definiera ointressanta monomorfier, som exempelvis identitetsmonomorfin $\Phi_{\text{id}} : \hat{A} \to \hat{A}$ sådan att $\Phi_{\text{id}}(a) = a$ för alla $a \in \hat{A}$. I detta avsnitt ska vi visa att det även finns mer intressanta monomorfier – så kallade utvidgande monomorfier.

2.6.1 Definition av utvidgningar

Innan vi kan definiera begreppet utvidgning behöver vi begreppet ändligt satisfierbar.

Definition 2.30 (Ändligt satisisifierbar)**.** En ändligt satisfierbar binär relation[10] R är sådan att det för varje ändlig delmängd X av R:s domän D_R finns ett element y_X i R:s kodomän sådant att $(x, y_X) \in R$ för alla $x \in X$.

Exempel 2.31. Betrakta den binära relationen $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : x > y\}$. S är ändligt satisfierbar, ty varje ändlig mängd $X \in \mathbb{R}^+$ har ett minimum $x_{\min}$, så $y_X = x_{\min}/2$ satisfierar $(x, y_X) \in S$ för varje $x \in X$.

Definition 2.32 (Utvidgning)**.** En monomorfi ${}^* : \hat{A} \to \hat{B}$ kallas utvidgande om den uppfyller att det för varje ändligt satisfierbar binär relation $R \in \hat{A}$ finns ett $y_R \in \hat{B}$ sådant att $({}^*x, y_R) \in {}^*R$ för varje $x \in D_R$. ${}^*\hat{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty} {}^*A_k$ kallas då utvidgningen av $\hat{A}$ under *.

Vi ska nu se att en sådan utvidgning av $\hat{\mathbb{R}}$ ger upphov till både infinitesimaler och oändligt stora tal.

Exempel 2.33 (Existens av infinitesimaler)**.** Låt ${}^* : \hat{\mathbb{R}} \to \hat{B}$ vara en utvidgande monomorfi. Tag relationen S från exempel 2.31. Låt nu ρ vara permutationen som byter plats på elementen i ett ordnat par, så att domänen av ρS blir kodomänen av S. Eftersom S är ändligt satisfierbar existerar ett element

$$y_S \in D_{\rho({}^*S)} = D_{{}^*(\rho S)} = {}^*D_{\rho S} = {}^*\mathbb{R}^+$$

i $\hat{B}$, som är större än ^{*0} (detta gäller alla element i ${}^*\mathbb{R}^+$ via satsen ${}^*\gamma$ i exempel 2.27) men mindre än alla standardelement i ${}^*\mathbb{R}^+$. Sådana element kallar vi infinitesimaler. Vi noterar också att y_S är intern men ickestandard. Ty om y_S vore standard skulle vi ha att $y_S = {}^*x_S$ för något $x_S \in \mathbb{R}^+$, men för varje $x \in \mathbb{R}^+$ har vi K-satsen $({}^*x, {}^*x_S) \in {}^*G$ och därmed genom överföringsprincipen också att $(x, x_S) \in G$. Detta leder till en motsägelse eftersom det inte finns något $x_S \in \mathbb{R}^+$ som är mindre än varje $x \in \mathbb{R}^+$.

På ett liknande sätt visas existensen av oändligt stora tal, dvs. $\omega \in {}^*\mathbb{R}$ som är större än varje standardelement i ${}^*\mathbb{R}$.

[10] En definition av binära relationer, samt förklaring av begreppen domän och kodomän, ges i bilaga A (definition A.1).

2.6.2 Existens av utvidgningar

I detta avsnitt ska vi visa att det existerar utvidgningar av $\hat{A}$. Detta kommer att ske med hjälp av begreppet ultrapotens som kommer att definieras snart. Vi följer konstruktionen given i [RZ69]. Det bör tilläggas att vi i detta avsnitt kommer att offra en del rigorösitet för att kunna bibehålla rapportens läsbarhet.

För att kunna använda oss av en likhetsrelation i senare bevis, inför vi ett nytt formellt språk $\mathcal{L}'$, med tillhörande $\mathcal{L}'$-strukturer.

Definition 2.34. Språket $\mathcal{L}'$ har samma konstanter (dvs. en superstruktur $\hat{A}$) och konnektiv som $\mathcal{L}$, men atomerna i $\mathcal{L}'$ är på formen $x\dot{\in}y$ eller $x\dot{=}y$. I $\mathcal{L}'$ tar vi bort begränsningen på kvantifikatorerna som finns i $\mathcal{L}$ (se definition 2.18).

Definition 2.35. En $\mathcal{L}'$-struktur har likt en $\mathcal{L}$-struktur ett universum och en översättningsavbildning från $\mathcal{L}'$-konstanterna till universumet. Dessutom ingår i begreppet $\mathcal{L}'$-struktur en tolkning av symbolerna $\dot{\in}$ och $\doteq$.

Exempel 2.36. Den enklaste $\mathcal{L}'$-strukturen fås genom att ta mängden av konstanter $\hat{A}$ i $\mathcal{L}'$, låta symbolerna $\dot{\in}$ och $\doteq$ tolkas som $\in$ resp $=$ och välja identitetsavbildningen som översättningsavbildning.

Definition 2.37. K' är mängden av alla satser i $\mathcal{L}'$ som är sanna i $\hat{A}$.

Låt M vara en modell av K'. Ett exempel på en sådan modell är $\hat{A}$. Det går att med hjälp av K'-satser visa att den ovan definierade $\doteq$ är en ekvivalensrelation[11] med substituerbarhet över $\dot{\in}$[12]. Tack vare detta kan vi skapa en ny modell där varje element $x \in M$ ersätts med dess ekvivalensklass $[x] = \{y \in M : y \doteq x\}$. I denna modell tolkas $\doteq$ som vanlig $=$ och $[x]\dot{\in}[X]$ omm $x\dot{\in}X$. Denna övergång till ekvivalensklasser är alltså alltid möjlig givet en modell av K'.

En annan modifikation av modeller som kan göras är så kallad kollapsning av modellen. Detta begrepp är viktigt, men inte centralt i senare bevis och den intresserade läsaren hänvisas till [RZ69] för detaljer. Antag att en modell M av K' med översättningsavbildning $\Psi : \hat{A} \to M$ är given. Kollapsningen av M är en speciell modell M' av K' där för varje element $x \in M$ sådant att $x\dot{\in}\Psi(A_n)$ för något $n > 0$ relationen $\dot{\in}$ är vanlig mängdtillhörighet. Dessa element kallas interna i M.

Om vi har en modell M av K' kan vi alltså genom att övergå till ekvivalensklasser och kollapsa få en modell där de vanliga relationerna $=$ och $\in$ kan användas istället för $\doteq$ och $\dot{\in}$.

Huvudresultatet i [RZ69] gällande kollapsade modeller är följande sats, vars bevis vi skissar.

Sats 2.38. *För varje kollapsad modell M till K', finns en normal (se definition 2.12) monomorfi $^* : \hat{A} \to \hat{B}$, där $\hat{B}$ är en superstruktur, sådan att de interna elementen i $\hat{B}$ är precis de interna elementen i M.*

Bevisskiss. Låt $\Psi : \hat{A} \to M$ vara modellens översättningsavbildning. Beviset bygger på att ersätta M med superstrukturen $\hat{B}$ där B är given av $B = \Psi(A_0)$. Detta fungerar tack vare ett par teknikaliteter gällande kollapsade modeller som även medför att de interna elementen bevaras. Beviset slutförs sedan genom att visa att $\Psi : \hat{A} \to \hat{B}$ uppfyller kraven i monomorfidefinitionen 2.5. Kraven visas i tur och ordning genom att formulera dem som K'-satser. Slutligen kan alltså monomorfin * fås som översättningsavbildningen Ψ.

Som ett exempel visar vi här att $\Psi(\{s\}) = \{\Psi(s)\}$ för varje fixt $s \in \hat{A}$. Ty sätt $S = \{s\}$ och betrakta satsen

$$(s \in S) \wedge \forall x(x = s \Leftrightarrow x \in S).$$

Detta är en K'-sats ty ovanstående är sant i $\hat{A}$. Därmed gäller eftersom M är en modell av K' även följande

$$\big(\Psi(s) \in \Psi(S)\big) \wedge \forall x\big(x = \Psi(s) \Leftrightarrow x \in \Psi(S)\big),$$

[11] För definitioner av ekvivalensrelationer och ekvivalensklasser se bilaga A.

[12] Dvs. att om $x\dot{\in}X$, $x \doteq y$ och $X \doteq Y$ gäller, så gäller även $y\dot{\in}Y$.

vilket är vad vi ville komma fram till dvs. att $\Psi(S) = \{\Psi(s)\}$. Vi ser ovan att =-relationen utnyttjats, vilket motiverar införandet av $\mathcal{L}'$-språket.

$\square$

Med hjälp av Sats 2.38 kan vi nu formulera en sats som visar existensen av utvidgningar och därmed i förlängningen existensen av infinitesimaler och oändligt stora tal i $\hat{\mathbb{R}}$ (se exempel 2.33).

Sats 2.39. *För varje superstruktur $\hat{A}$, finns en superstruktur $\hat{B}$ och en monomorfi $^* : \hat{A} \to \hat{B}$ som är normal och utvidgande. Alltså har $\hat{A}$ alltid en utvidgning $^*\hat{A}$.*

Innan vi bevisar denna sats måste vi göra en avstickare och definiera två viktiga begrepp inom modellteori och mängdlära, nämligen ultrafilter och ultrapotenser.

Definition 2.40 (Filter)**.** Ett filter F över en indexmängd S är en delmängd av potensmängden till S med följande egenskaper:

1. $\emptyset \notin F$,
2. $X \in F$ och $Y \in F$ medför $X \cap Y \in F$,
3. $X \in F$ och $X \subset Y \subset S$ medför $Y \in F$,

Exempel 2.41 (Illustration av filter-definitionen)**.** Ett filter är alltså en speciell delmängd till potensmängden av en indexmängd. Indexmängden kan i princip vara vilken mängd som helst, men en vanlig indexmängd är $\mathbb{N}$. Givet $\mathbb{N}$ som indexmängd är ett filter en mängd av mängder av naturliga tal. Vi kan då tänka oss ett filter som ett sätt att jämföra två oändliga följder av element. Om vi har två följder av reella tal a_n och b_n och ett filter F över $\mathbb{N}$, kan vi ställa oss frågan om dessa är lika ”nästan överallt”. Vi skulle då fråga oss om mängden $\{n : a_n = b_n\}$ återfinns i filtret F. Läsaren inser direkt att mängden $\emptyset$ ej bör återfinnas i filtret eftersom mängder som är olika överallt ej bör räknas som lika ”nästan överallt”.

Vidare om följden a_n är lika ”nästan överallt” med b_n och denna i sin tur är lika ”nästan överallt” med c_n, bör även a_n och c_n vara lika ”nästan överallt”. För att detta ska gälla måste filtret vara slutet under snitt.

Om vi sätter $S = \{n : a_n = b_n\}$ och det gäller att a_n och b_n är lika ”nästan överallt” bör $S \subset \{n : a_n = c_n\}$ innebära att även a_n och c_n är lika ”nästan överallt” eftersom de är lika på alla ställen som a_n och b_n är lika samt ytterligare några ställen.

En speciell form av filter är ultrafilter.

Definition 2.42 (Ultrafilter)**.** Ett ultrafilter F över en indexmängd S är ett filter över S som uppfyller att

$$X \subset S \quad \text{medför att antingen} \quad X \in F \quad \text{eller} \quad S \setminus X \in F.$$

Sats 2.43. *Givet ett filter G över en indexmängd S finns alltid ett ultrafilter F sådant att $G \subset F$.*[13]

Med hjälp av ultrafilter kan vi konstruera ultrapotenser av superstrukturer.

Definition 2.44 (Ultrapotens)**.** Låt följande vara givna – en superstruktur $\hat{A}$, en indexmängd I och ett ultrafilter F över I. Betrakta mängden $\hat{A}^I$ av funktioner från I till $\hat{A}$. Vi kan definiera en ekvivalensrelation $\sim$ över $\hat{A}^I$ enligt

$$f \sim g \Leftrightarrow \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in F.$$

Ekvivalensklasserna av denna relation utgör då ultrapotensen. Ultrapotensen betecknas $\hat{A}^I/F$.

Som vi nämnt tidigare är $\hat{A}$ en modell av K'. Om vi nu utrustar ultrapotensen med en $\dot{\in}$-relation enligt $f \dot{\in} S \Leftrightarrow \{i \in I : f(i) \in S(i)\} \in F$, och identifierar $\doteq$ med vanlig likhet mellan ekvivalensklasser, blir ultrapotensen i sin tur också en modell av K' där översättningsavbildningen översätter varje element $a \in \hat{A}$ till den ekvivalensklass som innehåller den konstanta funktionen som avbildar hela I på a. [14]

[13] Denna sats bygger på urvalsaxiomet och bevisas till exempel i Goldblatt [Gol98].

[14] Detta resultat är en variant av Łoś sats, ett bevis finns till exempel i Kochen [Koc61].

Exempel 2.45. Låt oss betrakta superstrukturen $\hat{\mathbb{R}}$ och ta som indexmängd $\mathbb{N}$. Funktionerna $\hat{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$ vi betraktar är då helt enkelt oändliga följder av element i $\hat{\mathbb{R}}$. Speciellt kan vi betrakta följder av reella tal. Om vi antar att vi har ett ultrafilter U över $\mathbb{N}$ och konstruerar ultrapotensen $\hat{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}/U$, tillhör alltså två talföljder a_n och b_n samma ekvivalensklass i $\hat{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}/U$ om mängden $\{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\}$ finns i ultrafiltret U. Vi kan tolka ultrapotensen som klasser av ”nästan lika” talföljder.

Vi är nu redo att skissera hur Robinson och Zakon knyter ihop säcken i [RZ69] med ett bevis av Sats 2.39. I detta bevis används istället för tal i $\mathbb{N}$ en speciell typ av funktioner som index för ultrafiltret.

Bevisskiss: Existens av utvidgningar. Givet en superstruktur $\hat{A}$, en indexmängd I och ett ultrafilter F över I, konstruerar vi ultrapotensen $\hat{A}^I/F$. Modellen $\hat{A}^I/F$ kan då kollapsas och vi kan tillämpa Sats 2.38 så att vi får en normal monomorfi $^* : \hat{A} \to \hat{B}$. Det återstår att visa att vi kan välja I och F på ett sådant sätt att * blir utvidgande. Detta visas ej i [RZ69], men väl i en tidigare artikel av Robinson [Rob67]. Eftersom $\hat{B}$ har samma interna element som $\hat{A}^I/F$ (sats 2.38) behöver vi endast visa att de interna elementen i $\hat{A}^I/F$ utgör en utvidgning.

Låt $\hat{A}_r$ beteckna mängden av alla ändligt satsifierbara binära relationer i $\hat{A}$. Vi väljer nu I som mängden av en viss typ av funktioner från $\hat{A}_r$. En funktion $g \in I$ avbildar varje $R \in \hat{A}_r$ på en ändlig delmängd av relationens domän (här tillåter vi $g(R) = \emptyset$). Vi definierar även en union av två funktioner $g, h \in I$ enligt $(g \cup h)(R) = g(R) \cup h(R)$ för varje $R \in \hat{A}_r$. Notera att $(g \cup h)$ är en av funktionerna i I.

Vi ska nu definiera ett filter över I. Vi börjar med att sätta

$$F_0 = \{S_g \subset I : S_g = \{h \in I : \forall R \in \hat{A}_r\big(g(R) \subset h(R)\big)\}\}.$$

F_0 uppfyller de två första kraven för ett filter (definition 2.40) ty $g \in S_g$ för varje S_g, så $S_g \neq \emptyset$ och

$$\begin{aligned} S_g \cap S_h &= \{k : \forall R \in \hat{A}_r\big(g(R) \subset k(R) \quad \text{och} \quad h(R) \subset k(R)\big)\} \\ &= \{k : \forall R \in \hat{A}_r\big(g(R) \cup h(R) \subset k(R)\big)\} \\ &= S_{g \cup h} \in F_0. \end{aligned}$$

Vi inkluderar nu även större mängder för att få ett filter och sätter

$$F_1 = \{S \subset I : \exists S_g \in F_0(S_g \subset S)\}.$$

Läsaren inser genom kontroll av definition 2.40 att F_1 är ett filter.

Därmed kan vi förstora F_1 till ett ultrafilter F enligt Sats 2.43. Detta är ultrafiltret som kommer att användas för den tidigare nämnda ultrapotensen.

Läsaren uppmanas inför nästa del i beviset att erinra sig definitionen 2.32 av en utvidgning. Vi betraktar nu mängden $\hat{A}^I$ av funktioner från I till $\hat{A}$ och tolkar den som en $\mathcal{L}'$-struktur [15] med översättningsavbildning $\Psi : \hat{A} \to \hat{A}^I$ sådan att $\Psi(x) = c_x$, där $c_x : I \to A$ är den konstanta funktion som avbildar varje $g \in I$ på x. Härnäst vill vi visa att det till varje ändligt satisfierbara binära relation R i $\hat{A}$ går att hitta ett element y_R i $\hat{A}^I$ sådant att $(\Psi(x), y_R)\dot{\in}\Psi(R)$ för varje x i R:s domän. Nu fixerar vi ett sådant R. Vi väljer $y_R : I \to \hat{A}$ på ett sådant sätt att $(x_g, y_R(g)) \in R$ för alla $x_g \in g(R)$. Detta är möjligt ty $g(R)$ är en ändlig delmängd av R:s domän.

Härnäst ska vi visa att ovanstående val av y_R leder till att $(\Psi(x), y_R)\dot{\in}\Psi(R)$ för alla x i R:s domän, vilket är ekvivalent med att varje mängd $U_x = \{g \in I : (x, y_R(g)) \in R\}$ återfinns i ultrafiltret F. Men om vi definierar en hjälpfunktion $g_x \in I$ enligt

$$g_x(Q) = \begin{cases} \{x\} & Q = R\,, \\ \emptyset & Q \neq R\,, \end{cases}$$

[15] $\hat{A}^I$ tolkas som $\mathcal{L}'$-struktur genom att säga att $y\dot{\in}Y$ omm $\{g \in I : y(g) \in Y(g)\}$ finns i F, och motsvarande för $\doteq$.

har vi att
$$U_x \supset \{g \in I : x \in g(R)\} = \{g \in I : g_x(R) \subset g(R)\} = S_{g_x}.$$
Så faktumet att S_{g_x} är ett element i ultrafiltret F ger direkt att även U_x är det, för varje x. Resonemanget gäller för varje ändligt satisfierbara binära relation R i $\hat{A}$ och leder till att monomorfin som fås av översättningsavbildningen Ψ genom sats 2.38 är utvidgande, vilket är vad vi ville visa.

□

2.7 Användbara begrepp för senare tillämpning

Vi påbörjar nu ett avslutande av uppbyggnaden av icke-standardanalysen. Följande avsnitt skall tjäna som en förberedelse inför Sektion 3, ett axplock av den extensiva teori som icke-standardanalysen innefattar, och som vi behöver för att påvisa existensen av lösningar till Navier-Stokes ekvationer. Existensbeviset är djupt influerat av Capińskis och Cutlands bok på området [CC95] och för ytterligare kunskap hänvisar vi således den nyfikne läsaren dit. En stor del av följande samling av definitioner och satser återfinns i [CC95].

Sats 2.46. *För varje ändligt $x \in {}^*\mathbb{R}$ så finns det ett unikt $r \in \mathbb{R}$ sådan att $x = r + \delta$, för δ infinitesimalt, och vi skriver då $x \approx r$.*

För beviset hänvisar vi till [CC95].

Definition 2.47 (Standarddelen)**.** Det unika reella tal r som uppfyller $r \approx x$ kallas för *standarddelen* av x, och vi skriver $r = {}^\circ x$, för ändligt x.

Definition 2.48 (Monaden)**.** *Monaden* till $r \in \mathbb{R}$ är följande delmängd av ${}^*\mathbb{R}$:
$$\mathrm{monad}(r) = \{x \in {}^*\mathbb{R} : x \approx r\}.$$

Denna monaddefinition gäller endast för $r \in \mathbb{R} \in {}^*\mathbb{R}$. Vi kommer senare att ge en alternativ, dock ekvivalent, definition av monader, som kan generaliseras till mer allmänna mängder. Följande definition av *närastandardelement* är för den delen mer generell, genom att inte endast gälla för $\mathbb{R} \in {}^*\mathbb{R}$.

Definition 2.49 (Närastandard)**.** Vi säger att $x \in {}^*A$ är *närastandard* om $x \in \mathrm{monad}(a)$ för något $a \in A$.

Det interna konceptet är av stor tyngd inom icke-standardanalysen, eftersom det är just de interna elementen som utgör en modell av K. Vi definierar här i samklang med Definition 2.15 vad vi menar med en intern mängd och en intern funktion. Båda definitionerna står att finna i [Rob66]. Minns att $b \in \hat{B}$ kallas internt element om $b \in {}^*S$ för något $S \in \hat{A}$. Vi kan nu jämföra denna definition med följande två definitioner:

Definition 2.50 (Intern mängd)**.** En mängd $U \in \hat{B}$ är *intern* om och endast om $U \in {}^*S$ för något $S \in \hat{A}$. Om $U \in \hat{B}$ inte är intern så säges U vara *extern*.

Definition 2.51 (Intern funktion)**.** Låt $f : U \to W$ vara en funktion mellan interna mängder U och W. Om mängden
$$f = \{(u, w) \in U \times W : f(u) = w\},$$
som beskriver funktionen är intern så sägs funktionen vara intern.

Definition 2.52 (Mikrokontinuerlig)**.** En intern funktion $F : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ är *mikrokontinuerlig* på en mängd $X \subset {}^*\mathbb{R}$ om det för alla x, $y \in X$ gäller att
$$x \approx y \Rightarrow F(x) \approx F(y).$$

Exempel 2.53. Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ är inte mikrokontinuerlig. Ty tag en infinitesimal δ. Då är skillnaden $2\delta - \delta = \delta \approx 0$ medan skillnaden mellan de motsvarande funktionsvärdena $\frac{1}{2\delta} - \frac{1}{\delta} = -\frac{1}{2\delta} \not\approx 0$. Definition 2.52 uppfylls alltså inte.

Det resterande av detta avsnitt leder fram till Robinsons lemma, som är ett elegant men simpelt resultat. Det kommer sedan till nytta i applikationsdelen.

Nästa proposition ger ytterligare en motivering till att interna mängder är intressanta. Satser i $\hat{A}$ på formen ”för alla delmängder av S”, överförs till satser i ${}^*\hat{A}$ på formen ”för alla interna delmängder av ${}^*S$”.

Proposition 2.54. *Givet en mängd $S \in \hat{A}$, är ${}^*\mathcal{P}(S)$ mängden av interna delmängder av ${}^*S$. Med andra ord gäller att ${}^*\mathcal{P}(S) = \mathcal{P}({}^*S) \cap {}^*\hat{A}$.*[16]

Bevis. Vi visar i tur och ordning att ${}^*\mathcal{P}(S) \subset {}^*\hat{A}$, ${}^*\mathcal{P}(S) \subset \mathcal{P}({}^*S)$ och ${}^*\mathcal{P}(S) \supset \mathcal{P}({}^*S) \cap {}^*\hat{A}$. Varje element i ${}^*\mathcal{P}(S)$ är definitionsmässigt internt så ${}^*\mathcal{P}(S) \subset {}^*\hat{A}$.

Betrakta nu den binära relationen $R = \{(x, y) : x \in y \in \mathcal{P}(S)\}$ och notera att dess domän är S. Enligt monomorfi-definitionen 2.5 gäller att ${}^*R = \{(x, y) : x \in y \in {}^*\mathcal{P}(S)\}$ med domän ${}^*S$. Detta visar att varje mängd i ${}^*\mathcal{P}(S)$ består av element ur ${}^*S$ och således att${}^*\mathcal{P}(S) \subset \mathcal{P}({}^*S)$.

Till sist har vi för varje element $T \in \mathcal{P}({}^*S) \cap {}^*\hat{A}$ att $T \in {}^*U$ för något $U \in \hat{A}$ eftersom T är intern. Sätt nu W till domänen av den binära relationen $\{(x, y) : x \in y \in U\}$, dvs. $W = \{x : x \in y \text{ för något } y \in U\}$. Vi vet då på grund av monomorfi-definitionen att ${}^*W = \{x : x \in y \text{ för något } y \in {}^*U\}$ är mängden av alla element som ligger i någon mängd i ${}^*U$ – speciellt måste alla element i T ligga i ${}^*W$. Betrakta nu K-satsen

$$(\forall y \in U)\Big(\big((\forall x \in W)(x \in y \Rightarrow x \in S)\big) \Rightarrow y \in \mathcal{P}(S)\Big),$$

vilken utsäger att om en mängd y bara innehåller element ur S så är den ett element i $\mathcal{P}(S)$. Eftersom satsen är sann i $\hat{A}$ kan vi tillämpa överföringsprincipen på den. *-transformerad utsäger satsen att om en intern mängd y bara innehåller element ur ${}^*S$ så är den ett element i ${}^*\mathcal{P}(S)$. Överföringsprincipen ger nu att detta är sant i ${}^*\hat{A}$, så att $T \in {}^*\mathcal{P}(S)$. Eftersom T var godtyckligt valt innebär detta att $\mathcal{P}({}^*S) \cap {}^*\hat{A} \subset {}^*\mathcal{P}(S)$. □

Vi ska härnäst se ett till exempel på hur vi kan använda K-satser för att överföra satser från $\hat{\mathbb{R}}$ till ${}^*\hat{\mathbb{R}}$.

Proposition 2.55. *Varje intern, icke-tom, begränsad delmängd S av ${}^*\mathbb{N}$ har ett maximum $S_{\max} \in S$ sådant att för varje $s \in S$, $S_{\max} \geq s$.*

Bevis. Vi beskriver det önskade resultatet som en K-sats α och sluter ur faktumet att det gäller för $\hat{\mathbb{R}}$ att det även gäller för ${}^*\hat{\mathbb{R}}$. För ökad läsbarhet delar vi upp K-satsen i två delar så att $\alpha = (\forall S \in J)(\phi \Rightarrow \psi)$. Här är $J = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ mängden av alla icketomma delmängder av $\mathbb{N}$. Först uttrycker vi S egenskaper, dvs. att den har en övre begränsning.

$$\phi = (\exists N \in \mathbb{N})(\forall s \in \mathbb{N})\Big(s \in S \Rightarrow \big((N, s) \in G \vee (N, s) \in E\big)\Big),$$

där G är ”större än” relationen från exempel 2.4 och E är likhetsrelationen mellan två element i $\mathbb{N}$. Sedan uttrycker vi faktumet att sådana S har maximum.

$$\psi = (\exists S_{\max} \in \mathbb{N})\Big(s_{\max} \in S \wedge (\forall t \in \mathbb{N})\Big(t \in S \Rightarrow \big((S_{\max}, t) \in G \vee (S_{\max}, t) \in E\big)\Big)\Big).$$

$\alpha = (\forall S \in J)(\phi \Rightarrow \psi)$ är då en K-sats ty satsens innehåll är sant i $\hat{\mathbb{R}}$ ${}^*\alpha$ är därmed sann i ${}^*\hat{\mathbb{R}}$ enligt överföringsprincipen, och beskriver precis propositionen som vi vill visa. Ty ${}^*J = {}^*\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ är enligt proposition 2.54 mängden av alla icketomma, interna delmängder av ${}^*\mathbb{N}$, ${}^*G$ fungerar som ”större än”-relation på ${}^*\mathbb{R}$ och ${}^*E$ är likhetsrelationen på ${}^*\mathbb{N}$ tack vare att vår monomorfi är normal. □

Med hjälp av proposition 2.55 kan vi visa en intressant egenskap som interna delmängder U av ${}^*\mathbb{R}$ har. Nämligen att om U innehåller godtyckligt stora ändliga tal (dvs. tal som är mindre än något standardtal) så måste U ”flöda över” och även innehålla oändligt stora tal. Ur detta kan vi bland annat sluta att mängden av standardtal i ${}^*\mathbb{R}$ ej är intern.

[16] $\mathcal{P}(S)$ är här liksom tidigare potensmängden av S.

Proposition 2.56 (Överflöde)**.** *Låt $U \subset {}^*\mathbb{R}$ vara intern. Om U innehåller godtyckligt stora ändliga tal så innehåller den även oändligt stora tal. Vi kallar denna egenskap för överflöde.*

Bevis. Om U är obegränsad så kan vi välja valfritt oändligt stort tal $\omega \in {}^*\mathbb{R}$ och hitta ett element $u \in U$ sådant att $u > \omega$. Därmed är u oändligt stort.

Antag att U istället är begränsad dvs. att det finns ett $M \in {}^*\mathbb{N}$ sådant att $-M \leq u \leq M$, för alla $u \in U$. Betrakta mängden $X = \{m \in {}^*\mathbb{N} : m \text{ ej är övre begränsning till } U\}$. Vi ska nu visa att X är intern. Vi kan beskriva med en K-sats att det givet en begränsad delmängd S av $\mathbb{R}$ alltid finns en delmängd T av $\mathbb{N}$ som innehåller alla tal i $\mathbb{N}$ som ej är övre begränsningar till S. För att illustrera formulerandet av K-satser formulerar vi även K-satsen i detta bevis. Vi delar återigen upp K-satsen α i förutsättningar och slutsatser enligt $\alpha = (\forall S \in \mathcal{P}(\mathbb{R}))(\phi \Rightarrow \psi)$. Här är

$$\phi = (\exists N \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N})\Big(x \in S \Rightarrow \Big(x \in \mathbb{R} \wedge \big((N,x) \in G \vee (N,x) \in E\big)\Big)\Big)$$

och

$$\psi = \big(\exists T \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\big)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n \in T \Leftrightarrow (\exists y \in \mathbb{R})\big(y \in S \wedge (y,n) \in G\big)\Big).$$

Efter tillämpning av överföringsprincipen säger ${}^*\alpha$ att det finns en intern mängd T på formen vi gav X för varje intern och begränsad delmängd S av ${}^*\mathbb{R}$. Enligt förutsättningarna är U intern, så vi kan tillämpa K-satsen. Vi får därför att X är intern och dessutom begränsad av U:s övre begränsning.

Vi kan nu tillämpa proposition 2.55 och sätta $X_{\max}$ till maximumet av X. Eftersom X innehåller godtyckligt stora ändliga tal, måste $X_{\max}$ vara oändligt. Det följer nu från definitionen av X att det existerar ett $u \in U$ sådant att $u > X_{\max}$, dvs. sådant att u är oändligt. □

Proposition 2.57 (Robinsons lemma)**.** *Låt $(x_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$ vara en intern sekvens av hyperreella tal. Om $x_n \approx 0$ för alla ändliga n då finns det ett oändligt N sådant att $x_m \approx 0$ för alla $m \leq N$.*

Bevis. Låt $U = \{n \in {}^*\mathbb{N} : x_m < 1/m \ \forall m : m \leq n\}$. Det går att visa att U är en intern mängd. Då U innehåller godtyckligt stora ändliga tal, ger Proposition 2.56 att det finns ett oändligt N sådant att $x_m < 1/m \ \forall m \leq N$, för oändliga $m \leq N$ innebär detta att $x_m \approx 0$. □

Den teori som har presenterats i detta avsnitt har delvis syftat till att överbrygga det glapp som föreligger mellan områdena icke-standardanalys och Navier-Stokes ekvationer. Denna teori kommer till användning i ett existensbevis för dessa. Vi vill således uppmärksamma läsaren om att följande avsnitt markerar introduktionen till ett nytt område, och att vi inte återkommer till icke-standardanalysen förrän sent i kommande avsnitt, och då i mycket sparsamma mängder. Med detta klarlagt så följer här ett avsnitt om Navier-Stokes ekvationer.

3 Navier-Stokes ekvationer

Undersökning av fluiders rörelse har en klar roll inom både fysiken och ingenjörsvetenskapen. Inom hydro- och aerodynamik används olika ekvationer, varav Navier-Stokes ekvationer är bland de mest kända. Intressant är om dessa tillsammans med lämpliga begynnelse- och randvillkor har unika lösningar och isåfall hur väl sådana lösningar beskriver verkliga flöden. Ännu har inte unikhet bevisats i det tre-dimensionella fallet och kvarstår som ett av de sju så kallade millenieproblemen. Problemet lyder:

> *Bevisa eller motbevisa följande påstående:*
> *I det tre-dimensionella tidsrummet, givet ett begynnelsehastighetsfält, så existerar det ett hastighetsfält och ett tryckfält som båda är glatta och globalt definierade och som löser Navier-Stokes ekvationer.*

Detta kapitel syftar till att presentera, med hjälp av metoder ur icke-standardanalys, ett bevis för att lösningar till Navier-Stokes ekvationer existerar i det tre-dimensionella tidsrummet, till stor del baserat på Capinskis och Cutlands bok på området. [CC95]

Betrakta en *inkompressibel viskös fluid*[17] som vi betecknar med **L** och som rör sig inom ett område Ω i det tre-dimensionella rummet $\mathbb{R}^3$. Antag att dess rörelse kan beskrivas av följande system av ekvationer:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \langle u, \nabla \rangle u - \nu \nabla^2 u = f(x,t) - \nabla p, \tag{1a}$$

$$\nabla \cdot u = 0, \tag{1b}$$

där t är tiden, $x = (x_1, x_2, x_3)$ är en punkt i Ω; $u = u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ är **L**'s hastighet, p avser trycket på fluiden, och ν är viskositetskoeffiecienten. Endast ν kan här antas vara konstant. Vidare så är

$$\nabla := (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$$

gradientoperatorn och

$$\langle u, \nabla \rangle u := \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

kallar vi för konvektionstermen[18] medan

$$\nabla^2 u := \nabla \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2},$$

där ∇^2 är *Laplaceoperatorn* och

$$\nabla \cdot u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i},$$

är *divergensen*[19] av u. Slutligen betecknar f den yttre kraften som verkar på **L**. Ekvation (1a) grundar sig i Newtons andra lag,[20] medan (1b) garanterar **L**'s inkompressibilitet. Ett vektorfält som uppfyller (1b) kallas för *divergensfritt*.

Ekvationssystemet (1) kallar vi för Navier-Stokes ekvationer. Vidare skiljer vi på tre olika fall för Ω:

(i) Ω är begränsad

(ii) Ω är komplementet till ett begränsat område

(iii) Ω har en obegränsad rand

I både fall (i) och (ii) har Ω en begränsad rand. Fall (ii) kan uppkomma då en begränsad volym förflyttar sig i en fluid medan fall (iii) är av intresse vid undersökning av flöden i exempelvis oändliga rör. Vi skall inskränka oss till fall (i), då Ω är begränsad, och ytterliggare inskränka oss till det fall där $u|_{\partial\Omega} = 0$.[21] Om vi tänker oss att **L** färdas genom ett rör så är inte inskränkningen $u|_{\partial\Omega} = 0$ så märklig, ty rörets "rand" är immobil och ogenomtränglig. För ett kontinuerligt u medför också denna inskränkning en slags friktion mellan **L** och röret, vilket medför att den del av **L** som är närmast röret flödar mest långsamt. Det

[17] En fluid är en vätska eller gas och dess viskositet beskriver hur trögflytande den är. Med att den är inkompressibel menas att molekylerna i fluiden alltid ligger lika tätt överallt.

[18] Konvektion är ett fysikaliskt begrepp, och avser just rörelsen i en fluid.

[19] Fysikaliskt kan divergensen av ett hastighetsfält förstås som nettoflödet i en viss punkt.

[20] Newtons andra lag fastslår att summan av alla krafter som verkar på ett objekt är lika med tidsderivatan av rörelsemängden av objektet, både i fråga om storlek och riktning. $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\mathbf{a}$.

[21] Ett så kallat homogent Dirichletvillkor.

skall konstateras att det fall av Navier-Stokes ekvationer som vi här undersöker inte är allmänt. Det finns andra fall som innefattar exempelvis *jämna flöden* där hastighets-, tryck- och kraftfältet antas vara tidsoberoende, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ och även *Oseen-flöden* som är *laminära*[22].[Gal11]

Vårt mål är att visa att det existerar en lösning u till (1) med tillhörande funktioner f, p och att visa detta med hjälp av metoder ur icke-standard analys. För detta genomförande krävs matematisk kunskap, förutom den icke-standardanalys som vi redan har presenterat, inom området funktionalanalys, mer än vad som kan krävas av en matematikstudent i grundutbildningen. Således följer här ett avsnitt om relevanta funktionalanalytiska begrepp.

3.1 Funktionalanalytiska begrepp

Vi antar att läsaren är bekant med begrepp såsom vektorrum och metriskt rum. Om läsaren inte är bekant med dessa, eller behöver erinra sig dessas egenskaper så hänvisar vi till bilaga A. Dessa första definitioner leder vidare till det så kallade Hilbertrummet, vilkets inneboende skalärprodukt och fullständighet vi har stor nytta av. Följande baserar sig på Muscats bok om funktionalanalys [Mus14].

Definition 3.1 (Skalärprodukt)**.** En *skalärprodukt* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ på ett vektorrum V är en operation som för varje $u, v, w \in V$ och $\lambda \in \mathbb{R}$ uppfyller

$$\begin{aligned}\langle u+v, w\rangle &= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \\ \langle \lambda u, v\rangle &= \lambda\langle u, v\rangle \\ \langle u, v\rangle &= \langle v, u\rangle \\ \langle u, u\rangle \geq 0 \ \ &\textit{och} \ \ \langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0.\end{aligned}$$

Definition 3.2 (Cauchyföljd)**.** Låt (X, d) vara ett metriskt rum. En följd $\{x_n\} \in X$ säges vara en *Cauchyföljd* om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett positivt heltal N sådan att $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ för alla $n, m \geq N$.

Definition 3.3 (Fullständighet)**.** Ett metriskt rum X är *fullständigt* om alla dess cauchyföljder har ett gränsvärde som ligger i X.

Definition 3.4 (Hilbertrum)**.** Ett *Hilbertrum* är ett vektorrum X med en skalärprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ som är fullständigt med avseende på metriken $d(\cdot, \cdot) = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Definition 3.5 (Funktional och dualrum)**.** Låt X vara ett normerat vektorrum. En *funktional* är en lineär avbildning $X \to \mathbb{R}$. Mängden av alla funktionaler i X kallas för *dualrummet* till X och betecknas med X'.

Djupare än så här behöver vi inte gå. Det är i Hilbertrum vi betraktar våra ekvationer. Det är med hjälp av dualrum till Hilbertrum vi karaktäriserar lösningarna till dessa. Vi kommer senare återkomma till de Hilbertrum vi skall använda och då beskriva dessas specifika egenskaper. Låt oss nu återgå till huvudproblemet.

3.2 Existensbevisets påbörjan

Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ vara fix, öppen och begränsad, och antag att rörelsen hos en viskös fluid $\mathbf{L}$ kan beskrivas av följande system av ekvationer:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \langle u, \nabla\rangle u - \nu\nabla^2 u = f(x,t) - \nabla p, \tag{2a}$$

$$\nabla \cdot u = 0, \tag{2b}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2c}$$

[22] Med laminärt flöde menas att all rörelse sker i strömningsriktningen, till skillnad från turbulenta flöden. Turbulenta flöden karaktäriseras av höga hastigheter, stora friktionskrafter och låg viskositet. Detta inneboende kaos i turbulenta flöden gör dem svåra att undersöka.

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{2d}$$

där u, x, t, ν, p, f, ∇ betecknar detsamma som de gör i (1) och u_0 är begynnelsehastigheten. Detta system av ekvationer kallar vi för Navier-Stokes ekvationer. Vår undersökning sträcker sig endast så långt att vi skall visa att lösningar u till (2) existerar, givet kraften f och trycket p.[23] Eftersom Ω är begränsad behöver vi främst se till att våra lösningar inte har några singulariteter inom Ω samt att de inte exploderar för stora t. Vi vill således att våra lösningar skall tillhöra sådana rum som ställer krav på lösningarnas storlek och kontinuitet. Ju högre (starkare) krav desto bättre (starkare) lösningar. I undersökningar av Navier-Stokes ekvationer använder man sig i allmänhet av delrum till L^p-rum, Sobolevrum och rummen av kontinuerligt differentierbara funktioner. Vi skall i synnerhet uppmärksamma följande klass av funktioner

$$\mathcal{B} = \{u \in C^\infty(\Omega) : \nabla \cdot u = 0\}, \tag{3}$$

där C^∞ är mängden av alla glatta funktioner. Element i $\mathcal{B}$ är oändligt kontinuerligt differentierbara och tar värden i Ω. Detta garanterar att lösningarna inte har några singulariteter, ty kontinuerliga funktioner har inga sådana. Hastighetsfältet och dess derivator måste vara kontinuerliga av fysikaliska anledningar. Vidare så uppfyller element i $\mathcal{B}$ ekvation (2b) per definition. Med denna klass av funktioner i åtanke definierar vi nu de inre produktrummen **H** och **V**:

- **H** är det *slutna höljet*[24] av $\mathcal{B}$ i L^2-normen $|u| = (u, u)^{1/2}$ med tillhörande skalärprodukt

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega u_i v_i dx,$$

- **V** är det slutna höljet av $\mathcal{B}$ i $W^{1,2}$-normen $|u| + \|u\|$, där $\|u\| = ((u, u))^{1/2}$ och

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^{3} (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}).$$

På grund av att vi befinner oss i det Euklidiska rummet, så förefaller sig L^2-normen här som naturlig, ty L^2-normen är en generalisering av den Euklidiska normen, medan vi ju önskar oss av fluiden att dess samlade momentära rörelse skall vara ändlig. Vidare frambringar Sobolevrum en naturlig norm $W^{k,p}$, vilken tillåter oss att försäkra oss om att våra derivator är begränsade. Det viktiga läsaren bör ta med sig från ovanstående definitioner av **H** och **V** är definitionen av deras skalärprodukter. Utan vidare teknikaliteter konstaterar vi här att **H** och **V** är reella Hilbertrum.

3.3 De relevanta Hilbertrummen

I vår studie är Hilbertrummen centrala. Således följer här en genomgång av relevanta Hilbertrum, till stort baserat på [CC95]. Denna innehåller mycket terminologi och olika teknikaliteter. Vi ber läsaren ha överseende med detta. Låt först $\{\lambda_k\}$ vara en positiv växande talföljd med $\lambda_k \nearrow \infty$.[25] Låt vidare $\{e_k\} \in \mathbf{H}$ vara en uppräknelig ortonormal bas. En sådan bas existerar ty **H** är ett *separabelt* Hilbertrum.[26] Vi konstaterar att detta tillåter varje element $u \in \mathbf{H}$ att skrivas på formen $u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k$, där u_k är den k:te komponenten i u med avseende på basen $\{e_k\}$.

För $r \geq 0$ definierar vi en samling av Hilbertrum enligt:

$$\mathbf{H}^r = \{u \in \mathbf{H} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^r (u, e_k)^2 < \infty\}. \tag{4}$$

[23]En annan fundamental egenskap som man önskar sig av lösningarna är unicitet.

[24]Det slutna höljet av en mängd A är unionen av A och alla A:s randpunkter. Ur en konvergenssynpunkt är det klokt att ha **H** och **V** slutna, ty de innehåller då alla sina hopningspunkter.

[25]I själva verket så är λ_k egenvärden till en viss operator A. Vi har valt att undgå nämnandet av operatorn A i mån om att bevara en viss grad av simplicitet. Således får man ta följden $\{\lambda_k\}$ såsom den här presenteras.

[26]Att **H** och **V** är seperabla konstateras i [CC95]. I många fysiska tillämpningar antas Hilbertrummen per definition vara seperabla. Vi utnyttjar denna egenskap endast i syfte att kunna använda den uppräkneliga ortonormala basen. Denna studie skall således inte gå in djupare på konceptet av seperabilitet.

Med några utelämnade teknikaliteter så konstaterar vi att rummet $\mathbf{H}^0$ är detsamma som $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}^1$ detsamma som $\mathbf{V}$. Läsaren kan själv bekräfta att följden $\{\lambda_k\}$ orsakar att fler och fler $u \in \mathbf{H}$ exkluderas för större r. Detta orsakar en mängdinklusion

$$\mathbf{H}^1 = \mathbf{V} \subset \mathbf{H} = \mathbf{H}^0.$$

Detta är ganska behändigt, eftersom det tillåter element i $\mathbf{V}$ att använda $\mathbf{H}$'s skalärprodukt. Vi kommer vidare att med notationen $\mathbf{H}^{-r}$ beteckna dualrummet till $\mathbf{H}^r$. Speciellt betecknar vi $\mathbf{H}^{-1}$ med notationen $\mathbf{V}'$. Läsaren bör dock observera att (4) endast är definierad för $r \geq 0$ och att $\mathbf{H}^{-r}$ således endast är en beteckning.
Underrummet till $\mathbf{H}$ som spänns upp av vektorerena $\{e_1, \dots, e_m\}$ kommer att betecknas med $\mathbf{H}_m$, och vi skriver $\mathbf{H}_m = \mathrm{Pr}_m\mathbf{H}$.[27] Givet den fixa basen $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ låter vi $\{{}^*e_k\}_{k\in{}^*\mathbb{N}}$ beteckna dess icke-standardutvidgning, och vi sätter $\{E_k\}_{k\in{}^*\mathbb{N}} = \{{}^*e_k\}_{k\in{}^*\mathbb{N}}$. Med några utelämnade teknikaliteter låter vi denna bas spänna upp icke-standardutvidgningen av $\mathbf{H}$. Låt således ${}^*\mathbf{H}$ med basen $\{E_k\}$ vara icke-standardutvidgningen av $\mathbf{H}$. Låt slutligen $\mathbf{H}_N$ vara det delrum av ${}^*\mathbf{H}$ som spänns upp av vektorerna $\{E_1, \dots, E_N\}$, det vill säga $\mathbf{H}_N = \mathrm{Pr}_N{}^*\mathbf{H}$, för oändligt $N \in {}^*\mathbb{N}$. Detta rum kommer finna sin användning när väl vi övergår till den icke-standardanalytiska delen av existensbeviset. I vidare förberedelse för detta, låt $\mathcal{U}$ och $\mathcal{V}$ vara element i $\mathbf{H}_N$ och $\mathcal{U}_k = (\mathcal{U}, E_k)$ för $k \in {}^*\mathbb{N}$, där

$$(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \textstyle\sum_{k=1}^N \mathcal{U}_k\mathcal{V}_k, \qquad |\mathcal{U}|^2 = \sum_{k=1}^N \mathcal{U}_k^2,$$

$$((\mathcal{U}, \mathcal{V})) = \textstyle\sum_{k=1}^N \lambda_k\mathcal{U}_k\mathcal{V}_k, \quad \|\mathcal{U}\|^2 = \sum_{k=1}^N \lambda_k\mathcal{U}_k^2,$$

där $(\cdot, \cdot)$, $|\cdot|$, $((\cdot, \cdot))$ och $\|\cdot\|$ är utvidgningarna av standardoperationerna till ${}^*\mathbf{H}$, och $\{\lambda_k\}_{k\in{}^*\mathbb{N}}$ är utvidgningen av $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Tack vare basen $\{E_k\}$ kan vi även här skriva ett element $\mathcal{U} \in \mathbf{H}_N$ på formen $\mathcal{U} = \sum_{k=1}^N \mathcal{U}_k E_k$.

Vi kan här konstatera att de lösningar vi skall finna till Navier-Stokes ekvationer benämns som *svaga*. Varför kommer senare att framkomma. Huvudpoängen i beviset är att vi visar att en funktion $\mathcal{U}$ är en icke-standardlösning till huvudproblemet, och sedan visar vi att standarddelen av $\mathcal{U}$ löser Navier-Stokes ekvationer i stort. Den tidigarenämnda definitionen av standarddelen (Definition 2.47) avser dock endast element i ${}^*\mathbb{R}$, och inte element i ${}^*\mathbf{H}$, varför vi här kommer att behöva utöka den till godtyckliga topologiska rum. Om topologi säger vi så mycket att en topologi på $\mathbf{H}$ är en mängd av öppna mängder $\{U\} \in \mathbf{H}$ som uppfyller vissa egenskaper, och $(\mathbf{H}, \{U\})$ säges då vara ett topologiskt rum. Vidare är den *svaga topologin* på $\mathbf{H}$ är det minsta möjliga urval av $\{U\}$ sådan att alla $\mathbf{H}$'s funktionaler fortfarande är kontinuerliga. Med detta klarlagt ger vi här först en mer behändig, dock ekvivalent definition av monader, jämfört med Definition 2.48, och sedan en generalisering av den till godtyckliga topologiska rum.

Definition 3.6. Låt $U \in \mathbb{R}$ vara öppen. Monaden av $r \in \mathbb{R}$ är följande delmängd av ${}^*\mathbb{R}$:

$$\mathrm{monad}(r) = \bigcap_{r\in U} {}^*U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} {}^*(r - \frac{1}{n},\ r + \frac{1}{n})$$

Snittet i det högra ledet kvarlämnar endast infinitesimala tal samt r.

Definition 3.7. För $a \in H$ är monaden av a

$$\mathrm{monad}(a) = \bigcap_{a\in U\in\{U\}} {}^*U,$$

för ett topologiskt rum $(H, \{U\})$.

Vad det betyder för ett element i ${}^*\mathbf{H}$ att vara närastandard är att det ligger i monaden till ett element i $\mathbf{H}$, med betoning på att monaden har bildats ur $\mathbf{H}$'s topologi. Nedan följer terminologi gällande konceptet *närastandard med avseende på en topologi* och det kan hjälpa läsaren att tänka på det engelska ordet ”weak” närän bokstaven $\mathbf{w}$ förekommer.

[27] Närän uttrycket Pr_m används kommer det att avse den ortogonala projektionen på dimension m.

a) Mängden av de element i $\mathbf{H}_N$ som är närastandard med avseende på den svaga topologin på $\mathbf{H}^r$ kommer betecknas med $\mathrm{ns}_{\mathbf{w}-\mathbf{H}^r}(\mathbf{H}_N)$.

b) Med $u = \mathrm{st}_{w-\mathbf{H}^r}(\mathcal{U})$ eller att $u \approx_{\mathbf{w}} \mathcal{U}$ i $\mathbf{H}^r$ menas att $u \in \mathbf{H}^r$ är standarddelen av $\mathcal{U} \in \mathrm{ns}_{\mathbf{w}-\mathbf{H}^r}(\mathbf{H}_N)$.

I stora drag är det viktigaste läsaren kan ta med sig från detta sammanhang att element inte behöver ligga i ${}^*\mathbb{R}$ för att vara närastandard, utan kan ligga i godtyckliga *-mängder. Nedan följer relevanta propositioner för element i $\mathbf{H}_N$

Proposition 3.8. *För $\mathcal{U} \in \mathbf{H}_N$ och $u \in \mathbf{H}^r$ (för $r \in \mathbb{R}$) gäller följande:*

a) $\mathcal{U} \approx_w u$ i $\mathbf{H}^r$ om och endast om $(\mathcal{U}, {}^*v) \approx (u, v)$ för alla $v \in \mathbf{H}^{-r}$ (och då är $u_k = {}^\circ\mathcal{U}_k$ för alla ändliga k),

b) Om $|\mathcal{U}|_r < \infty$, så gäller att $\mathcal{U}$ är svagt närastandard i $\mathbf{H}^r$.

Bevis. a) Följer ur karakteriseringan av monader i den svaga topologin. Påståendet inom parantes fås genom att sätta $v = e_k$.

b) För ändliga k är $\mathcal{U}_k$ ändlig och därmed har $\mathcal{U}_k$ en standarddel. Vi definierar $u_k = {}^\circ\mathcal{U}_k$. Med antagendet att $|\mathcal{U}|_r < \infty$ får vi för ändliga m att

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k^r u_k^2 = {}^\circ\sum_{k=1}^{m} \lambda_k^r \mathcal{U}_k^2 \leq |\mathcal{U}|_r^2 < \infty.$$

För varje $v \in \mathbf{H}^{-r}$ har vi att

$$(\mathcal{U}, {}^*v) = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{U}_k {}^*v \approx \sum_{k=1}^{m} u_k v_k + \sum_{k>m} \mathcal{U}_k {}^*v \tag{5}$$

för alla ändliga m. Proposition 2.57 ger att detta även gäller för något oändligt tal M. Om vi utvecklar termerna i högerledet av (5) med $m = M$ fås

$$\sum_{k=1}^{M} {}^*u_k {}^*v_k \approx (u, v)$$

För oändligt M kan vi göra uppskattningen $|{}^*v - Pr_M {}^*v|_{-r}^2 \approx 0$. Här utelämnas en rigorös beskrivning om varför detta gäller. Följaktligen kan vi för den andra termen i ekvation (5) göra uppskattningen

$$(\sum_{k>M} \mathcal{U}_k {}^*v_k)^2 \leq |\mathcal{U}|_r^2 |{}^*v - Pr_M {}^*v|_{-r}^2 \approx 0,$$

eftersom $|\mathcal{U}|_r < \infty$ enligt antagandet. Detta ger alltså att $(\mathcal{U}, {}^*v) \approx (u, v)$. Ur (a) fås då att $\mathcal{U} \approx_w u$ i $\mathbf{H}^r$.

□

Följande sats ger oss slutlig information gällande $\mathcal{U}$.

Proposition 3.9. *Låt $\mathcal{U} \in \mathbf{H}_N$. För varje $\mathcal{U}$ gäller att $|{}^\circ\mathcal{U}| \leq {}^\circ|\mathcal{U}|$.*

Vi hänvisar till [CC95] för beviset.

3.4 Omskrivning av ekvationerna

Vi skall nu skriva om (2a) på en mer matematiskt hanterlig form. Huvudresultatet i denna del är att vår partikulära omskrivning nullifierar trycket p och vi definierar en trilineär form b som besitter en rad egenskaper.

Tag $v \in \mathbf{V}$ och skalärmultiplicera den med (2a), så att

$$(\frac{\partial u}{\partial t}, v) + (\langle u, \nabla \rangle u, v) - \nu(\nabla^2 u, v) = (f, v) - (\nabla p, v). \tag{6}$$

Det är mängdinklusionen $\mathbf{V} \subset \mathbf{H}$ som möjliggör för $v \in \mathbf{V}$ att kunna skalärproduceras med element i $\mathbf{H}$, med avseende på $\mathbf{H}$'s skalärprodukt. Enligt definitionerna som följer (1), genom partialintegration samt utnyttjandet av att $v|_{\partial\Omega} = 0$, finner vi att

$$\begin{aligned}
\nu(\nabla^2 u, v) := \nu \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial {u_j}^2}{\partial {x_i}^2} v_j \, dx &= -\nu \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx \\
&= -\nu \sum_{i=1}^{3} (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}) \\
&= -\nu((u, v)),
\end{aligned}$$

och att

$$\begin{aligned}
(\nabla p, v) = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i \, dx &= -\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \, dx \\
&= -(p, \operatorname{div} v) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ty div $v = 0$. Alltså är ∇p är vinkelrät mot rummet $\mathbf{V}$. Följaktligen behöver vi hädanefter inte ta hänsyn till trycket p. Vidare har vi att

$$(\langle u, \nabla \rangle u, v) := \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_j \, dx, \tag{7}$$

för vilken vi definierar följande trilineära form:

$$b(u, v, z) := \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} z_j \, dx, \tag{8}$$

vilken är giltig närän integralerna är väldefinierade, så att (7) istället kan skrivas som

$$(\langle u, \nabla \rangle u, v) = b(u, u, v).$$

Denna trilineära form har en mängd egenskaper, bland annat i form av uppfyllandet av en rad olikheter. Här nämns dock endast de få egenskaper som vi senare har användning för. Vi får för b genom partialintegrering samt utnyttjandet av att $v|_{\partial\Omega} = 0$, för $u, v, z \in \mathcal{B}$ att

$$\begin{aligned}
b(u, v, z) : &= \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} z_j \, dx \\
&= -\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u_i v_j \frac{\partial z_j}{\partial x_i} \, dx \\
&= -b(u, z, v),
\end{aligned}$$

alltså att

$$b(u, v, z) = -b(u, z, v)$$

vilket bland annat medför att

$$b(u,u,u) = 0. \tag{9}$$

Vi har vidare följande två propositioner för den trilineära formen b. Den första finner sin användning när väl icke-standarddelen av existensbeviset presenteras. Den andra påvisar att b är begränsad i ett specifikt fall.

Proposition 3.10. *För $u, v, z \in \mathbf{H}$ och för ändliga $\|\mathcal{U}\|$ och $\|\mathcal{V}\|$, med $u = {}^{\circ}\mathcal{U}$ och $v = {}^{\circ}\mathcal{V}$ gäller det att*

$${}^{*}b(\mathcal{U}, \mathcal{V}, {}^{*}z) \approx b(u,v,z).$$

Proposition 3.11. *Givet en sekvens av enhetsvektorer $\{e_k\} \in \mathbf{H}$ och $u, v \in \mathbf{H}$, så gäller*

$$b(u,v,e_k) \leq c|u|\|v\|\lambda_k.$$

För bevisen av 3.10 och 3.11 hänvisar vi till [CC95]. För vidare egenskaper av den trilineära formen b hänvisar vi till [Tem83]. Vi sammanställer nu allt och skriver om (2) på formen

$$(\dot{u}, v) = -\nu((u,v)) - b(u,u,v) + (f,v), \tag{10}$$

där $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$. Problemet har nu blivit att för alla $v \in \mathbf{V}$ finna u som löser (10). Formuleringen ovan kallas vanligtvis för *svag*.

3.5 Galerkinmetoden

Vi inleder detta avsnitt med att definiera vad vi menar med en lösning, och särskilt en svag lösning, till Navier-Stokes ekvationer. Det är sedan med denna definition vi skall stämma av våra funna lösningar.

Definition 3.12. Givet $u_0 \in \mathbf{H}$ och $f \in L^2(0,T;\mathbf{V}')$ för alla $T < \infty$, så är funktionen $u : [0,\infty) \to \mathbf{H}$ en *svag lösning* till Navier-Stokes ekvationer om

(i) $u \in L^2(0,T;\mathbf{V}) \cap L^\infty(0,T;\mathbf{H})$ för alla $T < \infty$

(ii) för alla $v \in \mathbf{V}$, för alla $t \geq 0$

$$(u(t),v) - (u_0,v) = -\int_0^t [\nu((u(s),v)) + b(u(s),u(s),v) - (f(s),v)]ds, \tag{11}$$

där (11) fås genom att integrera (10) från 0 till t. [CC95]

Vi skall nu i enlighet med Galerkinmetoden konstruera en approximativ lösning till (10). Principen bakom Galerkinmetoden är enkel. Dess utförande dock inte likaså. Vi skisserar därför endast upp utförandet och beskriver endast Galerkinmetoden kortfattat, och hänvisar istället läsaren till Temams bok på området [Tem77]. För ett fixt $m \in \mathbb{N}$ definierar vi en approximativ lösning u till (10) enligt

$$u = \sum_{k=1}^{m} y_k e_k \tag{12}$$

och

$$(\dot{u}, e_k) = -\nu((u,e_k)) - b(u_k,u_k,e_k) + (f,e_k), \tag{13}$$

$$u_k(0) = u_{0k},$$

där $u_{0k} = (u_0, e_k)$, för $k = 1,\dots,m$; $t \in [0,T]$, betraktat i det m-dimensionella underrummet till $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}_m$. Detta utförande kan i princip förklaras med att vi betraktar samma problem men i ett ändlig-dimensionellt vektorrum. Efter insättning av (12) i (13), och med några utelämnade detaljer så får vi den ändlig-dimensionella approximationen av Navier-Stokes ekvationer

$$\dot{y}_k(t) = -\nu\lambda_k y_k(t) - b(y(t),y(t),e_k) + (f(t),e_k), \tag{14}$$

för $k = 1, \ldots, m$; $t \in [0, T]$ och begynnelsevillkoret $y_k(0) = (u_0, e_k)$, betraktat i rummet $\mathbf{H}_m = \mathrm{Pr}_m \mathbf{H}$. Vi kallar (14) för Galerkinapproximationen. [Tem77] [CC95]

Approximationen ovan kan intuitivt förstås som att vi väljer ut endast ett ändligt antal av områdets punkter x, så kallade kontrollpunkter, och för varje sådan punkt ger den ett överensstämmande värde på k. På så sätt är x fixt för varje k. Därför är (14) för varje k en ordinär, och inte en partiell differentialekvation.
Vi skall börja med att visa att lösningar existerar till (14) och även visa att de är unika, för $t \geq 0$. Att lösningar till (14) existerar i ett intervall $[0, \varepsilon]$, för $\varepsilon > 0$, är en omedelbar konsekvens av följande sats:

Sats 3.13 (Peanos existenssats). *Antag att U är öppen i $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ och att $h : U \to \mathbb{R}^d$ är kontinuerlig. Då finns det en kontinuerligt differentierbar funktion $y : [t_0, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^d$ sådan att*

$$\dot{y}(t) = h(t, y(t)), \qquad y(t_0) = y_0,$$

för något $\varepsilon > 0$ och $(y_0, t_0) \in U$.

Vi hänvisar till [Pou12] för ett fullständigt bevis. Att (14) är kontinuerlig följer från att y är kontinuerlig samt att skalärprodukten är en kontinuerlig operation. Således existerar det lösningar till (14) i ett intervall $[0,\ \varepsilon]$ för något $\varepsilon > 0$. Att vidare dessa lösningar är unika är en konsekvens av följande sats:

Sats 3.14 (Picard-Lindelöfs sats). *Betrakta begynnelsevärdesproblemet*

$$\dot{y}(t) = h(t, y(t)), \qquad y(t_0) = y_0.$$

Antag att h är likformigt Lipschitzkontinuerlig i t. Då existerar det en unik lösning $y(t)$ till begynnelsevärdesproblemet på intervallet $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, för något $\varepsilon > 0$.

Ett detaljerat bevis går att finna på Wikipedia, [Wik16].[28] En funktion h är Lipschitzkontinuerlig om det finns en begränsning för hur snabbt den får förändra sig. Med en utelämnad förklaring konstaterar vi här att högerledet i (14) är Lipschitzkontinuerligt, och således är lösningarna till (14) unika i dess intervall av existens. Om vi nu kan visa att vi kan utöka denna ε-omgivning till godtyckligt stora t så har vi en fullgod lösning till (14). Principen för detta är att om vi kunde visa att lösningar existerar i $[0,\ \varepsilon]$, för något $\varepsilon > 0$, så kan vi vidare visa att lösningar existerar i $[0,\ \varepsilon + \delta]$ för något $\delta > 0$. Den fulländade metoden ligger väl utanför vår rapports vidd, så vi konstaterar här endast dess resultat: Vi behöver visa att lösningen är begränsad för alla t. I detta avseende har Capiński och Cutland [CC95] lagt fram vad de kallar *energiolikheten*. I beviset för energiolikheten behöver vi följande resultat:

Proposition 3.15 (Peter Pauls olikhet). *För reella tal a, b, ε så gäller för alla $\varepsilon > 0$:*

$$2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2 \tag{15}$$

Bevis. Låt a, b och ε vara reella tal.[29] Vi har att $\frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2 - 2ab = (\frac{a}{\sqrt{\varepsilon}} - \sqrt{\varepsilon} b)^2 \geq 0$ Detta ger (15). □

Proposition 3.16 (Energiolikheten). *Om en lösning existerar till* (14) *så uppfyller denna den så kallade energiolikheten:*

$$|y(t)|^2 + \nu \int_0^t \|y(s)\|^2 ds \leq |u_0|^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^t |\mathrm{Pr}_m f(s)|^2 ds. \tag{16}$$

[28] Det skall konstateras att Picard-Lindelöfs sats är starkare än Peanos sats, i den mening att den förutsätter mer och konstaterar mer.
[29] Detta bevis förklaras av Dr Chris Tisdell.

Bevis. För varje k multiplicera bägge led i (14) med $y_k(t)$ och summera över $k = 1, 2, ..., m$. Vi får

$$\sum_{k=1}^{m} \dot{y}_k(t) y_k(t) = -\nu \sum_{k=1}^{m} \lambda_k y_k^2(t) + \sum_{k=1}^{m} f_k(t) y_k(t)$$

eftersom $b(y, y, y) = 0$ enligt (9). Detta ger uttryckt i norm och skalärprodukt i $\mathbf{H}$ efter multiplikation med 2:

$$\frac{d}{dt}|y(t)|^2 + 2\nu\|y(t)\|^2 = 2(f(t), y(t))$$

För högerledet gör vi uppskattningen

$$2(f(s), y(s)) = 2(\mathrm{Pr}_m f(s), y(s)) \leq 2|\mathrm{Pr}_m f(s)| \cdot \|y(s)\|$$

Peter Pauls olikhet ger med $a = |\mathrm{Pr}_m f(s)|$, $b = \|y(s)\|$ och $\varepsilon = \nu$ att

$$2|\mathrm{Pr}_m f(s)| \cdot \|y(s)\| \leq \nu\|y(s)\|^2 + \frac{1}{\nu}|\mathrm{Pr}_m f(s)|^2$$

Vi får

$$\frac{d}{dt}|y(t)|^2 + 2\nu\|y(t)\|^2 \leq \nu\|y(s)\|^2 + \frac{1}{\nu}|\mathrm{Pr}_m f(s)|^2.$$

Om bägge led subtraheras med $\nu\|y(s)\|$ och integreras fås (16). □

3.6 Existens av lösningar till Navier-Stokes ekvationer

Vi kan nu konstatera att all nödvändig teori har presenterats och att vi är redo för att bevisa att det existerar lösningar till Navier-Stokes ekvationer i det tre-dimensionella rummet. Vi följer i Capinskis och Cutlands spår, och presenterar detta i form av en sats som vi skall bevisa:

Sats 3.17. *För något $u_0 \in \mathbf{H}$ och $f : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ med $f \in L^2(0, T; \mathbf{V}')$ för alla $T < \infty$, så existerar det en svag lösning till Navier Stokes ekvationer.*

Bevis. Vi erinrar oss att $\mathbf{H}_N$ för oändligt N är det N-dimensionella delrummet till ${}^*\mathbf{H}$, och att den har en ortonormal bas $\{E_k\}_{k=1}^{N}$. Låt oss betrakta funktionen $\mathcal{U} \in \mathbf{H}_N$, vilken uttryckt i rummets bas kan skrivas som

$$\mathcal{U}(\tau) = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{U}_k(\tau) E_k.$$

Betrakta nu systemet av ekvationer

$$\dot{\mathcal{U}}_k(\tau) = -\nu\lambda_k \mathcal{U}_k(\tau) - {}^*b(\mathcal{U}(\tau), \mathcal{U}(\tau), E_k) + F_k(\tau), \tag{17a}$$

$$\mathcal{U}_0 = \sum_{k=1}^{N} ({}^*u_0, E_k) E_k. \tag{17b}$$

där $k = 1, \ldots, N$, $\tau \in {}^*(0, \infty)$ och $F_k(\tau) = ({}^*f(\tau), E_k)$. Vi har konstruerat (17a) så att den är den motsvarande icke-standardgalerkinapproximationen till (14), i detta fall i N dimensioner. Detta möjliggör för oss att applicera överföringsprincipen (se Sats 2.28). Allt det som är sant för lösningar till standardgalerkinapproximationen (14) är således även sant för lösningar till (17a). Vi har alltså att lösningar $\mathcal{U}$ till (17a) existerar lokalt och att de är unika där. För $F(\tau) = \sum_{k=1}^{N} F_k(\tau)$ så har vi även enligt energiolikheten (se Proposition 3.16) att lösningar $\mathcal{U}$ uppfyller den motsvarande icke-standardenergiolikheten

$$|\mathcal{U}(\tau)|^2 + \nu \int_0^\tau \|\mathcal{U}(\sigma)\|^2 d\sigma \leq |\mathcal{U}_0|^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^\tau |F(\sigma)|^2_{\mathbf{V}'} d\sigma. \tag{18}$$

Baserat på olikhetens utseende så kan vi konstatera att $\mathcal{U}$ är begränsad om högerledet är ändligt. Vi har att

$$|\mathcal{U}_0| = |\mathrm{Pr}_N {}^*u_0| \leq |{}^*u_0| = |u_0| < \infty$$

enligt förutsättningarna att u_0 är ändligt, och att

$$|F(\sigma)| = |\mathrm{Pr}_N {}^*f(\sigma)| \leq |\, f(\sigma)| < \infty.$$

Eftersom integralen över ett ändligt intervall med ändlig integrand måste vara ändlig så följer det att $\frac{1}{\nu}\int_0^\tau |F(\sigma)|^2_{\mathbf{V}'} d\sigma < \infty$. Högerledet i (18) är således ändligt. Eftersom båda termerna i vänsterledet är icke-negativa så följer det att varje term i vänsterledet har högerledet som övre begränsning och är således ändliga: $|\mathcal{U}(\tau)| < \infty$. Proposition 3.8 ger följaktligen att $\mathcal{U}(\tau)$ är svagt närastandard i $\mathbf{H}$. Med detta menas att $\mathcal{U}$ har en svag standarddel som ligger i $\mathbf{H}$. Med den terminologi som vi där införde så har vi att

$$\mathrm{st}_{w-\mathbf{H}}\,\mathcal{U}(\tau) = {}^\circ\mathcal{U}(\tau) \in \mathbf{H}.$$

Vårt mål är att visa att denna standarddel är en svag lösning till Navier-Stokes ekvationer. Vi skall nu visa att $\mathcal{U}_k$ är mikrokontinuerlig. Proposition A.16 ger att om $\mathcal{U}_k$ kan skrivas som en integral med en S-integrerbar[30] integrand så är $\mathcal{U}_k$ mikrokontinuerlig. Vi har därmed att visa att högerledet i (17a) är S-integrerbart. Enligt definitionen av S-integrerbarhet (se Definition A.10) så är det endast termen ${}^*b(\mathcal{U}(\tau), \mathcal{U}(\tau), E_k)$ som kräver lite arbete för att se om den uppfyller definitionen.[31] I detta syfte har vi nytta av en av de tidigare nämnda egenskaperna hos b, se Proposition 3.11. För ändligt k och $\tau \in {}^*[0,T]$ för T ändligt så får vi att

$$\int_0^T {}^*b(\mathcal{U}(\tau),\ \mathcal{U}(\tau), E_k)^2 d\tau \leq c\int_0^T |\mathcal{U}(\tau)|^2 \|\mathcal{U}(\tau)\|^2 \lambda_k^2 d\tau \leq c \sup_{\tau\in {}^*[0,T]} |\mathcal{U}(\tau)|^2 \cdot \int_0^T \|\mathcal{U}(\tau)\|^2 d\tau.$$

Det högraste ledet är ändligt på grund av att högerledet i (18) är ändligt. Sats A.14 ger nu att ${}^*b(\mathcal{U}(\tau), \mathcal{U}(\tau), E_k)$ är S-integrerbar. Då ger Proposition A.16 att $\mathcal{U}_k$ är mikrokontinuerlig. Det följer att $\mathcal{U}$ är mikrokontinuerlig. Med några utelämnade detaljer så konstaterar vi att $\mathcal{U}$'s mikrokontinuitet medför ${}^\circ\mathcal{U}$'s mikrokontinuitet, och i synnerhet att mikrokontinuiteten gäller med avseende på $\mathbf{H}$'s svaga topologi. Vi definierar nu en standardfunktion $u : [0,\infty) \to \mathbf{H}$ som

$$u({}^\circ\tau) = {}^\circ\mathcal{U}(\tau),$$

vilken är kontinuerlig med avseende på $\mathbf{H}$'s svaga topologi. Vi påstår att u är en svag lösning till Navier-Stokes ekvationer.

Läsaren kan nu erinra sig Definition 3.12, vilkens kriterier vi vill att u skall uppfylla. Vi börjar med kriterium (i), det att u skall ligga i både $L^\infty(0,T;\mathbf{H})$ och $L^2(0,T;\mathbf{V})$. Proposition 3.9 ger för $r = 0$ att $|u({}^\circ\tau)| \leq {}^\circ|\mathcal{U}(\tau)|$. Eftersom ${}^\circ|\mathcal{U}(\tau)|$ är begränsad (enligt energiolikheten) så följer det att $|u({}^\circ\tau)|$ är begränsad. Då gäller att

$$\sup_{\tau\in {}^*(0,T)} |u({}^\circ\tau)| < \infty$$

och därmed ligger u i rummet $L^\infty(0,T;\mathbf{H})$ för alla $T < \infty$. Vi har vidare att

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|u(t)\|^2 dt &= \int_0^T \|u({}^\circ\tau)\|^2 d_L\tau && \text{Enligt Proposition A.11}\\
&= \int_0^T \|{}^\circ\mathcal{U}(\tau)\|^2 d_L\tau && \text{Enligt definitionen av } u\\
&\leq \int_0^T {}^\circ\|\mathcal{U}(\tau)\|^2 d_L\tau && \text{Enligt Proposition 3.9}\\
&\leq {}^\circ\!\int_0^T \|\mathcal{U}(\tau)\|^2 d\tau && \text{Enligt Proposition A.12}\\
&< \infty. && \text{Enligt energiolikheten}
\end{aligned}$$

[30]Se Definition A.10.

[31]För de andra termernas skull: S-integrerbarheten av F's S-integrerbarhet följer från f's förutsättningar samt Sats A.14. $\mathcal{U}$' S-integrerbarhet följer från densamma sats samt (18).

Därmed ligger u även i rummet $L^2(0, T; \mathbf{V})$. Således är kriterium (i) i Definition 3.12 uppfyllt. Vi har nu kvar att visa att u uppfyller kriterium (ii), vilket innebär att u för alla $v \in \mathbf{V}$ och $t \geq 0$ skall uppfylla ekvation (11) (vi upprepar den här för klargörelse),

$$(u(t), v) - (u_0, v) = -\int_0^t [\nu((u(s), v)) + b(u(s), u(s), v) - (f(s), v)]ds. \tag{19}$$

Givet basen $\{e_k\} \in \mathbf{V}$, för $k = 1, 2, \ldots$, konstaterar vi att eftersom v är en lineärkombination av e_k räcker det med att visa att (19) uppfylls i fallet $v = e_k$. Enligt definitionen av u har vi för varje $t \geq 0$ att $(u(t), e_k) = {}^{\circ}\mathcal{U}_k(t)$. Vi integrerar nu ekvation (17a) från 0 till t och vi får med lite omflyttning att

$$\begin{aligned}(u, e_k) &= {}^{\circ}\mathcal{U}_k(t) \\ &= (u_0, e_k) - {}^{\circ}\!\!\int_0^t [\nu\lambda_k\mathcal{U}_k(\tau) + {}^*b(\mathcal{U}(\tau),\ \mathcal{U}(\tau), {}^*e_k) - ({}^*f(\tau), {}^*e_k)]d\tau.\end{aligned} \tag{20}$$

Vi vet att u löser ekvation (20). Om vi då kan visa att ekvation (20) är ekvivalent med ekvation (19) så är vi klara. Vi har för den tredje integrandtermen i (20) att

$${}^{\circ}\!\!\int_0^t ({}^*f(\tau), {}^*e_k)d\tau = \int_0^t (f(s), e_k)ds,$$

enligt Proposition A.12. Vi har för den första integrandtermen i (20) att

$${}^{\circ}\!\!\int_0^t \lambda_k\mathcal{U}_k(\tau)d\tau = \int_0^t \lambda_k u_k({}^{\circ}\tau)d_L\tau = \int_0^t \lambda_k u_k(s)ds = \int_0^t ((u(s), e_k))ds,$$

där den första likheten är giltig enligt Proposition A.12, och på grund av definitionen av u, den andra likheten enligt Proposition A.11 och den sista likheten enligt definitionen av $\mathbf{V}$'s skalärprodukt.

Slutligen för den trilineära formen b så harvi att eftersom $\|\mathcal{U}\| < \infty$ så ger Proposition 3.10 att

$${}^*b(\mathcal{U}(\tau),\ \mathcal{U}(\tau), {}^*e_k) \approx b(u({}^{\circ}\tau), u({}^{\circ}\tau), e_k),$$

och vi får då

$$\begin{aligned}{}^{\circ}\!\!\int_0^t {}^*b(\mathcal{U}(\tau),\ \mathcal{U}(\tau), {}^*e_k)d\tau &= \int_0^t {}^{\circ *}b(\mathcal{U}(\tau),\ \mathcal{U}(\tau), {}^*e_k)d_L\tau = \int_0^t b(u({}^{\circ}\tau), u({}^{\circ}\tau), e_k)d_L\tau \\ &= \int_0^t b(u(s)u(s), e_k)ds,\end{aligned}$$

enligt Sats A.15 och det faktum att b är S-integrerbar, samt Proposition A.11. Vi har visat att ekvationerna (19) och (20) är ekvivalenta, och således är även kriterium (ii) i Definition 3.12 uppfyllt. Vi kan därmed konstatera att det för alla $T < \infty$ existerar svaga lösningar till Navier-Stokes ekvationer. □

3.7 Avslutande ord

Existensbeviset, vilket var det stora målet med detta ansnitt, är nu klart. Innan rapporten når sitt slut skall vi tillägga något om lösningarnas unicitet. Låt oss introducera läsaren för det så kallade Reynoldstalet, en dimensionslös storhet som beskriver om fluiden strömmar laminärt eller turbulent. Det fall av Navier-Stokes ekvationer som rapporten har tagit i beaktning faller under kategorin ”ickelineär och ickestationär”. Här kan tilläggas att det går att påvisa existensen av en globalt definierad unik lösning till Navier-Stokes ekvationer i det två-dimensionella fallet. Däremot har det i det tre-dimensionella fallet endast påvisats att en unik lösning existerar i ett specifikt tidsintervall $[0, t]$. Under särskilda omständigheter finns det dock en unik lösning för alla $t \geq 0$. Utan att bli alltför tekniska kan vi konstatera att dessa särskilda omständigheter kräver av kraften f att uppfylla särskilda villkor, samt för Reynoldstalet att vara tillräckligt litet vid begynnelsetiden. Problemet att finna en globalt definierad unik lösning till Navier-Stokes ekvationer i det tre-dimensionella fallet kvarstår. [Lad63]

A Några matematiska begrepp

Definition A.1 (Binär relation)**.** En binär relation R relaterar två mängder kallade R:s domän (definitionsmängd) D_R och R:s kodomän (målmängd) C_R till varandra. Varje element i R:s domän relateras till ett eller flera i R:s kodomän. Om $x \in D_R$ och $y \in C_R$ är relaterade genom R skriver vi

$$xRy.$$

Mängdteoretiskt kan en binär relation R beskrivas som mängden

$$\{(x, y) : xRy\},$$

dvs. mängden av alla relaterade par. Denna mängd kallas vanligtvis också för R, så att vi istället för xRy kan skriva $(x, y) \in R$.

Definition A.2 (n-ställig relation)**.** En n-ställig relation R relaterar n mängder $S_1, S_2, \ldots, S_n$ till varandra och beskrivs mängdteoretiskt som en mängd av n-tupler $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$.

Definition A.3 (Ekvivalensrelation)**.** Den binära relationen $\sim$ är en ekvivalensrelation över mängden S om de tre kraven reflexivitet, symmetri och transitivitet uppfylls. Dvs. om

$$x \sim x,$$

$$x \sim y \Rightarrow y \sim x,$$

och

$$(x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow x \sim z,$$

för alla $x, y, z \in S$.

Definition A.4 (Ekvivalensklasser)**.** Givet en ekvivalensrelation $\sim$ över en mängd S, kan S partitioneras i mängder av typen

$$[s] = \{x \in S : x \sim s\},$$

för element $s \in S$. Dessa mängder kallas $\sim$:s ekvivalensklasser.

Definition A.5 (Sanningsdefinitionen)**.**

- Negationen ($\neg$) av en utsaga p är sann omm p inte är sann.
- Disjunktionen ($\vee$) av två utsagor p och q är sann omm p är sann eller q är sann (detta inkluderar fallet då både p och q är sanna).
- Konjunktionen ($\wedge$) av två utsagor p och q är sann omm både p och q är sanna, alltså omm $\neg(\neg p \vee \neg q)$ är sann.
- Implikationen ($\Rightarrow$) mellan två utsagor p och q är sann omm p är falsk eller q är sann, alltså omm $(\neg p \vee q)$ är sann.
- Ekvivalensen ($\Leftrightarrow$) mellan två utsagor p och q är sann omm p är sann precis då q är sann, alltså så $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ är sann.
- Allkvantifikationen ($\forall$) av en utsaga är sann då utsagan är sann för alla möjliga värden på den variabel som är bunden av kvantifikatorn.
- Existenskvantifikationen ($\exists$) av en utsaga är sann då utsagan är sann för något möjligt värde på den variabel som är bunden av kvantifikatorn.

Notera att alla konnektiv kan skrivas om som kombinationer av endast $\neg$ och $\vee$, samt att $\exists x$ kan skrivas om som $\neg\forall x\neg$.

Definition A.6. Ett *vektorrum* V över en kropp $\mathbb{F}$ (exempelvis $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) är en mängd där vektoraddition $(+) : V^2 \to V$ som uppfyller de associativa, kommutativa och inversa axiomen samt axiomet om addition med noll och skalärmultiplikation $(\cdot)$: $\mathbb{F} \times V \to V$ är definierade och som uppfyller följande axiom för varje $x, y, z \in V$ och $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ [Mus14]

$$\begin{array}{rclr}
x + y \in V & \textit{och} & x \cdot y \in V & \text{Slutenhet} \\
x + (y + z) & = & (x + y) + z & \text{Associativitet} \\
x + y & = & y + x & \text{Kommutativitet} \\
0 + x & = & x & \text{Enhetselement} \\
x + (-x) & = & 0 & \text{Invers} \\
(\lambda\mu) \cdot x & = & \lambda \cdot (\mu \cdot x) & \text{Associativitet} \\
\lambda \cdot (x + y) & = & \lambda \cdot x + \lambda \cdot y & \text{Distributivitet} \\
(\lambda + \mu) \cdot x & = & \lambda \cdot x + \mu \cdot x & \text{Distributivitet} \\
1 \cdot x & = & x & \text{Enhetselement}
\end{array}.$$

Definition A.7. En mängd X är ett *metriskt rum* om det för $a, b, c \in X$ finns en funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ sådan att [Sea07]

$$\begin{array}{rcll}
d(a, b) & = & 0 \Leftrightarrow a = b & \\
d(a, b) & = & d(b, a) & \\
d(a, b) & \leq & d(a, c) + d(c, b) & \text{Triangelolikheten}
\end{array}.$$

Vi kallar då d för rummets *metrik*

Definition A.8. Ett *normerat* vektorrum X är ett vektorrum över en kropp $\mathbb{F}$ som har en funktion som kallas norm $\| \cdot \| : X \to \mathbb{F}$ och som för alla x, $y \in X$ och $\lambda \in \mathbb{F}$ uppfyller [Mus14]

$$\begin{array}{rcll}
\|x + y\| & \leq & \|x\| + \|y\| & \text{Triangelolikheten} \\
\|\lambda x\| & = & |\lambda| x & \\
\|x\| & = & 0 \Leftrightarrow x = 0 &
\end{array}.$$

Följande samling av definitioner och satser (A.9 - A.16) är nödvändiga för beviset av lösningar till Navier-Stokes ekvationer. Det skall konstateras att vissa av de begrepp som här förekommer, i synnerhet i fråga om mått, har sina definitioner och förklaringar utelämnade. Tag därför definitionerna och satserna här så som de presenteras, och försök att inte tänka på att varken mätbarhet eller integration är definierat. Låt nu Ω vara en mängd.

Definition A.9 (Mätbar funktion)**.** Givet ett mått M och reella tal α, β så säges en funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ vara M-mätbar om mängden $\{x : \alpha \leq f(x) < \beta\}$ är M-mätbar. [Rog15]

En tillämpning av transferprincipen ger den motsvarande utvidgna definitionen: Givet ett mått ${}^*M$ och α, $\beta \in {}^*\mathbb{R}$ så säges en funktion $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ vara ${}^*M$-mätbar om mängden $\{x : \alpha \leq F(x) < \beta\}$ är ${}^*M$-mätbar.

Definition A.10 (S-integrerbar)**.** Låt funktionen $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ vara $\mathcal{A}$-mätbar och intern, för en mängd Ω, och låt måttet M vara internt och ändligt. Vi säger att F är S-*integrerbar* om

(i) $\displaystyle\int_\Omega |F| \, dM$ är ändlig,

(ii) om $A \in \mathcal{A}$ och $M(A) \approx 0$, så $\displaystyle\int_A |F| \, dM \approx 0$.

Följande samling av propositioner återfinns samtliga i [CC95].

Proposition A.11. *Låt Λ_L vara det likformiga Loebmåttet på ${}^*[0, T]$. För alla Lebesgue-mätbara mängder $A \subset [0, T]$ så har vi att*

$$\lambda(A) = \Lambda_L(st^{-1}(A)).$$

Proposition A.12. *Om F är en begränsad intern mätbar funktion så gäller det att*

$$\int {}^\circ F\, dM_L = {}^\circ\!\int F\, dM.$$

Vidare, i det fall då integranden inte nödvändigtvis är begränsad så kan vi åtminstone konstatera följande:

Proposition A.13. *För någon intern mätbar funktion $F \geq 0$ så har vi att*

$$\int {}^\circ F\, dM_L \leq {}^\circ\!\int F\, dM,$$

där vardera sida tillåts vara oändlig.

Sats A.14. *Antag att $M(\Omega) < \infty$. Om $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ är intern, $\mathcal{A}$-mätbar och*

$$\int |F|^p\, dM < \infty$$

för något $p > 1$, $p \in \mathbb{R}$, så är F S*-integrerbar.*

Sats A.15. *Antag att $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ är en $\mathcal{A}$-mätbar funktion. Följande är då ekvivalenta:*

(i) F är S-integrerbar,

(ii) ${}^\circ F$ är Loebintegrerbar och

$${}^\circ\!\int F dM = \int {}^\circ F dM_L.$$

Bevisen för Proposition och Sats A.11-A.15 återfinns samtliga i [CC95].

Proposition A.16. *Antag att T är ändlig och att $F : {}^*[0, T] \to {}^*\mathbb{R}$ är* S*-integrerbar med avseende på Λ (icke-standard lebesguemåttet). Då är funktionen*

$$G(\tau) = \int_0^\tau F(\sigma)\, d\sigma$$

mikrokontinuerlig.

Bevis. Om $\tau_1 \approx \tau_2$ och $\tau_1 \leq \tau_2$ så har vi att $\Lambda[\tau_1, \tau_2] \approx 0$, och att

$$G(\tau_2) - G(\tau_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} F(\sigma) d\sigma \approx 0,$$

enligt definitionen av S-integrerbarhet. Det följer att G är mikrokontinuerlig. □

Referenser

[CC95] Marek Capiński och Nigel J. Cutland: *Nonstandard methods for stochastic fluid mechanics.* World Scientific, 1995.

[Gal11] G.P. Galdi: *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations.* Springer New York, 2011.

[Gol98] Robert Goldblatt: *Lectures on the hyperreals An introduction to nonstandard analysis.* Springer verlag, 1998.

[Koc61] Simon Kochen: *Ultraproducts in the Theory of Models.* Annals of Mathematics, Second Series, 74(2):221–261, 1961.

[Lad63] O.A. Ladyzhenskaya: *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow.* Science Publishers, Inc., 1963.

[Mar02] David Marker: *Model Theory: An Introduction.* Springer Verlag, New York, 2002.

[Mus14] Joseph Muscat: *Functional Analysis: An introduction to metric spaces, Hilbert Spaces and Banach Algebras.* Springer International publishing, 2014.

[Pou12] Rodrigo López Pouso: *Peano's Existence Theorem revisited*, 2012. `https://arxiv.org/pdf/1202.1152.pdf`, [Online; hämtad 14-05-2016].

[Rau10] Wolfgang Rautenberg: *A Concise Introduction to Mathematical Logic.* Springer Science+Business Media, 2010.

[Rob66] Abraham Robinson: *Non-Standard Analysis.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1966.

[Rob67] Abraham Robinson: *Non-standard theory of Dedekind rings.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, 70:444–452, 1967.

[Rog15] Maria Roginskaya: *Advanced Basics of Geometric Measure Theory.* Logic Press, 2015.

[RZ69] Abraham Robinson och Elias Zakon: *A set-theoretical characterization of enlargements.* Proc. Of Internat. Sympos. on Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability, sidor 109–122, 1969.

[Sea07] Mícheál Ó Searcóid: *Metric Spaces.* Springer-Verlag, 2007.

[Tem77] Roger Temam: *Navier-Stokes Equations.* North-Holland, 1977.

[Tem83] Roger Temam: *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 1983.

[Wik16] Wikipedia: *Picard–Lindelöf theorem*, 2016. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Picard%E2%80%93Lindel%C3%B6f_theorem&oldid=708713320`, [Online; hämtad 14-05-2016].