CHALMERS

GÖTEBORGS UNIVERSITET

Att förstå och bevisa Riemann-Rochs sats:

En väg genom analys och geometri

Understanding and proving the Riemann-Roch theorem:

A path through analysis and geometry

Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers

Alvin Larsson Bringholm
Lorenz Engsner
Elias Guedra
Ellen Wahrolin

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2025

Att förstå och bevisa Riemann-Rochs sats:

En väg genom analys och geometri

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk fysik vid Chalmers

Alvin Larsson Bringholm Lorenz Engsner Ellen Wahrolin

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik vid Chalmers

Elias Guedra

Handledare: Richard Lärkäng
Hossein Raufi

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2025

Förord

Vi vill inleda detta arbete med att framföra ett varmt tack till Richard Lärkäng och Hossein Raufi som under våren vigt mycket av sin tid till att handleda och vägleda oss genom detta arbete. Utan deras engagemang hade vägen till en färdigställd rapport varit betydligt krokigare.

Ett antal böcker förtjänar erkännande för den grund de utgjort för förståelsen av teorin vid arbetets författande. Större delen av kandidatarbetet baseras på *Algebraic Curves and Riemann Surfaces* av Rick Miranda [**Miranda**], framförallt vad gäller teorin om Riemannytor. Appendixet om topologi baserar sig huvudsakligen på *Topology* av James R. Munkres [**Munkres**], men även *Introduction to Topological Manifolds* av John M. Lee [**Lee**]. Erkännande vill även ges till *A Mathematical Gift* av Kenji Ueno, Koji Shiga och Shigeyuki Morita [**Ueno**], som fungerade bra som ingång till de centrala topologiska begreppen. Under respektive avsnitt preciseras närmare vilka delar ur respektive bok som avsnitt baserats på.

Detta arbete har framställts tillsammans av fyra medförfattare och en loggbok har förts över de enskilda individernas deltagande under arbetet. Då arbetet är av teoretisk karaktär har en stor del av arbetet varit att förstå den matematiska teorin som avhandlas. Detta har i huvudsak gjorts genom att alla studerat samma teori och hjälpts åt att förstå den genom att lösa uppgifter och regelbundet presentera dessa, inklusive teorin, för handledarna. Många bidrag till arbetet kan därför inte sägas härröra från en enskild författare, utan är snarare ett resultat av flera personers arbete med samma material. I de fall det i stor utsträckning går att hänföra ett avsnitt till en enskild författare, eller då en enskild författare haft ett särskilt ansvar att formulera den slutgiltiga versionen av ett visst avsnitt, sammanfattas detta nedan:

- Alvin Larsson Bringholm: huvudansvarig för slutversionen av inledningen samt avsnittet om Riemannsfären och den komplexa torusen, dvs. avsnitt 1 och 3, samt delavsnittet om genus, dvs. avsnitt 2.5. Har även haft en särskilt framträdande roll i bevisföringen.
- Lorenz Engsner: huvudansvarig för slutversionen av den populärvetenskapliga presentationen samt avsnittet om topologi, dvs. appendix A.2.
- Elias Guedra: huvudansvarig för avsnittet om om Riemann-Rochs sats, dvs. avsnitt 4. Har även haft en särskilt framträdande roll i bevisföringen.
- Ellen Wahrolin: huvudansvarig för illustrationer samt slutversionen av avsnittet om Riemannytor, dvs. avsnitt 2.

För bara några år sedan tog stora språkmodeller som OpenAI:s ChatGPT världen med storm, och frågan är i många texter inte längre *om*, utan *hur* AI har använts. I ett teoretiskt arbete som detta är användningen begränsad, men betydelsefull, då vikten ligger i författarnas förståelse av teorin. Framförallt har ChatGPT använts för att förstå teorin som vi läst in oss på. När uppgifter lösts har AI stundvis varit ett stöd – och stundvis vilseledande – i lösningsgången framåt. Även då ChatGPT haft fel har även detta bidragit till ökad förståelse av teorin. Illustrationen i figur 3 är för hand bearbetad efter ett original framtaget av ChatGPT. Förutom korrekturläsning av våra handledare har AI använts för en slutgiltig korrekturläsning för eventuella stavfel. ChatGPT har även agerat som ett rådgivande verktyg kring vissa formuleringar och struktur.

Göteborg, 12 maj[1] 2025

Alvin Larsson Bringholm, Lorenz Engsner, Elias Guedra och Ellen Wahrolin.

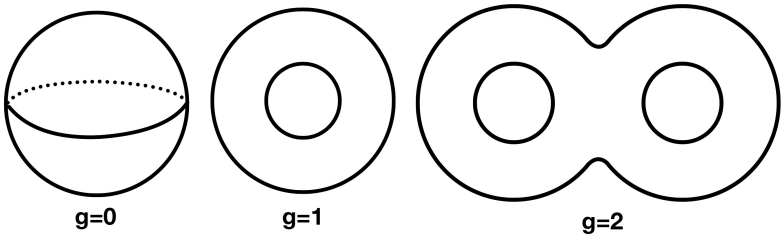
[1]Den 12 maj – ett mycket speciellt datum – har av flera matematikförbund för kvinnor utsetts till en dag att uppmärksamma kvinnor inom matematiken. Datumet är valt till minne av Maryam Mirzakhani som 2014 blev den första kvinnan att belönas med Fieldsmedaljen, något hon blev tack vare sin forskning om Riemannytor – ett begrepp som detta arbete till stor del handlar om.

Populärvetenskaplig presentation

För några sekel sedan började matematiker experimentera med att låta ett tal i ha den spöklika egenheten $i^2 = -1$; i vanliga fall har ju även negativa tal positiva kvadrater, i enlighet med minnesregeln "minus gånger minus blir plus". Trots att man redan i antikens Rom flyktigt stött på uttryck innehållande kvadratroten ur negativa tal[2] dröjde det ända till 1500-talet innan *komplexa tal* började studeras på allvar. Det fanns inledningsvis en allmän misstro mot dem och det var i en något avfärdande ton matematikern, tillika filosofen, René Descartes myntade begreppet *imaginära tal*. Dessa tal går att föreställa sig men finns inte, menade fransmannen.

Århundraden senare förekommer komplexa tal inom flera av matematikens grenar, för att inte tala om den oundgängliga roll de spelar i den moderna fysiken. Att de numera har den ställningen beror kanske främst på utvecklingen av den komplexa analysen.[3] Denna tog fart under 1800-talet och bland förgrundsfigurerna återfinns Bernard Riemann, som tillsammans med Augustin Louis Cauchy formulerade de ekvationer som beskriver funktioners *holomorficitet* – den komplexa analysens motsvarighet till derivatabegreppet. Huvudämnet i denna kandidatuppsats är dock ett annat av Riemanns resultat: år 1857 formulerade han en sats som 1865 bearbetades av eleven Gustav Roch till sin slutgiltiga form. Året därpå gick både Roch och Riemann bort, blott 26 respektive 39 år gamla. Satsen är i dag känd under det något fantasilösa namnet "Riemann-Rochs sats" och utgör ett viktigt resultat inom komplex analys och algebraisk geometri. Den har sedermera fått flera generaliseringar och nämns frekvent i samtida matematisk forskning.

Formuleringen av Riemann-Rochs sats utgår inte bara från komplex analys utan även *topologi*. Topologi är en tämligen modern gren av matematiken som studerar strukturer och egenskaper på geometriska föremål som inte beror på den exakta formen, utan som bevaras om man kontinuerligt deformerar ett föremål till ett annat. Man betraktar helt enkelt föremål som lika i en betydligt lösare bemärkelse än den vanliga: två ytor anses vara topologiskt ekvivalenta om den ena kan omformas till den andra genom att sträcka och böja ytan. Detta kan jämföras med att knåda ytan, ungefär som om den vore gjord av lera, utan att riva sönder eller sammanfoga den på nya ställen. Med detta synsätt visar det sig att den enda relevanta egenskapen hos en yta är hur många hål den har, en egenskap som fått namnet *genus*. I figur 1 åskådliggörs ytor med olika genus.



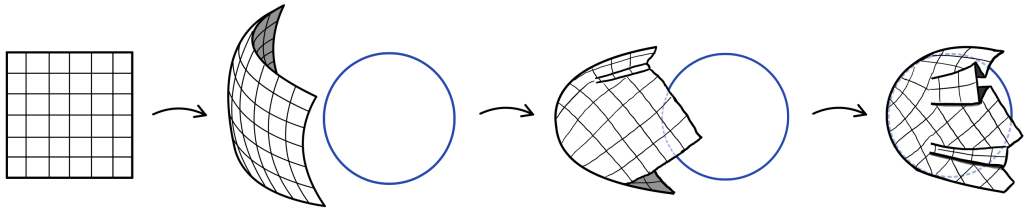
Figur 1: Sfären saknar helt hål och har därför genus noll. Badringen har ett hål och "åttan" två, varför de har genus ett respektive två.

I grundläggande komplex analys studeras funktioner definierade i det *komplexa talplanet* – ett kartesiskt koordinatsystem med en reell x-axel och imaginär y-axel. Med topologins hjälp går det emellertid att istället beskriva funktioner definierade på mer komplicerade ytor. Det går till exempel att studera funktioner på en sfär. Sfären kan få koordinater på samma sätt som det komplexa talplanet, genom att ta ett koordinatsystem och lägga det på ytan. I analogi med hur den krökta jordytan kan avbildas på en platt världskarta kallas denna påläggning av ett koordinatsystem för en *karta*. Figur 2 illustrerar hur en sådan påläggning kan gå till på en sfär. Lägg märke till hur kartan som omsveper sfären lägger sig slätt och fint på sfärens vänstra sida medan den blir hopknycklad på andra sidan, och ger därför inte ett jämnt och fint koordinatsystem på hela sfären. Detta är dock inget problem, utan så länge man kan skapa flera kartor som tillsammans täcker sfären och

[2]Heron från Alexandria, som verkade under första århundradet efter Kristus, fick i en volymberäkning fram uttrycket $\sqrt{81-144}$ men ändrade det till $\sqrt{144-81}$ då man ännu inte ens infört negativa tal. En djupare inblick i de komplexa talens historia ges i Paul Nahins *An Imaginary Tale*.

[3]Analys är den gren inom matematiken som behandlar derivator och integraler.

bildar en *atlas* kan man använda ytan för att skapa funktioner på den. Detta kan jämföras med hur en platt karta inte kan representera hela jordgloben. Exempelvis blir nordpolen oproportionerligt stor i den övre delen av kartan. Genom att täcka jordgloben med en samling mindre kartor, alltså en atlas, kan man alltid välja en karta som passar för vart man än befinner sig.



Figur 2: En illustration av hur ett koordinatsystem läggs på en del av en sfär. Endast den delen av koordinatsystemet som blir slätt på sfären ger lämpliga koordinater.

Huvudnumret för detta arbete, Riemann-Rochs sats, ger ett samband mellan dess topologiska utseende – alltså antalet hål – och ytans matematiska struktur med kartor, som krävs för att kunna definiera funktioner på ytan. Förenklat kan satsen sägas ge ett sätt att räkna antalet funktioner med givna egenskaper som kan konstrueras på ytan utifrån ytans genus. Trots sin stora betydelse förekommer Riemann-Rochs sats förhållandevis lite i svensk litteratur, vilket understryker behovet av en framställning på svenska. Syftet är således att presentera den matematiska teori som är nödvändig för att förstå formuleringen av Riemann-Rochs sats. Då ämnet i litteraturen ofta endast behandlas med utgångspunkt från flera avancerade universitetskurser i matematik, särskiljer sig detta arbete genom att presentera materialet på ett sätt som ska vara förståeligt för en ingenjörsstudent i teknisk fysik eller teknisk matematik.

Sammandrag

Detta arbete presenterar och diskuterar den nödvändiga teorin för att kunna formulera Riemann-Rochs sats, och bevisa satsen för två konkreta specialfall: Riemannsfären och komplexa torusar. Ambitionen är att göra detta för läsare med kunskaper motsvarande en första kurs i komplex analys. Arbetet tar avstamp i en definition av begreppet Riemannyta och en allmän diskussion om verktygen som krävs för att utföra komplex analys på en Riemannyta. Begreppet Riemannyta konkretiseras därefter genom en grundlig genomgång av konstruktionen av Riemannsfären och komplexa torusar som Riemannytor. Diskussionen innefattar även de meromorfa funktionernas utseende på Riemannsfären och komplexa torusar. I det sista avsnittet introduceras begreppet divisorer som senare används som utgångspunkt för att kunna formulera Riemann-Rochs sats för en allmän Riemannyta. Därefter övergår avsnittet till att presentera bevis för Riemann-Rochs sats i specialfallen då Riemannytan utgörs av Riemannsfären eller en komplex torus. Skillnaderna i de två fallen understryker att de meromorfa funktionerna på respektive yta skiljer sig på grund av att Riemannsfären har topologiskt genus $g = 0$ medan de komplexa torusarna har genus $g = 1$. Arbetet avslutas med en kort diskussion om viktiga konsekvenser av Riemann-Rochs sats.

Abstract

This thesis will present and discuss the necessary theory required to give a formulation of the Riemann-Roch theorem, and prove the theorem in two tangible special cases: the Riemann Sphere and complex tori. The ambition is to do this for a reader with knowledge equivalent to a first course in complex analysis. The text begins by defining the term Riemann surface and a general discussion of the tools necessary to carry out complex analysis on a Riemann surface. The discussion is made concrete by then presenting a thorough walkthrough of the construction of the Riemann Sphere and complex tori as Riemann surfaces. The meromorphic functions on each surface are also discussed. In the last section, the term divisor is introduced, and is later used to formulate the Riemann-Roch theorem for a general Riemann surface. The section then moves to presenting proofs for the theorem in the case of the Riemann Sphere and complex tori. The differences in the two cases emphasize the fact that the meromorphic functions on each surface differ because of the fact that the Riemann Sphere has topological genus $g = 0$ while complex tori have genus $g = 1$. The thesis concludes with a short discussion of important consequences of the theorem.

Innehåll

1 Inledning **1**

2 Generellt om Riemannytor **1**
2.1 Vad är en Riemannyta? . . . 1
2.2 Funktioner på Riemannytor . . . 2
2.2.1 Holomorfa funktioner . . . 2
2.2.2 Meromorfa funktioner . . . 3
2.2.3 Laurentserier . . . 3
2.2.4 Ordningen av meromorfa funktioner . . . 4
2.2.5 Följdsatser från komplex envariabelanalys . . . 4
2.3 Avbildningar mellan Riemannytor . . . 5
2.3.1 Holomorfa avbildningar . . . 5
2.3.2 Graden av en holomorf avbildning . . . 5
2.4 Meromorfa och holomorfa 1-former . . . 6
2.5 Genus . . . 6

3 Två konkreta Riemannytor **7**
3.1 Riemannsfären . . . 8
3.1.1 Användning av Riemannsfären . . . 8
3.1.2 Funktioner på Riemannsfären . . . 9
3.2 Komplexa torusar . . . 10
3.2.1 Funktioner på torusar . . . 11
3.2.2 Karakterisering av torusar . . . 13

4 Riemann-Rochs sats: två specialfall **13**
4.1 Divisorer . . . 13
4.1.1 Principala divisorer och linjär ekvivalens . . . 14
4.1.2 Kanoniska divisorer . . . 15
4.2 Riemann-Rochs sats i allmänhet . . . 16
4.3 Riemann-Roch på Riemannsfären . . . 16
4.4 Riemann-Roch på komplexa torusar . . . 17
4.4.1 Hjälpsatser . . . 17
4.4.2 Bevis för Riemann-Roch på komplexa torusar . . . 19
4.5 Användningsområden . . . 20

A Appendix **i**
A.1 Ekvivalensrelationer och ekvivalensklasser . . . i
A.2 Topologi . . . i
A.2.1 Grundläggande topologiska begrepp . . . ii
A.2.2 Produkttopologier, delrumstopologier och Hausdorffrum . . . ii
A.2.3 Kontinuerliga funktioner . . . iii
A.2.4 Topologisk mångfald . . . iii
A.2.5 Kvotavbildningar och kvottopologier . . . iv
A.2.6 Kompakta mängder . . . v
A.3 Riemannytor . . . v
A.3.1 Funktioner på Riemannytor . . . vi
A.3.2 Holomorfa avbildningar . . . vi
A.3.3 Kurvintegraler på Riemannytor . . . vii
A.4 Bevis . . . vii
A.4.1 Bevis av Sats 3.7 . . . vii
A.4.2 Bevis av Lemma 3.9 . . . ix

1 Inledning

En central del inom den matematiska analysen är studiet av olika typer av funktioner. I allmänhet är antalet möjliga funktioner mycket stort, även om man begränsar sig till välartade funktioner med vissa önskvärda egenskaper; till exempel deriverbarhet inom reell analys, eller motsvarigheten till deriverbarhet inom komplex analys – holomorficitet. I vissa sammanhang är dock antalet funktioner av en viss typ betydligt mer begränsat. Om man istället för att studera funktioner i det komplexa talplanet betraktar funktioner på *kompakta Riemannytor* – en typ av generalisering av det komplexa talplanet – kan man exempelvis visa att de enda holomorfa (komplext deriverbara) funktionerna som finns är konstanta.

Meromorfa funktioner (dvs. funktioner som är holomorfa överallt förutom i ett antal isolerade punkter, s.k. poler) på kompakta Riemannytor är inte riktigt lika få. Antalet, eller mer precist dimensionen på vektorrum av, meromorfa funktioner uppvisar ett intressant samband med Riemannytans geometriska egenskaper. Riemann-Rochs sats ger ett sätt att bestämma dimensionen på vektorrummet av meromorfa funktioner med föreskrivna poler av högst någon viss ordning utifrån Riemannytans topologiska genus, en geometrisk egenskap hos ytan som intuitivt kan förstås som antalet hål i ytan. Satsen ger ett anmärkningsvärt samband mellan två till synes skilda aspekter av Riemannytan – den komplexa analysen på ytan, och dess geometriska form.

Detta arbete fördjupar sig i Riemann-Rochs sats med målet att kunna lägga fram den bakomliggande teorin och beviset av satsen i två specialfall på ett sätt som är begripligt för en tredjeårsstudent på civilingenjörsprogrammen i teknisk fysik och teknisk matematik, som genomgått en grundkurs i komplex analys. Det underlättar om läsaren är bekant med topologi, men centrala begrepp återges i appendix A.2 för den som saknar sådan bakgrund. Arbetet ska alltså tillgängliggöra de förkunskaper som behövs för att förstå satsformuleringen och beviset av Riemann-Rochs sats, utan att läsaren nödvändigtvis besitter de förhållandevis omfattande ämneskunskaper som Riemann-Rochs sats normalt formuleras med utgångspunkt från. Dessutom ska innehållet, som normalt avhandlas endast på engelska i litteraturen, tillgängliggöras på svenska.

För att definiera kompakta Riemannytor krävs grundläggande begrepp och terminologi inom ett område som heter *topologi*, vilket görs i bilaga A.2. Därefter inleds arbetet med ett avsnitt som introducerar begreppet Riemannyta i allmänhet samt de verktyg och koncept som behövs för att kunna utföra komplex analys på dessa. Sedan introduceras i det tredje avsnittet två specifika exempel på Riemannytor – den komplexa torusen och Riemannsfären – som används i det avslutande avsnittet för att förklara och, i dessa specialfall, ge bevis för Riemann-Rochs sats.

2 Generellt om Riemannytor

I grundläggande komplex analys behandlas funktioner definierade på hela, eller delmängder till, det komplexa talplanet $\mathbb{C}$. Motsvarande funktioner kan dock studeras på mer generella ytor än det komplexa talplanet, s.k. Riemannytor. Riemann-Rochs sats formuleras på dessa ytor, och i detta avsnitt introduceras därför begreppet Riemannyta för att precisera hur denna komplexa analys på mer generella ytor går till. För att prata om Riemannytor behöver vi dock först vara bekanta med området topologi. Nödvändiga topologiska begrepp beskrivs i appendix A.2. Detta avsnitt baseras på kapitel I.1, I.2 och II.1 i [**Miranda**].

2.1 Vad är en Riemannyta?

En Riemannyta är ett rum som lokalt ser ut som en öppen mängd i det komplexa planet. För att formalisera detta behöver vi introducera begreppen kartor, atlaser och vad det innebär att två kartor är kompatibla. Vi definierar en komplex karta formellt nedan, men intuitivt är en komplex karta ett sätt att avbilda en del av en abstrakt yta till det komplexa talplanet $\mathbb{C}$, då varje lokalt område ser ut som en delmängd av det komplexa talplanet.

Definition 2.1 (Komplexa kartor). En **komplex karta** (eller bara "karta") på ett topologiskt rum X är en homeomorfi $\phi : U \to V$, där $U \subseteq X$ och $V \subseteq \mathbb{C}$ båda är öppna mängder. Man

säger att ϕ är **centrerad** i $p \in U$ om $\phi(p) = 0$. En **delkarta** definieras enligt restriktionen $\phi|_{U_1} : U_1 \to \phi(U_1)$.

Att två kartor är kompatibla innebär intuitivt att de "håller med varandra" om hur punkter ska avbildas där de överlappar.

Definition 2.2 (Kompatibla kartor). Två komplexa kartor $\phi_1 : U_1 \to V_1$ och $\phi_2 : U_2 \to V_2$ på ett topologiskt rum X, sägs vara **kompatibla** om $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, eller om $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$ är holomorf. Funktionen $T = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ kallas **övergångsfunktionen** mellan två kartor och är en bijektion.

Lemma 2.3. En övergångsfunktion T mellan två kartor uppfyller $T' \neq 0$ överallt i dess definitionsmängd.

Bevis. Låt $S = T^{-1}$, och notera att vi har $S(T(z)) = z$ för alla z i T:s definitionsmängd. Derivering av denna likhet ger $S'(T(z))T'(z) = 1$ för alla z, vilket visar att $T'(z) = 0$ är omöjligt. □

Man kan säga att en komplex atlas är en samling av kartor, på liknande sätt som att det behövs flera kartor av olika områden för att skapa en atlas av hela jorden. Nedan följer en formell definition av en komplex atlas.

Definition 2.4 (Komplexa atlaser). En **komplex atlas** (hädanefter atlas) $\mathcal{A}$ på ett topologiskt rum X är en samling av parvis kompatibla komplexa kartor, $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha\}$, så att deras definitionsmängd täcker X, dvs. $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

Definition 2.5 (Ekvivalenta atlaser). Två atlaser $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$ sägs vara ekvivalenta om alla kartor i $\mathcal{A}$ är kompatibla med alla kartor i $\mathcal{B}$.

Det går att tänka på ekvivalenta atlaser som att två atlaser beskriver samma sak om alla kartorna som utgör denna atlas är kompatibla med alla kartor i den andra atlasen.

För att formellt definiera en Riemannyta behöver ytterligare två begrepp introduceras: komplexa strukturer och andra uppräknelighetsaxiomet, där den sistnämnda redogörs i appendix A.2. Läsaren förutsätts känna till begreppet ekvivalensklass. En kortfattad beskrivning finns annars i appendix A.1.

Definition 2.6 (Komplexa strukturer). En komplex struktur på ett topologiskt rum X är en ekvivalensklass av atlaser på X.

Alla kartor som är kompatibla ger samma komplexa struktur.

Definition 2.7 (Riemannytor). En **Riemannyta** är ett sammanhängande Hausdorffrum som uppfyller det andra uppräknelighetsaxiomet, tillsammans med en komplex struktur.

På en Riemannyta fungerar vanlig komplex analys lokalt. Definitionen ovan kan ge sken av att det krävs en topologi på mängden X för att ge mängden en komplex struktur och göra den till en Riemannyta, men kartorna som används för att ge en komplex struktur på ytan kan också användas för att definiera topologin.

2.2 Funktioner på Riemannytor

Likt funktioner från $\mathbb{C}$ till $\mathbb{C}$ definierar vi nu funktioner på en Riemannyta till $\mathbb{C}$. I följande delavsnitt gäller överallt att X är en Riemannyta.

2.2.1 Holomorfa funktioner

Definition 2.8 (Holomorf funktion). Låt f vara en komplexvärd funktion definierad i en öppen mängd W, där $W \subseteq X$ och p är en punkt i W. Om det finns en karta $\phi : U \to V$ med $p \in U$ så att $f \circ \phi^{-1}$ är holomorf i $\phi(p)$ sägs f vara **holomorf** i p. Om f är holomorf i alla punkter som tillhör W sägs f vara holomorf på W.

En förklarande illustration av begreppet holomorf funktion utifrån kartor illustreras i figur 7 i appendix A.3.

Lemma 2.9. Låt X vara en Riemannyta, p en punkt i X och f en komplexvärd funktion på en omgivning W till p. Om $f \circ \phi^{-1}$ är holomorf i en karta ϕ kommer den vara holomorf i alla kompatibla kartor.

Grundidén bakom definitionen av en Riemannyta är att holomorfa funktioner ska vara väldefinierade – oberoende av val av lokala koordinater, dvs. karta. Detta är en omskrivning av lemma A.32, som återfinns i appendix A.3.1.

2.2.2 Meromorfa funktioner

Med samma tillvägagångssätt som holomorfa funktioner på Riemannytor definierats med hjälp av holomorfa funktioner på $\mathbb{C}$, ska vi nu definiera meromorfa funktioner på Riemannytor. För att definiera vad en meromorf funktion på en Riemannyta är behöver vi först definiera typer av singulariteter på en Riemannyta.

Definition 2.10 (Typer av singulariteter). Låt X vara en Riemannyta och $x \in X$. Låt $U \subset X$ vara en omgivning till x och betrakta en holomorf funktion $f : U \setminus \{x\} \to \mathbb{C}$ i den punkterade omgivningen $U \setminus \{x\}$. Funktionen f sägs ha en **hävbar singularitet**, **pol**, respektive **väsentlig singularitet** vid x om och endast om det finns en karta $\phi : U \to V \subseteq \mathbb{C}$ med $x \in U$ så att $f \circ \phi^{-1}$ har en hävbar singularitet, pol respektive väsentlig singularitet vid $\phi(x)$.

På samma sätt som tidigare spelar det inte heller här någon roll vilken karta som används för att avgöra typen hos en viss singularitet, vilket följer av följande lemma:

Lemma 2.11. Funktionen f har en hävbar singularitet, pol respektive väsentlig singularitet vid $p \in X$ om och endast om sammansättningen $f \circ \phi^{-1}$ har en hävbar singularitet, pol respektive väsentlig singularitet vid $\phi(p)$ för varje karta $\phi : U \to V$ med $p \in U$.

Sats 2.12 (Karakterisering av singulariteter). Låt X vara en Riemannyta, $p \in X$ och betrakta en holomorf funktion $f : U \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$.

a) Om $|f(x)|$ är begränsad i en omgivning av $p \in X$ så har f en hävbar singularitet vid p. I så fall existerar även $\lim_{x \to p} f(x)$ och om $f(p)$ sätts lika med detta gränsvärde blir f holomorf i p.

b) Om $|f(x)| \to \infty$ när $x \to p$ så har f en pol vid p.

c) Om $|f(x)|$ saknar gränsvärde när $x \to p$ så har f en väsentlig singularitet vid p.

Vi är nu redo att definiera en meromorf funktion på en Riemannyta.

Definition 2.13 (Meromorf funktion). En funktion f på en Riemannyta X sägs vara **meromorf** vid en punkt $p \in X$ om den antingen är holomorf, har en hävbar singularitet eller en pol vid p.

Om f är meromorf i alla punkter i en öppen mängd $W \subseteq X$ sägs f vara meromorf på W.

2.2.3 Laurentserier

För att kunna tala om Riemann-Roch sats behöver vi även definiera ordningen av meromorfa funktioner. I analogi med komplexvärda funktioner definierade i det komplexa talplanet definieras därför Laurentserier för funktioner på Riemannytor. Detta görs för att kunna definiera ordningen av meromorfa funktioner vid en punkt.

Definition 2.14 (Laurentserie). Låt f vara holomorf i en punkterad cirkelskiva med centrum i $p \in X$. Låt $\phi : U \to V$ vara en karta på X med $p \in U$ och $z \in V$ en punkt sådan att $z = \phi(x)$ för x nära p. Då gäller att $f \circ \phi^{-1}$ är holomorf i en punkterad omgivning till $z_0 = \phi(p)$ och vi kan skriva $f \circ \phi^{-1}$ som en Laurentserie kring z_0:

$$f(\phi^{-1}(z)) = \sum_n c_n (z - z_0)^n.$$

Denna kallas för **Laurentserien** för f kring p med avseende på ϕ. Koefficienterna c_n kallas Laurentseriekoefficienter. Observera att serien beror på val av karta ϕ och är därför inte är väldefinierad utan att kartan specificeras.

2.2.4 Ordningen av meromorfa funktioner

Med hjälp av Laurentserier kan vi definiera ordningen av ett nollställe eller en pol.

Definition 2.15 (Ordningen av f). Låt f vara en funktion som är meromorf (respektive holomorf) vid en punkt $p \in X$, vars Laurentserie i en lokal koordinat z är $\sum_n c_n(z-z_0)^n$. **Ordningen** av f vid p, $\text{ord}_p(f)$, är den minsta potensen med nollskild koefficient, dvs. $\text{ord}_p(f) = \min\{n \mid c_n \neq 0\}$.

Vi har tidigare noterat att Laurentserien i allmänhet beror på valet av karta, men vi försäkrar läsaren om att ordningen av en meromorf funktion vid en punkt trots detta är väldefinierad. Detta är en konsekvens av att en övergångsfunktionen mellan två kartor enligt Lemma 2.3 måste ha en Taylorutveckling med en term av ordning 1. Följaktligen blir ordningen av den lägsta termen i Laurentserien i den ena kartan lika med ordningen av den lägsta termen i Laurentserien i den andra kartan.

Man säger att f har ett nollställe av ordning n om $\text{ord}_p(f) = n \geq 1$, samt en pol av ordning n om $\text{ord}_p(f) = -n < 0$.

Lemma 2.16. Antag att f är meromorf vid p. Då gäller att:

i) f är holomorf vid p om och endast om $\text{ord}_p(f) \geq 0$

ii) f har ett nollställe vid p, dvs. $f(p) = 0$ om och endast om $\text{ord}_p(f) > 0$

iii) f har en pol vid p om och endast om $\text{ord}_p(f) < 0$

iv) f har varken ett nollställe eller en pol vid p om och endast om $\text{ord}_p(f) = 0$

Vidare har vi även följande lemma:

Lemma 2.17. Låt f och g vara nollskilda meromorfa funktioner vid $p \in X$. Då gäller att:

a) $\text{ord}_p(fg) = \text{ord}_p(f) + \text{ord}_p(g)$

b) $\text{ord}_p(f/g) = \text{ord}_p(f) - \text{ord}_p(g)$

c) $\text{ord}_p(f \pm g) \geq \min\{\text{ord}_p(f), \text{ord}_p(g)\}$

Av b) följer att $\text{ord}_p(1/g) = -\text{ord}_p(g)$.

Nu när vi definierat ordningen av f vid en punkt kan vi introducera följande sats:

Sats 2.18. Om f är en icke-konstant meromorf funktion på en kompakt Riemannyta X gäller att:

$$\sum_{p \in X} \text{ord}_p(f) = 0.$$

2.2.5 Följdsatser från komplex envariabelanalys

Det finns ett flertal satser som ärvs från (envariabel) komplex analys. För följande satser gäller i samtliga fall att f är en funktion och W är en sammanhängande öppen mängd på X. Bland annat gäller en generaliserad version av maximumprincipen, identitetsprincipen och en sats om diskreta nollställen och poler; som samtliga går att läsa om i appendix A.3.1. Från dessa satser i appendix följer två relevanta korollarium:

Korollarium 2.19. Låt f, som inte får vara identiskt lika med noll, vara meromorf på X. Om X är kompakt, så gäller att f har ett ändligt antal nollställen och poler.

Sats 2.20. Antag att f är holomorf på hela X. Om X är kompakt, så är f en konstant funktion.

Bevis. Att f är holomorf på hela X är f kontinuerlig, och därför även $|f|$. Eftersom X är kompakt antar $|f|$ ett maximum i en punkt $z_0 \in X$. Enligt Maximumprincipen (Sats A.35) gäller att f är konstant på hela X eftersom X är sammanhängande och öppen. Detta är uppfyllt eftersom X är en Riemannyta, vilket innebär att X är ett sammanhängande topologiskt rum, och varje topologiskt rum är öppet. □

2.3 Avbildningar mellan Riemannytor

Vi har hittills endast definierat holomorfa funktioner på Riemannytor, dvs. avbildningar från en Riemannyta till en mängd i $\mathbb{C}$. Vi relaterar då en Riemannyta till $\mathbb{C}$ med hjälp av komplexa kartor. Vi ska nu definiera holomorfa och meromorfa avbildningar mellan två Riemannytor.

2.3.1 Holomorfa avbildningar

Definition 2.21 (Holomorf avbildning mellan Riemannytor). Låt X och Y vara Riemannytor. En avbildning $F : X \to Y$ sägs vara **holomorf** i $x \in X$ om det finns kartor $\phi_1 : U_1 \to V_1$ på X och $\phi_2 : U_2 \to V_2$ på Y med $x \in U_1$ och $F(x) \in U_2$ sådana att sammansättningen $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ är holomorf i $\phi_1(x)$. Om F är definierad på en öppen mängd $W \subseteq X$ sägs F vara holomorf på W om F är holomorf i varje punkt som tillhör W. Avbildningen F sägs vara holomorf om den är holomorf på hela X.

På samma sätt som med holomorfa funktioner på Riemannytor spelar det ingen roll vilka kartor som används för att undersöka huruvida avbildningen är holomorf. För ytterligare detaljer, se Lemma A.36 i appendix A.3.2.

Slutligen har vi även begreppet biholomorfi. Två Riemannytor X och Y är identiska från ett komplexanalytiskt perspektiv om de är biholomorfa.

Definition 2.22 (Biholmorfi). Låt $F : X \to Y$ vara en holomorf och bijektiv avbildning så att även $F^{-1} : Y \to X$ är holomorf. Då kallas F för en **biholomorfi** mellan X och Y. Om det finns en biholomorfi mellan Riemannytorna X och Y sägs de vara biholomorfa.

2.3.2 Graden av en holomorf avbildning

Alla holomorfa avbildningar av grad 1 är isomorfier. För att förstå vad detta betyder behöver vi först definiera vad graden av en avbildning är, och i sin tur vad multipliciteten är. Därför följer nedan en definition av multipliciteten av en holomorf avbildning.

Definition 2.23 (Multiplicitet). Låt $F : X \to Y$ vara en icke-konstant holomorf avbildning mellan två Riemannytor definierad vid en punkt $p \in X$. **Multipliciteten** av F vid p, betecknad $\text{mult}_p(F)$, är det unika heltalet m så att det finns lokala koordinater nära p och $F(p)$ där F har formen $z \mapsto z^m$.

Med hjälp av ovan kan vi nu definiera graden av en avbildning enligt nedan.

Definition 2.24 (Graden av en avbildning). Låt $F : X \to Y$ vara en ickekonstant holomorf avbildning mellan två kompakta Riemannytor. För varje punkt $y \in Y$ definieras **graden av** F enligt:

$$\deg_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} \text{mult}_p(F).$$

Sats 2.25. Graden $\deg_y(F)$ är konstant och alltså oberoende av y.

Mot bakgrund av detta kan vi avstå från att precisera punkten y och helt enkelt beräkna graden av en holomorf avbildning F som $\deg(F)$.

Sats 2.26. En holomorf avbildning mellan kompakta Riemannytor är biholomorf om och endast om $\deg(F) = 1$.

Vi hänvisar till kapitel II.4 i [**Miranda**] för bevis av de två ovanstående satserna.

2.4 Meromorfa och holomorfa 1-former

Kurvintegraler av meromorfa funktioner är ett viktigt verktyg i komplex envariabelanalys. För att generalisera detta till Riemannytor införs objekt som kallas meromorfa (och holomorfa) 1-former.

Definition 2.27 (Holomorf och meromorf 1-form). En meromorf (respektive holomorf) 1-form på en öppen mängd $V \subseteq \mathbb{C}$ är ett uttryck ω på formen $\omega = f(z)dz$, där f är en meromorf (holomorf) funktion på V. Uttrycket ω sägs då vara en **meromorf (holomorf) 1-form** i koordinaten z.

Vi behöver definiera hur en 1-form transformeras under en avbildning, speciellt ett koordinatbyte.

Definition 2.28. Låt $\omega_1 = f(z)dz$ vara en meromorf (respektive holomorf) 1-form i z på den öppna mängden V_1 och $\omega_2 = g(w)dw$ en meromorf (holomorf) 1-form i w på öppna mängden V_2. Låt $z = T(w)$ vara en meromorf (holomorf) avbildning från V_2 till V_1. Då sägs ω_1 **transformeras till** ω_2 **under T** om $g(w) = f(T(w))T'(w)$.

En önskvärd följd av denna definition är att ω_1 transformeras till ω_2 när man sätter $dz = T'(w)dw$.

Definition 2.29. Låt X vara en Riemannyta. En **meromorf (respektive holomorf) 1-form på** X är en samling meromorfa (holomorfa) 1-former $\{\omega_\phi\}$, en för varje karta $\phi : U \to V$ i koordinaten i målmängden V, sådan att om två kartor ϕ_1 och ϕ_2 har överlappande definitionsmängder transformeras motsvarande meromorfa (holomorfa) 1-form ω_{ϕ_1} till ω_{ϕ_2} under $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$.

För att definiera en meromorf (holomorf) 1-form på en Riemannyta X räcker det med att finna kompatibla meromorfa (holomorfa) 1-former för varje karta tillhörande någon atlas på X. Detta uttrycks i följande lemma:

Lemma 2.30. Låt X vara en Riemannyta och $\mathcal{A}$ en komplex atlas på X. Antag att meromorfa (respektive holomorfa) 1-former är givna för varje karta i $\mathcal{A}$ och att dessa transformeras till varandra på överlappande definitionsmängder enligt föregående definition. Då existerar en unik meromorf (holomorf) 1-form på X där de meromorfa (holomorfa) 1-formerna utökats på var och en av kartorna i $\mathcal{A}$.

1-former är ett centralt begrepp för att kunna förstå Riemann-Rochs sats. Kurvintegraler på Riemannytor är däremot inte centralt och definieras därför explicit i appendix A.3.3.

Lemma 2.31 (Division av meromorfa 1-former). Låt ω_1 och ω_2 vara meromorfa 1-former på en Riemannyta X med ω_1 inte identiskt lika med noll. Då finns det en unik meromorf funktion f på X så att $\omega_2 = f\omega_1$.

Bevis. Välj en karta $\phi : U \to V$ på X som ger lokal koordinat z. Skriv $\omega_j = g_j(z)dz$ för en meromorf funktion g_j på V. Låt $h(z) = g_2(z)/g_1(z)$. Då är den sökta funktionen $f = h \circ \phi$. Vi kan visa att f är väldefinierad genom att göra ett koordinatbyte till en annan karta. Låt $z = T(w)$. Vi får då $\tilde{\omega}_j = g_j(T(w))T'(w)dw$ och $\tilde{h}(z) = g_1(T(w))T'(w)/g_2(T(w))T'(w) = g_1(z)/g_2(z) = h(z)$. □

Definition 2.32 (Ordningen av en 1-form). Låt ω vara en meromorf 1-form och $\omega = f(z)dz$ definierad i området av en punkt p. Genom att välja koordinater centrerade vid p kan vi skriva $\omega = f(z)dz$ där f är en meromorf funktion vid $z = 0$. Då gäller att **ordningen av** ω vid p, definieras enligt följande:

$$\mathrm{ord}_p(\omega) = \mathrm{ord}_0(f).$$

2.5 Genus

Detta avsnitt innehåller en kort introduktion till den topologiska klassificeringen av kompakta Riemannytor utifrån deras *genus*. Begreppet genus ska på ett intuitivt plan beskriva antalet hål ytan har – en badring har ett hål och en "åtta" har två hål. För fullständighetens skull ska vi låta genus definieras med hjälp av *trianguleringar*, men vi utgår huvudsakligen från den informella tolkningen, dvs. som antalet hål. Ytterligare diskussion och hänvisningar finns i kapitel I.1 och II.4 i [**Miranda**].

Definition 2.33 (Triangulering). Låt X vara en kompakt Riemannyta. En **triangulering** av X är en uppdelning av X i slutna delmängder, var och en homeomorfa med en triangel, så att varje par av trianglar antingen är disjunkt, möts endast i ett hörn eller möts endast längs en sida.

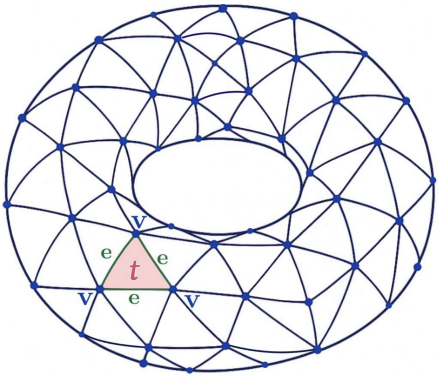
En illustration av begreppet triangulering visas i figur 3.

Definition 2.34 (Eulerkarakteristik). Låt X vara en kompakt Riemannyta och antag att en triangulering T av X med v hörn, e kanter och t trianglar är given. **Eulerkarakteristiken** för denna triangulering definieras då som

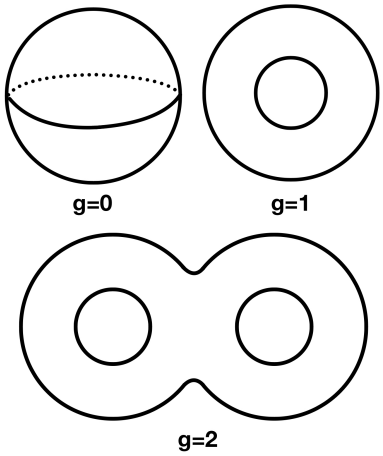
$$\chi(T) = v - e + t.$$

Sats 2.35 (Eulerkarakteristiken är oberoende av triangulering). Låt X vara en kompakt Riemannyta och låt T_1 och T_2 vara trianguleringar av X. Då är $\chi(T_1) = \chi(T_2)$.

För en given Riemannyta spelar det alltså ingen roll vilken triangulering som används för att beräkna Eulerkarakteristiken. Detta, tillsammans med det faktum att varje Riemannyta går att triangulera (ett påstående vi avstår från att visa), möjliggör följande definition.



Figur 3: En triangulering av en torus, där v markerar exempel på hörn, e markerar exempel på kanter och t markerar ett exempel på en triangel. Skapad med hjälp av AI [**OpenAI**].



Figur 4: Illustration av genus g.

Definition 2.36 (Genus). Låt X vara en kompakt Riemannyta och T vara en triangulering av X. Då definieras X:s (topologiska) **genus** som $g = 1 - \chi(T)/2$.

För att få grepp om vilka möjliga genus en kompakt Riemannyta kan ha presenteras följande sats.

Sats 2.37. Varje kompakt Riemannyta har heltalsgenus $g \geq 0$. Vidare har två kompakta Riemannytor samma genus g om och endast om de är homeomorfa.

I princip kan satsen uttryckas som att varje kompakt Riemannyta är homeomorf, dvs. topologiskt identisk, med en "torus med g hål", se figur 4.

3 Två konkreta Riemannytor

I detta avsnitt introducerar vi två konkreta exempel på Riemannytor – Riemannsfären och komplexa torusar – som i det sista avsnittet används för att studera Riemann-Rochs sats. Dessa ytor är båda grundläggande exempel på förhållandevis enkla Riemannytor i bemärkelsen att de har lågt topologiskt genus g, dvs. ett litet antal hål. Trots detta är den komplexa analysen på Riemannsfären, som har $g = 0$, och den komplexa analysen på komplexa torusar, som har $g = 1$, olika. Detta visar på de topologiska egenskapernas inverkan på den komplexa analysen på ytan och gör dessa ytor till bra exempel för att illustrera Riemann-Rochs sats, som handlar om just ett samband mellan topologiskt utseende och den komplexa analysen på ytan.

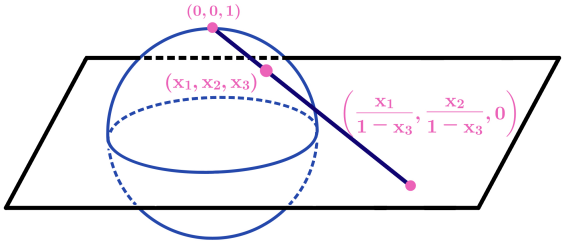
Följande avsnitt baseras på kapitel I.1, I.2, II.2 och II.3 i [**Miranda**].

3.1 Riemannsfären

Vi bildar Riemannsfären genom att utrusta enhetssfären i $\mathbb{R}^3$, dvs. mängden $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1\}$ med en komplex struktur. Vi introducerar funktionerna $\phi_1 : S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{C}$ och $\phi_2 : S^2 \setminus \{(0,0,-1)\} \to \mathbb{C}$ där vi låter

$$\phi_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3} \quad \text{och} \quad \phi_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1+x_3} - i\frac{x_2}{1+x_3}$$

utgöra kartorna för den komplexa strukturen. Funktionen ϕ_1 motsvarar geometriskt sett en s.k. stereografisk projektion där en punkt på sfären sammanbinds med en linje genom nordpolen $(0,0,1)$ som sedan avbildas på denna linjes skärningspunkt med x_1x_2-planet, som vi identifierar med det komplexa talplanet (se figur 5). Funktionen ϕ_2 motsvarar på liknande sätt en stereografisk projektion genom sydpolen $(0,0,-1)$, men denna gång följt av en komplexkonjugering.



Figur 5: Illustration av kartan ϕ_1:s geometriska tolkning som stereografisk projektion.

Vi ska nu se att dessa funktioner ϕ_1 och ϕ_2 verkligen ger en komplex struktur på sfären (se avsnitt 2.1). Som den geometriska tolkningen av ϕ_1 och ϕ_2 antyder är funktionerna inverterbara, något vi kan se med de explicita inverserna

$$\phi_1^{-1}(z) = \left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) \quad \text{och} \quad \phi_2^{-1}(z) = \left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1}, -\frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{1-|z|^2}{|z|^2+1}\right).$$

Utrustar vi sfären med delrumstopologin i $\mathbb{R}^3$ (se avsnitt A.2.2) följer det att ϕ_1 och ϕ_2 är homeomorfier eftersom de, och deras inverser, är kontinuerliga i vanlig epsilon-delta-mening (se Sats A.14). Funktionerna är alltså kartor. Dessutom är de kompatibla, eftersom övergångsfunktionen mellan kartorna $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ är $(\phi_2 \circ \phi_1^{-1})(z) = 1/z$ (vilket ses genom insättning i uttrycken för ϕ_1^{-1} och ϕ_2 ovan), som är holomorf på bilden av kartornas gemensamma definitionsmängd $\phi_1(S^2 \setminus \{(0,0,1),(0,0,-1)\}) = \phi_2(S^2 \setminus \{(0,0,1),(0,0,-1)\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Detta, tillsammans med observationen att kartornas definitionsmängder tillsammans täcker sfären, visar att vi skapat en komplex struktur på sfären.

För att visa att sfären är en Riemannyta kvarstår endast de topologiska kraven att S^2 är sammanhängande, Hausdorff och uppfyller det andra uppräknelighetsaxiomet. De två sistnämnda egenskaperna ärvs direkt från $\mathbb{R}^3$ och den förstnämnda inses t.ex. genom att kontinuerligt avbilda en sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^2$ på sfären. Genom detta har vi konstruerat den Riemannyta som vi kallar Riemannsfären. Vi kan dessutom konstatera att Riemannsfären är en kompakt Riemannyta eftersom sfären är sluten och begränsad i $\mathbb{R}^3$ (se Sats A.30).

3.1.1 Användning av Riemannsfären

Riemannsfären har genom kartan ϕ_1 en väldigt naturlig koppling till det komplexa talplanet – kartan ger alla tal i $\mathbb{C}$ en motsvarighet på Riemannsfären. Dessutom finns exakt en ytterligare punkt, nordpolen $(0,0,1)$, som saknar motsvarighet i $\mathbb{C}$. Riemannsfären är dock så fiffigt beskaffad att denna nordpol är precis vad som erhålls då vi låter $|z| \to \infty$ i det komplexa talplanet, oavsett i vilken riktning vi låter $|z| \to \infty$. Mer precist är

$$\lim_{|z|\to\infty} \phi_1^{-1}(z) = (0,0,1).$$

Av denna anledning är det brukligt att tänka sig Riemannsfären som det komplexa talplanet utökat med en oändlighetspunkt ∞. Man betecknar av denna anledning ofta Riemannsfären $\mathbb{C}_\infty$. Det är även vanligt att av bekvämlighetsskäl tala om punkter på Riemannsfären, inte genom deras koordinater (x_1, x_2, x_3), utan genom vilket tal $z \in \mathbb{C}$ (eller ∞) de motsvarar.

Det faktum att Riemannsfärens övergångsfunktion T mellan kartorna ϕ_1 och ϕ_2 är $T(z) = 1/z$ möjliggör även för ett smidigt sätt att hantera funktioners beteende i oändligheten. Vi har följande resultat.

LEMMA 3.1. Funktionen $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}$ är meromorf respektive holomorf i ∞ om och endast om $f(1/z)$ är meromorf (holomorf) i 0.

Meromorfa funktioner på godtycklig Riemannyta går att betrakta som holomorfa avbildningar till Riemannsfären. Därför låter vi X vara en Riemannyta och betraktar en funktion f. Om $f : X \to \mathbb{C}$ är en meromorf funktion på hela X är den holomorf på hela X, förutom i isolerade punkter. I dessa punkter går absolutbeloppet av funktionen mot ∞. Som komplexvärd funktion finns det inte mycket vi kan göra åt dessa singulariteter, men de kan naturligt utvidgas till en avbildning $F : X \to \mathbb{C}_\infty$ genom att avbilda alla odefinierade singularitetspunkter på ∞. Faktum är att denna utvidgade funktion

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{om } x \text{ ej är en pol i } f \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

blir en holomorf avbildning $X \to \mathbb{C}_\infty$. Det visar sig också finnas en korrespondens mellan meromorfa funktioner på X och holomorfa avbildningar $X \to \mathbb{C}_\infty$ som inte är identiskt lika med oändligheten.

Ett antal räkneregler för multiplicitetens relation till ordningen presenteras i lemmat nedan.

LEMMA 3.2. Låt f vara en meromorf funktion på en kompakt Riemannyta X med den associerade holomorfa avbildningen $F : X \to \mathbb{C}_\infty$. Då gäller att

i) Om $p \in X$ är ett nollställe till f så är $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f)$

ii) Om $p \in X$ är en pol till f så är $\text{mult}_p(F) = -\text{ord}_p(f)$

iii) Om $p \in X$ inte är ett nollställe eller en pol till f så är $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f - f(p))$

3.1.2 Funktioner på Riemannsfären

Eftersom Riemannsfären är kompakt finns inga icke-konstanta holomorfa funktioner enligt Sats 2.20. Faktum är att detta resultat på Riemannsfären kan ses som en omformulering av ett känt resultat från den vanliga komplexa analysen i det komplexa talplanet, nämligen Liouvilles sats. Detta visar på ett av användningsområdena för Riemannsfären – att ge nya synsätt på analysen i det komplexa talplanet.

EXEMPEL 3.3 (LIOUVILLES SATS). Liouvilles sats, som bland annat kan användas för att visa algebrans fundamentalsats, säger att det inte finns några begränsade icke-konstanta funktioner som är holomorfa på hela $\mathbb{C}$. Betraktar vi en funktion f på $\mathbb{C}$ istället som en funktion $\tilde{f}$ på $\mathbb{C}_\infty$ säger det faktum att f är begränsad att $\tilde{f}$ är begränsad i en omgivning av ∞ och kan därför utvidgas till en holomorf funktion på hela $\mathbb{C}_\infty$ enligt Sats 2.12. Detta medför att $\tilde{f}$ måste vara konstant eftersom Riemannsfären är kompakt. Det följer att f är konstant.

Eftersom det inte finns några icke-konstanta holomorfa funktioner studerar vi istället meromorfa funktioner på Riemannsfären. De rationella funktionerna $f(z) = p(z)/q(z)$, där p och q är polynom, kommer visa sig spela en central roll på Riemannsfären. Faktum är att alla meromorfa funktioner på Riemannsfären är rationella.

SATS 3.4. En funktion på Riemannsfären är meromorf om och endast om den är rationell.

BEVIS. Antag att f är rationell. Att f är meromorf i alla punkter utom ∞ följer av vanlig komplex analys. I punkten ∞ tillämpar vi lemma 3.1 genom att konstatera att även $f(1/z)$ är en rationell funktion, varför $f(1/z)$ är meromorf i 0, vilket medför att f är meromorf i ∞. Vi reder inte ut alla detaljer för att visa omvändningen, att en meromorf funktion f på Riemannsfären måste vara rationell, men idén är att bilda en rationell funktion g med samma nollställen och poler som f, för att sedan konstatera att kvoten f/g är holomorf och därmed konstant då alla holomorfa funktioner på kompakta Riemannytor är konstanta. Då följer att $f = cg$ för någon konstant c, och alltså är f rationell. □

3.2 Komplexa torusar

Vi inleder med att välja två nollskilda komplexa tal ω_1 och ω_2 som har olika argument så att ω_1 och ω_2 är linjärt oberoende över $\mathbb{R}$. Vi skapar sedan ett gitter

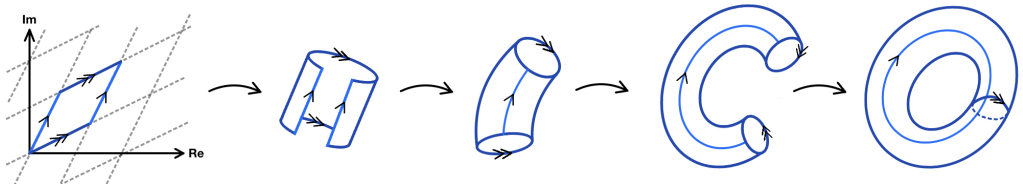
$$L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

av punkter i $\mathbb{C}$ som utgör hörnen i ett rutnät av parallellogram, vars exakta utseende bestäms av talen ω_1 och ω_2. Vi ska nu betrakta det komplexa talplanet, med tillägget att vi identifierar två punkter z_1 och z_2 med varandra om skillnaden $z_1 - z_2$ är ett element i L (jämför med exempel A.22). Detta är en s.k. kvotgrupp (ett begrepp som den läsare som studerat abstrakt algebra lär finna bekant) som vi betecknar $\mathbb{C}/L$, och är mängden vi ska låta bilda en komplex torus. Effekten av denna identifikation blir att ett så kallat fundamentalt parallellogram

$$P = \{\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1)\},$$

räcker för att beskriva alla punkter – eftersom övriga punkter i det komplexa talplanet identifieras med exakt en punkt i P. En visuell intuition för denna identifikation av punkter är att tänka på det som en vandring som börjar någonstans i det fundamentala parallellogrammet. Om vandringen därefter passerar t.ex. dess högra kant, fortsätter den inte ut ur parallellogrammet, utan kommer istället tillbaka från parallellogrammets vänstersida – ungefär som i datorspelet Pac-Man.

Läsaren kanske nu undrar på vilket sätt detta parallellogram har något att göra med den vanliga geometriska bilden av en torus. Svaret är att det går att homeomorft avbilda det fundamentala parallellogrammet på en konventionell torus på det sätt som visas i figur 6. Observera hur de med varandra identifierade kanterna, som kan kännas en smula onaturliga med den abrupta övergången vid en rörelse i parallellogrammet, får en väldigt naturlig betydelse i den slutgiltiga bilden – de motsvarar helt enkelt att man mjukt och utan avbrott fortsätter färdas längs torusen. Vi avstår från att precisera avbildningen från parallellogram till konventionell torus noggrannare, men konstaterar att vi genom slutresultatet på ett mycket naturligt sätt ser hur torusen, till skillnad från Riemannsfären, har ett hål och alltså topologiskt genus $g = 1$.



Figur 6: Skiss som visar hur ett fundamentalt parallellogram är homeomorft med en torus.

Vi ska nu visa att dessa torusar är kompakta Riemannytor (se avsnitt 2.1). Låt $\Lambda = \mathbb{C}/L$ beteckna torusen. Vi definierar en projektionsavbildning $\pi : \mathbb{C} \to \Lambda$, som avbildar varje tal $z \in \mathbb{C}$ på motsvarande element i kvotgruppen Λ. Intuitivt kan detta förstås som att vi flyttar talet z till motsvarande punkt i det fundamentala parallellogrammet P. Topologin på torusen fås genom kvottopologin inducerad av π, dvs. en mängd på torusen är öppen om motsvarande mängd i $\mathbb{C}$ är öppen (se avsnitt A.2.5). Detta gör π till en kvotavbildning, och alltså blir Λ sammanhängande eftersom $\mathbb{C}$, som ju avbildas på Λ, är sammanhängande. Notera även att tillslutningen till det fundamentala parallellogrammet, $\bar{P} = \{\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]\}$, är kompakt i $\mathbb{C}$ (se Sats A.30),

varför även Λ måste vara kompakt eftersom kvotavbildningen π avbildar $\bar{P}$ på Λ. Att Λ uppfyller andra uppräknelighetsaxiomet och är Hausdorff följer av att $\mathbb{C}$ besitter båda egenskaperna.

Med de topologiska kraven för att definiera en kompakt Riemannyta nu avklarade riktar vi vår uppmärksamhet mot att definiera kartor och en komplex struktur på torusen. Detta ska vi göra med hjälp av lokala inverser till projektionsavbildningen π. Eftersom L är en diskret mängd finns nämligen ett tillräckligt litet $\epsilon > 0$ sådant att för varje $z_0 \in \mathbb{C}$ blir restriktionen

$$\pi|_{D_{z_0}} : D_{z_0} \to \pi(D_{z_0})$$

bijektiv på cirkelskivan $D_{z_0} = D(z_0, \epsilon)$ med radie ϵ och centrum i z_0. Eftersom π är en kvotavbildning blir $\pi|_{D_{z_0}}$ en homeomorfi. För varje sådan restriktion $\pi|_{D_{z_0}}$ definierar vi en karta $\phi_{z_0} : \pi(D_{z_0}) \to D_{z_0}$ på Λ som utgörs av inversen till $\pi|_{D_{z_0}}$.

Uppenbarligen täcker definitionsmängderna av dessa kartor hela Λ, och vi ska nu också till sist se att de är kompatibla. Tag två kartor $\phi_{z_1} : \pi(D_{z_1}) \to D_{z_1}$ och $\phi_{z_2} : \pi(D_{z_2}) \to D_{z_2}$, vars definitionsmängder överlappar på den icke-tomma mängden $U = \pi(D_{z_1}) \cap \pi(D_{z_1})$. Vi vill visa att övergångsfunktionen $T = \phi_{z_2} \circ \phi_{z_1}^{-1} : \phi_{z_1}(U) \to \phi_{z_2}(U)$ är holomorf. Notera att $T(z) = \phi_{z_2}(\pi(z))$ och $\pi(T(z)) = \pi(z)$ vilket medför att $T(z) = z + \omega(z)$ för någon funktion $\omega : \phi_{z_1}(U) \to L$, dvs. en funktion vars värden endast består av gitterpunkter. Funktionen T är en sammansättning av homeomorfier och därmed är kontinuerlig. Eftersom $\omega(z) = T(z) - z$ måste då även ω vara kontinuerlig. En kontinuerlig funktion med diskret målmängd kan dock inte vara annat än konstant på de sammanhängande komponenterna av dess definitionsmängd (eftersom det inte går att erhålla punkter godtyckligt nära andra punkter i en sådan målmängd). På varje sammanhängande komponent av U följer det att $T(z) = z + \omega$ för något fixt $\omega \in L$, och T är därför holomorf. Detta visar att kartorna är kompatibla, och därmed har vi definierat en komplex struktur på den komplexa torusen och visat att den är en kompakt Riemannyta.

Vi ska till sist notera att det räcker med att begränsa oss till gitter på formen $L = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ där $\mathrm{Im}(\tau) > 0$. I princip beror detta på att vi alltid kan rotera det fundamentala parallellogrammet så att den ena sidan ligger längs realaxeln.

Sats 3.5. Varje torus på formen $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2)$ med ω_1, ω_2 linjärt oberoende över $\mathbb{R}$ är biholomorf med en torus på formen $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ där $\mathrm{Im}(\tau) > 0$.

3.2.1 Funktioner på torusar

På grund av identifikationen att alla punkter $z \in \mathbb{C}$ som skiljer med en punkt i ett gitter L betraktas som samma på en torus $\Lambda = \mathbb{C}/L$ finns en korrespondens mellan funktioner på torusen och L-periodiska funktioner i det komplexa talplanet, dvs. funktioner f sådana att $f(z+\omega) = f(z)$ för alla $z \in \mathbb{C}$ och $\omega \in L$. För en funktion f på en komplex torus ges motsvarande L-periodiska funktion h på $\mathbb{C}$ av $h = f \circ \pi$ där π är torusens projektionsavbildning.

Precis som för Riemannsfären medför Sats 2.20 att det inte finns några icke-konstanta holomorfa funktioner på (den kompakta) torusen. Vi söker istället meromorfa funktioner. Man skulle kunna tänka sig att det vore möjligt att konstruera meromorfa funktioner som kvoter av L-periodiska holomorfa funktioner på $\mathbb{C}$. Problemet är dock att varje L-periodisk holomorf funktion på $\mathbb{C}$ i sig blir holomorf på Λ, vilket tvingar funktionen att vara konstant. Sådana kvoter ger alltså återigen inget annat än konstanta funktioner. Vi ska dock visa att det går att bilda kvoter av funktioner som i sig själva inte är L-periodiska, men vars kvoter ändå blir det. För att göra detta använder vi den s.k. theta-funktionen.

Definition 3.6 (Theta-funktionen). Givet ett $\tau \in \mathbb{C}$ med $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ definieras **theta-funktionen** som

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2\tau + 2nz)}.$$

För att använda denna till att konstruera meromorfa funktioner på torusen kommer vi använda följande resultat.

Sats 3.7 (Theta-funktionens egenskaper). Låt $\tau \in \mathbb{C}$ med $\operatorname{Im}(\tau) > 0$. Då gäller följande:

i) Theta-funktionen konvergerar absolut och likformigt på kompakta delmängder till $\mathbb{C}$.

ii) För alla $z \in \mathbb{C}$ gäller att $\theta(z+1) = \theta(z)$.

iii) För alla $z \in \mathbb{C}$ gäller att $\theta(z+\tau) = e^{-i\pi(\tau+2z)}\theta(z)$.

iv) Talet $z_0 \in \mathbb{C}$ är ett nollställe till θ om och endast om $z_0 + m + n\tau$ är ett nollställe till θ för varje $m, n \in \mathbb{Z}$. Dessutom är ordningen av nollstället vid z_0 samma som ordningen vid $z_0 + m + n\tau$.

v) De enda nollställena z till θ är enkla nollställen i $z = 1/2 + \tau/2 + m + n\tau$ för $m, n \in \mathbb{Z}$.

Egenskap i) medför att θ är holomorf, eftersom varje term i serien är det. Egenskaperna ii) och iii) visar att theta-funktionen är nästan, men inte riktigt L-periodisk, något som gör den ideal för att konstruera våra meromorfa funktioner mot bakgrund av problemen som diskuterats ovan.

Vidare gör egenskap v) att vi kan konstruera en theta-funktion med nollställen precis i punkterna $\{x + \omega \mid \omega \in L\}$ för godtyckligt $x \in \mathbb{C}$ genom translationen

$$\theta^{(x)}(z) = \theta(z - x - 1/2 - \tau/2).$$

På samma sätt som man med hjälp av produkter och kvoter av linjära polynom kan bilda meromorfa funktioner i det komplexa talplanet (eller på Riemannsfären) ska vi nu visa att vi kan låta dessa translaterade theta-funktioner spela motsvarande roll för att bilda meromorfa funktioner på komplexa torusar.

Sats 3.8. En funktion f på en komplex torus $\Lambda = \mathbb{C}/L$ är meromorf om och endast om motsvarande L-periodiska funktion $h = f \circ \pi$ på $\mathbb{C}$ kan skrivas

$$h(z) = a \prod_{j=1}^{d} \frac{\theta^{(x_j)}(z)}{\theta^{(y_j)}(z)} \tag{1}$$

där $a \in \mathbb{C}$, $d \in \mathbb{N}$ och $(x_j)_{j=1}^d$ och $(y_j)_{j=1}^d$ är följder av komplexa tal (med upprepningar tillåtna) sådana att $\sum_{j=1}^d x_j = \sum_{j=1}^d y_j$.[4]

Notera här att det krävs att f har lika många poler som nollställen för att kunna vara meromorf, precis i enlighet med Sats 2.18.

För att visa satsen behöver vi följande lemma, som kan visas med Residysatsen och en integralberäkning över ett lämpligt parallellogram. Detaljerna återfinns i appendix A.4.2.

Lemma 3.9. Låt $\Lambda = \mathbb{C}/L$ och f vara meromorf på Λ. Då gäller, som en likhet på Λ,

$$\sum_{x \in \Lambda} x \operatorname{ord}_x(f) = 0.$$

Bevis av Sats 3.8. Enligt Sats 3.5 räcker det att betrakta $L = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ med $\operatorname{Im}(\tau) > 0$. Antag först att h är på formen av ekvation (1). Enligt Sats 3.7 är då h meromorf på $\mathbb{C}$ och $h(z+1) = h(z)$. För att visa att f är meromorf på Λ räcker då att visa att $h(z+\tau) = h(z)$, eftersom upprepning av detta och $h(z+1) = h(z)$ sedan ger den sökta L-periodiciteten. Av egenskap iii) i Sats 3.7 fås:

$$\begin{aligned} h(z+\tau) = a \prod_{j=1}^{d} \frac{\theta^{(x_j)}(z+\tau)}{\theta^{(y_j)}(z+\tau)} = a \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{-2\pi i(z-x_j)}\theta^{(x_j)}(z)}{e^{-2\pi i(z-y_j)}\theta^{(y_j)}(z)} = \\ = a \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{d} y_j - 2\pi i \sum_{j=1}^{d} x_j\right) \cdot \prod_{j=1}^{d} \frac{\theta^{(x_j)}(z)}{\theta^{(y_j)}(z)} = h(z). \end{aligned}$$

[4] Vi använder i denna text den inom den svenska skolan gängse konventionen att $0 \in \mathbb{N}$. I de fall s.k. tomma produkter på formen $\prod_{j=1}^{0}$ eller tomma summor på formen $\sum_{j=1}^{0}$ förekommer avses att dessa har värdet 1 respektive 0. Tomma följder på formen $(x_j)_{j=1}^0$ saknar element.

Antag nu istället att f är en meromorf funktion på Λ. Enligt Sats 2.18 har f lika många poler som nollställen. Låt då $(p_j)_{j=1}^d$ vara nollställena och $(q_j)_{j=1}^d$ vara polerna till f, där $p_j, q_j \in \Lambda$ och $d \in \mathbb{N}$. Notera nu att Lemma 3.9 medför $\sum_{j=1}^d p_j - \sum_{j=1}^d q_j = 0$, eftersom eventuell upprepning i följderna (p_j) och (q_j) precis motsvarar att multiplicera med ordningen i en given punkt. Då varje punkt på Λ har många representanter i $\mathbb{C}$ går det att välja komplexa tal $(x_j)_{j=1}^d$ och $(y_j)_{j=1}^d$ som representanter till (p_j) och (q_j) (dvs. $\pi(x_j) = p_j$ och $\pi(y_j) = q_j$) sådana att $\sum_{j=1}^d x_j = \sum_{j=1}^d y_j$. Vi kan då konstruera funktionen

$$\tilde{g}(z) = \prod_{j=1}^{d} \frac{\theta^{(x_j)}(z)}{\theta^{(y_j)}(z)},$$

som enligt vad vi visat i föregående fall, motsvarar en meromorf funktion g på Λ. Eftersom f och g har exakt samma poler och nollställen blir kvoten f/g holomorf på Λ, och då Λ är kompakt medför detta att f/g är konstant (Sats 2.20). Vi kan alltså skriva $f/g \equiv a$ för något $a \in \mathbb{C}$. Det följer att h kan skrivas på formen (1). □

3.2.2 Karakterisering av torusar

Som framgår av diskussionen om genus i avsnitt 2.5 finns det i topologisk mening endast en torus – alla Riemannytor med genus $g = 1$ är homeomorfa med varandra. Vi presenterar dock i detta avsnitt ett något förvånande resultat: att den komplexa strukturen kan skilja från torus till torus, dvs. att två torusar inte nödvändigtvis är biholomorfa med varandra. Vi hänvisar läsaren till [**Milne**] för beviset av detta påstående.

Sats 3.10. Torusarna $\Lambda_1 = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau_1\mathbb{Z})$ och $\Lambda_2 = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau_2\mathbb{Z})$ är biholomorfa om och endast om

$$\tau_2 = \frac{a\tau_1 + b}{c\tau_1 + d}$$

för några $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ sådana att $ad - bc = \pm 1$.

4 Riemann-Rochs sats: två specialfall

Målet med följande avsnitt är att bevisa Riemann-Rochs sats för Riemannsfären samt för komplexa torusar. För att kunna beskriva Riemann-Rochs sats introducerar vi några nya begrepp som tillåter oss att tala om poler och nollställen till meromorfa funktioner på ett mer precist och effektivt sätt. Ett av dessa begrepp är *divisorer* som spelar en central roll i Riemann-Rochs sats. Stora delar av avsnittet baseras på kapitel V.1, V.2 och V.3 i [**Miranda**].

4.1 Divisorer

Definition 4.1 (Divisor). Låt X vara en Riemannyta. En **divisor** är en funktion $D : X \to \mathbb{Z}$ med diskret stöd. Med stödet till en funktion $D : X \to \mathbb{Z}$ avses mängden $\{x \in X | D(x) \neq 0\}$.

Ofta betecknar man en divisor

$$\sum_{p \in X} D(p) \cdot p.$$

Observera att detta är en symbolisk representation snarare än en faktisk summa med ett bestämt värde — en s.k. *formell summa*.

Definition 4.2 (Graden av en divisor). Om X är en kompakt Riemannyta definieras **graden av en divisor** $D : X \to \mathbb{Z}$ av

$$\deg(D) = \sum_{p \in X} D(p).$$

Detta är däremot en normal summa som är lika med ett väldefinierat ändligt heltal. Det beror på att det diskreta stödet för kompakta Riemannytor är ändligt.

4.1.1 Principala divisorer och linjär ekvivalens

Definition 4.3 (Divisor av en meromorf funktion). **Divisorn av en meromorf funktion** $f \not\equiv 0$ är en divisor som ges av

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(f) \cdot p.$$

Divisorer som kan skrivas på denna form kallas **principala divisorer**.

Definition 4.4 ($L(D)$). Rummet av meromorfa funktioner med poler begränsade av D ges av

$$L(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\} \mid \operatorname{div}(f) \geq -D\} \cup \{0\}.$$

Rummet $L(D)$ består alltså av alla meromorfa funktioner som, för varje punkt p i X, har en pol av ordning högst $D(p)$. Om $D(p)$ är negativt för någon punkt p måste det i p istället finnas ett nollställe av ordning minst $|D(p)|$. Ju större D är desto färre begränsningar ställs på funktionerna i $L(D)$ och fler funktioner inkluderas. Vi anmärker därför att om $D_1 \leq D_2$ är $L(D_1) \subseteq L(D_2)$. Ett konkret exempel på ett rum begränsat av en divisor är $L(0)$. Det består av alla meromorfa funktioner utan poler, dvs. de holomorfa funktionerna. På kompakta Riemannytor är dessa exakt de konstanta funktionerna.

Rummet $L(D)$ är väldigt centralt i Riemann-Rochs sats. Det är nämligen dimensionen av detta komplexa vektorrum som relateras till det topologiska genuset hos en Riemannyta. Nedan visar vi att $L(D)$ faktiskt är ett komplext vektorrum.

Lemma 4.5. $L(D)$ är ett komplext vektorrum.

Bevis. Om f tillhör $L(D)$ vet vi att $\operatorname{div}(f) \geq -D$, men eftersom

$$\operatorname{div}(cf) = \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(cf) \cdot p = \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(f) \cdot p = \operatorname{div}(f),$$

vet vi även att cf tillhör $L(D)$, och $L(D)$ är alltså slutet under skalär multiplikation. Antag nu att f och g är i $L(D)$. Vi får med hjälp av Lemma 2.17 att

$$\operatorname{div}(f+g) = \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(f+g) \cdot p \geq \sum_{p \in X} \min(\{\operatorname{ord}_p(f), \operatorname{ord}_p(g)\}) \cdot p \geq -D.$$

Vi vet således att $f + g$ tillhör $L(D)$ och därmed att $L(D)$ är slutet under addition. Resterande krav för ett komplext vektorrum följer direkt från definitionen. □

Som tidigare nämnts är vi intresserade av dimensionen av $L(D)$. Vi betraktar nedan en ekvivalensrelation på divisorer som dyker upp naturligt och som uppfyller att dimensionen av $L(D)$ bevaras inom varje ekvivalensklass. Vi påminner läsaren om att en kortfattad beskrivning av ekvivalensrelationer och ekvivalensklasser finns i appendix A.1.

Definition 4.6 (Linjär ekvivalens för divisorer). Två divisorer D_1 och D_2 på en Riemannyta X sägs vara **linjärt ekvivalenta**, $D_1 \sim D_2$, om differensen $D_1 - D_2$ är en principal divisor.

Lemma 4.7. Låt X vara en Riemannyta. Då gäller:

1. Relationen som definieras ovan, $D_1 \sim D_2$, är en ekvivalensrelation på mängden av alla divisorer på X.
2. En divisor är linjärt ekvivalent med 0 om och endast om det är en principial divisor.
3. Om X är kompakt gäller att linjärt ekvivalenta divisorer har samma grad, dvs. om $D_1 \sim D_2$ gäller att $\deg(D_1) = \deg(D_2)$.

Bevis. För att visa att denna relation är en ekvivalensrelation behöver vi visa reflexivitet, symmetri och transitivitet. Reflexivitet följer från att $D = 0$ är en principal divisor som definieras av någon nollskild konstant funktion. Symmetriegenskapen följer från att $f \not\equiv 0$ är meromorf om och endast om $1/f$ är meromorf. Transitivitet kan visas genom att anta att $D_1 - D_2 = \operatorname{div}(f)$ och $D_2 - D_3 = \operatorname{div}(g)$, där f och g är meromorfa funktioner. Vi får då att $D_1 - D_3 = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g) = \operatorname{div}(fg)$. Alltså är relationen transitiv och därmed en ekvivalensrelation. Att en divisor är principal om och endast om den är linjärt ekvivalent med 0 följer direkt från definitionen. Om $D_1 \sim D_2$ gäller att $D_1 - D_2 = \operatorname{div}(f)$. På kompakta ytor gäller då att $\deg(D_1) = \deg(D_2)$ eftersom $\deg(f) = 0$ på kompakta Riemannytor. □

Sats 4.8. Om två divisorer D_1 och D_2 på X är linjärt ekvivalenta så finns det en linjär bijektiv avbildning mellan vektorrummen $L(D_1)$ och $L(D_2)$.

Bevis. Antag att D_1 och D_2 är linjärt ekvivalenta. Vi kan då skriva $D_1 - D_2 = \operatorname{div}(h)$ för en meromorf funktion h som inte är identiskt lika med 0. Låt nu μ_h vara avbildningen $\mu_h : L(D_1) \to L(D_2)$ som multiplicerar ett element i $L(D_1)$ med den meromorfa funktionen h. Om f är i $L(D_1)$ så gäller att $\operatorname{div}(f) \geq -D_1$. Vi har $\operatorname{div}(hf) = \operatorname{div}(h) + \operatorname{div}(f) \geq \operatorname{div}(h) - D_1 = -D_2$. Alltså avbildar μ_h element från $L(D_1)$ till $L(D_2)$. Det är enkelt att kontrollera att $\mu_{1/h}$ är en invers till μ_h, och därmed är μ_h en bijektiv linjär avbildning. □

Korollarium 4.9. Om två divisorer D_1 och D_2 på X är linjärt ekvivalenta så är

$$\dim L(D_1) = \dim L(D_2)$$

4.1.2 Kanoniska divisorer

Hittills har vi sett att meromorfa funktioner ger divisorer, så kallade principala divisorer. Det är även användbart att definiera divisorer utifrån meromorfa 1-former.

Definition 4.10 (Divisor av en meromorf 1-form). Divisorn av en meromorf 1-form ω är en divisor som ges av

$$\operatorname{div}(\omega) = \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(\omega) \cdot p.$$

Divisorer på den här formen kallas **kanoniska divisorer**.

Dessa spelar en central roll i Riemann-Rochs sats, då det är med hjälp av kanoniska divisorer som vi kan relatera dimensionen av vektorrummet till det topologiska genuset.

Sats 4.11. Alla kanoniska divisorer är linjärt ekvivalenta.

Bevis. Låt $\omega_1 = g_1(z)dz$ och $\omega_2 = g_2(z)dz$. Enligt Lemma 2.31 är då $\omega_1 = f\omega_2$, där f är den meromorfa funktionen $f = g_2/g_1$. Det gäller även att $\operatorname{div}(\omega_1) = \operatorname{div}(f\omega_2) = \operatorname{div}(\omega_2) + \operatorname{div}(f)$. Alltså skiljer sig divisorerna av två godtyckliga meromorfa 1-former $\operatorname{div}(\omega_1)$ och $\operatorname{div}(\omega_2)$ med en principal divisor, eftersom $\operatorname{div}(f)$ är just en principal divisor enligt Definition 4.3. Alla kanoniska divisorer är därför linjärt ekvivalenta. □

Korollarium 4.12. Låt X vara en kompakt Riemannyta. Då är dimensionen av $L(K)$ konstant för alla kanoniska divisorer K på X.

Bevis. Enligt Sats 4.11 gäller att alla kanoniska divisorer är linjärt ekvivalenta med varandra. Det ger med Korollarium 4.9 att satsen stämmer. □

Sats 4.13. Antag att D är en principal divisor och att $D - K$ är en principal divisor. Då är även K en principal divisor.

Bevis. Divisorerna $D - K$ och D kan skrivas som $D - K = \operatorname{div}(h)$ respektive $D = \operatorname{div}(f)$, där f och h är meromorfa funktioner som inte är identiskt lika med 0. Då är $K = D - (D - K) = \operatorname{div}(f) - \operatorname{div}(h) = \operatorname{div}(f/h)$, så K är en principal divisor. □

4.2 Riemann-Rochs sats i allmänhet

Vi är nu redo att formulera Riemann-Rochs sats för generella Riemannytor – ett viktigt resultat som inte kommer att visas i detta arbete.

Sats 4.14. Låt X vara en Riemannyta med genus g och låt K vara en kanonisk divisor på X. Då gäller att det $\dim L(K) = g$.

Sats 4.15 (Riemann-Rochs sats). Om D är en divisor, och K är en kanonisk divisor på en kompakt Riemannyta X, gäller att

$$\dim\ L(D) - \dim\ L(K - D) = \deg(D) - g(X) + 1.$$

Det anmärkningsvärda med denna sats är att $g(X) = \dim L(K)$ sammanfaller med det topologiska genuset som i sin tur räknar antalet hål på en yta. Vi kan alltså, genom att veta det topologiska genuset på en yta, väsentligen tala om hur många meromorfa funktioner det finns med godtyckliga begränsningar på funktionens poler. Ett annat sätt att se resultatet i Sats 2.18 är genom att sätta $D = 0$. Då kan vi se att Riemann-Rochs sats säger att rummet av de holomorfa funktionerna $L(0)$ bara består av de konstanta funktionerna.

4.3 Riemann-Roch på Riemannsfären

För att visa Riemann-Rochs sats på Riemannsfären behöver vi kunna koppla $\dim L(D)$ till $\deg(D)$. För divisorer på Riemannsfären kan det göras genom att beskriva $L(D)$ på ett alternativt sätt.

Sats 4.16 (Beräkning av $L(D)$ på Riemannsfären.). Låt D vara en divisor på Riemannsfären med $\deg(D) \geq 0$, så att vi kan skriva

$$D = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \lambda_i \quad + \quad e_\infty \cdot \infty$$

med distinkta $\lambda_i \in \mathbb{C}$ och $\sum e_i + e_\infty \geq 0$, och låt $f_D(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - \lambda_i)^{-e_i}$. Då är

$$L(D) = \{g(z)f_D(z) \mid g(z) \text{ är ett polynom av grad högst } \deg(D)\}.$$

Bevis. Låt $V_{f_D} = \{g(z)f_D(z) \mid g(z) \text{ är ett polynom av grad högst } \deg(D)\}$. Vi vill visa att $L(D) = V_{f_D}$. Låt nu $g(z)$ vara ett polynom av grad $d \leq \deg(D)$. Vi kan skriva $\operatorname{div}(f_D) = \sum_{i=1}^{n} -e_i \cdot \lambda_i + \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \infty$, vilket ger:

$$\operatorname{div}(g(z)f_D(z)) + D = \operatorname{div}(g) + \operatorname{div}(f_D) + D \geq \sum_i (e_i + e_\infty - d) \cdot \infty = (\deg(D) - d) \cdot \infty \geq 0.$$

Alltså är rummet V_{f_D} ett delrum till $L(D)$. Betrakta nu $h(z) \in L(D)$ och låt $g(z) = h(z)/f_D(z)$. Vi får att:

$$\operatorname{div}(g) = \operatorname{div}(h) - \operatorname{div}(f_D) \geq -D - \operatorname{div}(f_D) = (-\sum_i e_i - e_\infty) \cdot \infty = -\deg(D) \cdot \infty.$$

Alltså har g inga poler i den ändliga delen av Riemannsfären $\mathbb{C}$ och har en pol av högst grad $\deg(D)$ i ∞. Därmed är g ett polynom av högst grad $\deg(D)$. Det innebär att $L(D)$ är ett delrum till V_{f_D}, och därmed måste de vara lika, dvs. $V_{f_D} = L(D)$. □

Detta ger ett lätt sätt att ta reda på $\dim L(D)$ givet $\deg(D)$ för en divisor på Riemannsfären.

Korollarium 4.17. På Riemannsfären ges dimensionen av $L(D)$ av

$$\dim(L(D)) = \begin{cases} 0 & \text{om } \deg(D) < 0, \\ 1 + \deg(D) & \text{om } \deg(D) \geq 0. \end{cases}$$

Med det här korollariumet i verktygslådan kan vi visa Riemann-Rochs sats för Riemannsfären. Vi börjar med att påminna om att $g = \dim L(K)$ för en kanonisk divisor K.

Sats 4.18 (Riemann-Roch på Riemannsfären). Låt D vara en divisor på Riemannsfären och låt K vara en kanonisk divisor. Då gäller

$$\dim\, L(D) - \dim\, L(K - D) = \deg(D) - g + 1,$$

Bevis. Korollarium 4.17 utgör grunden för följande bevis. Från Sats 4.11 vet vi att $\deg(K)$ är oberoende av K, då alla kanoniska divisorer skiljer sig med en principal divisor som har grad 0. Vi undersöker $K = \operatorname{div}(\omega)$ där $\omega = dz$. Denna 1-form är holomorf i hela $\mathbb{C}$ så det återstår att undersöka oändlighetspunkten. Vi gör därför ett koordinatbyte $w = 1/z$ och får då $\omega_1 = -\frac{1}{w^2}dw$. 1-formen ω är alltså meromorf på Riemannsfären och har en dubbelpol i $\omega = 0$, dvs. $z = \infty$, vilket ger oss att $\deg(\operatorname{div}(\omega)) = -2$. Detta leder enligt Korollarium 4.17 till att $g = \dim L(K) = 0$ och vi kan därmed reducera problemet till att visa att

$$(\star) \quad \dim\, L(D) - \dim\, L(K - D) = \deg(D) + 1.$$

Strategin härifrån är att falluppdela beroende på värdet av $\deg(D)$. Antag först att $\deg(D) \leq -2$. Vi får då att $\deg(K - D) = -2 - \deg(\mathrm{D}) \geq 0$. Enligt satsen ovan är då

$$\dim L(0) - \dim L(K - 0) = 0 - \dim L(K - D) = -\deg(K) + \deg(D) - 1 = \deg(D) + 1,$$

vilket visar $(\star)$ i detta fallet. Antag nu att $\deg(D) = -1$. Då blir $\deg(K - D) = -1 < 0$ och båda leden i $(\star)$ blir alltså lika med noll enligt Korollarium 4.17. För $\deg(D) \geq 0$ får vi att $\deg(K-D) < 0$ och därför gäller att $\dim L(0) - \dim L(K - 0) = \deg(D) + 1$, vilket visar $(\star)$ även i detta fallet. Vi har därmed visat att likheten gäller för alla grader av D. □

4.4 Riemann-Roch på komplexa torusar

Hur vi visar Riemann-Rochs sats för komplexa torusar liknar till stor del hur satsen på Riemannsfären visas. Sättet vi relaterar $\dim L(D)$ till $\deg(D)$ skiljer sig dock ganska markant. Vi behöver först prata lite mer om divisorer på komplexa torusar och visa några hjälpsatser. Mer precist kommer vi visa Abels sats, som ger ett villkor för när divisorer på en torus är principala.

4.4.1 Hjälpsatser

Definition 4.19 ($A(D)$ på en torus). Låt X vara en torus $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$. Vi definierar då avbildningen $A : \operatorname{Div}(X) \to X$ som tar en divisor skriven som den formella summan

$$D = \sum_p n_p \cdot p$$

till den faktiska summan

$$A(D) = \sum_p n_p \cdot p \in \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau).$$

Vi kan omformulera Sats 3.8 med hjälp av divisorer för att få följande resultat.

Sats 4.20 (Abels sats för komplexa torusar). En divisor D på en komplex torus $\Lambda = \mathbb{C}/L$ är principal om och endast om $\deg(D) = 0$ och $A(D) = 0$.

Bevis. Vi börjar med att anta att D är en principal divisor, dvs. $D = \operatorname{div}(f)$ för någon meromorf funktion f på Λ som inte är identiskt lika med noll. Det följer då omedelbart att $\deg(D) = 0$ och $A(D) = 0$ enligt Sats 2.18 och Lemma 3.9.

Antag nu istället att D är en divisor med $\deg D = 0$ och $A(D) = 0$. Eftersom $\deg(D) = 0$ kan vi para ihop punkter i D:s stöd (om sådana finns) och skriva $D = \sum_{j=0}^{d} p_j - \sum_{j=0}^{d} q_j$ där $(p_j)_{j=0}^{d}$ och $(q_j)_{j=0}^{d}$ är följder av punkter (eventuellt med upprepning) på Λ och $d \in \mathbb{N}$. På samma sätt som i

beviset av Sats 3.8 kan vi välja komplexa tal $(x_j)_{j=1}^d$ och $(y_j)_{j=1}^d$ som representanter till (p_j) och (q_j) sådana att $\sum_{j=1}^d x_j = \sum_{j=1}^d y_j$ och konstruera en kvot av theta-funktioner som motsvarar en meromorf f på Λ. Vi kan då skriva $D = \operatorname{div}(f)$, och alltså är D principal. □

Sats 4.21. Låt D vara en divisor med $\deg(D) > 0$ på en komplex torus Λ. Då är D linjärt ekvivalent med en positiv divisor. Om $\deg(D) = 1$ är $D \sim q$ för en unik punkt $q \in \Lambda$. Om $\deg(D) > 1$ gäller det för varje punkt $x \in \Lambda$ att det finns en positiv divisor E som är linjärt ekvivalent med D och saknar x i sitt stöd.

Bevis. Låt $\deg(D) = d > 0$ och låt $E = D - (d-1)p - q$ vara en divisor där p och q är två godtyckliga punkter på Λ. Det är klart att E har grad 0 och genom att ta $q = A(D - (d-1)p)$ erhålls $A(E) = 0$. Det följer från satsen ovan att E är principal och därmed att D är linjärt ekvivalent med $(d-1)p + q$ och i synnerhet är D linjärt ekvivalent med q om $d = 1$. Slutligen kan p varieras i syfte att undvika en godtycklig punkt $x \in \Lambda$ i det fall $\deg(D) > 1$. □

Lemma 4.22. Riemannsfären är inte biholomorf med någon komplex torus.

Bevis. Låt D vara divisorn $p + q$ där p och q är två punkter på en torus med $p \neq q$. Enligt abels sats finns då inga meromorfa funktioner i $L(D)$. Antag att det finns en biholomorf avbildning f mellan den komplexa torusen och Riemannsfären. Betrakta divisorn $E = f(p) + f(q)$. Då finns enligt 4.17 en meromorf funktion g i $L(E)$ som inte är identisk lika med 0. Funktionen $g \circ f$ är dock enligt Lemma A.37 en meromorf funktion i $L(D)$ vilket är en motsägelse. □

Komplexa torusar har den speciella egenskapen att alla kanoniska divisorer är principala och vice versa.

Lemma 4.23. På en komplex torus är 1-formen dz oberoende av karta.

Bevis. Låt $f(z) = 1$ och $\omega_1 = f(z)dz = dz$. Vi har i avsnitt 3.2 visat att övergångsfunktionerna för en torus ges av $T(z) = z + c$ så $T'(z) = 1$. Under koordinatbyte får vi alltså $\omega_2 = f(T(w))T'(w)dw = dw$ och 1-formen är därmed oberoende av val av karta. □

Sats 4.24. På en komplex torus är en divisor principal om och endast om den är kanonisk.

Bevis. Låt Λ vara en komplex torus. Om en divisor D är principal kan vi låta $D = \operatorname{div}(f)$ för någon meromorf funktion f på Λ. Låt $\omega = f(z)dz$, vilket blir en meromorf 1-form på Λ eftersom $f(z)$ är en meromorf funktion på Λ och dz är en meromorf 1-form på Λ. Då får vi

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(f) \cdot p = \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(\omega) \cdot p = \operatorname{div}(\omega).$$

Alltså är alla principala divisorer kanoniska. Omvänt, om en divisor är kanonisk så kan vi skriva $D = \operatorname{div}(\omega_1)$ för någon 1-form ω_1. Enligt Lemma 2.31 gäller för alla 1-former ω_2 på Λ att $\omega_1 = f\omega_2$ för någon meromorf funktion f. Särskilt kan vi enligt Lemma 4.23 välja $\omega_2 = dz$, vilket ger oss att $\omega_1 = f(z)dz$, och vi kan nu konstatera att alla kanoniska divisorer är principala. □

Sats 4.25 (Beräkning av $\dim L(D)$ på en torus). Låt $\Lambda = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$ vara en komplex torus och D en divisor på Λ. Då gäller att:

i) Om $\deg(D) < 0$ gäller att $L(D) = \{0\}$.

ii) Om $\deg(D) = 0$ och $D \sim 0$ är $\dim L(D) = 1$.

iii) Om $\deg(D) = 0$ och $D \nsim 0$ är $L(D) = \{0\}$.

iv) Om $\deg(D) > 0$ gäller att $\dim L(D) = \deg(D)$.

Bevis. De fyra fallen behandlas separat nedan.

i) Funktioner i $L(D)$ uppfyller $\operatorname{div}(f) \geq -D$ samt är meromorfa. Detta innebär att $\deg(\operatorname{div}(f)) > 0$ men alla meromorfa funktioner på en torus har $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$, alltså finns det inga funktioner i $L(D)$ och $\dim L(D) = 0$

ii) Om $D \sim 0$ och $\deg(D) = 0$ så är D på formen $D = -\mathrm{div}(f)$. Alltså är $f \in L(D)$. Antag nu att vi har en godtycklig funktion $g \in L(D)$. Detta medför att $D + \mathrm{div}(g) \geq 0 = D + \mathrm{div}(f)$. Alltså är $\mathrm{div}(g) - \mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(g/f) \geq 0$ vilket betyder att alla ordningar $\mathrm{ord}_p(g/f) \geq 0$ och g/f har då inte några poler. Det innebär att g/f är holomorf. Torusen Λ är en kompakt Riemannyta, och enligt Sats 2.20 vet vi att alla holomorfa funktioner på kompakta Riemannytor är konstanta. Därmed kan vi skriva $g/f = c$ där c är en konstant, vilket medför att $g = cf$. Eftersom alla funktioner kan skrivas som en skalärmultipel av en funktion f måste dimensionen på rummet vara ett, och det gäller därmed att $\dim L(D) = 1$.

iii) Antag nu att $D \nsim 0$ och $\deg(D) = 0$. Om $g \in L(D)$ och $g \not\equiv 0$ gäller att $\mathrm{div}(g) + D \geq 0$ och $\deg(\mathrm{div}(g) + D) = 0$ vilket i sin tur medför att $\mathrm{div}(g) + D = 0$. Men detta kunde inte stämma enligt vårt antagande om att $D \nsim 0$ och alltså är $L(D) = \{0\}$.

iv) Detta bevisas med induktion. Vi börjar med basfallet, när $\deg(D) = 1$. Enligt Sats 4.21 gäller att D är linjärt ekvivalent med en positiv divisor, och vi kan därför anta att $D = p$ för en punkt $p \in \Lambda$. Det gäller att $\dim L(D) \geq 1$ då de konstanta funktionerna tillhör $L(D)$. Antag nu att $L(D)$ innehåller en icke-konstant meromorf funktion f måste f ha en pol – utan poler hade f varit konstant. Ordningen på polerna är begränsade av D, dvs. av p. Eftersom vi antagit att $\deg(D) = 1$ måste f ha en enkel pol i p. Graden av avbildningen som associeras med funktionen, $F : \Lambda \to \mathbb{C}_\infty$ ges av $\deg(F) = \mathrm{mult}_p(F) = -\mathrm{ord}(f) = 1$. Då F har grad 1 är det enligt korollarium 2.26 en biholomorfi mellan ytornas som enligt Lemma 4.22 är en motsägelse. Motsägelsen medför att endast konstanta funktioner kan tillhöra $L(D)$, och dimensionen av rummet de spänner är $1 = \deg(D)$.

Nu behandlar vi fallet $\deg(D) > 1$ med hjälp av induktion. Antag att $\deg(D) = d > 1$ och skriv $D = D_1 + p$ för någon divisor D_1, där $\deg(D_1) = d - 1$ och p är en punkt. Antag nu att $\dim L(D_1) = d - 1$. Enligt Sats 4.21 är det möjligt att hitta en positivt divisor $E \sim D$ som inte har p i sitt stöd. Låt nu f vara en meromorf funktion på Λ där $\mathrm{div}(f) = E - D$, vilket per definition innebär att $f \in L(D)$. Vi får att $\mathrm{div}(f) + D_1 = E - D + D_1 = E - p$, vilket inte är ickenegativ då p inte finns i stödet till E. Detta innebär att $f \notin L(D_1)$. Eftersom $f \in L(D)$ och $f \notin L(D_1)$ betyder det att $L(D_1) \neq L(D)$, vilket medför att $\dim L(D) \geq d$ eftersom $L(D_1) \subseteq L(D)$.

Det återstår att visa att dimensionen är mindre eller lika med d och därmed lika med d. Vi väljer en lokal koordinat z centrerad runt p och antar att $D(p) = n$. Varje $f \in L(D)$ kan Laurentserieutvecklas i koordinaten z, och f har som högst en pol av ordning n i punkten p, då den lägsta möjliga termen är z^{-n}-termen. Betrakta den linjära avbildningen $T : L(D) \to \mathbb{C}$ som avbildar f på koefficienten c_{-n} i f:s Laruentserie. Låt $N(T)$ och $R(T)$ beteckna T:s nollrum respektive bildrum. Då gäller att $N(T) = L(D - p) = L(D_1)$. Vi använder därefter dimensionssatsen som säger att $\dim L(D_1) + \dim R(T) = \dim L(D)$. Eftersom $R(T) \subseteq \mathbb{C}$ är $\dim R(T) \leq 1$, vilket innebär att $\dim L(D) \leq \dim L(D_1) + 1$. Detta leder till att $\dim L(D) = d$. Enligt induktionsaxiomet gäller då att $\dim L(D) = \deg(D)$ för alla D med $\deg(D) > 0$. □

4.4.2 Bevis för Riemann-Roch på komplexa torusar

Vi är nu redo att bevisa Riemann-Rochs sats för komplexa torusar, likt fallet för Riemannsfären.

Sats 4.26 (Riemann-Roch på komplexa torusar). Om D är en divisor, och K är en kanonisk divisor på en komplex torus Λ, gäller att

$$\dim L(D) - \dim L(K - D) = \deg(D) - g + 1$$

där vi tidigare definierat g som graden av en kanonisk divisor på Λ.

Bevis. Vi börjar med att visa att $g = 1$. Enligt ovan definieras $g = \dim L(K)$. Eftersom K är en kanonisk divisor medför det enligt Sats 4.24 att det är en principal divisor, och därmed är $\deg(K) = 0$. Vi får från Sats 4.21 att $g = \dim L(K) = 1$ och vill därför visa att

$$\dim\, L(D) - \dim\, L(K-D) = \deg(D).$$

Med hjälp av Sats 4.21 visas likheten genom att behandla de olika fallen $\deg(D) > 0$, $\deg(D) = 0$ och $\deg(D) < 0$ separat.

Antag att $\deg(D) < 0$, då gäller enligt Sats 4.21 att dim $L(D) = 0$ då $L(D) = \{0\}$. Vi undersöker nu $\deg(K-D) = -\deg(D)$ som är positivt då $\deg(D) < 0$. Att $\deg(K-D) > 0$ medför enligt Sats 4.21 att dim $L(K-D) = \deg(K-D)$, vilket ger att

$$\dim\, L(D) - \dim\, L(K-D) = 0 - \deg(K-D) = -(-\deg(D)) = \deg(D)$$

Antag nu att $\deg(D) = 0$. Detta medför att $\deg(K-D) = 0$. Vi vill i detta fall visa att dim $L(D) -$ dim $L(K-D) = 0$.

Antag att $D \sim 0$. Detta medför att dim $L(D) = 1$. Både K och D är principala divisorer, och därmed är $K - D$ en principal divisor, vilket innebär att $K - D \sim 0$. Eftersom $\deg(K-D) = 0$ gäller att dim$L(K-D) = 1$ enligt Sats 4.21, vilket ger:

$$\dim\, L(D) - \dim\, L(K-D) = 1 - 1 = 0 = \deg(D)$$

Antag nu att $D \nsim 0$. Detta medför att dim $L(D) = 0$ då $L(D) = \{0\}$. Nu är $K \sim 0$ då det är en principal divisor och $D \nsim 0$ då D inte är det, vilket medför att $K - D \nsim 0$ enligt Sats 4.13. Eftersom $\deg(K-D) = 0$ gäller enligt Sats 4.21 att dim $L(K-D) = 0$, vilket ger att

$$\dim\, L(D) - \dim\, L(K-D) = 0 - 0 = 0 = \deg(D)$$

Antag till sist att $\deg(D) > 0$. Detta medför att dim $L(D) = \deg(D)$. Som tidigare undersöker vi $\deg(K-D) = -\deg(D)$, som i detta fall är negativt då $\deg(D) > 0$. Detta medför enligt Sats 4.25 att dim $L(K-D) = 0$, vilket ger att:

$$\dim\, L(D) - \dim\, L(K-D) = \deg(D) - 0 = \deg(D).$$

□

4.5 Användningsområden

Vi ska nu avsluta arbetet med att kort diskutera några viktiga konsekvenser av Riemann-Rochs sats. Till att börja med kan vi välja graden av divisorn D tillräckligt stor så att $\deg(D) > \deg(K)$, något som medför att $\deg(K-D) < 0$ och därmed dim $L(K-D) = 0$. Riemann-Rochs sats för en sådan divisor D reduceras då till

$$\dim L(D) = \deg(D) - g + 1.$$

Ur detta kan vi direkt sluta oss till det högst icke-triviala påståendet att det finns icke-konstanta meromorfa funktioner på alla kompakta Riemannytor. Väljer vi graden av divisorn D tillräckligt hög finns ingen begränsning på hur många linjärt oberoende meromorfa funktioner som kan åstadkommas.

En annan viktig konsekvens av Riemann-Rochs sats är att den möjliggör att man kan visa att alla Riemannytor med genus $g = 0$ är biholomorfa med Riemannsfären. På liknande sätt är det även möjligt att visa att alla Riemannytor med genus $g = 1$ är biholomorfa med någon komplex torus (vi har ju dock sett i avsnitt 3.2.2 att torusar kan ha olika komplexa strukturer). Vi hänvisar läsaren till kapitel VII i [**Miranda**] för detaljerna, men konstaterar att Riemann-Rochs sats är ett kraftfullt verktyg för att analysera Riemannytor överlag.

Referenser

[**Lee**] John M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Springer, 2000.

[**Milne**] J.S. Milne. *Elliptic Curves*. BookSurge Publishers, 2006. ISBN: 1-4196-5257-5.

[**Miranda**] Rick Miranda. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. American Mathematical Society, 1995.

[**Munkres**] James R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, 2000.

[**OpenAI**] OpenAI. Skapad med ChatGPT. Promptad av Ellen Wahrolin. URL: `https://chatgpt.com/s/m_681e60f8267881919c3ac9a6baa18947`.

[**Ueno**] Kenji Ueno, Koji Shiga och Shigeyuki Morita. *A Mathematical Gift*. American Mathematical Society, 2000.

A Appendix

A.1 Ekvivalensrelationer och ekvivalensklasser

Följande avsnitt baseras på avsnitt 1.3 i [**Munkres**]. För att definiera begreppet ekvivalensklass behöver vi först definiera begreppen relation och ekvivalensrelation.

Definition A.1 (Relation). En **relation** på en mängd A är en delmängd av den kartesiska produkten $A \times A$.

Notationen xCy används för att beteckna att C är en relation på A, och betyder att $(x, y) \in C$, x är i relation C till y. Även notationen $x \sim y$ används. Med ovan kan vi nu definiera ekvivalensrelation.

Definition A.2 (Ekvivalensrelation). En **ekvivalensrelation** på en mängd A är en relation $\sim$ på A med följande egenskaper:

1. Reflexivitet: $x \sim x$ för alla $x \in A$
2. Symmetri: Om $x \sim y$ gäller även $y \sim x$
3. Transitivitet: Om $x \sim y$ och $y \sim z$ gäller även $x \sim z$

Nu är vi redo att definiera begreppet *ekvivalensklass*:

Definition A.3 (ekvivalensklass). Givet en ekvivalensrelation $\sim$ på en mängd A och ett element $x \in A$. **Ekvivalensklassen** E är en delmängd till A och definieras enligt följande:

$$E = \{y | y \sim x\}$$

Ekvivalensklasser har följande egenskap:

Lemma A.4. Två ekvivalensklasser E och E' är antingen disjunkta eller lika.

A.2 Topologi

Då topologin föddes under tidigt 1900-tal är det en förhållandevis ung gren av matematiken, betydligt yngre än exempelvis algebran eller analysen. Den kom till då vissa till synes geometriska problem inte verkade bero på föremålens exakta form. I formellare ordalag kan topologi sägas vara studiet av egenskaper hos geometriska objekt som bevaras under kontinuerlig deformation; sådana kallas topologiska egenskaper. För vårt syfte är topologin nödvändig för att kunna definiera begreppet mångfald och i synnerhet Riemannyta, där det senare är ett specialfall av det förra och används i formuleringen av Riemann-Rochs sats. Ett annat viktigt begrepp är *kvotavbildning* och vi beskriver även kompakthet formellt.

Avsnittet baseras på kapitel 2 och 3 i [**Munkres**] samt kapitel 2 om mångfalder i [**Lee**].

A.2.1 Grundläggande topologiska begrepp

Vi definierar inledningsvis ett av de viktigaste begreppen, nämligen *topologi*.

DEFINITION A.5 (TOPOLOGI). En samling $\mathcal{T}$ av delmängder till en mängd X kallas en **topologi** på X om

i) Det gäller att $\varnothing, X \in \mathcal{T}$, där $\varnothing$ är den tomma mängden.

ii) En godtycklig union av element i $\mathcal{T}$ tillhör också $\mathcal{T}$.

iii) Ett ändligt snitt av element i $\mathcal{T}$ tillhör också $\mathcal{T}$.

Det ordnade paret $(X, \mathcal{T})$ kallas ett topologiskt rum, och betecknas ofta bara X. Ibland kallas topologiska rum enbart för rum.

DEFINITION A.6 (ÖPPNA OCH SLUTNA MÄNGDER). Låt X vara ett topologiskt rum med topologi $\mathcal{T}$. En mängd $U \subseteq X$ kallas **öppen** om $U \in \mathcal{T}$. En delmängd $A \subseteq X$ kallas **sluten** om komplementet till mängden är öppen, det vill säga mängden $X \setminus A$, är öppen.

Topologin $\mathcal{T}$ är alltså samlingen av alla öppna mängder.

EXEMPEL A.7. Låt $X = \{a, b, c\}$ vara en mängd och $M_1 = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b, c\}\}$ samt $M_2 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}\}$ två samlingar delmängder. Det är uppenbart att både M_1 och M_2 uppfyller det första villkoret i topologidefinitionen då båda innehåller $\varnothing$ och $X = \{a, b, c\}$. Dock är enbart M_1 en topologi ty unionen $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ tillhör inte M_2 medan samtliga unioner och snitt av delmängder i M_1 också tillhör M_1.

Liksom framgår ovan är ett sätt att definiera en topologi att helt enkelt specificera alla öppna mängder. Detta blir emellertid omständligt för mer komplicerade mängder. Vi inför därför begreppet baser.

DEFINITION A.8 (BAS). Låt X vara en mängd. En bas $\mathcal{B}$ består av baselement B, som är delmängder till X. Baselementen uppfyller följande krav:

i) För alla $x \in X$ gäller att det existerar minst ett baselement $B \in \mathcal{B}$ som innehåller x.

ii) Om $x \in B_1 \cap B_2$ där B_1 och B_2 är baselement så existerar (ytterligare) ett baselement B_3 så att $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

En topologi på X kan fås av en bas $\mathcal{B}$ genom att låta en delmängd $U \subseteq X$ vara öppen i $\mathcal{T}$ om det för varje $x \in U$ finns ett baselement $B \in \mathcal{B}$ så att $x \in B \subseteq U$.

En öppen mängd $U \in \mathcal{T}$ kan beskrivas i termer av unioner av baselement i $\mathcal{B}$. Mer precist kan vi skriva $U = \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha$, där alla $B_\alpha \in \mathcal{B}$ och J är en lämplig indexmängd. Alltså kan man tänka på baser som de minsta byggstenarna för att konstruera öppna mängder.

DEFINITION A.9 (STANDARDTOPOLOGIN PÅ $\mathbb{R}$). Topologin som ges av baselementen $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ kallas **standardtopologin på** $\mathbb{R}$.

Standardtopologin på $\mathbb{R}$ är den topologi som används i vanlig matematisk analys. De öppna mängder som definieras i analysen sammanfaller med de som ges av standardtopologin.

A.2.2 Produkttopologier, delrumstopologier och Hausdorffrum

Ett sätt att definiera en topologi på $\mathbb{R}^2$ är med hjälp av begreppet *produkttopologi*.

DEFINITION A.10 (PRODUKTTOPOLOGI). Låt X och Y vara topologiska rum. Då bildas **produkttopologin** på $X \times Y$ av basen som utgörs av alla $U \times V$ sådana att U är öppen i X och V är öppen i Y.

Om vi låter både X och Y i definitionen vara $\mathbb{R}$ med standardtopologin erhålls en topologi på $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Definition A.11 (Delrumstopologi). Låt X vara ett topologiskt rum med topologin $\mathcal{T}$ och låt Y vara en delmängd till X. Då kallas

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$$

delrumstopologin på Y.

Om inget annat nämns är det underförstått att topologin på en delmängd $Y \subseteq X$ är delrumstopologin på Y.

Definition A.12 (Hausdorffrum). Ett topologiskt rum X kallas ett **Hausdorffrum** om det för varje par av distinkta element $x_1, x_2 \in X$ existerar öppna mängder U_1 och U_2 så att $x_1 \in U_1$ och $x_2 \in U_2$ samt att $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Till Hausdorffrum hör bland andra $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{C}$. Hausdorffrum har den önskvärda egenskapen att inga talföljder konvergerar mot flera olika tal.

A.2.3 Kontinuerliga funktioner

För att till slut kunna definiera mångfalder behövs en topologisk definition av kontinuitet, som i sin tur används i definitionen av *homeomorfi*.

Vi påminner läsaren om att urbilden $f^{-1}(V)$ till en funktion innebär alla $x \in X$ så att $f(x) \in V$, där V är en mängd.

Definition A.13 (Kontinuerliga funktioner). En funktion $f : X \to Y$ mellan två topologiska rum X och Y sägs vara **kontinuerlig** om varje öppen delmängd V i Y har en öppen urbild $f^{-1}(V)$.

Sats A.14 (Relation till kontinuitet inom analysen). Låt $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Den vanliga epsilon-delta-definitionen av kontinuitet för funktioner ges av att f är kontinuerlig i en punkt $\mathbf{a}$ om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ så att om $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ är $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| < \varepsilon$. Denna definition är ekvivalent med den topologiska definitionen av kontinuitet när $X = \mathbb{R}^n$ och $Y = \mathbb{R}^m$ med standardtopologin.

Definition A.15 (Homeomorfi). Låt X och Y vara topologiska rum och $f : X \to Y$ vara bijektiv. Då sägs f vara en homeomorfi om både f och f^{-1} är kontinuerliga.

För en homeomorfi $f : X \to Y$ och $U \subseteq X$ gäller att U är öppen om och endast om $f(U)$ är öppen. Homeomorfier kan ses som ett sätt att formalisera kontinuerliga deformationer, som nämndes i inledningen av det här avsnittet. Att två ytor är homeomorfa med varandra innebär intuitivt att man kan kontinuerligt deformera den ena till den andra. Ett vanligt exempel är att en kaffekopp kan formas som en badring; dessa ytor är homeomorfa med varandra. Att två topologiska rum är homeomorfa är ett sätt att säga att de är likadana ur topologisk synvinkel.

Ett topologiskt rum X sägs vara *lokalt euklidiskt av dimension n* om varje punkt $p \in X$ har en omgivning för vilken det går att finna en homeomorfi till en delmängd till $\mathbb{R}^n$.

A.2.4 Topologisk mångfald

För följande definition påminner vi läsaren om att en uppräknelig mängd har antingen ett ändligt antal element eller kan skrivas i bijektion med de naturliga talen.

Definition A.16 (Andra uppräknelighetsaxiomet). Ett topologiskt rum X sägs uppfylla det **andra uppräknelighetsaxiomet** om det har en uppräknelig bas.

En mångfald är en abstrakt matematisk yta eller rum som lokalt ser ut som vanligt euklidiskt rum (t.ex. $\mathbb{R}^2$), men som globalt kan ha en mycket mer komplicerad struktur. Det är ett centralt begrepp inom modern matematik.

Definition A.17 (Mångfald). En **n-dimensionell topologisk mångfald** är ett Hausdorffrum som uppfyller andra uppräknelighetsaxiomet och som är lokalt euklidiskt av dimension n.

Observera att $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{C}$ är specialfall av mångfalder. Bland mer komplicerade mångfalder återfinns enhetssfären i $\mathbb{R}^2$ och ytan av en badring, vilken vanligtvis benämns *torus*.

Riemannytor är 2-dimensionella mångfalder som dessutom har en *komplex struktur*, ett begrepp som beskrivs i avsnittet om Riemannytor. Exempel på sådana är den s.k. Riemannsfären och den komplexa torusen.

A.2.5 Kvotavbildningar och kvottopologier

I syfte att bilda en komplex torus utifrån det komplexa talplanet inför vi här begreppet kvotavbildning. Bildligt kan man tänka att en rektangel kan formas till en torus genom att först föra samman de två långsidorna till en cylinder med hål för att sedan sätta ihop de två kortsidorna. Kvotavbildningar används för att formalisera detta.

Definition A.18 (Kvotavbildning). Låt X och Y vara topologiska rum och låt $p : X \to Y$ vara en surjektiv avbildning. Om en mängd U i Y är öppen om och endast om $p^{-1}(U)$ är öppen i X sägs p vara en **kvotavbildning**.

Observera att detta är ett strängare villkor än för kontinuerliga avbildningar.

Definition A.19 (Öppen avbildning). En avbildning $p : X \to Y$ kallas **öppen** om för varje öppen mängd $U \subseteq X$ så är $p(U)$ också öppen.

Om $p : X \to Y$ är surjektiv och kontinuerlig medför öppenhet hos p att p är en kvotavbildning.

Kvotavbildningar kan användas för att ge en topologi på en mängd enligt följande definition.

Definition A.20 (Kvottopologi). För en surjektiv funktion $p : X \to Y$ där X är ett topologiskt rum och Y är en mängd definieras **kvottopologin** på Y inducerad av p genom att låta en mängd $U \subseteq Y$ vara öppen om $p^{-1}(U)$ är öppen i X.

För följande definition påminner vi läsaren om att en partition av en mängd M är en samling disjunkta och icke-tomma delmängder till M vars union är hela M.

Definition A.21 (Kvotrum). Låt X vara ett topologiskt rum och låt X^* vara en partition av X. Låt $p : X \to X^*$ vara en surjektiv avbildning som avbildar varje punkt x på elementet i X^* som x ligger i och ge X^* kvottopologin inducerad av p. Då kallas X^* ett **kvotrum** av X.

Vi kan se X^* som en kategorisering av punkter på X, där vissa punkter identifieras med varandra och betraktas som samma punkt. Följande exempel illustrerar hur detta kan användas för att definiera en topologi på en torus.

Exempel A.22 (Torus). Låt X vara rektangeln $[0, 1] \times [0, 1] \in \mathbb{R}^2$. Vi skapar nu en partition X^* av X bestående av

a) alla enpunktsmängder bestående av element i $(0, 1) \times (0, 1)$,

b) alla tvåpunktsmängder $\{(x, 0), (x, 1)\}$ för $0 < x < 1$ och $\{(0, y), (1, y)\}$ för $0 < y < 1$ och

c) fyrpunktsmängden $\{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$.

Detta motsvaras bildligt av att inga punkter innanför rektangeln förs samman med några andra när rektangelns sidor sätts ihop till en torus, varför dessa bildar enpunktsmängder i partitionen. Punkter på sidorna identifieras däremot var och en med en punkt på motsatt sida, vilket ger tvåpunktsmängder i partitionen, och slutligen möts alla fyra hörnen i en punkt och samlas därför i en fyrpunktsmängd i partitionen.

Med denna partition kan vi definiera en topologi på torusen som ett kvotrum av X.

I exemplet ovan utgick vi från en rektangel men man kan naturligtvis använda ett parallellogram, vilket görs i avsnitt 3.2 fast över hela det komplexa talplanet.

A.2.6 Kompakta mängder

”Kompakthet” är ett vanligt förekommande begrepp i analysen och det har liksom öppna mängder abstraherats inom topologin. Riemann-Rochs sats gäller för kompakta Riemannytor och en formell definition av begreppet är därför av stor vikt. Alla Riemannytor är dessutom sammanhängande, varför även det definieras nedan.

Definition A.23 (Övertäckning). En samling $\mathcal{A}$ av delmängder till ett rum X sägs vara en **övertäckning** av X om unionen av elementen i $\mathcal{A}$ är lika med X, det vill säga $X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Övertäckningen sägs vara **öppen** om elementen $A \in \mathcal{A}$ är öppna delmängder till X.

Definition A.24 (Kompakt rum). Ett rum X sägs vara **kompakt** om det för varje öppen övertäckning $\mathcal{A}$ finns en ändlig delmängd som också täcker X, det vill säga $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, där $A_i \in \mathcal{A}$.

Definition A.25 (Sammanhängande rum). Låt X vara ett topologiskt rum. Om X inte kan skrivas som ett par av disjunkta, icke-tomma, öppna delmängder U och V till X vars union är X, sägs X vara **sammanhängande**.

Nedan följer några användbara resultat. Värt att notera är att den sista satsen motsvarar den definition av kompakthet som ofta ges i inledande analyskurser och som lär vara bekant för läsaren.

Sats A.26. Låt $Y \subseteq X$. Då är Y kompakt om och endast om varje öppen övertäckning av Y innehåller en ändlig delmängd som också täcker Y.

Sats A.27. Varje sluten delmängd till ett kompakt rum är kompakt.

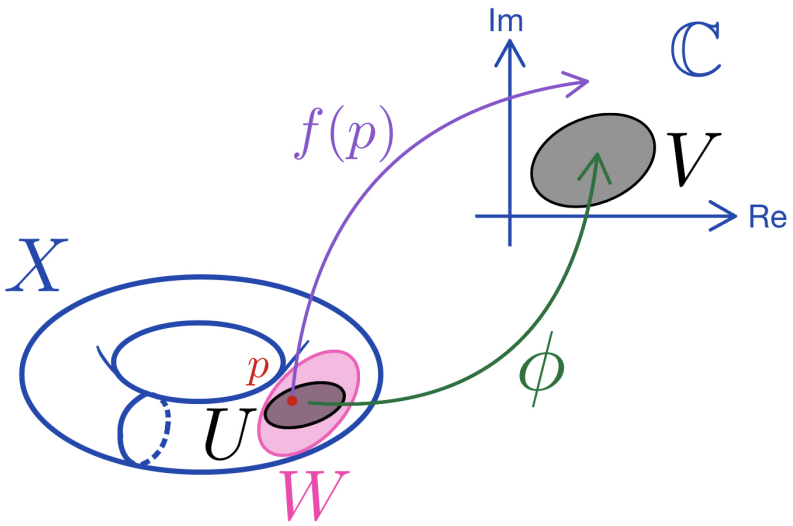
Sats A.28. Varje kompakt delrum till ett Hausdorffrum är slutet.

Sats A.29. Kontinuerliga funktioner avbildar kompakta mängder på kompakta mängder.

Sats A.30 (Heine-Borel). En delmängd till $\mathbb{R}^n$ är kompakt om och endast om den är sluten och begränsad.

A.3 Riemannytor

I följande bilaga återfinns den teori som är relevant för Riemannytor. I figur 7 nedan illustreras konceptet holomorf funktion på en Riemannyta.



Figur 7: Illustration av en holomorf funktion i en punkt p på en Riemannyta.

A.3.1 Funktioner på Riemannytor

Nedan återfinns det fullständiga lemmat relaterat till holomorficitet i en punkt och i en omgivning till den punkten:

LEMMA A.31. Låt X vara en Riemannyta, p en punkt i X och f en komplexvärd funktion på en omgivning W till p. Då gäller att:

i) f är holomorf i p om och endast om $f \circ \phi^{-1}$ är holomorf i $\phi(p)$ för varje karta $\phi : U \to V$ med $p \in U$;

ii) f är holomorf på W om och endast om det finns en mängd kartor $\{\phi_i : U_i \to V_i\}$ med $W \subseteq \bigcup_i U_i$ sådana att $f \circ \phi_i^{-1}$ är holomorf på $\phi(W \cap U_i)$ för varje i;

iii) om f är holomorf i p är f holomorf i en omgivning till p.

Nedan återfinns den matematiska versionen av att f är holomorf i en punkt innebär också att f är holomorf i en omgivning till punkten samt oberoende av karta ϕ.

LEMMA A.32. Låt X vara en Riemannyta, p en punkt i X och f en komplexvärd funktion på en omgivning W till p. Då gäller:

i) f är holomorf i p om och endast om $f \circ \phi^{-1}$ är holomorf i $\phi(p)$ för varje karta $\phi : U \to V$ med $p \in U$;

ii) f är holomorf på W om och endast om det finns en mängd kartor $\{\phi_i : U_i \to V_i\}$ med $W \subseteq \bigcup_i U_i$ sådana att $f \circ \phi_i^{-1}$ för varje i;

iii) om f är holomorf i p är f holomorf i en omgivning till p.

Nedan återfinns de satser som ärvts av komplex analys i en variabel, med förutsättningarna att f är en funktion och W är en sammanhängande öppen mängd på X.

SATS A.33 (DISKRETA NOLLSTÄLLEN OCH POLER). Låt f, som inte får vara identiskt lika med noll, vara meromorf på W. Då gäller att f:s nollställen och poler är diskreta delmängder av W.

SATS A.34 (IDENTITETSPRINCIPEN). Antag att f och g är meromorfa funktioner på W. Antag att $f = g$ på en delmängd $S \subseteq W$, som har en hopningspunkt i W. Då gäller att $f = g$ på W.

SATS A.35 (MAXIMUMPRINCIPEN). Antag att f är holomorf på W. Antag att det existerar en punkt $p \in W$ så att $|f(x)| \leq |f(p)|$ för alla $x \in W$. Då är f konstant på W.

A.3.2 Holomorfa avbildningar

För avbildningarna gäller följande två lemman:

LEMMA A.36. Låt $F : X \to Y$ vara en avbildning mellan Riemannytor.

i) F är holomorf i $x \in X$ om och endast om för varje par av kartor $\phi_1 : U_1 \to V_1$ på X och $\phi_2 : U_2 \to V_2$ på Y med $x \in U_1$ och $F(x) \in U_2$ så är $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ holomorf i $\phi_1(x)$.

ii) F är holomorf på en öppen mängd W om och endast om det finns två samlingar kartor $\{\phi_1^{(i)} : U_1^{(i)} \to V_1^{(i)}\}$ på X och $\{\phi_2^{(j)} : U_2^{(j)} \to V_2^{(j)}\}$ på Y med $W \subseteq \bigcup_i U_1^{(i)}$ och $F(W) \subseteq \bigcup_j U_2^{(j)}$ sådana att funktionen $\phi_2^{(j)} \circ F \circ (\phi_1^{(i)})^{-1}$ är holomorf för varje i och j där den är definierad.

LEMMA A.37. Låt X, Y och Z vara Riemannytor.

a) Om $F : X \to Y$ är holomorf så är F kontinuerlig.

b) Om $F : X \to Y$ och $G : Y \to Z$ är holomorfa så är $G \circ F : X \to Z$ holomorf.

c) Om $F : X \to Y$ är holomorf och g är en holomorf funktion på en öppen mängd $W \subseteq Y$ så är $g \circ F$ en holomorf funktion på $F^{-1}(W)$.

d) Om $F : X \to Y$ är holomorf och g är en meromorf funktion på en öppen mängd $W \subseteq Y$ så är $g \circ F$ en meromorf funktion på $F^{-1}(W)$ under förutsättning att $F(X)$ ej endast utgörs av poler till g.

A.3.3 Kurvintegraler på Riemannytor

Låt X vara en Riemannyta. Vi definierar en kurva γ som en kontinuerlig funktion $\gamma : [a, b] \to X$ som är styckvis glatt, dvs. $\phi \circ \gamma$ är styckvis glatt, alltså styckvis C^∞ på sin definitionsmängd för varje karta $\phi : U \to V$). Dessa kurvor kan delas upp i delkurvor, där varje delkurva γ_j är glatt och γ_j:s bild är innehållen i en karta ϕ_j:s definitionsmängd.

Med hjälp av ovan kan vi nu definiera integration av 1-former längs en kurva.

Definition A.38. Genom att låta ω vara en 1-form enligt ovan på en Riemannyta, kan vi välja en partition $\{\gamma_j\}$ av en kurva γ så att avbildningen av γ_j ligger i definitionsmängden till ϕ_j. Då kan ω skrivas som $\omega = f_j(z)dz$. Definiera funktionen $z_j(t) = \phi_j \circ \gamma_j$ för t i definitionsmängden till γ_j. Då definierar vi integralen av ω över kurvan γ enligt följande:

$$\int_\gamma \omega = \sum_j \int_{t=a_{j-1}}^{a_t} \big(f_j(z) z_j'(t)\big) dt.$$

Om bilden av γ ligger i definitionsmängden för en enda karta $\phi : U \to V$, och om $\omega = f dz$, gäller:

$$\int_\gamma \omega = \int_{\phi\gamma} f dz, \quad \text{där } \phi\gamma \text{ är sammansättningen } \phi \circ \gamma.$$

Vidare gäller vanliga räkneregler för integraler vid integration av 1-former, såsom linjäritet och oberoende av parametrisering.

A.4 Bevis

I detta avsnitt samlas bevis av ett par satser som utelämnats i texten.

A.4.1 Bevis av Sats 3.7

Bevis av sats 3.7.

i) Enligt Weierstrass M-test gäller att serien $\sum a_n(z)$ konvergerar absolut och likformigt om $|a_n| \leq M_n$, och $\sum M_n$ konvergerar. I vårat fall beskrivs $|a_n|$ enligt följande:

$$|a_n| = |e^{\pi i(n^2\tau + 2nz)}| = |e^{\pi i n^2 \tau}||e^{\pi i 2nz}| = A|e^{\pi i n^2 \tau}|,$$

där A är en konstant. Detta gäller då vi är på en kompakt delmängd till $\mathbb{C}$, och z är därmed begränsad och $|e^{\pi i 2nz}| = A$ som är konstant.

Vidare gäller även att $|e^{\pi i n^2 \tau}| = Be^{-\pi n^2 \mathrm{Im}(\tau)}$, om $\mathrm{Im}(\tau) > 0$. Detta ger att:

$$|a_n| = Ce^{-\pi n^2 \mathrm{Im}(\tau)},$$

där $C = A \cdot B$. Vi får alltså:

$$C \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \mathrm{Im}(\tau)},$$

där exponentialen avtar snabbt. Serien är en klassisk Gaussisk summa, som är välkänd för att konvergera.

ii)

$$\theta(z+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2\tau+2n(z+1))} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2\tau+2nz)} \cdot \underbrace{e^{2\pi i n}}_{=1} = \theta(z),$$

då n är ett heltal.

iii)

$$\theta(z+\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i\left(n^2\tau+2n(z+\tau)\right)}.$$

Genom att skifta index från $n \to n-1$ blir exponenten istället följande:

$$\pi i\big((n-1)^2\tau + 2(n-1)(z+\tau)\big) = \pi i\big(n^2\tau - 2n\tau + \tau + 2n(z+\tau) - 2(z+\tau)\big)$$
$$= \pi i\big(n^2\tau - 2n\tau + \tau + 2nz + 2n\tau - 2z - 2\tau\big) = \pi i\big(n^2\tau + 2nz - 2z - \tau\big),$$

vilket ger oss:

$$\theta(z+\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2\tau+2nz)-\pi i(2z+\tau)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2\tau+2nz)} e^{-\pi i(2z+\tau)},$$

där sista faktorn är en konstant och därmed kan flyttas ut:

$$= e^{-\pi i(2z+\tau)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2\tau+2nz)} = e^{-\pi i(2z+\tau)}\theta(z)$$

iv) Genom att applicera ii) och iii) m respektive n gånger får vi att

$$\theta(z+m+n\tau) = \theta(z+n\tau) = \underbrace{e^{-n\pi i(2z+\tau)}}_{\neq 0}\theta(z)$$

där första faktorn är holomorf och saknar nollställen. Då den första termen inte bidrar med varken nollställen eller poler så har $\theta(z+m+n\tau)$ nollställe av samma grad som $\theta(z)$ för alla z.

v) Från ovan gäller att $\theta(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}) = 0$ om och endast om $\theta(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}+m+n\tau) = 0$, samt att dessa har samma ordning på nollställena. Vi börjar med att visa att $\theta(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2})$ är ett nollställe. Vi utvecklar $\theta(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2})$:

$$\theta\left(1/2+\tau/2\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i\left(n^2\tau+2n(1/2+\tau/2)\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2\tau+n+n\tau)},$$

därefter gör vi ett indexskifte, från $n \to n-1$, vilket ger:

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2\tau-2n\tau+\tau+n-1+(n-1)\tau)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2\tau-n\tau+n)} \cdot (-1).$$

Nu gör vi ytterligare ett indexskifte: $n \to -n$, vilket ger:

$$= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2\tau+n\tau-n)} = -\theta(1/2+\tau/2)$$

$\theta(1/2+\tau/2) = -\theta(1/2+\tau/2)$ medför att $\theta(1/2+\tau/2) = 0$, och $1/2+\tau/2$ är alltså ett nollställe till θ. Nu återstår att visa att det är det enda nollstället. Detta gör vi genom att

använda argumentprincipen för att visa att antalet nollställen i fundamentalparallellogrammet är 1. Vi noterar att eftersom att $\theta(z)$ är holomorf så ges antalet nollställen till $\theta(z)$ i parallellogrammet P av

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega P}\frac{\theta}{\theta'}dz.$$

där vi noterar att:

$$\theta'(z) = 2\pi i\sum_{-\infty}^{\infty} ne^{\pi i(n^2\tau+2nz)}.$$

På samma sätt som för θ så kan vi notera att $\theta'(z+1) = \theta'(z)$ och

$$\theta'(z+\tau) = 2\pi i e^{-\pi i(2z+\tau)}\sum_{-\infty}^{\infty}(n-1)e^{\pi i(n^2\tau+2nz)} = e^{-\pi i(2z+\tau)}(\theta'(z) - 2\pi i\theta(z)).$$

Vi vet därför att

$$\frac{\theta'(z+1)}{\theta(z+1)} = \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} \quad \text{och} \quad \frac{\theta'(z+\tau)}{\theta(z+\tau)} = \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} - 2\pi i.$$

Vi utnyttjar dessa egenskaper genom att dela upp integralen

$$\int_{\Omega P}\frac{\theta'}{\theta}(z)dz = \int_0^1\frac{\theta'(t)}{\theta(t)}dt + \int_0^1\frac{\theta'(1+\tau t)}{\theta(1+\tau t)}dt + \int_0^1\frac{\theta'(1+\tau-t)}{\theta(1+\tau-t)}dt + \int_0^1\frac{\theta'(\tau-\tau t)}{\theta(\tau-\tau t)}dt.$$

Notera att

$$\int_0^1\frac{\theta'(\tau-\tau t)}{\theta(\tau-\tau t)}dt + \int_0^1\frac{\theta'(1+\tau t)}{\theta(1+\tau t)}dt = 0$$

på grund av periodiciteten hos $\frac{\theta'}{\theta}$. På liknande sätt får vi att

$$\int_0^1\frac{\theta'(t)}{\theta(t)}dt + \int_0^1\frac{\theta'(1+\tau-t)}{\theta(1+\tau-t)}dt = \int_0^1\frac{\theta'(t)}{\theta(t)} - (\frac{\theta'(t)}{\theta(t)} + 2\pi i)dt = 2\pi i$$

och alltså har θ exakt ett nollställe i fundamentalparallellogrammet och det måste då ligga i $1/2+\tau/2$ och ha ordning 1. Enligt tidigare argument är alla nollställen på formen $z = 1/2+\tau/2+n+m\tau$ och har ordning 1.

□

A.4.2 Bevis av Lemma 3.9

Bevis av Lemma 3.9. Låt $h = f\circ\pi$, där π är torusens projektionavbildning, vara motsvarigheten till funktionen f på $\mathbb{C}$. Låt p vara en godtycklig punkt i $\mathbb{C}$ och γ_p parallellogrammet med hörn i p, $p+1$, $p+\tau$ samt $p+\tau+1$. Då h har en diskret mängd nollställen och poler kan p väljas så att γ_p inte innehåller någon av dem, varför det går att finna en bijektion mellan f:s nollställen och poler i X och h:s nollställen och poler av samma ordning innanför γ_p.

Enligt Residysatsen från vanlig komplex analys är

$$\sum_{z_p\in\text{int}(\gamma_p)} z_p\,\text{ord}_{z_p}(h) = \sum_{z\in\text{int}(\gamma_p)}\text{Res}_z\left(z\frac{h'}{h}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_p} z\frac{h'(z)}{h(z)}dz.$$

Parametrisering av γ_p ger

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_p} z\frac{h'(z)}{h(z)}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\Bigg(\int_0^1 (p+t)\frac{h'(p+t)}{h(p+t)}\,dt + \int_0^1 (p+1+t\tau)\frac{h'(p+1+t\tau)}{h(p+1+t\tau)}\,dt \\ &\quad + \int_0^1 (p+1+\tau-t)\frac{h'(p+1+\tau-t)}{h(p+1+\tau-t)}\,dt + \int_0^1 (p+\tau-t\tau)\frac{h'(p+\tau-t\tau)}{h(p+\tau-t\tau)}\,dt\Bigg) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\Bigg(\int_0^1 (p+t)\frac{h'(p+t)}{h(p+t)}\,dt + \int_0^1 (p+t\tau)\frac{h'(p+1+t\tau)}{h(p+1+t\tau)}\,dt \\ &\quad + \int_0^1 (p+1-t)\frac{h'(p+1+\tau-t)}{h(p+1+\tau-t)}\,dt + \int_0^1 (p+\tau-t\tau)\frac{h'(p+\tau-t\tau)}{h(p+\tau-t\tau)}\,dt \\ &\quad + \int_0^1 \frac{h'(p+1+t\tau)}{h(p+1+t\tau)}\,dt + \tau\int_0^1 \frac{h'(p+1+\tau-t)}{h(p+1+\tau-t)}\,dt\Bigg),\end{aligned}$$

och vi observerar att det av periodiciteten följer att

$$\frac{h'(p+1+\tau-t)}{h(p+1+\tau-t)} = \frac{h'(p+1-t)}{h(p+1-t)}$$

samt

$$\frac{h'(p+1+t\tau)}{h(p+1+t\tau)} = \frac{h'(p+t\tau)}{h(p+t\tau)}.$$

Således tar första och tredje respektive andra och fjärde termen i sista ledet ut varandra då de följer samma kurva åt motsatt håll. Vi får därav

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_p} z\frac{h'(z)}{h(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\Bigg(\int_0^1 \frac{h'(p+1+t\tau)}{h(p+1+t\tau)}\,dt + \tau\int_0^1 \frac{h'(p+1+\tau-t)}{h(p+1+\tau-t)}\,dt\Bigg).$$

De två integralerna motsvarar argumentvariationen längs respektive delkurva multiplicerat med i. Då båda integranderna antar samma värde i start- som ändpunkten kan argumentvariationen antas vara en multipel av 2π och följaktligen är

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_p} z\frac{h'(z)}{h(z)}\,dz = n + m\tau,$$

för några heltal n och m. Vi har alltså

$$\sum_{z_p\in\mathrm{int}(\gamma_p)} z_p \operatorname{ord}_{z_p}(h) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_p} z\frac{h'(z)}{h(z)}dz,$$

och som en likhet på Λ får vi då

$$\sum_{x\in\Lambda} x \operatorname{ord}_x(f) = 0.$$

□