



CHALMERS



Spridning och absorption av mörk materia i magnetiska material

Kandidatarbete vid Institutionen för Fysik och Astronomi

TIFX11-VT26-12A
BENJAMIN SKÖLD, SANDRA TISÉN

INSTITUTIONEN FÖR FYSIK OCH ASTRONOMI

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg, Sverige 2026
www.chalmers.se

KANDIDATARBETE 2026

Spridning och absorption av mörk materia i magnetiska material

BENJAMIN SKÖLD
SANDRA TISÉN



CHALMERS

Institutionen för Fysik och Astronomi
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg, Sverige 2026

Spridning och absorption av mörk materia i magnetiska material
Scattering and absorption of dark matter in magnetic materials
BENJAMIN SKÖLD, SANDRA TISÉN

© BENJAMIN SKÖLD, SANDRA TISÉN, 2026.

Handledare: Riccardo Catena, Institutionen för Fysik och Astronomi
Examinator: Magnus Hörnqvist Colliander, Institutionen för Fysik och Astronomi

Kandidatarbete 2026
Institutionen för Fysik och Astronomi
Chalmers Tekniska Högskola
SE-412 96 Göteborg
Telefon +46 31 772 1000

Skriven i L^AT_EX
Göteborg, Sverige 2026

Spridning och absorption av mörk materia i magnetiska material
Scattering and absorption of dark matter in magnetic materials
BENJAMIN SKÖLD, SANDRA TISÉN
Department of Physics and Astronomy
Chalmers Tekniska Högskola

Sammandrag

Mörk materia utgör en betydande del av universums massa, men dess natur är fortfarande okänd. Eftersom traditionella detektionsexperiment baserade på kinematisk spridning mot atomer inte observerat några signaler, har intresset riktats mot lätt mörk materia i sub-GeV-området, där den vanliga kinematiska spridningen är irrelevant. Ett möjligt sätt att detektera dessa mindre partiklar är genom deras växelverkan med elektroners spinn. Magnetiska material är då särskilt intressanta att studera, eftersom kollektiva spinnexcitationer kan förstärka materialets respons. I denna rapport härleds en övre gräns för spridnings- och absorptionshastigheter av mörk materia i magnetiska material. Växelverkan modelleras med en effektiv Hamiltonian som kopplar mörk materia till elektronernas spinntäthet. Med linjär responsteori och Fermis gyllene regel uttrycks hastigheterna i termer av materialets dynamiska magnetiska susceptibilitet. Genom Kramers–Kronig-relationerna samt positivitet hos materialresponsen och modellens formfaktor erhålls en övre gräns som endast beror på materialets statiska magnetiska susceptibilitet. Denna susceptibilitet är en ändlig och väldefinierad storhet för alla fysikaliska material. Resultatet möjliggör därmed jämförelser mellan magnetiska material som potentiella detektorer och ger en utgångspunkt för vidare analys av lovande kandidatmaterial.

Abstract

Dark matter constitutes a large fraction of the mass content of the universe, yet its nature remains unknown. Since traditional detection experiments based on kinematic scattering against atoms have not observed any signals, focus has instead shifted toward light dark matter in the sub-GeV regime, where conventional kinematic scattering is irrelevant. One possible way to detect these smaller particles is through their interaction with electron spin. In this case, magnetic materials are particularly interesting to study, as collective spin excitations may enhance the potential response. In this report, upper bounds are derived for the scattering and absorption rates of dark matter in magnetic materials. The interaction is modeled using an effective Hamiltonian that couples dark matter to the electron spin density. Using linear response theory and Fermi’s golden rule, the rates are expressed in terms of the material’s dynamic magnetic susceptibility. Through the Kramers–Kronig relations, as well as the positivity of the material response and the model’s form factor, upper bounds are obtained that depend only on the static magnetic susceptibility of the material. This susceptibility is a finite and well-defined quantity for all physical materials. The result thus enables comparisons between magnetic materials as potential detectors and provides a starting point for further studies of promising material candidates.

Nyckelord: mörk materia, sub-GeV mörk materia, mörk materia-spridning, mörk materia-absorption, magnetiska material, spinnberoende växelverkan, magnetisk susceptibilitet

Key words: dark matter, sub-GeV dark matter, dark matter scattering, dark matter absorption, magnetic materials, spin-dependent interactions, magnetic susceptibility

Nomenklatur

Nedan följer en översikt av de beteckningar som används i rapporten.

Storheter och variabler

m_{DM}	massa för mörk materia-partikeln
$\mathbf{v}$	hastighet för mörk materia-partikeln
$\mathbf{p}$	impuls för mörk materia-partikeln
$\mathbf{q}$	överförd impuls
$\hat{\mathbf{q}}$	normerad impulsvektor
$\omega_{\mathbf{q}}$	överförd energi
V	målmaterialets volym
E, E'	energi för initialt respektive finalt tillstånd
$ I\rangle, F\rangle$	initialt respektive finalt tillstånd

Operatorer och potentialer

H_e	effektiv Hamiltonian för växelverkan
$s_e^i(\mathbf{x}, t)$	elektronens spinntäthet
$\tilde{s}_e^i(\mathbf{q})$	Fouriertransform av spinntätheten
Φ	effektiv potential
$\mathcal{O}^i(\mathbf{q}, \omega)$	modellberoende operator
σ^i	Pauli-matriser

Modell- och interaktionsstorheter

g_{DM}	kopplingskonstant (mörk materia)
g_e	kopplingskonstant (elektron)
m_V	mediatorns massa
$\mathcal{F}_{ij}$	formfaktor
$\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$	diagonala komponenter av formfaktorn i det roterade koordinatsystemet
$A(\mathbf{q} , \omega)$	skalär komponent i dekompositionen $\mathcal{F}_{ij} = A\delta_{ij} + B\hat{q}_i\hat{q}_j$
$B(\mathbf{q} , \omega)$	skalär komponent i dekompositionen $\mathcal{F}_{ij} = A\delta_{ij} + B\hat{q}_i\hat{q}_j$

Materialgenskaper

χ_{ij}	magnetisk susceptibilitet
χ'_{ij}	dispersiv del av susceptibiliteten (realdel)
χ''_{ij}	absorptiv del av susceptibiliteten (imaginärdel)
$\tilde{\chi}''_{\alpha\alpha}$	diagonala komponenter av susceptibiliteten i det roterade koordinatsystemet
ρ_T	materialets massdensitet
ρ_{DM}	lokal mörk materia-densitet

Övergångshastigheter

Γ_S	spridningshastighet per partikel
Γ_A	absorptionshastighet per partikel
R_S	spridningshastighet per målmasa
R_A	absorptionshastighet per målmasa

Hjälpstorheter

$K_{ij}(\mathbf{q}, \omega)$	kärna som samlar alla icke-materialberoende faktorer i spridningshastigheten
$\Delta\omega$	effektiv spektral bredd i absorptionsfallet, från livstidsbredd och mätupplösning

Fördelningar

$f_{DM}(\mathbf{v})$	hastighetsfördelning för mörk materia
----------------------	---------------------------------------

Indexering och konvention

$\tilde{\cdot}$	tilde över en storhet betecknar samma storhet uttryckt i det koordinatsystem som är anpassat till $\mathbf{q}$, med $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{q}}$ (se kapitel 4)
i, j	kartesiska komponentindex i det ursprungliga koordinatsystemet
α, β	komponentindex i det roterade koordinatsystemet anpassat till $\mathbf{q}$
s, s'	initiala respektive finala spinntillstånd
e, e'	initiala respektive finala elektrontillstånd

Innehåll

Nomenklatur	vi
1 Inledning	1
1.1 Syfte	2
1.2 Avgränsningar	2
1.3 Användning av AI-verktyg	2
2 Teori	3
2.1 Interaktion mellan mörk materia och elektronspinn	3
2.1.1 Hamiltoniantäthetens struktur	3
2.2 Fermis gyllene regel och övergångshastighet	4
2.3 Magnetisk susceptibilitet	5
2.3.1 Kausalitet och analyticitet	5
2.3.2 Från negativa till positiva frekvenser	6
2.4 Hastighetsfördelning för mörk materia	7
2.5 Gram-matriser	7
3 Spridnings- och absorptionshastighet	9
3.1 Spridningshastighet för en partikel	9
3.2 Identifiering med susceptibiliteten	11
3.3 Spridningshastighet per målmasa	12
3.4 Absorptionshastighet	13
4 Övre gräns för spridningshastigheten	15
4.1 Formfaktorns allmänna form	16
4.2 Tecken hos susceptibiliteten	16
4.3 Koordinatsystem anpassat till $\mathbf{q}$	17
4.4 Positivitet hos den roterade formfaktorn	18
4.4.1 Formfaktorn som Gram-matris	18
4.4.2 Positivitet hos A och $A + B$	19
4.4.3 Tillämpning på modellen	19
4.5 Positivitet hos den roterade susceptibiliteten	20
4.6 Begränsning av frekvensintegralen	21
4.7 Supremumolikheten	22
4.8 Övre gräns för spridningshastigheten	24
5 Härledning av en övre gräns för absorptionshastigheten	25
5.1 Absorptionshastigheten som frekvensintegral	25
5.2 Begränsning av frekvensintegralen	26
5.2.1 Övre gräns för absorptionshastigheten	26
6 Resultat och diskussion	27
6.1 Fysikalisk tolkning	27
6.2 Relation till tidigare arbeten	28
6.3 Begränsningar och antaganden	28

6.4	Möjliga generaliseringar	29
7	Slutsats	31
	Litteratur	33
A	Spår-invariants under ortogonala koordinatbyten	I
B	Distributionsteoretiskt bevis för byte av ordning	III
C	Kod till figur för hastighetsfördelningen	IX

1

Inledning

Mörk materia utgör en dominerande komponent av universums massinnehåll, men dess mikroskopiska natur är fortfarande okänd. Existensen av mörk materia motiveras av flera observationer där den synliga materian inte räcker för att förklara de observerade gravitationella effekterna. Ett exempel är galaxhopar, där galaxernas hastigheter visar att betydligt mer massa krävs för att hålla systemen gravitationellt bundna än vad som kan förklaras av det observerade ljuset [1]. Liknande diskrepanser observeras även i galaxers rotationskurvor, där galaxerna roterar snabbare än vad som kan förklaras av endast den synliga materian. Observationerna motiverar hypotesen att universum innehåller en ytterligare form av materia som inte kan observeras elektromagnetiskt, så kallad mörk materia. Den ledande hypotesen är att det består av oundäckta elementarpartiklar utanför standardmodellen [2].

En av de mest studerade partikelkandidaterna är weakly interacting massive particles (WIMPs), vilket på svenska är svagt växelverkande massiva partiklar [2]. WIMPs antas växelverka mycket svagt med vanlig materia och kan därför passera genom materia utan att absorberas eller spridas nämnvärt. De antas ha en massa i GeV-TeV-området. En metod för att söka efter den typen av partiklar är direktdetektionsexperiment som bygger på att mörk materia sprids mot atomkärnor i ett detektormaterial. Vid denna växelverkan överförs energi till kärnan, vilket ger upphov till en kärnrekyl. Rekylen kan i sin tur ge upphov till en svag observerbar signal [1]. För att signalerna ska kunna detekteras krävs mycket låg bakgrundsstrålning, därför utförs direktdetektionsexperiment djupt under jord [2].

Trots omfattande experimentella insatser har ingen entydig WIMP-signal observerats [3]. Frånvaron av signaler motiverar att undersöka alternativa mörk materia-kandidater som har en lägre massa än vad klassiska WIMP-modeller förutsätter. För mörk materia med massa i sub-GeV-området, så kallad lätt mörk materia, blir energiöverföringen vid kärnspridning kinematisk undertryckt, vilket gör direktdetektion ineffektiv [4]. I detta massområde blir både spridning mot elektroner och absorption relevanta detektionsmekanismer. Vid spridning överför mörk materia-partikeln endast en del av sin energi till materialet och fortsätter att existera efter växelverkan. Vid absorption överförs istället hela partikelns energi till materialet, varefter partikeln försvinner ur systemet. Den deponerade energin kan excitera materialet och ge upphov till en observerbar signal.

Mörk materia kan då koppla till elektronernas laddningstäthet eller till deras spinn. I det senare fallet kan växelverkan beskrivas som en svag tids- och rumsberoende magnetisk perturbation. Magnetiska material är särskilt intressanta för detektion av mörk materia med spinnberoende kopplingar, eftersom kollektiva spinnexcitationer kan förstärka den inducerade responsen [5].

I denna rapport studeras spridning och absorption av mörk materia i magnetiska material med fokus på spinnberoende växelverkan i den icke-relativistiska gränsen. Utgångspunkten är en effektiv Hamiltonian där mörk materia kopplas till elektronernas spinnstäthet. Spridnings- och absorptionshastigheter härleds i kapitel 3 med hjälp av tidsberoende perturbationsteori och uttrycks i termer av modellen för mörk materia och målmaterialets magnetiska susceptibilitet. Vidare analyseras i kapitel 4 och kapitel 5 hur fundamentala begränsningar, såsom Kramers-Kronig-relationerna, ger upphov till övre gränser för dessa hastigheter.

1.1 Syfte

Syftet är att utveckla en strategi för att guida identifieringen av optimala material för detektion av mörk materia via spridning och absorption. Strategin bygger på att fastställa en teoretisk övre gräns för spridnings- och absorptions hastigheten av mörk materia i magnetiska material. Denna gräns fungerar som vägledning för experimentell design och kan användas för att jämföra hur olika material beter sig.

1.2 Avgränsningar

Analysen i denna rapport begränsas till icke-relativistisk mörk materia, där partikelns hastighet antas vara liten jämfört med ljusets hastighet. Växelverkan antas förmedlas av en tung mediator, vilket i lågenergigränsen leder till en effektiv lokal koppling mellan mörk materia och elektronernas spinnthet. Detta innebär att detaljer i den underliggande fundamentala teorin inte explicit modelleras. Endast spinnberoende kopplingar mellan mörk materia och elektronspinn inkluderas, medan växelverkan med atomkärnor och laddningstäthet försummas.

Materialets respons beskrivs inom linjär responsteori, där den magnetiska susceptibiliteten antas ge en fullständig karakterisering av systemets svar på en svag perturbation. Analysen utförs i gränsen av låga temperaturer, vilket innebär att endast excitationer från grundtillståndet bidrar. Vidare antas materialet vara homogent och translationsinvariant, vilket möjliggör formulering i impuls- och frekvensrum.

Den astrofysiska beskrivningen av mörk materia baseras på en Maxwell-Boltzmann-fördelning med en skarp avskärning vid flykthastigheten.

1.3 Användning av AI-verktyg

I detta arbete har AI-baserade språkmodeller, såsom ChatGPT och Claude, använts i begränsad omfattning som stöd för konceptuell förståelse. Allt innehåll har kontrollerats mot etablerad litteratur och vetenskapliga källor. Den interaktiva användningen av modellerna har stärkt vår läroprocess genom att förtydliga komplexa koncept i den använda litteraturen.

Idén om att använda Gram-matriser uppkom genom diskussioner med Claude, men samtliga beräkningar, härledningar och analyser har utförts av författarna. AI-verktyg har inte använts för att generera eller verifiera resultat eller teoretiskt innehåll.

2

Teori

Detta avsnitt introducerar den teori som används för att beskriva växelverkan mellan mörk materia och elektronspinn i magnetiska material. Fokus ligger på de begrepp och standardresultat som krävs för att formulera och tolka spridnings- och absorptionsprocesser. Centrala delar är den effektiva Hamiltonianen för växelverkan, Fermis gyllene regel för övergångshastigheter samt den magnetiska susceptibiliteten som beskriver materialets respons. Genomgående används naturliga enheter, $\hbar = c = 1$.

2.1 Interaktion mellan mörk materia och elektronspinn

Vi betraktar en modell där mörk materia växelverkar med elektroners spinn i ett magnetiskt material. I den icke-relativistiska gränsen kan växelverkan beskrivas av Hamiltoniantätheten

$$\mathcal{H}_e = -\Phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{s}_e(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

som endast verkar på elektronen. Här betecknar $\mathbf{s}_e$ två gånger elektronens spinntäthet och Φ är en effektiv potential genererad av den inkommande mörk materia-partikeln. Potentialen kan uttryckas som

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \mathcal{O}(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}) e^{-iq \cdot x} \times \begin{cases} \frac{1}{V} & (\text{spridning}) \\ \frac{1}{\sqrt{2m_{\text{DM}}V}} & (\text{absorption}) \end{cases} \quad (2.2)$$

för spridning respektive absorption [5]. Här är $q = (\omega_{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ den fyrdimensionella momentvektorn för mörk materia, $\mathcal{O}$ en modellberoende operator, m_{DM} är massan hos mörk materia-partikeln och V är målmaterialets volym. Spridnings- och absorptionspotentialerna har i detta skede olika dimensioner. Denna skillnad kompenseras senare av den modellberoende operatoren i ekvation (2.6). Den effektiva Hamiltonianen erhålls genom rumslig integration,

$$H_e = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H}_e(\mathbf{x}, t). \quad (2.3)$$

Effektiva spinnberoende växelverkningar av denna typ används ofta vid beskrivning av lätt mörk materia i magnetiska material [3, 5, 6].

Vi betraktar spridning av en inkommande mörk materia-partikel med massa m_{DM} , icke-relativistisk hastighet $\mathbf{v}$ och impuls $\mathbf{p} \approx m_{\text{DM}}\mathbf{v}$. Den kinetiska energin är då approximativt $E \approx \frac{m_{\text{DM}}|\mathbf{v}|^2}{2}$. Vid spridning överför partikeln en impuls $\mathbf{q}$ och energi $\omega_{\mathbf{q}}$ till målet. I den icke-relativistiska gränsen följer energibevarandet $\omega_{\mathbf{q}} \approx \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} - \frac{|\mathbf{q}|^2}{2m_{\text{DM}}}$ [5]. Den utgående mörk materia-partikeln får impulsen $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \mathbf{q}$ och energin $E' = E - \omega_{\mathbf{q}}$. Spinnets ändras från ett initialt tillstånd s till ett finalt tillstånd s' . För absorption gäller att mörk materia-partikeln absorberas och avger sin massenergi. Då gäller $\omega_{\mathbf{q}} \approx m_{\text{DM}}$ och $\mathbf{q} \approx m_{\text{DM}}\mathbf{v}$ [5].

2.1.1 Hamiltoniantäthetens struktur

Den explicita formen på Hamiltoniantätheten bestäms av symmetrikrav och av strukturen hos den underliggande växelverkan. Om de initiala och finala mörk materia-tillstånden

antas vara planvågor ger matriselementet av interaktionshamiltonianen upphov till fasfaktorn $e^{-iq \cdot x}$ där $q = (\omega_{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ är den överförda fyrmomentvektorn [5].

Växelverkan antas vara spinnberoende. I den icke-relativistiska gränsen reduceras mörk materia-partikelns spinnstruktur till Pauli-matriser $\boldsymbol{\sigma}$, medan elektronens spinn beskrivs av spinntätheten $\mathbf{s}_e$ [5, 7]. Rotationsinvarians innebär att interaktionen måste bilda en skalär, vilket innebär att spinnstrukturen reduceras till en skalärprodukt mellan mörk materia-partikelns spinn och elektronens spinn [5, 6].

Växelverkan förmedlas av en mediator, det vill säga en partikel som kopplar till både mörk materia och till elektroner. Kopplingsstyrkorna till mörk materia respektive elektroner betecknas g_{DM} respektive g_e , vilket gör att Hamiltoniantätheten blir proportionell mot produkten $g_{\text{DM}}g_e$.

Momentumberoendet bestäms av mediators propagator, som beskriver hur mediatoren fortplantas mellan växelverkande partiklar. Den är proportionell mot $(q^2 - m_V^2)^{-1}$, där m_V är mediators massa [8, kap. 4]. I den icke-relativistiska gränsen gäller $\omega_{\mathbf{q}} \ll |\mathbf{q}|$, vilket ger $q^2 = \omega_{\mathbf{q}}^2 - |\mathbf{q}|^2 \approx -|\mathbf{q}|^2$ [5]. Propagatorn kan då approximeras som $-(|\mathbf{q}|^2 + m_V^2)^{-1}$.

Under dessa antaganden kan Hamiltoniantätheten skrivas som

$$\mathcal{H}_e = -\frac{g_{\text{DM}}g_e}{V} \frac{e^{-iq \cdot x}}{|\mathbf{q}|^2 + m_V^2} \boldsymbol{\sigma}_{ss'} \cdot \mathbf{s}_e(\mathbf{x}, t). \quad (2.4)$$

Den motsvarande potentialen identifieras som

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{g_{\text{DM}}g_e}{V} \frac{e^{-iq \cdot x}}{|\mathbf{q}|^2 + m_V^2} \boldsymbol{\sigma}_{ss'}, \quad (2.5)$$

vilket definierar den modellberoende operatoren

$$\mathcal{O} = \frac{g_{\text{DM}}g_e}{|\mathbf{q}|^2 + m_V^2} \boldsymbol{\sigma}_{ss'} \times \begin{cases} 1 & (\text{spridning}) \\ \sqrt{\frac{2m_{\text{DM}}}{V}} & (\text{absorption}) \end{cases} \quad (2.6)$$

för spridning respektive absorption. Detta uttryck för Hamiltoniantätheten kommer att användas som utgångspunkt i kapitel 3 för att beräkna övergångshastigheterna.

2.2 Fermis gyllene regel och övergångshastighet

För att beskriva övergångar mellan kvanttillstånd betraktas ett kvantsystem som utsätts för en svag perturbation. Inom tidsberoende perturbationsteori ges amplituden för en övergång från ett initialt tillstånd $|I\rangle$ till ett finalt tillstånd $|F\rangle$ av en tidsintegral över perturbationen. Övergångssannolikheten erhålls som kvadraten av denna amplitud. I gränsen av långa tider leder detta till Fermis gyllene regel, där övergångshastigheten definieras som sannolikheten per tidsenhet [7, kap. 5-6].

Med Hamiltonianen definierad enligt ekvation (2.3) ges övergångshastigheten i ledande ordning av

$$\Gamma_{I \rightarrow F} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} dt \langle F | H | I \rangle \right|^2. \quad (2.7)$$

Här betecknar T observationstiden och H är den perturbation som inducerar övergången [5]. Uttrycket utgör utgångspunkten för härledningen av spridnings- och absorptions-hastigheterna i kapitel 3.

2.3 Magnetisk susceptibilitet

Inom linjär responsteori beskrivs ett systems respons på en yttre perturbation med en responsfunktion, eller susceptibilitet. För operatorer A och B som verkar vid positionerna $\mathbf{r}$ respektive $\mathbf{r}'$ och tiderna t respektive t' ges den retarderade responsfunktionen av Kuboformeln [9]

$$\chi_{AB}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') = i\theta(t - t') \langle [A(\mathbf{r}, t), B(\mathbf{r}', t')] \rangle. \quad (2.8)$$

Heavisidefunktionen θ säkerställer kausalitet. Om det ostörda systemet är translationsinvariant beror responsfunktionen endast på $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ [9]. En Fouriertransform med avseende på både tid och rum ger då

$$\chi_{AB}(\mathbf{q}, \omega) = i \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \frac{1}{V} \langle [A(\mathbf{q}, t), B(-\mathbf{q}, 0)] \rangle. \quad (2.9)$$

I denna rapport är den relevanta responsfunktionen den magnetiska susceptibiliteten, vilken erhålls genom att välja operatorerna A och B som komponenter av spinntätheten, se avsnitt 3.2. Den magnetiska susceptibiliteten betecknas med χ_{ij} där i och j är kartesiska index. Susceptibiliteten är i allmänhet komplex och kan skrivas som $\chi_{ij} = \chi'_{ij} + i\chi''_{ij}$. För magnetisk respons beskriver den reella delen, χ'_{ij} , den dispersiva responsen, vilket är den del av magnetiseringen som är i fas med den applicerade perturbationen. Den imaginära delen, χ''_{ij} , beskriver systemets absorptiva respons, det vill säga är den del som är ur fas med perturbationen och därmed ger upphov till energiförluster. Denna storhet är därför direkt kopplad till spridningsprocesser och experimentellt observerbara excitationer [5].

2.3.1 Kausalitet och analyticitet

I detta och det följande avsnittet analyseras de analytiska egenskaperna hos den magnetiska susceptibiliteten. Eftersom resonemanget gäller komponentvis underförstås indexen i, j . Dessutom underförstås det explicita beroendet av $\mathbf{q}$ och positionskoordinaterna $\mathbf{r}$ och $\mathbf{r}'$. Susceptibiliteten skrivs därför här som $\chi(t)$ i tidsdomänen och $\chi(\omega)$ i frekvensdomänen.

Den retarderade magnetiska susceptibiliteten begränsas av kausalitet. För den retarderade responsfunktionen gäller att $\chi(t)$ är noll för $t < 0$, vilket innebär att responsen inte kan föregå perturbationen. Fouriertransformen kan därför skrivas

$$\chi(\omega) = \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \chi(t). \quad (2.10)$$

Om frekvensen generaliseras till en komplex variabel $z = \omega + i\eta$, med $\eta > 0$, fås

$$\chi(z) = \int_0^\infty dt e^{i\omega t} e^{-\eta t} \chi(t). \quad (2.11)$$

Faktorn $e^{-\eta t}$ avtar exponentiellt för stora t eftersom $\eta > 0$. Under antagandet att $\chi(t)$ inte växer snabbare än exponentiellt, gör denna dämpningsfaktor att integralen konvergerar absolut för varje z med $\text{Im } z > 0$. För att visa analyticitet betraktas derivatan

$$\frac{d\chi}{dz} = \frac{d}{dz} \int_0^\infty dt e^{izt} \chi(t) = \int_0^\infty dt (it) e^{izt} \chi(t). \quad (2.12)$$

Bytet av derivata och integral är tillåtet om den deriverade integranden konvergerar absolut. Det gäller att

$$|(it) e^{izt} \chi(t)| = t e^{-\eta t} |\chi(t)|. \quad (2.13)$$

Faktorn $t e^{-\eta t}$ avtar exponentiellt för stora t , så integralen konvergerar absolut. Eftersom derivatan existerar för varje z i det övre halvplanet är $\chi(z)$ analytisk där. Analyticitet i det övre halvplanet är alltså en direkt konsekvens av kausalitet.

Eftersom responsfunktionen är kausal och analytisk i det övre halvplanet uppfyller den Kramers-Kronig-relationerna:

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (2.14)$$

$$\chi''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (2.15)$$

där $\mathcal{P}$ betecknar Cauchys principalvärde [9]. Dessa relationer innebär att den dispersiva och absorptiva delen är beroende av varandra.

2.3.2 Från negativa till positiva frekvenser

I Kramers-Kronig-relationerna förekommer både positiva och negativa frekvenser. Dessa relationer kan skrivas om till integraler över enbart positiva frekvenser genom att utnyttja susceptibilitetens egenskaper. Det gäller att

$$\chi^*(\omega) = \left(\int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \chi(t) \right)^* = \int_0^{\infty} dt e^{-i\omega t} \chi^*(t) = \int_0^{\infty} dt e^{-i\omega t} \chi(-t) = \chi(-\omega) \quad (2.16)$$

eftersom $\chi^*(t) = \chi(-t)$. Detta ger

$$\chi'(-\omega) = \chi'(\omega), \quad \chi''(-\omega) = -\chi''(\omega). \quad (2.17)$$

Att χ'' är udda innebär att för positiva frekvenser $\omega > 0$ absorberar systemet energi ω från störningen, medan för negativa frekvenser avger systemet energi. Dessa samband används för att skriva om Kramers-Kronig-relationerna som integraler över enbart positiva frekvenser. Detta görs för ekvation (2.14) genom att först dela upp integralen i två delar

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^0 \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (2.18)$$

I den andra integralen görs variabelbytet $\omega' \rightarrow -\omega'$, vilket ger

$$\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^0 \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega' + \omega} d\omega'. \quad (2.19)$$

Summeras detta med bidraget från positiva frekvenser fås

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \chi''(\omega') \left[\frac{1}{\omega' - \omega} - \frac{1}{\omega' + \omega} \right] d\omega', \quad (2.20)$$

vilket förenklas till

$$\chi'(\omega) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\omega' \chi''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \quad (2.21)$$

Analogt för ekvation (2.15) där vi utnyttjar att χ' är jämn fås

$$\chi''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \quad (2.22)$$

Detta visar att det är tillräckligt att betrakta positiva frekvenser när materialets respons analyseras.

2.4 Hastighetsfördelning för mörk materia

För att kunna beskriva spridningshastigheten behövs en hastighetsfördelning $f_{\text{DM}}(\mathbf{v})$, där $f_{\text{DM}}(\mathbf{v})d^3v$ anger sannolikheten att partikeln har en viss hastighet inom volymelementet d^3v kring $\mathbf{v}$. Som utgångspunkt väljs ett galaktiskt vilosystem där fördelningen av mörk materia antas vara isotrop. Detta antagande görs eftersom sannolikhetsstätheten inte beror på riktningen hos hastigheten i vilosystemet, $\mathbf{u}$, utan endast på dess storlek, $u = |\mathbf{u}|$.

Stora hastigheter kräver mycket energi och förväntas därför vara ovanliga i en gravitationellt bunden miljö och sannolikheten för dessa bör avta. En vanlig modell är en Maxwell-Boltzmann-fördelning [5]

$$f_{\text{gal}}(\mathbf{u}) \propto e^{-u^2/v_0^2}. \quad (2.23)$$

Med denna fördelning är stora hastigheter fortfarande tillåtna även om sannolikheten för dem snabbt blir liten. I en gravitationellt bunden galax är det däremot rimligt att det finns en maximal hastighet för bundna partiklar. Om en partikel har tillräckligt stor hastighet kan den överkomma den gravitationella potentialen och lämna det bundna systemet. För att ta hänsyn till detta införs en avskärning vid flykthastigheten v_{esc} ,

$$f_{\text{gal}}(\mathbf{u}) \propto e^{-u^2/v_0^2} \Theta(v_{\text{esc}} - u). \quad (2.24)$$

Eftersom experiment utförs i jordens referenssystem måste fördelningen transformeras. Detta görs med en Galileitransformation, $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{v}_e$, där $\mathbf{v}$ är mörk materia-partikelns hastighet relativt platsen för detektorn och $\mathbf{v}_e$ är jordens hastighet relativt det galaktiska vilosystemet. Den resulterande hastighetsfördelningen för mörk materia ges av

$$f_{\text{DM}}(\mathbf{v}) = \frac{1}{N_0} e^{-|\mathbf{v}+\mathbf{v}_e|^2/v_0^2} \Theta(v_{\text{esc}} - |\mathbf{v} + \mathbf{v}_e|), \quad (2.25)$$

där normaliseringskonstanten N_0 bestäms av normeringsvillkoret

$$\int d^3v f_{\text{DM}}(\mathbf{v}) = 1. \quad (2.26)$$

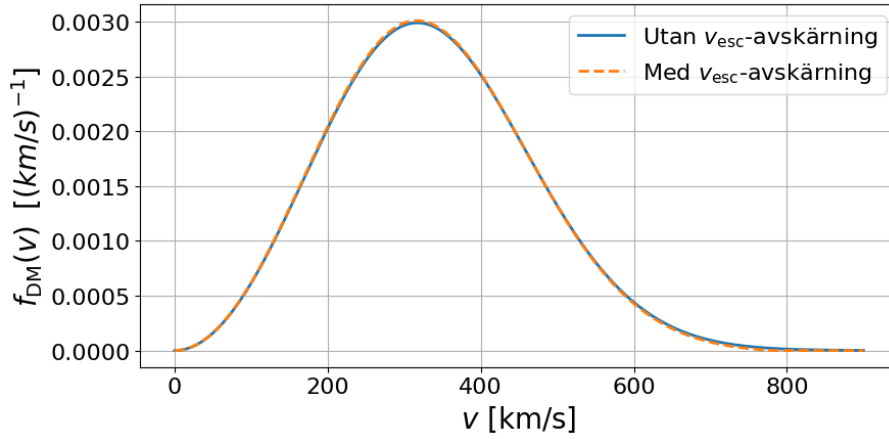
I figur 2.1 visas hastighetsfördelningen i jordens referenssystem med och utan avskärning vid flykthastigheten. Där har en integration över riktningar gjorts för att erhålla en fördelning över hastighetsmagnituden $v = |\mathbf{v}|$. Skillnaden mellan modellerna är liten. Detta beror på att Maxwell-Boltzmannfördelningen redan exponentiellt undertrycker stora hastigheter, vilket innebär att bidrag från partiklar nära flykthastigheten är små även utan avskärning.

2.5 Gram-matriser

I härledningen av den övre gränsen på spridningshastigheten i kapitel 4 kommer formfaktorn att skrivas på en form som kan identifieras med en Gram-matris. Detta avsnitt introducerar de relevanta egenskaperna hos Gram-matriser som krävs för att visa positiviteten hos formfaktorn i det roterade koordinatsystemet, se avsnitt 4.4.

Definition 1 (Gram-matris). Låt $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k$ vara vektorer i ett komplext inre produktrum med inre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, konjugat-linjär i första argumentet och linjär i det andra. Gram-matrisen till denna uppsättning är den $k \times k$ -matris G med element [10]

$$G_{ij} = \langle \mathbf{u}^j, \mathbf{u}^i \rangle. \quad (2.27)$$



Figur 2.1: Fördelningen för hastighetsmagnituden $v = |\mathbf{v}|$ i jordens referenssystem med och utan avskärning vid flykthastigheten v_{esc} . Hastigheterna $v_0 = 220\text{km/s}$, $v_e = 240\text{km/s}$ och $v_{\text{esc}}\text{km/s}$ har använts [5].

För konkreta beräkningar tar vi det inre produktrummet att vara $\mathbb{C}^N$ där inre produkten är $\langle a, b \rangle = \sum_n a_n^* b_n$, vilket ger

$$G_{ij} = \sum_n (\mathbf{u}^j)_n^* (\mathbf{u}^i)_n. \quad (2.28)$$

Det finns två egenskaper hos Gram-matriser som är centrala för detta arbete. Den första är hermiticitet, det vill säga $G^\dagger = G$. Den andra är positiv semidefinitet, PSD, det vill säga $\mathbf{w}^\dagger G \mathbf{w} \geq 0$ för alla $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^k$.

Lemma 1 (Egenskaper hos Gram-matriser). *Varje Gram-matris G är hermitesk och positivt semidefinit. Speciellt är diagonalelementen reella och icke-negativa, det vill säga $G_{ii} \in \mathbb{R}$ och $G_{ii} \geq 0$ för varje i [10, Cor. 7.2.11].*

Att Gram-matriser är PSD medför dessutom att Gram-strukturen bevaras hos matrisen under linjära transformationer.

Proposition 1 (Bevarande av Gram-strukturen). *Låt G vara Gram-matrisen till $\{\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k\}$ och låt T vara en $k \times k$ -matris med komplexa element. Definiera de transformerade vektorerna*

$$\tilde{\mathbf{u}}^i = \sum_\alpha T_{i\alpha} \mathbf{u}^\alpha. \quad (2.29)$$

Då är Gram-matrisen till de transformerade vektorerna

$$\tilde{G} = TGT^\dagger, \quad (2.30)$$

och $\tilde{G}$ är därmed själv en Gram-matris, det vill säga hermitesk och positivt semidefinit. För en reell matris T gäller $T^\dagger = T^T$.

Bevis. Direkt insättning ger

$$\tilde{G}_{ij} = \langle \tilde{\mathbf{u}}^j, \tilde{\mathbf{u}}^i \rangle = \sum_{\alpha, \beta} T_{i\alpha} T_{j\beta}^* \langle \mathbf{u}^\beta, \mathbf{u}^\alpha \rangle = (TGT^\dagger)_{ij}. \quad (2.31)$$

Det avgörande är att $\tilde{G}$ själv är Gram-matrisen till de transformerade vektorerna $\{\tilde{\mathbf{u}}^i\}$, och att hela lemma 1 därmed gäller automatiskt för $\tilde{G}$. PSD-villkoret kan också verifieras direkt genom $\mathbf{w}^\dagger \tilde{G} \mathbf{w} = (T^\dagger \mathbf{w})^\dagger G (T^\dagger \mathbf{w}) \geq 0$. $\square$

3

Spridnings- och absorptionshastighet

I detta kapitel härleds uttrycken för spridnings- och absorptionshastigheten med utgångspunkt i den effektiva växelverkan som introducerades i avsnitt 2. Målet är att formulera hastigheten på ett sätt där bidraget från mörk materia-interaktionen separeras från materialets respons. Det som beräknas är hastigheten per tidsenhet, vilket på engelska ofta benämns som rate, men benämns här endast som hastigheten. Resultatet uttrycks först som en hastighet per inkommande partikel och omvandlas därefter till en storhet per målmasa. Framställningen följer [5].

3.1 Spridningshastighet för en partikel

Vi utgår från den effektiva Hamiltonianen $H_e = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H}_e(\mathbf{x}, t)$ som introducerades i avsnitt 2.1. Målet är att beräkna övergångshastigheten för excitationer i materialet orsakade av en inkommande mörk materia-partikel.

Betrakta övergången från ett initialt tillstånd $|I\rangle = |e\rangle$ till ett finalt tillstånd $|F\rangle = |e'\rangle$. Enligt formuleringen av övergångshastigheten i avsnitt 2.2 ges denna av

$$\Gamma_{I \rightarrow F} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} dt \langle e' | H_e | e \rangle \right|^2, \quad (3.1)$$

där T är observationstiden. Insättning av Hamiltonianen ger

$$\Gamma_{I \rightarrow F} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{TV^2} \left| \mathcal{O}^i \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-i\omega_{\mathbf{q}}t} \int d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \langle e' | s_e^i(\mathbf{x}, t) | e \rangle \right|^2. \quad (3.2)$$

Eftersom initial- och finaltillstånd är energiegentillstånd gäller

$$\langle e' | s_e^i(\mathbf{x}, t) | e \rangle = e^{i(E_{e'} - E_e)t} \langle e' | s_e^i(\mathbf{x}, 0) | e \rangle. \quad (3.3)$$

Detta ger

$$\Gamma_{I \rightarrow F} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{TV^2} \left| \mathcal{O}^i \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-i(\omega_{\mathbf{q}} - (E_{e'} - E_e))t} \int d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \langle e' | s_e^i(\mathbf{x}, 0) | e \rangle \right|^2. \quad (3.4)$$

Definiera $\tilde{s}_e^i(\mathbf{q}) = \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} s_e^i(\mathbf{x}, 0)$. Då fås

$$\Gamma_{I \rightarrow F} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{TV^2} \mathcal{O}^i \mathcal{O}^{j*} \langle e' | \tilde{s}_e^i(-\mathbf{q}) | e \rangle \langle e' | \tilde{s}_e^j(\mathbf{q}) | e \rangle \left| \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-i(\omega_{\mathbf{q}} - (E_{e'} - E_e))t} \right|^2. \quad (3.5)$$

Betrakta nu tidsintegralen

$$\frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-iat} \right|^2 = \frac{1}{T} \left| \frac{e^{-iaT/2} - e^{iaT/2}}{-ia} \right|^2 = T \left(\frac{\sin(aT/2)}{aT/2} \right)^2, \quad (3.6)$$

där $a = \omega_{\mathbf{q}} - (E_{e'} - E_e)$. För att se vad som händer då $T \rightarrow \infty$, tag en slät testfunktion $\varphi(a)$. Då får vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} da \varphi(a) T \left(\frac{\sin(aT/2)}{aT/2} \right)^2 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(2x/T) \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2. \quad (3.7)$$

Vi ser att $\varphi(2x/T) \rightarrow \varphi(0)$ i distributionsmening då $T \rightarrow \infty$, så

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2x/T) \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx \rightarrow 2\varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = 2\pi\varphi(0). \quad (3.8)$$

Alltså gäller det att

$$\frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-iat} \right|^2 \rightarrow 2\pi\delta(a), \quad T \rightarrow \infty \quad (3.9)$$

och spridningshastigheten är

$$\Gamma_{I \rightarrow F} = \frac{1}{V^2} \mathcal{O}^i \mathcal{O}^{j*} \langle e' | \tilde{s}_e^i(-\mathbf{q}) | e \rangle \langle e | \tilde{s}_e^j(\mathbf{q}) | e' \rangle 2\pi\delta(\omega_{\mathbf{q}} - (E_{e'} - E_e)). \quad (3.10)$$

Detta gäller för en övergång. För att få en generell spridningshastighet summeras $\Gamma_{I \rightarrow F}$ över alla möjliga övergångar samt över slutliga momenta. Dessutom görs en medelvärdesbildning över de $2S_{\text{DM}} + 1$ initiala spinnstillstånd, där S_{DM} är spinn för mörk materia. Då erhålls

$$\Gamma_S = \frac{2\pi}{2S_{\text{DM}} + 1} \sum_{ss'} \sum_{\mathbf{p}'} \sum_{ee'} \frac{1}{V^2} \mathcal{O}^i \mathcal{O}^{j*} \langle e' | \tilde{s}_e^i(-\mathbf{q}) | e \rangle \langle e | \tilde{s}_e^j(\mathbf{q}) | e' \rangle \delta(\omega_{\mathbf{q}} - (E_{e'} - E_e)). \quad (3.11)$$

Definiera formfaktorn

$$\mathcal{F}_{ij} = \frac{2}{2S_{\text{DM}} + 1} \sum_{ss'} \mathcal{O}^j \mathcal{O}^{*i}. \quad (3.12)$$

Formfaktorn beror på modellen för interaktionen mellan mörk materia och elektronen samt den överförda energin och impulsen, men är oberoende av målmaterialets struktur. Materialets egenskaper återfinns istället i den anti-Hermiteska delen av den magnetiska susceptibiliteten, $\chi''_{ij}(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}})$, som behandlas i avsnitt 3.2.

Summan över $\mathbf{p}'$ i ekv. (3.11) innebär en summation över alla möjliga slutliga riktningar och storlekar på mörk materia-partikelns momentum, vilka är diskreta. Antag att partikeln befinner sig i en kubisk låda med sida L . Med periodiska randvillkor är de tillåtna momenten

$$p_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \quad p_y = \frac{2\pi}{L} n_y, \quad p_z = \frac{2\pi}{L} n_z, \quad (3.13)$$

där n_x , n_y , och n_z är heltal. Skillnaden mellan två konsekutiva tillåtna värden är $\Delta p = \frac{2\pi}{L}$. När lådan blir mycket stor gäller $\Delta p \rightarrow 0$. Momentumvärdena ligger då så tätt att de kan betraktas som kontinuerliga. Då kan summan ersättas av en integral:

$$\sum_{\mathbf{p}'} \dots = \frac{1}{(\Delta p)^3} \sum_{\mathbf{p}'} (\Delta p)^3 \dots \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p}' \dots \quad (3.14)$$

Variabelbytet $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ ger integralen $\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{q}$. Vi erhåller nu att spridningshastigheten för en partikel kan uttryckas som

$$\Gamma_S = \frac{\pi}{V} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \mathcal{F}^{ij}(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}) \left(\sum_{ee'} \langle e' | \tilde{s}_e^i(-\mathbf{q}) | e \rangle \langle e | \tilde{s}_e^j(\mathbf{q}) | e' \rangle \delta(\omega_{\mathbf{q}} - (E_{e'} - E_e)) \right). \quad (3.15)$$

3.2 Identifiering med susceptibiliteten

I uttrycket för spridningshastigheten ovan uppträder storheten

$$\frac{\pi}{V} \sum_{ee'} \langle e' | \tilde{s}_e^i(-\mathbf{q}) | e \rangle \langle e | \tilde{s}_e^j(\mathbf{q}) | e' \rangle \delta(\omega_{\mathbf{q}} - (E_{e'} - E_e)). \quad (3.16)$$

Denna summa beskriver hur materialet kan exciteras av en spinnberoende perturbation med impulsöverföring $\mathbf{q}$ och energiöverföring $\omega_{\mathbf{q}}$. Målet i detta avsnitt är att visa att denna storhet kan identifieras med den imaginära, eller absorptiva, delen av den magnetiska susceptibiliteten. Därmed kan spridningshastigheten skrivas i en form där den modellberoende växelverkan separeras från målmaterialets respons.

Vi utgår från Kuboformeln, som introducerades i avsnitt 2.3. För ett translationsinvariant system kan responsen i impuls- och frekvensrum skrivas som

$$\chi_{AB}(\mathbf{q}, \omega) = i \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \frac{1}{V} \langle [A(\mathbf{q}, t), B(-\mathbf{q}, 0)] \rangle. \quad (3.17)$$

För magnetisk respons väljer vi operatorerna

$$A = \tilde{s}_e^i, \quad B = \tilde{s}_e^j \quad (3.18)$$

där $\tilde{s}_e^i(\mathbf{q}, t) = \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} s_e^i(\mathbf{x}, t)$ är Fouriertransformen av elektronernas spinntäthet. Susceptibiliteten kan då skrivas

$$\chi_{ij}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{i}{V} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \langle e | [s_e^i(\mathbf{x}, t), s_e^j(\mathbf{y}, 0)] | e \rangle. \quad (3.19)$$

I ett material befinner sig systemet i allmänhet i en statistisk blandning av energiegentillstånd. Därför görs ett termiskt medelvärde över alla tillstånd, $\langle \dots \rangle = \sum_e p_e \langle e | \dots | e \rangle$, där p_e är sannolikheten att systemet befinner sig i tillstånd $|e\rangle$. Susceptibiliteten kan då uttryckas som

$$\chi_{ij}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{i}{V} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \sum_e p_e \langle e | [s_e^i(\mathbf{x}, t), s_e^j(\mathbf{y}, 0)] | e \rangle. \quad (3.20)$$

För att vidareutveckla summan skrivs kommutatorn ut och en komplett bas av energiegentillstånd $\{|e'\rangle\}$ införs mellan operatorerna. Detta ger

$$\begin{aligned} \sum_e p_e \langle e | [s_e^i(\mathbf{x}, t), s_e^j(\mathbf{y}, 0)] | e \rangle &= \\ &= \sum_{ee'} p_e \left(\langle e | s_e^i(\mathbf{x}, t) | e' \rangle \langle e' | s_e^j(\mathbf{y}, 0) | e \rangle - \langle e | s_e^j(\mathbf{y}, 0) | e' \rangle \langle e' | s_e^i(\mathbf{x}, t) | e \rangle \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

I den andra termen kan summationsindexen e och e' bytas utan inskränkning, vilket gör att summan kan skrivas som

$$\sum_{ee'} (p_e - p_{e'}) \langle e | s_e^i(\mathbf{x}, t) | e' \rangle \langle e' | s_e^j(\mathbf{y}, 0) | e \rangle. \quad (3.22)$$

Eftersom $|e\rangle$ är energiegentillstånd gäller det att

$$\langle e | s_e^i(\mathbf{x}, t) | e' \rangle = e^{i(E_e - E_{e'})t} \langle e | s_e^i(\mathbf{x}, 0) | e' \rangle. \quad (3.23)$$

Med detta erhålls följande uttryck för den magnetiska susceptibiliteten:

$$\begin{aligned} \chi_{ij}(\mathbf{q}, \omega) = & \frac{i}{V} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \\ & \times \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \sum_{ee'} (p_e - p_{e'}) e^{i(E_e - E_{e'})t} \langle e | s_e^i(\mathbf{x}, 0) | e' \rangle \langle e' | s_e^j(\mathbf{y}, 0) | e \rangle. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Betrakta nu tidsintegralen $\int_0^\infty dt e^{i(\omega + E_e - E_{e'})t}$, som inte konvergerar. Genom att multiplicera med en dämpande faktor $e^{-\epsilon t}$, där $\epsilon > 0$ kan följande beräkning göras:

$$\int_0^\infty dt e^{i(\omega + E_e - E_{e'})t - \epsilon t} = \frac{i}{\omega + E_e - E_{e'} + i\epsilon}. \quad (3.25)$$

För att extrahera den imaginära delen använder vi Sokhotski-Plemeljs formel:

$$\frac{1}{x + i\delta} = \mathcal{P} \frac{1}{x} - i\pi\delta(x), \quad (3.26)$$

där $\mathcal{P}$ denoterar principalvärdet [9]. Den imaginära delen av susceptibiliteten blir då

$$\chi''_{ij}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\pi}{V} \sum_{ee'} (p_e - p_{e'}) \langle e | \tilde{s}_e^i(\mathbf{q}) | e' \rangle \langle e' | \tilde{s}_e^j(-\mathbf{q}) | e \rangle \delta(\omega - (E_{e'} - E_e)). \quad (3.27)$$

Vid termisk jämvikt ges sannolikheten att systemet befinner sig i ett energitillstånd $|e\rangle$ av Boltzmannfördelningen $p_e = e^{-\beta E_e}/Z$, där $\beta = 1/T$ och $Z = \sum_e e^{-\beta E_e}$. Vid experiment för att detektera mörk materia kyla provet ner till mycket låg temperatur [5]. I gränsen $T \rightarrow 0$ bidrar endast övergångar från grundtillståndet, och uttrycket ovan reduceras till samma summa som uppträder i spridningshastigheten. Därmed kan den materialberoende delen av spridningshastigheten identifieras med χ''_{ij} .

Spridningshastigheten för en inkommande mörk materia-partikel kan således skrivas som

$$\Gamma_S = \frac{\pi}{V} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \mathcal{F}^{ij}(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}) \chi''_{ij}(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}). \quad (3.28)$$

Detta visar att spridningshastigheten kan faktoriseras i två delar: en modellberoende del, beskriven av formfaktorn $\mathcal{F}^{ij}$, och en materialberoende del, beskriven av den imaginära delen av den magnetiska susceptibiliteten, χ''_{ij} .

3.3 Spridningshastighet per målmasa

Efter att ha härlett spridningshastigheten för en enskild inkommande mörk materia-partikel, Γ_S , erhålls ett uttryck som beskriver hur ofta en partikel med given hastighet $\mathbf{v}$ exciterar systemet. För experimentella tillämpningar är denna storhet inte relevant, eftersom den varken tar hänsyn till hur många partiklar som träffar detektorn eller hur stort materialet är. Målet är därför att konstruera en storhet som beskriver det totala antalet spridningshändelser per tidsenhet och per kilogram material. Denna definieras som spridningshastigheten per målmasa, R_S .

Mörk materia-partiklarna når detektorn med en fördelning av hastigheter snarare än en enda bestämd hastighet. Detta beskrivs av en normerad hastighetsfördelning $f_{\text{DM}}(\mathbf{v})$, som antas följa en Maxwell-Boltzmann-fördelning, se avsnitt 2.4. Genom att låta varje

möjlig hastighet bidra proportionellt mot hur vanligt förekommande den är enligt hastighetsfördelningen och sedan summera över alla hastigheter erhålls den hastighetsviktade spridningshastigheten per inkommande partikel:

$$\bar{\Gamma}_S = \int d^3v f_{\text{DM}}(\mathbf{v}) \Gamma_S(\mathbf{v}). \quad (3.29)$$

För att gå från en hastighet per partikel till en total händelsehastighet måste vi ta hänsyn till hur många mörk materia-partiklar som finns tillgängliga. Den lokala mörk materia-densiteten ρ_{DM} ger massan per volymenhet. Eftersom varje partikel har massan m_{DM} , är antalet partiklar per volym $\rho_{\text{DM}}/m_{\text{DM}}$. Multiplikation med denna faktorn ger spridningshastigheten per volym.

Slutligen vill vi uttrycka resultatet per kilogram istället för per volym för att möjliggöra en jämförelse mellan olika material. För att göra denna normalisering används målmaterialets densitet ρ_T . Kombinerat ger detta den totala spridningshastigheten per målmasa:

$$R_S = \frac{\rho_{\text{DM}}}{m_{\text{DM}} \rho_T} \int d^3v f_{\text{DM}}(\mathbf{v}) \Gamma_S(\mathbf{v}). \quad (3.30)$$

Detta uttryck separerar bidrag från mörk materia och materialegenskaper och möjliggör jämförelse mellan olika detektormaterial.

3.4 Absorptionshastighet

Vi betraktar nu absorption av en inkommande mörk materia-partikel. Till skillnad från spridning överförs här i princip hela partikelns energi till materialet [5]. För icke-relativistisk mörk materia är den deponerade energin

$$\omega_{\mathbf{q}} \approx m_{\text{DM}} \left(1 + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) \quad (3.31)$$

medan den överförda impulsen är

$$\mathbf{q} \approx m_{\text{DM}} \mathbf{v}. \quad (3.32)$$

Eftersom $|\mathbf{v}| \ll 1$ är hastighetsberoendet i energin normalt försumbart [5], så

$$\omega_{\mathbf{q}} \approx m_{\text{DM}}. \quad (3.33)$$

Beräkningarna för absorptionshastigheten genomförs analogt med spridningshastigheten men med potentialen

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \mathcal{O}(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}) e^{-iq \cdot x} \frac{1}{\sqrt{2m_{\text{DM}}V}}. \quad (3.34)$$

Med denna utgångspunkt, tillsammans med Fermis gyllene regel och den effektiva Hamiltonianen i avsnitt 2.2 erhålls övergångshastigheten för en partikel från initialt tillstånd $|I\rangle = |e\rangle$ till ett finalt tillstånd $|F\rangle = |e'\rangle$ som

$$\begin{aligned} \Gamma_{I \rightarrow F}(\mathbf{v}) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} dt \langle e' | H_e | e \rangle \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2m_{\text{DM}}V} \mathcal{O}^i \mathcal{O}^{j*} \langle e' | \tilde{s}_e^i(-\mathbf{q}) | e \rangle \langle e | \tilde{s}_e^j(\mathbf{q}) | e' \rangle 2\pi \delta(\omega_{\mathbf{q}} - (E_{e'} - E_e)). \end{aligned} \quad (3.35)$$

För att få en generell absorptionshastighet summeras $\Gamma_{I \rightarrow F}$ över alla möjliga övergångar och medelvärdesbildas över de $2S_{\text{DM}} + 1$ initiala spinnstillstånd. Till skillnad från spridningsfallet summeras $\Gamma_{I \rightarrow F}$ inte över slutligt momenta då detta alltid kommer ha samma värde eftersom all energi absorberas. Då erhålls

$$\Gamma_A = \frac{2\pi}{2S_{\text{DM}} + 1} \sum_{ss'} \sum_{ee'} \frac{1}{2m_{\text{DM}}V} \mathcal{O}^i \mathcal{O}^{j*} \times \langle e' | \tilde{s}_e^i(-\mathbf{q}) | e \rangle \langle e | \tilde{s}_e^j(\mathbf{q}) | e' \rangle \delta(\omega_{\mathbf{q}} - (E_{e'} - E_e)). \quad (3.36)$$

Analogt med spridningsfallet separeras uttrycket i en modellberoende del, given av formfaktorn $\mathcal{F}_{ij}$, och en materialberoende del, given av den imaginära delen av den magnetiska susceptibiliteten χ''_{ij} . Detta ger absorptionshastigheten per inkommande partikel:

$$\Gamma_A = \frac{1}{2m_{\text{DM}}} \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{q}, m_{\text{DM}}) \chi''_{ij}(\mathbf{q}, m_{\text{DM}}). \quad (3.37)$$

Som i spridningsfallet når mörk materia-partiklarna detektorn med en hastighetsfördelning, f_{DM} , introducerad i avsnitt 2.4. Den hastighetsviktade absorptionshastigheten per inkommande partikel ges då av

$$\bar{\Gamma}_A = \int d^3v f_{\text{DM}}(\mathbf{v}) \Gamma_A(\mathbf{v}). \quad (3.38)$$

Om absorptionshastigheten endast beror på hastigheten genom $\omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}) \approx m_{\text{DM}}$ följer att

$$\bar{\Gamma}_A = \int d^3v f_{\text{DM}}(\mathbf{v}) \Gamma_A(\mathbf{v}) \approx \Gamma_A(m_{\text{DM}}), \quad (3.39)$$

där normeringen

$$\int d^3v f_{\text{DM}}(\mathbf{v}) = 1 \quad (3.40)$$

har använts. Detta motsvarar behandlingen i [5], där absorptionshastigheten utvärderas vid $\omega = m_{\text{DM}}$ utan explicit hastighetsmedelvärde. Det finns modeller där absorptionshastigheten innehåller ett explicit hastighetsberoende utöver beroendet genom $\omega(\mathbf{v})$. I sådana fall kan denna approximation inte göras.

Genom att multiplicera med antalet mörk materia-partiklar per volym, $\rho_{\text{DM}}/m_{\text{DM}}$ och normalisera med målmateriallets densitet ρ_T , erhålls absorptionshastigheten per målmasa:

$$R_A = \frac{\rho_{\text{DM}}}{m_{\text{DM}}\rho_T} \int d^3v f_{\text{DM}}(\mathbf{v}) \Gamma_A(\mathbf{v}). \quad (3.41)$$

I approximationen där hastighetsberoendet endast uppträder genom $\omega(\mathbf{v}) \approx m_{\text{DM}}$ reduceras detta till

$$R_A \approx \frac{\rho_{\text{DM}}}{m_{\text{DM}}\rho_T} \Gamma_A(m_{\text{DM}}), \quad (3.42)$$

vilket sammanfaller med resultatet i [5].

4

Övre gräns för spridningshastigheten

I föregående kapitel härleddes ett uttryck för spridningshastigheten R_S , där beroendet av målmaterialet bestäms av målmaterialets densitet ρ_T och den imaginära delen av den magnetiska susceptibiliteten, χ''_{ij} . Vi utgår explicit från

$$R_S = \frac{\rho_{DM}}{m_{DM} \rho_T} \int d^3v f_{DM}(\mathbf{v}) \Gamma_S(\mathbf{v}), \quad (4.1)$$

där

$$\Gamma_S(\mathbf{v}) = \frac{\pi}{V} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}) \chi''_{ij}(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}). \quad (4.2)$$

I ekvation (4.2) framgår det att det är primärt χ''_{ij} som beskriver materialets bidrag. Eftersom χ''_{ij} är svår att analysera direkt [11], är det användbart att härleda en övre gräns för R_S som inte kräver fullständig kunskap om χ''_{ij} . Målet i detta kapitel är att härleda en övre gräns som entydigt bestäms av kända materialkonstanter.

Härledningen sker i två steg. Först visas att R_S kan skrivas som en positivt viktad integral av χ''_{ij} och att en övre gräns existerar. Därefter beräknas gränsen explicit. Genom att kombinera ekvationerna (4.2) och (4.1) fås

$$R_S = \frac{\rho_{DM}}{m_{DM} \rho_T} \int d^3v f_{DM}(\mathbf{v}) \frac{\pi}{V} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}) \chi''_{ij}(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}), \quad (4.3)$$

där $\omega_{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} - |\mathbf{q}|^2/(2m_{DM})$. Frekvensen $\omega_{\mathbf{q}}$ är inte en fri variabel, utan bestäms av $\mathbf{q}$ och $\mathbf{v}$. För att kunna applicera Kramers-Kronig-relationerna från avsnitt 2.3.1 införs en explicit frekvensintegral med hjälp av en Dirac-deltafunktion,

$$\chi''_{ij}(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \chi''_{ij}(\mathbf{q}, \omega) \delta(\omega - \omega_{\mathbf{q}}). \quad (4.4)$$

Insättning i ekvation (4.3) ger

$$R_S = \frac{\rho_{DM}}{m_{DM} \rho_T} \frac{\pi}{V} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int d^3v f_{DM}(\mathbf{v}) \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \chi''_{ij}(\mathbf{q}, \omega) \delta(\omega - \omega_{\mathbf{q}}). \quad (4.5)$$

Om integrationsordningen byts är det möjligt att applicera Kramers-Kronig-relationerna. För att integralbytet ska vara giltigt tillämpas Tonellis sats.

Lemma 2 (Tonellis sats). *Låt (X, μ) och (Y, ν) vara σ -finita måttrum och låt $f: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ vara en mätbar, icke-negativ funktion. Då gäller*

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y). \quad [12, Thm. 2.37] \quad (4.6)$$

Satsens tre villkor verifieras nu för integranden i ekvation (4.5). Integrationsvariablerna $\mathbf{q}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ och $\omega \in \mathbb{R}$ bildar σ -finita måttrum, eftersom $\mathbb{R}^n$ kan täckas av uppräknligt många bitar med ändlig storlek [12, Prop. 1.13]. En funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ kallas mätbar om mängden $\{x \in X : f(x) > t\}$ är mätbar för varje $t \in \mathbb{R}$ [12, Def. 2.1]. Konsekvent gäller att alla kontinuerliga funktioner är mätbara. Hastighetsfördelningen f_{DM} och formfaktorn $\mathcal{F}_{ij}$ är båda kontinuerliga och därmed mätbara. Slutligen är χ''_{ij} mätbar eftersom dess spektralrepresentation är en uppräknelig summa av mått [12, Prop. 1.2]. Därmed är de två första villkoren i lemma 2 uppfyllda. Det återstår att undersöka om integranden är icke-negativ, det vill säga om kontraktionen $\mathcal{F}_{ij}(\mathbf{q}, \omega) \chi''_{ij}(\mathbf{q}, \omega)$ är icke-negativ.

Tabell 4.1: Exempel på modeller för spinn-1/2 mörk materia och deras motsvarande formfaktorer $\mathcal{F}_{ij}$. De olika modellerna ger upphov till olika beroenden av impulsöverföringen $\mathbf{q}$ samt olika tensorstrukturer i växelverkan. Tabellen är baserad på Tabell 1 i [5].

Modell	Formfaktor F^{ij}
Magnetisk dipolmodell	$\left(\frac{g_X g_e}{ \mathbf{q} ^2 + m_V^2}\right)^2 \left(\frac{ \mathbf{q} ^2}{4m_X m_e}\right)^2 (\delta^{ij} - \hat{q}^i \hat{q}^j)$
Anapol mörk materia	$\left(\frac{g_X g_e}{ \mathbf{q} ^2 + m_V^2}\right)^2 \left(\frac{ \mathbf{q} ^3}{8m_X^2 m_e}\right)^2 (\delta^{ij} - \hat{q}^i \hat{q}^j)$
Axialvektormediator	$\left(\frac{g_X g_e}{ \mathbf{q} ^2 + m_V^2}\right)^2 \delta^{ij}$
Pseudoskalär mediator	$\left(\frac{g_X g_e}{ \mathbf{q} ^2 + m_V^2}\right)^2 \left(\frac{ \mathbf{q} ^2}{4m_X m_e}\right)^2 \hat{q}^i \hat{q}^j$
CP-violerande skalär	$\left(\frac{g_X g_e}{ \mathbf{q} ^2 + m_V^2}\right)^2 \left(\frac{ \mathbf{q} ^2}{2m_e}\right)^2 \hat{q}^i \hat{q}^j$
Mörkt elektron-EDM	$\left(\frac{g_X g_e}{ \mathbf{q} ^2 + m_V^2}\right)^2 \left(\frac{ \mathbf{q} ^2}{2m_e}\right)^2 \hat{q}^i \hat{q}^j$

4.1 Formfaktorns allmänna form

Vi undersöker nu den mest allmänna formen av formfaktorn $\mathcal{F}_{ij}(\mathbf{q}, \omega)$. Detta är centralt eftersom strukturen på $\mathcal{F}_{ij}$ avgör vilka komponenter av susceptibiliteten som bidrar till spridningshastigheten och om kontraktionen blir icke-negativ. Formfaktorn beskriver den modellberoende kopplingen mellan mörk materia-partikeln och elektronernas spinn och bestämmer därmed vilka riktningar av spinnfluktuationer som kan exciteras vid en given impulsöverföring $\mathbf{q}$. Den enda riktningsvektorn som uppträder i formfaktorn är den normerade impulsen $\hat{q}_i$. Av en enda vektor $\hat{q}_i$ kan exakt två oberoende symmetriska 3×3 -matriser byggas, dels enhetsmatrisen δ_{ij} , som är oberoende av $\hat{\mathbf{q}}$, och den yttre produkten $\hat{q}_i \hat{q}_j$, som projicerar ut komponenten längs $\hat{\mathbf{q}}$. Varje fysikalisk formfaktor måste därför kunna skrivas som en linjärkombination av dessa två:

$$\mathcal{F}_{ij}(\mathbf{q}, \omega) = A(|\mathbf{q}|, \omega) \delta_{ij} + B(|\mathbf{q}|, \omega) \hat{q}_i \hat{q}_j, \quad (4.7)$$

där A och B är skalära funktioner som kan bero på $|\mathbf{q}|$ och ω men inte på riktningen av $\mathbf{q}$. I tabell 4.1 ges exempel på formfaktorer för flera modeller av spinn- $\frac{1}{2}$ mörk materia. Samtliga tensorstrukturer är proportionella mot δ_{ij} , $\hat{q}_i \hat{q}_j$ eller $\delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j$, och är därmed specialfall av ekvation (4.7). Vi kan se att diagonalelementen i samtliga exempel är icke-negativa. Detta gäller även för formfaktorn i allmänhet, vilket visas i avsnitt 4.4.1.

4.2 Tecken hos susceptibiliteten

För att kontraktionen $\mathcal{F}_{ij}(\mathbf{q}, \omega) \chi''_{ij}(\mathbf{q}, \omega)$ ska vara icke-negativ behöver tecknet för susceptibiliteten analyseras. Med detta som målbild används spektralrepresentationen för χ''_{ij} från ekvation (3.27). Vid temperaturen $T = 0$ gäller

$$\chi''_{ij}(\mathbf{q}, \omega') = \frac{\pi}{V} \sum_{e'} M_{e'} \delta(\omega' - \omega_{e'}), \quad (4.8)$$

där

$$M_{e'} = \langle 0 | \tilde{s}_e^i(\mathbf{q}) | e' \rangle \langle e' | \tilde{s}_e^j(-\mathbf{q}) | 0 \rangle \quad (4.9)$$

samt $\omega_{e'} = E_{e'} - E_0 > 0$. Summan löper enbart över finala tillstånd e' eftersom systemet vid $T = 0$ utgår från grundtillståndet. För allmänna i, j är $M_{e'}$ inte nödvändigtvis icke-negativ, utan beror på vilket material som väljs. I fallet $i = j$ gäller att

$$M_{e'} = \langle 0 | \tilde{s}_e^i(\mathbf{q}) | e' \rangle \langle e' | \tilde{s}_e^i(-\mathbf{q}) | 0 \rangle. \quad (4.10)$$

Eftersom spinnoperatorn i realrummet är hermitesk gäller för dess Fouriertransform att

$$\tilde{s}_e^i(\mathbf{q})^\dagger = \tilde{s}_e^i(-\mathbf{q}). \quad (4.11)$$

Det andra matriselementet kan därmed skrivas som komplexkonjugatet till det första,

$$\langle e' | \tilde{s}_e^i(-\mathbf{q}) | 0 \rangle = \langle e' | \tilde{s}_e^i(\mathbf{q})^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \tilde{s}_e^i(\mathbf{q}) | e' \rangle^*, \quad (4.12)$$

och det följer att

$$M_{e'} = \langle 0 | \tilde{s}_e^i(\mathbf{q}) | e' \rangle \langle 0 | \tilde{s}_e^i(\mathbf{q}) | e' \rangle^* = \left| \langle 0 | \tilde{s}_e^i(\mathbf{q}) | e' \rangle \right|^2 \geq 0. \quad (4.13)$$

Detta innebär att diagonalelementen χ''_{ii} är icke-negativa för alla material. De icke-diagonala komponenterna kan däremot ha godtyckliga tecken. Det motiverar att ett nytt koordinatsystem införs där formfaktorn blir diagonal. Då reduceras kontraktionen $\mathcal{F}_{ij}\chi''_{ij}$ till en summa av produkter $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha \tilde{\chi}''_{\alpha\alpha}$, där varje faktor är icke-negativ.

4.3 Koordinatsystem anpassat till $\mathbf{q}$

Formfaktorn har den allmänna strukturen $\mathcal{F}_{ij} = A\delta_{ij} + B\hat{q}_i\hat{q}_j$. I det kartesiska koordinatsystemet pekar $\hat{\mathbf{q}}$ i en godtycklig riktning, vilket innebär att termen $B\hat{q}_i\hat{q}_j$ kommer att ge upphov till icke-diagonala komponenter i kontraktionen $\sum_{i,j} \mathcal{F}_{ij}\chi''_{ij}$. För att eliminera dessa komponenter införs ett koordinatsystem anpassat till $\hat{\mathbf{q}}$. Vi väljer ett ortonormalt system $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ med $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{q}}$ och låter $\mathbf{R}$ beteckna den ortogonala övergångsmatrisen med komponenter $R_{\alpha i} = (\hat{\mathbf{e}}_\alpha)_i$. Då gäller $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$. Susceptibiliteten χ''_{ij} som anger hur materialet svarar i riktning i när det störs i riktning j , transformeras enligt

$$\tilde{\chi}''_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{i,j} R_{\alpha i} R_{\beta j} \chi''_{ij}(\mathbf{q}, \omega), \quad (4.14)$$

vilket motsvarar projektionen av den gamla susceptibiliteten på de nya basriktningarna. Med detta kan kontraktionen i det ursprungliga systemet skrivas som en Frobenius-inre produkt [10],

$$\sum_{i,j} \mathcal{F}_{ij} \chi''_{ij} = \text{tr}(\mathcal{F}^T \chi''). \quad (4.15)$$

Eftersom spridningshastigheten R_S är en observerbar storhet måste kontraktionen vara oberoende av det koordinatsystem den beräknas i, det vill säga

$$\text{tr}(\tilde{\mathcal{F}}^T \tilde{\chi}'') = \text{tr}(\mathcal{F}^T \chi''). \quad (4.16)$$

Resultatet följer av att $\mathbf{R}$ är ortogonal, $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$, kombinerat med spårets cykliska egenskap. Ett explicit bevis ges i appendix A. I det roterade systemet finns endast en komponent som inte är noll nämligen $\hat{q}_3 = 1$, vilket vi uttrycker som $\hat{q}_\alpha = \delta_{\alpha 3}$. Formfaktorn i det roterade systemet ges därför av

$$(\tilde{\mathcal{F}})_{\alpha\beta} = A \delta_{\alpha\beta} + B \delta_{\alpha 3} \delta_{\beta 3}, \quad (4.17)$$

eller på matrisform

$$\tilde{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Formfaktorn är nu diagonal i det roterade systemet. Eftersom $\tilde{\mathcal{F}}$ är diagonal har produkten $\tilde{\mathcal{F}}^T \tilde{\chi}''$ element $(\tilde{\mathcal{F}}^T \tilde{\chi}'')_{\alpha\beta} = \tilde{\mathcal{F}}_{\alpha\alpha} \tilde{\chi}''_{\alpha\beta}$, spåret blir därför,

$$\text{tr}(\tilde{\mathcal{F}}^T \tilde{\chi}'') = \sum_{\alpha=1}^3 \tilde{\mathcal{F}}_{\alpha\alpha} \tilde{\chi}''_{\alpha\alpha} = A \tilde{\chi}''_{11} + A \tilde{\chi}''_{22} + (A+B) \tilde{\chi}''_{33}. \quad (4.19)$$

Alternativt kan resultatet skrivas som

$$\sum_{i,j} \mathcal{F}_{ij} \chi''_{ij} = \sum_{\alpha=1}^3 \tilde{\mathcal{F}}_{\alpha\alpha}(|\mathbf{q}|, \omega) \tilde{\chi}''_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}, \omega), \quad (4.20)$$

där

$$\tilde{\mathcal{F}}_{11} = \tilde{\mathcal{F}}_{22} = A, \quad \tilde{\mathcal{F}}_{33} = A+B. \quad (4.21)$$

Kontraktionen har därmed reducerats till enbart diagonala bidrag.

4.4 Positivitet hos den roterade formfaktorn

Det återstår nu att visa att de roterade diagonala komponenterna $\tilde{\mathcal{F}}_{\alpha\alpha}$ och $\tilde{\chi}''_{\alpha\alpha}$ är icke-negativa. Från ekvation (4.21) gäller att $\tilde{\mathcal{F}}_{11} = \tilde{\mathcal{F}}_{22} = A$ och $\tilde{\mathcal{F}}_{33} = A+B$, så det räcker att visa att $A \geq 0$ och $A+B \geq 0$. Strategin är att utnyttja att formfaktorn kan skrivas som en Gram-matris. En sådan matris är hermitesk och positivt semidefinit (PSD). Från proposition 1 vet vi att Gram-egenskaperna bevaras under ortogonala basbyten, vilket innebär att diagonalelementen förblir icke-negativa. Vi visar först att formfaktorn är en Gram-matris. Därefter formulerar och bevisar vi ett generellt resultat för $A \geq 0$ och $A+B \geq 0$, och tillämpar slutligen resultatet.

4.4.1 Formfaktorn som Gram-matris

Vi utgår från definitionen av formfaktorn, se avsnitt 3.1. Den ges av

$$\mathcal{F}_{ij}(\mathbf{q}, \omega) = c \sum_{s,s'} \mathcal{O}^i(s, s'; \mathbf{q}, \omega) \mathcal{O}^{j*}(s, s'; \mathbf{q}, \omega), \quad c = \frac{1}{2S_{\text{DM}} + 1} > 0. \quad (4.22)$$

Låt indexet $n = 1, \dots, N$ numrera alla spinnpar (s, s') . Här gäller att $N = (2S_{\text{DM}} + 1)^2$. Definiera vektorer $\mathbf{u}^i \in \mathbb{C}^N$ enligt

$$(\mathbf{u}^i)_n = \mathcal{O}^i(s_n, s'_n; \mathbf{q}, \omega). \quad (4.23)$$

Då kan formfaktorn skrivas som

$$\mathcal{F}_{ij} = c \sum_n (\mathbf{u}^i)_n (\mathbf{u}^j)_n^* = c \langle \mathbf{u}^j, \mathbf{u}^i \rangle = c G_{ij}, \quad (4.24)$$

där G är Gram-matrisen till de tre vektorerna $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3$. Eftersom $c > 0$ innebär det att formfaktorn är en positiv multipel av en Gram-matris, och därmed både hermitesk och positivt semidefinit enligt lemma 1.

4.4.2 Positivitet hos A och $A + B$

Med Gram-strukturen etablerad kan de egenskaper hos A och B som krävs formuleras och bevisas .

Sats 1 (Positivitet av A och $A + B$). *För varje $(\mathbf{q}, \omega)$ gäller*

$$A(|\mathbf{q}|, \omega) \geq 0, \quad A(|\mathbf{q}|, \omega) + B(|\mathbf{q}|, \omega) \geq 0. \quad (4.25)$$

Bevis. Övergången till det system där $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{q}}$ beskrivs av den ortogonala matrisen $\mathbf{R}$, och i det roterade systemet ges formfaktorn av $\tilde{\mathcal{F}} = \mathbf{R} \mathcal{F} \mathbf{R}^T$. Vi studerar diagonalelementen. Om $\mathbf{r}_\alpha \in \mathbb{R}^3$ är rad α i $\mathbf{R}$ blir

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\alpha\alpha} = \sum_{i,j} R_{\alpha i} \mathcal{F}_{ij} R_{\alpha j} = \mathbf{r}_\alpha^T \mathcal{F} \mathbf{r}_\alpha \geq 0. \quad (4.26)$$

Villkoret för PSD är $\mathbf{w}^\dagger \mathcal{F} \mathbf{w} \geq 0$. Olikheten är exakt detta med $\mathbf{w} = \mathbf{r}_\alpha$. Insättning av identiteterna $\tilde{\mathcal{F}}_{11} = \tilde{\mathcal{F}}_{22} = A$ och $\tilde{\mathcal{F}}_{33} = A + B$ från ekvation (4.21) ger

$$A(|\mathbf{q}|, \omega) = \tilde{\mathcal{F}}_{11} \geq 0, \quad A(|\mathbf{q}|, \omega) + B(|\mathbf{q}|, \omega) = \tilde{\mathcal{F}}_{33} \geq 0 \quad (4.27)$$

för alla $(\mathbf{q}, \omega)$. □

Detta innebär inte nödvändigtvis att $B \geq 0$. Exempelvis ger $\mathcal{F}_{ij} \propto \delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j$ att $A = 1$ och $B = -1$, vilket uppfyller villkoren ovan trots att $B < 0$.

4.4.3 Tillämpning på modellen

Vi illustrerar resultatet för formfaktorn med hjälp av den modellberoende operatör som introducerades i sektion 2.1.1. Denna modellberoende operator beskriver växelverkan mellan den mörka materians spinn och elektronernas spinn

$$\mathcal{O}^i(s, s'; \mathbf{q}) = \frac{g_{\text{DM}} g_e}{|\mathbf{q}|^2 + m_V^2} \langle s | \sigma^i | s' \rangle, \quad (4.28)$$

Insättning i definitionen av formfaktorn, ekvation (4.22), ger

$$\mathcal{F}_{ij}(\mathbf{q}, \omega) = c \frac{(g_{\text{DM}} g_e)^2}{(|\mathbf{q}|^2 + m_V^2)^2} \sum_{s, s'} \langle s | \sigma^i | s' \rangle \langle s | \sigma^j | s' \rangle^*, \quad (4.29)$$

där summan är spåret av Pauli-matrisprodukten,

$$\sum_{s, s'} \langle s | \sigma^i | s' \rangle \langle s | \sigma^j | s' \rangle^* = \text{tr}(\sigma^i \sigma^j) = 2\delta^{ij}. \quad (4.30)$$

För spinn $\frac{1}{2}$ mörk materia gäller $c = 1/2$ och vi får

$$\mathcal{F}_{ij}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{(g_{\text{DM}} g_e)^2}{(|\mathbf{q}|^2 + m_V^2)^2} \delta_{ij}. \quad (4.31)$$

Formfaktorn blir proportionell mot enhetsmatrisen, alltså är den isotrop. Detta betyder att alla tre rumsliga riktningar kopplar med exakt samma styrka och att strukturen kommer vara oförändrad under rotationer. Studeras sambandet $\mathcal{F}_{ij} = A\delta_{ij} + B\hat{q}_i\hat{q}_j$ gäller att

$$A(|\mathbf{q}|, \omega) = \frac{(g_{\text{DM}} g_e)^2}{(|\mathbf{q}|^2 + m_V^2)^2}, \quad B(|\mathbf{q}|, \omega) = 0. \quad (4.32)$$

Här är $A > 0$ och $A + B > 0$ vilket uppfyller sats 1. I det roterade systemet blir formfaktorn diagonal med identiska positiva diagonalelement,

$$\tilde{\mathcal{F}} = \frac{(g_{\text{DM}} g_e)^2}{(|\mathbf{q}|^2 + m_V^2)^2} \text{diag}(1, 1, 1). \quad (4.33)$$

4.5 Positivitet hos den roterade susceptibiliteten

Vi har nu visat att den roterade formfaktorns komponenter $\tilde{\mathcal{F}}_{\alpha\alpha}$ är positiva. Det återstår att visa att de diagonala komponenterna $\tilde{\chi}''_{\alpha\alpha}$ också är det. I avsnitt 4.2 visades att koefficienterna $M_{e'}$ är positiva. Argumentet för positiviteten var enbart baserat på spinnoperatorns hermiticitet. Det räcker därför att visa att motsvarande egenskap gäller för den roterade spinnoperatorn. Spinnoperatorn i riktning α i det roterade systemet definieras som

$$\tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^3 (\hat{\mathbf{e}}_\alpha)_i \tilde{s}_e^i(\mathbf{q}), \quad (4.34)$$

vilket är en linjärkombination av de tre ursprungliga operatorerna med reella koefficienter $(\hat{\mathbf{e}}_\alpha)_i$. Hermiticiteten bevaras under reella linjärkombinationer, vilket kan verifieras genom

$$\left(\tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q})\right)^\dagger = \sum_{i=1}^3 (\hat{\mathbf{e}}_\alpha)_i \left(\tilde{s}_e^i(\mathbf{q})\right)^\dagger = \sum_{i=1}^3 (\hat{\mathbf{e}}_\alpha)_i \tilde{s}_e^i(-\mathbf{q}) = \tilde{s}_e^\alpha(-\mathbf{q}), \quad (4.35)$$

där det i första steget används att koefficienterna är reella och i det andra steget att varje $\tilde{s}_e^i(\mathbf{q})$ är hermitesk. Den roterade spinnoperatorn uppfyller därmed samma relation som den ursprungliga. Med denna egenskap konstaterad kan samma argument som i avsnitt 4.2 tillämpas. De diagonala koefficienterna i det roterade systemet blir

$$M_{e'}^\alpha = \langle 0 | \tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) | e' \rangle \langle e' | \tilde{s}_e^\alpha(-\mathbf{q}) | 0 \rangle = \langle 0 | \tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) | e' \rangle \langle e' | (\tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}))^\dagger | 0 \rangle = \left| \langle 0 | \tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) | e' \rangle \right|^2 \geq 0. \quad (4.36)$$

Därmed gäller $\tilde{\chi}''_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}, \omega) \geq 0$ vid $T = 0$ i det roterade systemet.

4.6 Begränsning av frekvensintegralen

Eftersom kontraktionen nu har skrivits som en summa av icke-negativa termer kan lemma 2 användas för att byta integrationsordning. Med koordinatbytet från avsnitt 4.3 och ekvation (4.20) kan spridningshastigheten skrivas som

$$R_S = \sum_{\alpha=1}^3 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\omega \tilde{K}_\alpha^S(\mathbf{q}, \omega) \tilde{\chi}_{\alpha\alpha}''(\mathbf{q}, \omega), \quad (4.37)$$

där kärnan i det roterade systemet är definierad som

$$\tilde{K}_\alpha^S(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\pi \rho_{\text{DM}}}{m_{\text{DM}} \rho_T V} \tilde{\mathcal{F}}_\alpha(|\mathbf{q}|, \omega) g(\mathbf{q}, \omega), \quad (4.38)$$

med den kinematiska viktfunktionen

$$g(\mathbf{q}, \omega) = 2\pi \int d^3v f_{\text{DM}}(\mathbf{v}) \delta(\omega - \omega_{\mathbf{q}}). \quad (4.39)$$

Det återstår att visa att $\mathbf{q}$ -integralen och frekvensintegralen i ekvation (4.37) konvergerar. Konvergensen av $\mathbf{q}$ -integralen följer av ett kinematiskt argument. Vid $T = 0$ visades i avsnitt 4.2 att enbart excitationer med positiv energiöverföring bidrar, varför integrationsdomänen begränsas till $\omega \geq 0$. För att deltafunktionen $\delta(\omega - \omega_{\mathbf{q}})$ i $g(\mathbf{q}, \omega)$ skall bidra vid $\omega \geq 0$ krävs att $\omega_{\mathbf{q}} \geq 0$, det vill säga

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \geq \frac{|\mathbf{q}|^2}{2m_{\text{DM}}}. \quad (4.40)$$

Hastighetsfördelningen f_{DM} har kompakt stöd för $|\mathbf{v}| > v_{\text{max}}$, där $v_{\text{max}} = v_{\text{esc}} + |\mathbf{v}_e|$ är den maximala hastigheten hos bundna mörk materia-partiklar i jordens referenssystem. För något $\mathbf{v}$ i stödet av f_{DM} ger Cauchy-Schwarz-olikheten [13, Thm. 1.35] att

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \leq |\mathbf{q}| |\mathbf{v}| \leq |\mathbf{q}| v_{\text{max}}. \quad (4.41)$$

Kombinerar ekvation (4.40) och (4.41) fås vad $|\mathbf{q}|$ ska vara för att $g(\mathbf{q}, \omega) \neq 0$,

$$|\mathbf{q}| \leq 2m_{\text{DM}} v_{\text{max}}. \quad (4.42)$$

Integranden i ekvation (4.37) blir alltså noll för $|\mathbf{q}| > 2m_{\text{DM}} v_{\text{max}}$, och $\mathbf{q}$ -integralen blir därför begränsad till $|\mathbf{q}| \leq 2m_{\text{DM}} v_{\text{max}}$. Detta är en kompakt domän och eftersom integranden är kontinuerlig på domänen gäller det att den också är begränsad [13, Thm. 4.16]. Det gäller också att en begränsad funktion är integrerbar över ett begränsat område [12].

Det återstår att visa att frekvensintegralen konvergerar. Detta följer från Kramers-Kronig-relationerna i avsnitt 2.3.1. För $\omega = 0$ blir ekvation (2.21) i det roterade systemet

$$\tilde{\chi}'_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}, 0) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\tilde{\chi}_{\alpha\alpha}''(\mathbf{q}, \omega')}{\omega'} d\omega'. \quad (4.43)$$

Storheten $\tilde{\chi}'_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}, 0)$ är den statiska magnetiska susceptibiliteten i riktning α , som är både känd och ändlig för fysikaliska material [5]. Vänsterledet i ekvation (4.43) är

således ändligt. Om integralen i högerledet konvergerar behövs inte principalvärdet, och den totala frekvensintegrerade vikten av $\tilde{\chi}_{\alpha\alpha}''/\omega$ är ett ändligt tal bundet av den statiska susceptibiliteten. Med hjälp av spektralrepresentationen fås att

$$\tilde{\chi}'_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}, 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tilde{\chi}_{\alpha\alpha}''(\mathbf{q}, \omega')}{\omega'} d\omega' = \frac{2}{V} \int_0^\infty \sum_{e'=1}^\infty \frac{M_{e'}^\alpha}{\omega_{e'}} \delta(\omega' - \omega_{e'}) d\omega'. \quad (4.44)$$

För att evaluera högerledet används följande proposition.

Proposition 2. *Med distributionsteori gäller att*

$$\frac{2}{V} \int_0^\infty \sum_{e'=1}^\infty \frac{M_{e'}^\alpha}{\omega_{e'}} \delta(\omega' - \omega_{e'}) d\omega' = \frac{2}{V} \sum_{e'=1}^\infty \frac{M_{e'}^\alpha}{\omega_{e'}}, \quad \text{då} \quad \sum_{e'} M_{e'}^\alpha / \omega_{e'} < \infty. \quad (4.45)$$

Beviset för detta finns i appendix B. Idén är att uttrycket $T = \sum_{e'} (M_{e'}^\alpha / \omega_{e'}) \delta_{\omega_{e'}}$ tolkas som en distribution som skall mätas mot konstantfunktionen 1. Eftersom konstantfunktionen 1 saknar kompakt stöd och inte är en testfunktion ersätts den med en approximationsföljd $(\varphi_R)_{R \geq 1}$ av testfunktioner som är lika med 1 på det växande intervallet $[1/R, R]$. Distributionen verkar på varje sådan testfunktion, och $\langle T, \varphi_R \rangle$ konvergerar mot summan i högerledet i gränsen $R \rightarrow \infty$.

Givet att endast de diagonala elementen av M_e^α studeras, reduceras konvergensvillkoret till att $\sum_{e'} M_{e'}^\alpha$ är ändlig. Genom att utnyttja fullständighetsrelationen för Hilbertrum kan denna summa skrivas som variansen av $\tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q})$ i grundtillståndet, vilken i sin tur är begränsad av $\langle 0 | \tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) \tilde{s}_e^{\alpha\dagger}(\mathbf{q}) | 0 \rangle$ [7, kap. 1]. För ett ändligt system med N gitterplatser ger en triangelolikhetssuppskattning att detta är begränsat av $N^2 S^2$, där S är spinnkvantalet vid varje gitterplats. I gränsen $N \rightarrow \infty$ följer ändligheten av att korrelationsfunktionen $\langle 0 | s_0^\alpha s_{\mathbf{R}}^\alpha | 0 \rangle$ avtar exponentiellt med avståndet $|\mathbf{R}|$ [14]. Det gäller därför att

$$\tilde{\chi}'_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}, 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tilde{\chi}_{\alpha\alpha}''(\mathbf{q}, \omega')}{\omega'} d\omega' = \frac{2}{V} \sum_{e'=1}^\infty \frac{M_{e'}^\alpha}{\omega_{e'}}, \quad (4.46)$$

vilket är ett ändligt resultat. Detta innebär att den sammanlagda spridningsstyrkan fördelad över alla möjliga excitationer i materialet är begränsad. I kontexten av spridning av mörk materia mot ett kristallint material innebär detta att det finns en övre gräns för spridningshastigheten som enbart bestäms av spinnkorrelationerna i grundtillståndet.

4.7 Supremumolikheten

Nu när existensen av en övre gräns har etablerats kan den explicita formen härledas. Vi fixerar impulsöverföringen $\mathbf{q}$ och arbetar i det koordinatsystem som är anpassat till denna riktning. Från ekvation (4.37) och ekvation (4.20) kan spridningshastighetens integrand skrivas som

$$K_{ij}^S \chi_{ij}'' = \sum_{\alpha=1}^3 \tilde{K}_{\alpha\alpha}^S(\mathbf{q}, \omega) \tilde{\chi}_{\alpha\alpha}''(\mathbf{q}, \omega), \quad (4.47)$$

där vänsterledet är skalärkontraktionen i det ursprungliga systemet och högerledet samma skalär uttryckt i den roterade basen. För ett fixt $\mathbf{q}$ definieras frekvensintegralen för komponent α som

$$I_\alpha(\mathbf{q}) = \int_0^\infty d\omega \tilde{K}_{\alpha\alpha}^S(\mathbf{q}, \omega) \tilde{\chi}_{\alpha\alpha}''(\mathbf{q}, \omega). \quad (4.48)$$

Vi söker en övre gräns på denna integral. Strategin är att separera integranden i två faktorer varav den ena kan begränsas med hjälp av ekvation (4.46). Vi uppnår detta genom att multiplicera och dividera med frekvensen ω ,

$$I_\alpha(\mathbf{q}) = \int_0^\infty d\omega \left[\omega \tilde{K}_{\alpha\alpha}^S(\mathbf{q}, \omega) \right] \frac{\tilde{\chi}_{\alpha\alpha}''(\mathbf{q}, \omega)}{\omega}. \quad (4.49)$$

Integranden är nu en produkt av två faktorer. Den första faktorn $\omega \tilde{K}_{\alpha\alpha}^S(\mathbf{q}, \omega)$ beror bara på mörk materia-parametrar, målmaterialets densitet och kinematik. Den andra faktorn $\tilde{\chi}_{\alpha\alpha}''(\mathbf{q}, \omega)/\omega$ beror bara på materialets respons. Det viktiga är att båda faktorerna är positiva enligt avsnitt 4.5 och 4.4, vilket möjliggör användningen av lemma 3

Lemma 3 (Supremumolikheten för icke-negativa funktioner). *Låt w och h vara icke-negativa funktioner på intervallet $[0, \infty)$. Antag att $\sup_{\omega \geq 0} w(\omega)$ existerar samt att $\int_0^\infty h(\omega) d\omega$ konvergerar. Då gäller*

$$\int_0^\infty w(\omega) h(\omega) d\omega \leq \sup_{\omega \geq 0} [w(\omega)] \times \int_0^\infty h(\omega) d\omega. \quad (4.50)$$

Bevis. Inför beteckningen $W = \sup_{\omega \geq 0} w(\omega)$. Det gäller att

$$w(\omega) \leq W \quad \text{för alla } \omega \geq 0.$$

Eftersom $h(\omega) \geq 0$ för alla $\omega \geq 0$ följer det att

$$w(\omega) h(\omega) \leq W h(\omega) \quad \text{för alla } \omega \geq 0.$$

Båda sidor av olikheten är icke-negativa för alla $\omega \geq 0$. Vi kan därför integrera båda sidor över intervallet $[0, \infty)$ och olikhetens riktning bevaras

$$\int_0^\infty w(\omega) h(\omega) d\omega \leq \int_0^\infty W h(\omega) d\omega.$$

Eftersom W är en konstant som inte beror på ω kan den flyttas ut ur integralen i högerledet

$$\int_0^\infty W h(\omega) d\omega = W \int_0^\infty h(\omega) d\omega = \sup_{\omega \geq 0} [w(\omega)] \times \int_0^\infty h(\omega) d\omega.$$

□

Vi tillämpar lemmat med $w(\omega) = \omega \tilde{K}_{\alpha\alpha}^S(\mathbf{q}, \omega)$ och $h(\omega) = \tilde{\chi}_{\alpha\alpha}''(\mathbf{q}, \omega)/\omega$ vilket ger

$$I_\alpha(\mathbf{q}) \leq \sup_{\omega \geq 0} \left[\omega \tilde{K}_{\alpha\alpha}^S(\mathbf{q}, \omega) \right] \times \int_0^\infty \frac{\tilde{\chi}_{\alpha\alpha}''(\mathbf{q}, \omega)}{\omega} d\omega. \quad (4.51)$$

Supremumet existerar eftersom hastighetsfördelningen f_{DM} har avtagande svans och $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$ är rationell i $|\mathbf{q}|$, så $\omega \tilde{K}_\alpha^S$ är begränsad ovanifrån för fix $\mathbf{q}$. Den första faktorn i högerledet, $\sup_{\omega \geq 0} [\omega \tilde{K}_\alpha^S]$, kan beräknas explicit för varje given mörk materia-modell. Tillämpning av ekvation (4.46) ger

$$I_\alpha(\mathbf{q}) \leq \frac{\pi}{2} \tilde{\chi}'_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}, 0) \sup_{\omega \geq 0} [\omega \tilde{K}_\alpha^S(\mathbf{q}, \omega)]. \quad (4.52)$$

Detta gäller för varje α vid varje fix $\mathbf{q}$.

4.8 Övre gräns för spridningshastigheten

Vi har nu en övre gräns på $I_\alpha(\mathbf{q})$ för varje komponent α och varje impulsöverföring $\mathbf{q}$. Spridningshastigheten fås genom att summera $I_\alpha(\mathbf{q})$ över de tre komponenterna och integrera över alla möjliga impulsöverföringar:

$$R_S = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha=1}^3 I_\alpha(\mathbf{q}). \quad (4.53)$$

Olikheten från ekvation (4.52) gäller för varje α och varje $\mathbf{q}$. Eftersom alla termer är icke-negativa kan vi integrera och summera på båda sidor, och den övre gränsen på spridningshastigheten blir

$$R_S \leq \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\pi}{2} \tilde{\chi}'_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}, 0) \sup_{\omega \geq 0} [\omega \tilde{K}_\alpha^S(\mathbf{q}, \omega)]. \quad (4.54)$$

Ekvation (4.54) gäller oavsett val av formfaktor. Koordinatbytet i avsnitt 4.3 eliminerade alla icke-diagonala bidrag. Positiviteten visad i avsnitt 4.5 och 4.4 garanterade att supremumolikheten kunde tillämpas. Det enda som krävs är att materialets respons är kausal och att systemet befinner sig vid tillräckligt låg temperatur. I högerledet av ekvation (4.54) uppträder två faktorer. Den första, $\tilde{\chi}'_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}, 0)$, är en egenskap hos materialet som kan bestämmas genom beräkningar eller mätningar och är ändlig för varje fysikaliskt material. Den andra, $\sup_{\omega} [\omega \tilde{K}_\alpha^S(\mathbf{q}, \omega)]$, beror enbart på målmaterialets densitet ρ_T och den mörka materians parametrar, vilket är partikelns massa m_{DM} , den lokala densiteten ρ_{DM} , hastighetsfördelningen f_{DM} och kopplingskoefficienterna $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$ och kan beräknas explicit för varje given modell.

5

Härledning av en övre gräns för absorptionshastigheten

I kapitel 4 härleddes en övre gräns för spridningshastigheten R_S med hjälp av Kramers-Kronig-relationerna och positivitet hos den absorptiva responsen. I detta kapitel tillämpas samma metod på absorptionshastigheten R_A . Från avsnitt 3.4 gäller

$$R_A = \frac{\rho_{\text{DM}}}{m_{\text{DM}} \rho_T} \int d^3v f_{\text{DM}}(\mathbf{v}) \Gamma_A(\mathbf{v}), \quad (5.1)$$

där absorptionshastigheten för en partikel är

$$\Gamma_A(\mathbf{v}) = \frac{1}{2m_{\text{DM}}} \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{q}, m_{\text{DM}}) \chi''_{ij}(\mathbf{q}, m_{\text{DM}}), \quad \mathbf{q} = m_{\text{DM}} \mathbf{v}. \quad (5.2)$$

Till skillnad mot spridningsfallet är energiöverföringen inte en fri variabel, utan fixerad till $\omega = m_{\text{DM}}$. Hela vilomassan absorberas av materialet och χ''_{ij} utvärderas därför vid en enda frekvens istället för att integreras över ett intervall. Eftersom metoden i kapitel 4 bygger på att χ''_{ij} uppträder som en funktion av en fri frekvensvariabel kan den metoden inte tillämpas direkt. Genom att skriva om R_A så att en explicit frekvensintegral framträder kan metoden tillämpas även på absorptionshastigheten.

5.1 Absorptionshastigheten som frekvensintegral

För att efterlikna spridningskärnan i ekvation (4.38) från avsnitt 4.6, där ω uppträder som en fri integrationsvariabel använder vi identiteten

$$g(m_{\text{DM}}) = \int_0^\infty d\omega \delta(\omega - m_{\text{DM}}) g(\omega). \quad (5.3)$$

Tillämpat på kontraktionen i ekvation (5.2) ger detta

$$\mathcal{F}_{ij}(\mathbf{q}, m_{\text{DM}}) \chi''_{ij}(\mathbf{q}, m_{\text{DM}}) = \int_0^\infty d\omega \delta(\omega - m_{\text{DM}}) \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{q}, \omega) \chi''_{ij}(\mathbf{q}, \omega). \quad (5.4)$$

Nu är ω en fri variabel i integralen-, vilket möjliggör användningen av Kramers-Kronig-relationerna. Insättning i ekvation (5.1) ger ett uttryck med samma form som spridningskärnan i ekvation (4.37),

$$R_A = \int d^3v \int_0^\infty d\omega K_{ij}^A(\mathbf{v}, \omega) \chi''_{ij}(m_{\text{DM}} \mathbf{v}, \omega), \quad (5.5)$$

med kärnan

$$K_{ij}^A(\mathbf{v}, \omega) = \frac{\rho_{\text{DM}}}{2m_{\text{DM}}^2 \rho_T} f_{\text{DM}}(\mathbf{v}) \delta(\omega - m_{\text{DM}}) \mathcal{F}_{ij}(m_{\text{DM}} \mathbf{v}, \omega). \quad (5.6)$$

5.2 Begränsning av frekvensintegralen

Formfaktorn $\mathcal{F}_{ij}$ har samma struktur som i spridningsfallet, och koordinatbytet från avsnitt 4.3 fungerar därför på samma sätt. Hermiticiteten hos spinnoperatoren är oberoende av om energiöverföringen är fri eller fix. Därför ändras ej positiviteten hos $\tilde{\chi}_{\alpha\alpha}''/\omega$ och Kramers-Kronig-relationen kan användas som tidigare. Därmed om samma steg som i fallet för spridningshastigheten följs fås den roterade och förenklade formeln för absorptionshastigheten

$$R_A = \sum_{\alpha=1}^3 \int d^3v \int_0^\infty d\omega \tilde{K}_{\alpha\alpha}^A(\mathbf{v}, \omega) \tilde{\chi}_{\alpha\alpha}''(m_{\text{DM}}\mathbf{v}, \omega), \quad (5.7)$$

där kärnan ges av

$$\tilde{K}_{\alpha\alpha}^A(\mathbf{v}, \omega) = \frac{\rho_{\text{DM}}}{2m_{\text{DM}}^2 \rho_T} f_{\text{DM}}(\mathbf{v}) \delta(\omega - m_{\text{DM}}) \tilde{\mathcal{F}}_{\alpha\alpha}(m_{\text{DM}}|\mathbf{v}|, \omega). \quad (5.8)$$

Att $\mathbf{v}$ -integralen konvergerar beror som tidigare av att f_{DM} har kompakt stöd eftersom $f_{\text{DM}}(\mathbf{v}) = 0$ för $|\mathbf{v}| > v_{\text{max}}$. Den högra integralen är precis den storhet som Kramers-Kronig fixerar och ger $\frac{\pi}{2} \tilde{\chi}_{\alpha\alpha}'(m_{\text{DM}}\mathbf{v}, 0)$. Det som återstår är att utvärdera supremumet av vikten $\omega \tilde{K}_{\alpha\alpha}^A$. Här uppstår en svårighet som inte fanns i spridningsfallet. Eftersom kärnan innehåller $\delta(\omega - m_{\text{DM}})$ är vikten en distribution och inte en vanlig funktion vilket innebär att det inte finns något punktvist supremum [12, kap. 9]. Problemet uppstår eftersom det exciterade tillståndet i materialet har en ändlig livstid τ [9, App. K, ekv. (K.1.26)]. Enligt energi- och tidsosäkerhetsprincipen ger en ändlig livstid upphov till en osäkerhet i energin, $\Delta\omega \sim 1/\tau$, och därför kan absorptionslinjen inte kan vara oändligt skarp [9, App. K, ekv. (K.1.63–K.1.64)]. Detta innebär att vi kan ersätta deltafunktionen med en topp med ändlig bredd $\Delta\omega$ kring $\omega = m_{\text{DM}}$. Eftersom hela arean under toppen ska vara 1 blir dess höjd vid mitten $1/\Delta\omega$. Supremumet av vikten blir nu ändligt och ges av

$$\sup_{\omega \geq 0} [\omega \tilde{K}_{\alpha\alpha}^A(\mathbf{v}, \omega)] = \frac{\rho_{\text{DM}}}{2m_{\text{DM}}^2 \rho_T} f_{\text{DM}}(\mathbf{v}) \frac{m_{\text{DM}}}{\Delta\omega} \tilde{\mathcal{F}}_{\alpha\alpha}(m_{\text{DM}}|\mathbf{v}|, m_{\text{DM}}), \quad (5.9)$$

där $\tilde{\mathcal{F}}_{\alpha\alpha}$ utvärderas vid $\omega = m_{\text{DM}}$ eftersom det är där toppen är koncentrerad. Med lemma 3 fås

$$\int_0^\infty d\omega \tilde{K}_{\alpha\alpha}^A(\mathbf{q}, \omega) \tilde{\chi}_{\alpha\alpha}''(\mathbf{q}, \omega) \leq \frac{\pi \rho_{\text{DM}}}{4 m_{\text{DM}} \rho_T \Delta\omega} f_{\text{DM}}(\mathbf{v}) \tilde{\mathcal{F}}_{\alpha\alpha}(m_{\text{DM}}|\mathbf{v}|, m_{\text{DM}}) \tilde{\chi}_{\alpha\alpha}'(m_{\text{DM}}\mathbf{v}, 0). \quad (5.10)$$

5.2.1 Övre gräns för absorptionshastigheten

Det enda som återstår är att samla ihop bidragen. Eftersom alla termer i ekvation (5.10) är positiva får vi summera över α och integrera över hastighet utan att olikhetens riktning ändras. Resultatet är

$$R_A \leq \frac{\pi \rho_{\text{DM}}}{4 m_{\text{DM}} \rho_T \Delta\omega} \int d^3v f_{\text{DM}}(\mathbf{v}) \sum_{\alpha=1}^3 \tilde{\mathcal{F}}_{\alpha\alpha}(m_{\text{DM}}|\mathbf{v}|, m_{\text{DM}}) \tilde{\chi}_{\alpha\alpha}'(m_{\text{DM}}\mathbf{v}, 0). \quad (5.11)$$

Den övre gränsen för absorptionshastigheten har samma struktur som motsvarande gräns för spridningshastigheten i ekvation (4.54).

6

Resultat och diskussion

I kapitel 4 härleddes en övre gräns för spridningshastigheten R_S ,

$$R_S \leq \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\pi}{2} \chi'_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}, 0) \sup_{\omega \geq 0} [\omega \tilde{K}_\alpha^S(\mathbf{q}, \omega)]. \quad (6.1)$$

Resultatet visar att spridningshastigheten inte kan bli godtyckligt stor för ett givet material. Trots att den dynamiska susceptibiliteten $\chi''_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}, \omega)$ i allmänhet har en komplicerad frekvensstruktur begränsas dess frekvensintegrerade vikt av den statiska susceptibiliteten genom Kramers-Kronig-relationerna. Därmed kan en övre gräns på R_S härledas utan fullständig kunskap om hela excitationsspektrumet. Däremot beror gränsen fortfarande på materialet genom den statiska susceptibiliteten $\chi'_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}, 0)$ och materialets densitet.

På motsvarande sätt härleddes i kapitel 5 en övre gräns för absorptionshastigheten R_A ,

$$R_A \leq \frac{\pi}{2} \int d^3v \sum_{\alpha=1}^3 \tilde{\chi}'_{\alpha\alpha}(m_{DM}\mathbf{v}, 0) \sup_{\omega \geq 0} [\omega \tilde{K}_{\alpha\alpha}^A(\mathbf{v}, \omega)]. \quad (6.2)$$

Även denna gräns bygger på att frekvensintegralen av den absorptiva responsen kan relateras till den statiska susceptibiliteten. Skillnaden jämfört med spridningsfallet är att absorptionen utvärderas vid $\omega \approx m_{DM}$, medan spridning involverar en integral över tillåtna impuls- och energiöverföringar.

6.1 Fysikalisk tolkning

Den absorptiva delen av den magnetiska susceptibiliteten innehåller detaljerad information om materialets excitationsspektrum. I allmänhet krävs därför full kunskap om alla tillgängliga excitationer för att exakt kunna beräkna spridnings- och absorptionshastigheterna. De härledda resultaten visar att den totala absorptiva vikten inte kan fördelas godtyckligt. Kramers-Kronig-relationerna kopplar den frekvensintegrerade absorptiva responsen till den statiska susceptibiliteten, vilket innebär att materialets dynamiska respons begränsas av dess statiska egenskaper. Resultatet innebär att den dynamiska responsen inte kan koncentreras godtyckligt till ett specifikt frekvensintervall utan att samtidigt reduceras vid andra frekvenser. Ett material med mycket stark absorptiv respons nära en viss energi måste därför ha svagare respons någon annanstans, eftersom den totala spektrala vikten är begränsad.

Detta är särskilt relevant vid sökandet efter relevanta material för mörk materia-detektion, eftersom den dynamiska susceptibiliteten ofta är svår att beräkna explicit för realistiska system. De härledda gränserna gör det möjligt att uppskatta maximala spridnings- och absorptionshastigheter utifrån statiska materialegenskaper, utan detaljerad kunskap om hela excitationsspektrumet. Resultaten kan därmed användas för att identifiera vilka typer av material som i teorin kan ge stark respons mot mörk materia. Det är däremot viktigt att skilja mellan de övre gränserna och den faktiska spridnings- eller absorptionshastigheten. En stor statisk susceptibilitet

garanterar inte att ett material är ett optimalt detektormaterial. Den relevanta responsen måste dessutom vara koncentrerad till de frekvenser och impulser som är kinematiskt tillgängliga för den inkommande mörk materia-partikeln. Ett material kan därför ha stor total magnetisk respons men ändå vara ineffektivt för detektion om den spektrala vikten är fördelad över fel energiområde. För absorptionsprocesser blir kopplingen till materialets excitationsspektrum särskilt tydlig. Eftersom hela mörk materia-partikelns energi överförs till materialet måste det finnas tillgängliga excitationer vid energin $\omega \approx m_{DM}$. Material med excitationer i relevanta energiintervall kan därför vara särskilt gynnsamma för absorption av lätt mörk materia. De övre gränserna kan därför användas som ett verktyg för att uppskatta den maximalt möjliga känsligheten hos magnetiska material för mörk materia-detektion utan att först behöva utföra fullständiga beräkningar av hela excitationsspektrumet.

6.2 Relation till tidigare arbeten

De härledda övre gränserna är nära relaterade till tidigare begränsningar för mörk materia. I [5] har samma modell för spinnberoende växelverkan använts för att beskriva spridning och absorption i termer av den magnetiska susceptibiliteten. Detta arbete bygger vidare på detta genom att härleda de övre gränserna.

Magnetiska material och kollektiva spinnexcitationer har tidigare identifierats som lovande för detektion av lätt mörk materia [6]. I sådana system kan magnonspektra ge upphov till förstärkt respons vid låga energier. Absorptionsprocesser i kondenserade materiens system har även diskuterats i arbeten såsom [3], där betydelsen av materialets excitationsspektrum och responsfunktioner betonas.

Liknande beräkningar som i detta arbete har även utförts för dielektriska material och EM-kopplad mörk materia [15]. Detta arbete bygger på en liknande idéstruktur som [15], med användningen av Kramers-Kronig-relationer, men applicerar motsvarande resonemang på spinnberoende växelverkan i magnetiska material, där susceptibiliteten spelar en analog roll med den dielektriska responsfunktionen.

Till skillnad från tidigare analyser uttrycks de övre gränserna i denna rapport direkt i termer av den statiska susceptibiliteten. Detta gör resultatet särskilt användbart för jämförelser mellan olika material, eftersom den statiska susceptibiliteten ofta är experimentellt tillgänglig även när den dynamiska susceptibiliteten inte är det.

6.3 Begränsningar och antaganden

Härledningen bygger på flera antaganden som påverkar resultatets generalitet. Ett centralt antagande är att materialets respons kan beskrivas med linjär responsteori. Det förutsätter att den externa perturbationen från den mörka materia-partikeln är tillräckligt svag samt att systemet antas svara linjärt på perturbationen. Till sammans med detta används även Fermis gyllene regel, vilket innebär att högre ordningens bidrag från växelverkan försummas. Om växelverkan istället driver systemet långt från jämvikt kan högre ordningens responstermer bli relevanta, vilket inte inkluderas i denna analys.

Vidare antas materialet vara homogent och translationsinvariant. Detta möjliggör formulering i impulsrum och förenklar uttrycken för susceptibiliteten. I realistiska material bryts dock translationsinvariansen av defekter, domänstrukturer, orenheter och ändlig kristallstorlek [16]. Sådana effekter kan modifiera excitationsspektrumet och därmed påverka både spridnings- och absorptionshastigheterna.

Dessutom antas systemet befinna sig vid temperaturer där endast excitationer från grundtillståndet behöver beaktas. Positiviteten av $\chi''_{\alpha\alpha}$ bygger dessutom på att endast positiva energiöverföringar bidrar, vilket gäller vid temperaturen $T = 0$. Vid ändlig temperatur tillkommer även processer där systemet kan avge energi, vilket kan modifiera den spektrala representationen av susceptibiliteten samt öka den experimentella bakgrunden.

Analysen begränsas även till den icke-relativistiska approximationen för mörk materia-partikeln, vilket används i uttrycket för energiöverföringen $\omega_{\mathbf{q}}$ och i behandlingen av spridningen. För relativistiska mörk materia-scenarier skulle både kinematiken och den effektiva växelverkan behöva modifieras. För absorptionshastigheten används approximationen att energin kan skrivas som $\omega_{\mathbf{q}} \approx m_{DM}$, vilket innebär att hastighetsberoendet försummas. Detta är motiverat eftersom mörk materia i galaxen är starkt icke-relativistisk. I modeller där absorptionen innehåller explicit hastighetsberoende kan denna approximation inte göras.

Resultatet förutsätter även att formfaktorn kan skrivas som en positivt semidefinit tensor av Gram-typ. Detta gäller för de modeller som har studerats här, men behöver inte vara sant för godtyckliga effektiva växelverkningar. Slutligen förutsätter användningen av Kramers-Kronig-relationerna att susceptibiliteten är kausal och avtar tillräckligt snabbt vid höga frekvenser för att de relevanta frekvensintegralerna ska konvergera.

6.4 Möjliga generaliseringar

Flera möjliga generaliseringar av analysen kan studeras i framtida arbeten. En naturlig utvidgning är att undersöka hur gränsen modifieras vid ändlig temperatur. I detta fall bidrar både absorption och emission till responsen, och detaljerade balansrelationer behöver inkluderas explicit.

För den dielektriska responsfunktionen, som behandlas i [15], går det att härleda en materialoberoende övre gräns med hjälp av en elektromagnetisk summationsregel. Detta motiverar frågan om en liknande materialoberoende begränsning även kan härledas för den magnetiska susceptibiliteten.

En annan möjlig generalisering är att studera anisotropa eller starkt korrelerade material. I sådana system kan susceptibiliteten få en mer komplicerad tensorstruktur och bero starkt på riktningen hos den överförda impulsen.

Ytterligare en möjlig fortsättning är att tillämpa de härledda gränserna på specifika materialmodeller och jämföra dem med explicita beräkningar av $\chi''(\mathbf{q}, \omega)$ för magnetiska material med kända spinnexcitationer. Det vore dessutom intressant att undersöka hur nära olika material kan komma de härledda övre gränserna och om vissa materialklasser systematiskt ger starkare respons än andra. Tidigare arbeten har utvecklat numeriska metoder som går att använda för att beräkna mörk materia-elektronspridning i kristallina material [17, 18].

7

Slutsats

I detta arbete har spridning och absorption av mörk materia i magnetiska material analyserats med fokus på spinnberoende växelverkan. Utifrån en effektiv Hamiltonian har spridnings- och absorptions hastigheten uttryckts i termer av den modellberoende växelverkan och målmaterialets magnetiska susceptibilitet, och en övre gräns för båda har härletts.

För spridning skrivs hastigheten som en positivt vägd integral av den absorptiva delen av susceptibiliteten. Genom ett koordinatbyte anpassat till impulsöverföringen reduceras kontraktionen mellan formfaktorn och den magnetiska susceptibiliteten till en summa över diagonala komponenter. Positivitet hos formfaktorn och en supremumolikhet ger sedan en övre gräns uttryckt i termer av materialets statiska susceptibilitet. För absorption fungerar samma metod efter att hastigheten skrivits om som en frekvensintegral, och på samma sätt som för spridning kunde en motsvarande övre gräns härledas.

Den grundläggande idén för båda gränserna är Kramers-Kronig-relationerna, som kopplar den frekvensintegrerade vikten av χ''_{ij}/ω till den statiska susceptibiliteten. Eftersom den statiska susceptibiliteten är ändlig för varje fysikaliskt material kan den dynamiska responsen inte koncentreras godtyckligt vid en given frekvens utan att samtidigt minska vid andra. Den totala spektralvikten är därmed bunden av en enda materialberoende storhet.

Resultaten ger ett konkret verktyg för materialjämförelse. Ett magnetiskt materials potential som detektor för mörk materia kan bedömas utifrån dess statiska susceptibilitet, utan fullständig kunskap om hela excitationsspektrumet. Inom ramen för de antaganden som gjorts utgör de härledda gränserna därmed en grund för att identifiera vilka material som kan ge stark respons på mörk materia och således vara lämpliga som detektor.

Tack

Vi vill rikta ett stort tack till vår handledare Riccardo Catena för värdefull handledning och många insiktsfulla diskussioner under arbetets gång. Vi vill även tacka Andreas Rosén för hjälp med delar av distributionsbeviset i appendix B.

Litteratur

- [1] G. Bertone och D. Hooper, “History of dark matter,” *Rev. Mod. Phys.*, årg. 90, nr 4, 2018. DOI: 10.1103/RevModPhys.90.045002.
- [2] J. Billard m. fl., “Direct detection of dark matter—APPEC committee report,” *Reports on Progress in Physics*, årg. 85, nr 5, april 2022. DOI: 10.1088/1361-6633/ac5754.
- [3] Y. Kahn och T. Lin, “Searches for light dark matter using condensed matter systems,” *Reports on Progress in Physics*, årg. 85, nr 6, maj 2022. DOI: 10.1088/1361-6633/ac5f63.
- [4] R. Essig, J. Mardon och T. Volansky, “Direct detection of sub-GeV dark matter,” *Phys. Rev. D*, årg. 85, nr 7, april 2012. DOI: 10.1103/physrevd.85.076007.
- [5] A. Berlin, A. J. Millar, T. Trickle och K. Zhou, “Determining spin-dependent light dark matter rates from neutron scattering,” *Phys. Rev. D*, årg. 112, nr 3, 2025. DOI: 10.1103/4yxf-1kr6.
- [6] T. Trickle, Z. Zhang och K. M. Zurek, “Detecting Light Dark Matter with Magnons,” *Physical Review Letters*, årg. 124, nr 20, maj 2020. DOI: 10.1103/physrevlett.124.201801.
- [7] J. J. Sakurai och J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*, 2. utg. Reading, MA, USA: Addison-Wesley, 2011, ISBN: 9780805382914.
- [8] M. E. Peskin och D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Reading, MA, USA: Addison-Wesley, 1995, ISBN: 9780429503559.
- [9] J. Sólyom, *Fundamentals of the Physics of Solids, Normal, Broken-Symmetry, and Correlated Systems*, 1. utg. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010, vol. 3. DOI: 10.1007/978-3-642-04518-9.
- [10] R. A. Horn och C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, 1. utg. Cambridge: Cambridge University Press, 1991, ISBN: 9780521305877.
- [11] S. W. Lovesey, “Theory of neutron scattering by electrons in magnetic materials,” *Physica Scripta*, årg. 90, nr 10, 2015. DOI: 10.1088/0031-8949/90/10/108011.
- [12] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 2. utg. New York: Wiley-Interscience, 1999, ISBN: 9780471317166.
- [13] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3. utg. McGraw-Hill, 1976, ISBN: 9780070856134.
- [14] M. B. Hastings och T. Koma, “Spectral Gap and Exponential Decay of Correlations,” *Communications in Mathematical Physics*, årg. 265, nr 3, s. 781–804, 2006. DOI: 10.1007/s00220-006-0030-4.

- [15] R. Lasenby och A. Prabhu, “Dark matter-electron scattering in materials: Sum rules and heterostructures,” *Phys. Rev. D*, årg. 105, nr 9, 2022. DOI: 10.1103/PhysRevD.105.095009.
- [16] G. D. Mahan, *Many-Particle Physics* (Physics of Solids and Liquids), 3. utg. New York, NY: Springer US, 2000, kap. 4, ISBN: 9781475757149.
- [17] S. M. Griffin, K. Inzani, T. Trickle, Z. Zhang och K. M. Zurek, “Extended calculation of dark matter-electron scattering in crystal targets,” *Phys. Rev. D*, årg. 104, nr 9, 2021. DOI: 10.1103/PhysRevD.104.095015.
- [18] T. Trickle, “Extended calculation of electronic excitations for direct detection of dark matter,” *Phys. Rev. D*, årg. 107, nr 3, 2023. DOI: 10.1103/PhysRevD.107.035035.
- [19] A. Rosén, *Introduction to Partial Differential Equations, from theory to coding*, Kurskompendium för MVE695 Partella differentialekvationer, Chalmers Tekniska Högskola, 2025.

A

Spår-invariants under ortogonala koordinatbyten

I avsnitt 4.3 används att kontraktionen $\text{tr}(\mathcal{F}^T \chi'')$ är invariant under det ortogonala koordinatbyte som ges av $\mathbf{R}$. Detta är förutsättningen för att kunna ersätta kontraktionen i ursprungssystemet med dess motsvarighet i det system där $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{q}}$, vilket i sin tur är det som gör att kontraktionen reduceras till en summa över enbart diagonala komponenter. Här ges det fullständiga räkneargumentet.

Lemma 4 (Spår-invariants under ortogonalt koordinatbyte). *Låt $\mathbf{R}$ vara en ortogonal 3×3 -matris, det vill säga $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$, och låt $\mathcal{F}$ och χ'' vara 3×3 -matriser. Definiera*

$$\tilde{\mathcal{F}} = \mathbf{R} \mathcal{F} \mathbf{R}^T, \quad \tilde{\chi}'' = \mathbf{R} \chi'' \mathbf{R}^T. \quad (\text{A.1})$$

Då gäller

$$\text{tr}(\tilde{\mathcal{F}}^T \tilde{\chi}'') = \text{tr}(\mathcal{F}^T \chi''). \quad (\text{A.2})$$

Bevis. Vi gör räkningen i tre steg. Först beräknar vi $\tilde{\mathcal{F}}^T$. Transponatet av produkten $\mathbf{R} \mathcal{F} \mathbf{R}^T$ ges av den allmänna regeln $(\mathbf{XYZ})^T = \mathbf{Z}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{X}^T$, vilket ger

$$\tilde{\mathcal{F}}^T = (\mathbf{R} \mathcal{F} \mathbf{R}^T)^T = \mathbf{R} \mathcal{F}^T \mathbf{R}^T, \quad (\text{A.3})$$

där vi använde att $(\mathbf{R}^T)^T = \mathbf{R}$. Vi sätter in detta tillsammans med $\tilde{\chi}'' = \mathbf{R} \chi'' \mathbf{R}^T$ i spåret

$$\text{tr}(\tilde{\mathcal{F}}^T \tilde{\chi}'') = \text{tr}(\mathbf{R} \mathcal{F}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \chi'' \mathbf{R}^T). \quad (\text{A.4})$$

Eftersom $\mathbf{R}$ är ortogonal gäller $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$. De två mittenfaktorerna $\mathbf{R}^T \mathbf{R}$ förenklas till enhetsmatrisen

$$= \text{tr}(\mathbf{R} \mathcal{F}^T \chi'' \mathbf{R}^T). \quad (\text{A.5})$$

Slutligen använder vi att spåret av en matrisprodukt är oförändrat under cyklisk permutation av faktorerna, $\text{tr}(\mathbf{XY}) = \text{tr}(\mathbf{YX})$. Vi flyttar $\mathbf{R}$ från vänster till höger

$$= \text{tr}(\mathcal{F}^T \chi'' \mathbf{R}^T \mathbf{R}) = \text{tr}(\mathcal{F}^T \chi''), \quad (\text{A.6})$$

där vi i sista steget igen använde $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$. □

Kontraktionen har därmed samma värde i båda koordinatsystemen, och vi kan fritt välja det system som ger enklast möjliga uttryck för formfaktorn.

B

Distributionsteoretiskt bevis för byte av ordning

I avsnitt 4.6 används Proposition 2 för att överföra integralen $\int_0^\infty \sum_{e'} (M_{e'}^\alpha / \omega_{e'}) \delta(\omega' - \omega_{e'}) d\omega'$ till summan $\sum_{e'} M_{e'}^\alpha / \omega_{e'}$. Detta steg är centralt för att kunna tillämpa Kramers-Kronig-relationen vid $\omega = 0$ och kräver en distributionsteoretisk motivering.

Proposition 3. *Med distributionsteori gäller att*

$$\frac{2}{V} \int_0^\infty \sum_{e'=1}^\infty \frac{M_{e'}^\alpha}{\omega_{e'}} \delta(\omega' - \omega_{e'}) d\omega' = \frac{2}{V} \sum_{e'=1}^\infty \frac{M_{e'}^\alpha}{\omega_{e'}}, \quad \text{då} \quad \sum_{e'} M_{e'}^\alpha / \omega_{e'} < \infty. \quad (\text{B.1})$$

Bevis av Proposition 2. Vi använder distributionsteori för att tolka uttrycket

$$\int_0^\infty \sum_{e'=1}^\infty \frac{M_{e'}^\alpha}{\omega_{e'}} \delta(\omega - \omega_{e'}) d\omega. \quad (\text{B.2})$$

Integralen ska inte tolkas som en vanlig integral av en vanlig funktion. I stället ska den förstås som att ett distributionsobjekt mäts mot en testfunktion

$$\int_0^\infty \sum_{e'=1}^\infty \frac{M_{e'}^\alpha}{\omega_{e'}} \delta(\omega - \omega_{e'}) d\omega = \langle T, 1 \rangle, \quad (\text{B.3})$$

där

$$T = \sum_{e'=1}^\infty \frac{M_{e'}^\alpha}{\omega_{e'}} \delta_{\omega_{e'}}. \quad (\text{B.4})$$

Detta går dock inte att göra direkt. Anledningen är att den konstanta funktionen 1 inte är en testfunktion, eftersom testfunktioner måste ha kompakt stöd och den konstanta funktionen 1 har inte det. Idén blir då istället att ersätta denna otillåtna testfunktion med en följd av tillåtna testfunktioner som efterliknar 1 när de går i gräns. Om det finns sådana testfunktioner och om distributionen T är väldefinierad, så kan vi beräkna det ursprungliga uttrycket. För att förenkla formuleringar ansätts

$$a_{e'} := \frac{M_{e'}^\alpha}{\omega_{e'}}. \quad (\text{B.5})$$

Vi definierar

$$T := \sum_{e'=1}^\infty a_{e'} \delta_{\omega_{e'}}. \quad (\text{B.6})$$

För varje testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}((0, \infty))$ som mäter distributionen T gäller att

$$\langle T, \varphi \rangle = \left\langle \sum_{e'=1}^\infty a_{e'} \delta_{\omega_{e'}}, \varphi \right\rangle = \sum_{e'=1}^\infty a_{e'} \langle \delta_{\omega_{e'}}, \varphi \rangle = \sum_{e'=1}^\infty a_{e'} \varphi(\omega_{e'}). \quad (\text{B.7})$$

För att se om distributionen T är giltig testas om serien i högerledet konvergerar. Om den inte konvergerar är distributionen ogiltig. Alla testfunktioner är per definition begränsade vilket innebär att

$$|\varphi(\omega_{e'})| \leq \|\varphi\|_\infty. \quad [19] \quad (\text{B.8})$$

Med detta fås uppskattningen

$$\sum_{e'=1}^{\infty} |a_{e'} \varphi(\omega_{e'})| \leq \|\varphi\|_\infty \sum_{e'=1}^{\infty} |a_{e'}|. \quad (\text{B.9})$$

Givet att

$$\sum_{e'=1}^{\infty} \left| \frac{M_{e'}^\alpha}{\omega_{e'}} \right| < \infty, \quad (\text{B.10})$$

så följer att högerledet är ändligt. Därmed konvergerar serien

$$\sum_{e'=1}^{\infty} a_{e'} \varphi(\omega_{e'}) \quad (\text{B.11})$$

absolut för varje testfunktion φ . Alltså är T väldefinierad som en distribution på $(0, \infty)$. När detta väl är etablerat återgår vi till den ursprungliga tanken. Vi ville mäta denna distribution mot funktionen 1, men eftersom detta inte är tillåtet måste vi ersätta 1 med en approximationsföljd av testfunktioner. Vi väljer därför en följd $(\varphi_R)_{R \geq 1} \subset \mathcal{D}((0, \infty))$ sådan att

$$0 \leq \varphi_R \leq 1 \quad (\text{B.12})$$

för alla $R \geq 1$, och sådana att

$$\varphi_R(\omega) = 1 \quad (\text{B.13})$$

för alla $\omega \in [1/R, R]$. Dessa funktioner är alltså lika med 1 på ett intervall som växer när R växer. På detta sätt efterliknar de den konstanta funktionen 1. För varje fixerad punkt $\omega_{e'} > 0$ gäller då att $\omega_{e'} \in [1/R, R]$ för alla tillräckligt stora R . Därför följer att

$$\varphi_R(\omega_{e'}) \rightarrow 1 \quad \text{då } R \rightarrow \infty. \quad (\text{B.14})$$

Vi låter nu distributionen T verka på dessa testfunktioner. Då får vi

$$\langle T, \varphi_R \rangle = \sum_{e'=1}^{\infty} a_{e'} \varphi_R(\omega_{e'}). \quad (\text{B.15})$$

Från tidigare argument gäller att

$$\frac{2}{V} \int_0^\infty \sum_{e'=1}^{\infty} \frac{M_{e'}^\alpha}{\omega_{e'}} \delta(\omega - \omega_{e'}) d\omega = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2}{V} \langle T, \varphi_R \rangle = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2}{V} \sum_{e'=1}^{\infty} a_{e'} \varphi_R(\omega_{e'}) = \frac{2}{V} \sum_{e'=1}^{\infty} \frac{M_{e'}^\alpha}{\omega_{e'}}. \quad (\text{B.16})$$

Denna slutsats gäller dock om och endast om $\sum_{e'=1}^{\infty} \left| \frac{M_{e'}^\alpha}{\omega_{e'}} \right| < \infty$, vilket är nästa steg i beviset.

Konvergensbevis: $\sum_{e'} \frac{M_{e'}^\alpha}{\omega_{e'}} < \infty$. För ett system med energigap gäller $\omega_{e'} \geq \Delta > 0$, så $1/\omega_{e'} \leq 1/\Delta$, och konvergensen reduceras till att visa $\sum_{e'} |M_{e'}^\alpha| < \infty$. Eftersom vi arbetar med en diagonal komponent har vi från ekvation (4.36) att

$$M_{e'}^\alpha = |\langle 0 | \tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) | e' \rangle|^2 \geq 0. \quad (\text{B.17})$$

Alla termer i summan är icke-negativa och absolutbeloppet kan därför tas bort: $|M_{e'}^\alpha| = M_{e'}^\alpha$. Vi behöver alltså visa att

$$\sum_{e'} M_{e'}^\alpha = \sum_{e'} |\langle 0 | \tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) | e' \rangle|^2 < \infty. \quad (\text{B.18})$$

Vi skriver ut kvadraten av absolutbeloppet med hjälp av att $|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = \langle \alpha | \beta \rangle \langle \beta | \alpha \rangle$

$$\sum_{e'} |\langle 0 | \tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) | e' \rangle|^2 = \sum_{e'} \langle 0 | \tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) | e' \rangle \langle e' | \tilde{s}_e^{\alpha\dagger}(\mathbf{q}) | 0 \rangle. \quad (\text{B.19})$$

Vi utnyttjar nu att egentillstånden $|e\rangle$ till Hamiltonianen bildar en komplett bas för Hilbertrummet [7, ekv. (1.3.11)]. Fullständighetsrelationen säger att

$$\sum_{\text{alla } e} |e\rangle \langle e| = \mathbf{1}, \quad (\text{B.20})$$

där $\mathbf{1}$ är identitetsoperatoren och summan inkluderar grundtillståndet $|0\rangle$. Vår summa löper dock enbart över de exciterade tillstånden $e' \neq 0$. Vi kan uttrycka denna delsumma som

$$\sum_{e' \neq 0} |e'\rangle \langle e'| = \mathbf{1} - |0\rangle \langle 0|. \quad (\text{B.21})$$

Vi sätter in detta mellan operatorerna. Det ger

$$\sum_{e'} M_{e'}^\alpha = \langle 0 | \tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) \left(\mathbf{1} - |0\rangle \langle 0| \right) \tilde{s}_e^{\alpha\dagger}(\mathbf{q}) | 0 \rangle. \quad (\text{B.22})$$

Vi utvecklar detta uttryck genom att multiplicera ut parenteserna

$$= \langle 0 | \tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) \mathbf{1} \tilde{s}_e^{\alpha\dagger}(\mathbf{q}) | 0 \rangle - \langle 0 | \tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) | 0 \rangle \langle 0 | \tilde{s}_e^{\alpha\dagger}(\mathbf{q}) | 0 \rangle. \quad (\text{B.23})$$

Den första termen förenklas eftersom identitetsoperatoren $\mathbf{1}$ verkar trivalt

$$\langle 0 | \tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) \tilde{s}_e^{\alpha\dagger}(\mathbf{q}) | 0 \rangle. \quad (\text{B.24})$$

Den andra termen kan skrivas som en produkt av två skalära matriselement. Operatoren $\tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q})$ verkar på $|0\rangle$ och ger en vektor, och $\langle 0|$ projicerar sedan tillbaka på grundtillståndet. Resultatet är

$$\langle 0 | \tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) | 0 \rangle \langle 0 | \tilde{s}_e^{\alpha\dagger}(\mathbf{q}) | 0 \rangle = |\langle 0 | \tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) | 0 \rangle|^2. \quad (\text{B.25})$$

Sammantaget får vi

$$\sum_{e'} M_{e'}^\alpha = \langle 0 | \tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) \tilde{s}_e^{\alpha\dagger}(\mathbf{q}) | 0 \rangle - |\langle 0 | \tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) | 0 \rangle|^2. \quad (\text{B.26})$$

Högerledet är skillnaden mellan väntevärdet av operatorprodukten $\tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) \tilde{s}_e^{\alpha\dagger}(\mathbf{q})$ i grundtillståndet och kvadraten av väntevärdet av $\tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q})$ i grundtillståndet. Denna skillnad kan kännas igen som variansen av operatorn $\tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q})$ i grundtillståndet. En varians är per definition positiv, vilket stämmer överens med att vänsterledet är en summa av icke-negativa termer. Eftersom variansen är icke-negativ följer också uppskattningen

$$\sum_{e'} M_{e'}^\alpha \leq \langle 0 | \tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) \tilde{s}_e^{\alpha\dagger}(\mathbf{q}) | 0 \rangle. \quad (\text{B.27})$$

Vi visar nu att högerledet är ändligt. Operatorn $\tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q})$ är Fouriertransformen av spinntheteten. För att förstå dess struktur behöver vi beskriva det underliggande gittersystemet. I ett kristallint material är atomerna ordnade i ett regelbundet tredimensionellt gitter. Varje gitterplats n har en position $\mathbf{R}_n$, som i ett kubiskt gitter med gitterkonstant a kan skrivas $\mathbf{R}_n = a(n_x, n_y, n_z)$, där n_x, n_y, n_z är heltal. Antalet gitterplatser betecknas N och systemets volym V . På varje gitterplats finns ett kvantmekaniskt spinn $\mathbf{s}_n$, vilket beskriver atomens magnetiska egenskaper. Komponenten av spinnoperatorn i riktning α vid plats n betecknas s_n^α , där spinnets storlek bestäms av spinnkvantalet S . Fouriertransformen av spinntheteten ges då av

$$\tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) = \sum_{n=1}^N e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_n} s_n^\alpha. \quad (\text{B.28})$$

Därmed gäller att

$$\langle 0 | \tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) \tilde{s}_e^{\alpha\dagger}(\mathbf{q}) | 0 \rangle = \sum_{n,m} e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_m)} \langle 0 | s_n^\alpha s_m^\alpha | 0 \rangle. \quad (\text{B.29})$$

Faktorn $\langle 0 | s_n^\alpha s_m^\alpha | 0 \rangle$ är den så kallade spinnkorrelationsfunktionen. Den mäter i vilken utsträckning spinnet vid plats n och spinnet vid plats m är korrelerade i grundtillståndet $|0\rangle$. Om de två spinnen är fullständigt okorrelerade faktoriserar väntevärdet till en produkt av enskilda väntevärden, medan ett stort värde på korrelationsfunktionen innebär att de två spinnens orienteringar hänger samman. Vi behöver nu visa att dubbelsumman i ekvation (B.29) är ändlig. Varje term kan uppskattas med hjälp av att spinnoperatorerna är begränsade. Korrelationsfunktionen uppfyller

$$|\langle 0 | s_n^\alpha s_m^\alpha | 0 \rangle| \leq \|s_n^\alpha\| \cdot \|s_m^\alpha\| \leq S^2, \quad (\text{B.30})$$

och exponentialfaktorn har absolutbelopp $|e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_m)}| = 1$. Varje term i dubbelsumman är därmed begränsad i absolutbelopp av S^2 . Eftersom summan innehåller N^2 par av gitterplatser följer att

$$|\langle 0 | \tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) \tilde{s}_e^{\alpha\dagger}(\mathbf{q}) | 0 \rangle| \leq N^2 S^2. \quad (\text{B.31})$$

För ett ändligt system med N gitterplatser är detta alltså ett ändligt tal, och konvergensen är därmed visad. I gränsen $N \rightarrow \infty$ uppstår inte heller något problem. Det som ska begränsas egentligen är nämligen

$$\sum_{e'} \left| \frac{2M_{e'}^\alpha}{V\omega_{e'}} \right|, \quad (\text{B.32})$$

där volymfaktorn $1/V$ kompenserar för tillväxten av systemet. Om vi tillfälligt bortser från faktorn $2/\omega_{e'}$, räcker det att studera uttrycket

$$\frac{1}{V} \langle 0 | \tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) \tilde{s}_e^{\alpha\dagger}(\mathbf{q}) | 0 \rangle = \frac{1}{V} \sum_{n,m} e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_m)} \langle 0 | s_n^\alpha s_m^\alpha | 0 \rangle. \quad (\text{B.33})$$

Här summerar man över alla par av gitterplatser n och m . Varje term innehåller dels en fasfaktor $e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_m)}$, dels korrelationsfunktionen $\langle 0 | s_n^\alpha s_m^\alpha | 0 \rangle$. Antag nu att kristallen ser likadan ut oavsett vilken gitterplats man väljer som utgångspunkt, alltså är systemet translationsinvariant. Då beror inte resultatet på de absoluta positionerna $\mathbf{R}_n$ och $\mathbf{R}_m$ var för sig, utan endast på separationen mellan dem. Korrelationsfunktionen kan därför skrivas som

$$\langle 0 | s_n^\alpha s_m^\alpha | 0 \rangle = C^\alpha(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_m), \quad (\text{B.34})$$

där $C^\alpha(\mathbf{R})$ är en funktion av den relativa positionsvektorn $\mathbf{R}$. Nu gäller att både fasfaktorn och korrelationsfunktionen endast beror på den relativa separationen mellan platserna n och m . Dubbelsumman kan därför organiseras om genom att man samlar ihop alla par (n, m) som har samma relativa vektor $\mathbf{R}$. Givet att

$$F(\mathbf{R}) = e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} C^\alpha(\mathbf{R}), \quad (\text{B.35})$$

kan dubbelsumman skrivas som

$$\sum_{n,m} F(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_m) = \sum_{\mathbf{R}} \sum_{\substack{n,m \\ \mathbf{R}_n - \mathbf{R}_m = \mathbf{R}}} F(\mathbf{R}). \quad (\text{B.36})$$

Eftersom $F(\mathbf{R})$ är samma för alla par (n, m) med samma separation $\mathbf{R}$, kan den tas ut ur den inre summan. Då återstår endast att räkna hur många par (n, m) som ger upphov till en viss relativ vektor $\mathbf{R}$. I ett translationsinvariant gitter finns det för varje tillåten vektor $\mathbf{R}$ exakt N sådana par. Anledningen är att om man väljer plats m godtyckligt, så bestäms plats n entydigt av kravet

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_m + \mathbf{R}. \quad (\text{B.37})$$

Eftersom det finns N möjliga val av m , följer att antalet par med en given separation $\mathbf{R}$ är just N . Därmed får man

$$\sum_{n,m} F(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_m) = N \sum_{\mathbf{R}} F(\mathbf{R}). \quad (\text{B.38})$$

Insatt i vårt uttryck ger detta

$$\frac{1}{V} \langle 0 | \tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) \tilde{s}_e^{\alpha\dagger}(\mathbf{q}) | 0 \rangle = \frac{N}{V} \sum_{\mathbf{R}} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} C^\alpha(\mathbf{R}). \quad (\text{B.39})$$

Eftersom korrelationsfunktionen endast beror på separationen kan man välja den ena gitterplatsen som en referenspunkt. Man låter då denna referensplats betecknas med 0, och skriver den andra platsen som den plats som ligger på relativ position $\mathbf{R}$ från referenspunkten. Med denna notation kan man identifiera

$$C^\alpha(\mathbf{R}) = \langle 0 | s_0^\alpha s_{\mathbf{R}}^\alpha | 0 \rangle. \quad (\text{B.40})$$

Därmed fås

$$\frac{1}{V} \langle 0 | \tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) \tilde{s}_e^{\alpha\dagger}(\mathbf{q}) | 0 \rangle = \frac{N}{V} \sum_{\mathbf{R}} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} \langle 0 | s_0^\alpha s_{\mathbf{R}}^\alpha | 0 \rangle. \quad (\text{B.41})$$

Prefaktorn N/V är antalet gitterplatser per volymenhet. För ett givet material är denna kvot konstant. Frågan om konvergens reduceras därför till om summan

$$\sum_{\mathbf{R}} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} \langle 0 | s_0^\alpha s_{\mathbf{R}}^\alpha | 0 \rangle \quad (\text{B.42})$$

är väldefinierad. Det avgörs av hur korrelationsfunktionen beter sig för stora avstånd $|\mathbf{R}|$. Storheten $\langle 0 | s_0^\alpha s_{\mathbf{R}}^\alpha | 0 \rangle$ mäter hur starkt spinnets vid referensplatsen är korrelerat med spinnets vid en plats på avstånd $\mathbf{R}$. Om dessa korrelationer avtar tillräckligt snabbt med avståndet, blir bidragen från stora $|\mathbf{R}|$ små, och summan kan då konvergera även när $N \rightarrow \infty$. I ett system med energigap avtar spinkorrelationerna enligt [14],

$$\left| \langle 0 | s_0^\alpha s_{\mathbf{R}}^\alpha | 0 \rangle - \langle 0 | s_0^\alpha | 0 \rangle \langle 0 | s_{\mathbf{R}}^\alpha | 0 \rangle \right| \lesssim e^{-|\mathbf{R}|/\xi}, \quad (\text{B.43})$$

där ξ är korrelationslängden. Den subtraherade termen beskriver en eventuell statisk långgräddvidig ordning. En sådan tidsberoende del ger endast ett bidrag vid $\omega = 0$ och påverkar därför inte den summa som uppträder här, eftersom denna endast omfattar exciterade tillstånd med $\omega_{e'} > 0$. För den del av korrelationsfunktionen som bidrar till $\tilde{\chi}''$ återstår därmed endast den konnekterade delen,

$$|\langle 0 | s_0^\alpha s_{\mathbf{R}}^\alpha | 0 \rangle| \lesssim e^{-|\mathbf{R}|/\xi}. \quad (\text{B.44})$$

Detta innebär att det exponentiella bidraget från stora avstånd är försumbart. Summan domineras därför av ett ändligt område kring referensplatsen, vilket gör att uttrycket förblir konvergent även i den termodynamiska gränsen. Alltså gäller

$$\exists M \text{ s.a. } \sum_{\mathbf{R}} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} \langle 0 | s_0^\alpha s_{\mathbf{R}}^\alpha | 0 \rangle \leq M \quad \Rightarrow \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{V} \sum_{\mathbf{R}} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} \langle 0 | s_0^\alpha s_{\mathbf{R}}^\alpha | 0 \rangle \leq \frac{NM}{V} \leq \infty. \quad (\text{B.45})$$

Sammantaget har vi därför visat att för både ett ändligt material och i fallet där materialets storlek går mot oändligheten finns det en övre gräns för

$$\sum_{e'} M_{e'}^\alpha \leq \langle 0 | \tilde{s}_e^\alpha(\mathbf{q}) \tilde{s}_e^{\alpha\dagger}(\mathbf{q}) | 0 \rangle < \infty. \quad (\text{B.46})$$

Vilket innebär att

$$\int_0^\infty \sum_{e'=1}^\infty \frac{M_{e'}^\alpha}{\omega_{e'}} \delta(\omega - \omega_{e'}) d\omega = \lim_{R \rightarrow \infty} \langle T, \varphi_R \rangle = \sum_{e'=1}^\infty \frac{M_{e'}^\alpha}{\omega_{e'}}. \quad (\text{B.47})$$

□

C

Kod till figur för hastighetsfördelningen

Koden nedan användes för att generera figur 2.1 som visar hastighetsfördelningen för mörk materia.

Listing C.1: Plot av hastighetsfördelningen

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # Parametrar i km/s
5 v0 = 220
6 vesc = 540
7 ve = 240
8
9 # Hastighetsintervall
10 v = np.linspace(0, 900, 1000)
11
12 mu = np.linspace(-1, 1, 1000)
13
14 # Listor för fördelningarna
15 f_no_cut = []
16 f_cut = []
17
18 for vi in v:
19     # |v + ve|
20     u = np.sqrt(vi**2 + ve**2 + 2*vi*ve*mu)
21
22     # Utan cutoff
23     f1 = np.exp(-u**2 / v0**2)
24
25     # Med cutoff
26     f2 = np.exp(-u**2 / v0**2)
27     f2[u > vesc] = 0
28
29     # Integrera över vinklar
30     integral1 = np.trapezoid(f1, mu)
31     integral2 = np.trapezoid(f2, mu)
32
33     # v^2 från sfäriska koordinater
34     f_no_cut.append(vi**2 * integral1)
35     f_cut.append(vi**2 * integral2)
36
37 # Konvertera till arrays
38 f_no_cut = np.array(f_no_cut)
39 f_cut = np.array(f_cut)
```

```
40
41 # Normalisering
42 f_no_cut /= np.trapezoid(f_no_cut, v)
43 f_cut /= np.trapezoid(f_cut, v)
44
45 # Plot
46 plt.figure(figsize=(9,4.5))
47 plt.plot(v, f_no_cut, linewidth=2, label=r"Utan  $v_{\rm esc}$ -avskärning")
48 plt.plot(v, f_cut, linewidth=2, linestyle = "--", label=r"Med  $v_{\rm esc}$ -avskärning")
49
50 plt.xlabel(r"$v$ [km/s]", fontsize=20)
51 plt.ylabel(r"$f_{\rm DM}(v)$ [(km/s)-1]", fontsize=20)
52 plt.xticks(fontsize=16)
53 plt.yticks(fontsize=16)
54
55 plt.legend(fontsize=16)
56 plt.grid(True)
57 plt.tight_layout()
58 plt.show()
```

DEPARTMENT OF PHYSICS AND ASTRONOMY
CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Gothenburg, Sweden
www.chalmers.se



CHALMERS