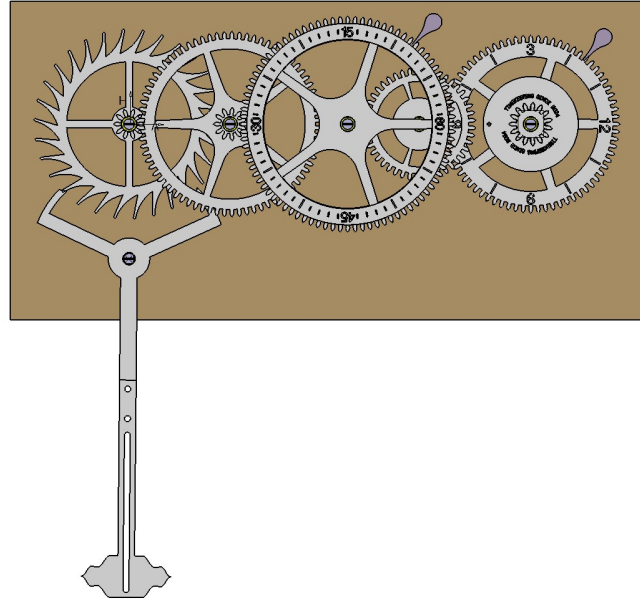




CHALMERS



Konstruktion och tillverkning av en klocka med fokus på klassisk mekanik

Kandidatarbete inom Maskinteknik

Robin Cronheden

Arvid Engström

Hampus Gelang

Zahran Ghazy

Amanda Gustafsson

Sheyma Salim

INSTITUTIONEN FÖR MEKANIK OCH MARITIMA VETENSKAPER

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

Göteborg, Sverige 2024

www.chalmers.se

KANDIDATARBETE I MASKINTEKNIK

Konstruktion och tillverkning av en klocka med fokus på klassisk mekanik

Robin Cronheden
Arvid Engström
Hampus Gelang
Zahran Ghazy
Amanda Gustafsson
Sheyma Salim



CHALMERS

Institutionen för Mekanik och Maritima Vetenskaper
Avdelningen för Dynamik
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg 2024

Konstruktion och tillverkning av en klocka med fokus på klassisk mekanik

Robin Cronheden

Arvid Engström

Hampus Gelang

Zahran Ghazy

Amanda Gustafsson

Sheyma Salim

© Robin Cronheden, Arvid Engström, Hampus Gelang, Zahran Ghazy, Amanda Gustafsson, Sheyma Salim, 2024.

Handledare: Petri Piironen, Chalmers

Examinator: Peter Folkow, Chalmers

Kandidatarbete 2024

Institutionen för Mekanik och Maritima Vetenskaper

Chalmers Tekniska Högskola

SE-412 96 Göteborg

Telefon +46 31 772 1000

Omslagsbild: CAD-rendering av en mekanisk klocka.

Typsatt i L^AT_EX

Göteborg 2024

Abstract

This report focuses on the construction and analysis of a mechanical clock by applying theoretical and practical methods from mechanics and machine elements. The goal was to develop both a physical and an analytical model that could be examined and analyzed. The analytical model was based on detailed motion equations and kinematics, while the physical model was constructed using manufacturing techniques such as 3D printing and traditional wood and metalworking.

By comparing the results from the physical model with theoretical calculations, the accuracy of the analytical model could be calibrated and improved. The experiments showed that through careful control and adjustment of the components, the clock could maintain an operating time of almost 45 hours with a minimal margin of error, surpassing the project's goals.

The project particularly highlights the challenges of friction, which proved to have a significant impact on the clock's performance. Managing and minimizing friction was crucial for achieving high precision, and insights from these experiences contributed to a better understanding of how mechanical systems can be optimized. The conclusion of the work is that the integrated application of mechanical and mathematical principles is essential for developing precision systems. The project also emphasizes the importance of iterative design and testing to achieve optimal performance in mechanical constructions.

Keywords: Mechanical clock, 3D-printing, horology, watchmaking, analytical modeling

Sammandrag

Denna rapport fokuserar på att konstruera och analysera en mekanisk klocka genom att tillämpa teoretiska och praktiska metoder från mekanik och maskinelement. Målet var att utveckla både en fysisk och en analytisk modell som undersöktes och analyserades. Den analytiska modellen baserades på detaljerade rörelseekvationer och kinematik, medan den fysiska modellen konstruerades med hjälp av tillverkningstekniker såsom 3D-utskrift och traditionell trä- och metallbearbetning.

Genom att jämföra resultat från den fysiska modellen med teoretiska beräkningar kunde noggrannheten i den analytiska modellen kalibreras och förbättras. Experimenten visade att genom noggrann kontroll och anpassning av komponenterna kunde klockan upprätthålla en drifttid på nästan 45 timmar med en minimal felmarginal, vilket överträffade projektets mål.

Projektet belyser särskilt utmaningarna med friktion, vilka visade sig ha en signifikant påverkan på klockans prestanda. Att hantera och minimera friktion var avgörande för att uppnå den höga precisionen, och insikterna från dessa erfarenheter bidrog till en bättre förståelse för hur mekaniska system kan optimeras. Slutsatsen av arbetet är att integrerad tillämpning av mekaniska och matematiska principer är avgörande för att utveckla precisionssystem. Projektet understryker även vikten av iterativ design och testning för att uppnå optimal prestanda i mekaniska konstruktioner.

Nyckelord: Mekanisk klocka, 3D-printing, horologi, klock tillverkning, analytisk modellering

Förord

Denna rapport är ett resultat av ett kandidatprojekt som pågick under vårterminen 2024 på Chalmers Tekniska Högskola. Arbetet har genomförts av sex studenter på Civilingenjörsutbildningen inom Maskinteknik.

Författarnas tack

Vi vill rikta ett stort tack till vår handledare, docent Petri Piironen, som har hjälpt oss från början till slut, med allt från planering och rapportskrivning till beräkningar. Petri har varit engagerad och pedagogisk över förväntan, och har varit en stor tillgång till oss.

Vi vill även tacka Janne i prototyplaboratoriet, som med intresse och engagemang hjälpte oss bygga klockan. Hans erfarenhet och råd har varit till stor hjälp under tillverkningen.

Författarna, Göteborg, Maj, 2024

Beteckningar

Nedan är listan över de mest använda parametrarna, indexen och vinklarna som har använts genom rapporten.

Parametrar

m	Massa	[kg]
h, l	Längd	[m]
ω	Vinkelhastighet	[rad/s]
f	Frekvens	[svängningar/s]
i	Utväxling	[-]
F	Kraft	[N]
c	Dämpning	[Nms/rad]
M	Vridande moment	[Nm]
I	Masströghetsmoment	[kg/m ²]

Index

O	Rotationsaxel
p	Pendel
f	Flykthjul
d	Drivande mekanism

Vinklar

θ	Pendelns vinkel
φ	Flykthjulets vinkel

Innehåll

1	Inledning	1
1.1	Tidmätningens historia	1
1.2	Grundläggande principer i mekaniska klockor	2
1.3	Syfte, mål och frågeställningar	4
1.4	Avgränsningar	4
2	Teori för mekaniska klockor	6
2.1	Flyktmekanism	6
2.2	Utväxling	10
2.3	Analytisk modellering av en mekanisk klocka	11
3	Metod	13
3.1	Analytisk modell	13
3.2	Fysisk modell	20
3.3	Testning	22
4	Resultat	25
4.1	Fysisk modell	25
4.2	Analytisk modell	26
5	Diskussion	29
6	Slutsatser	32
	Referenser	33
	Bilagor	
A	Härledningar	
A.1	Härledning av utväxlingens rörelseekvation	
A.2	Härledning av hävarmarna l_{in} och l_{ut}	
	A.2.1 Härledning av tvångsekvationer	
A.3	Ingångssidans tvångsekvationer k_2^ϕ och $k_2^{\phi+\theta}$	
A.4	Utgångssidans tvångsekvationer $k_5^{\beta+\theta}$ och k_5^β	
B	Matlabskript	
B.1	Anpassade parametrar	
B.2	Fysiska modellens parametrar	

1

Inledning

Idag tar vi för givet att kunna mäta tid. En snabb titt på armbandsuret eller telefonen ger oss den exakta tiden ner på sekunden. Innan dessa uppfinningar mättes tiden på andra sätt [1]. Genom historiens gång har det funnits olika metoder för att mäta tid, och det är inte helt klarlagt vilken metod som kom först. Det de alla har gemensamt är att de är beroende av periodiska oscillationer, och tidshållning går helt enkelt ut på att räkna dessa oscillationer och dessas frekvens [1].

Klassiska mekaniska klockor använder vanligtvis någon form av mekanism för att hålla en jämn frekvens, som i sin tur tillåter klockans visare att rotera med en bestämd hastighet [1]. Systemet som ger upphov till den roterande rörelsen kan variera i sin konstruktion, men huvudfunktionen är densamma: att omvandla energi till en exakt rörelse för att driva klockans visare. Traditionellt har mekaniska klockor förlitat sig på två huvudsakliga energikällor: en fallande vikt eller en spänd fjäder [1].

1.1 Tidmätningens historia

Under en lång tid förlitade man sig på solens periodiska rörelse över himlavalvet för att mäta tid. Soluret uppfanns förmodligen i Egypten för tusentals år sedan, och bestod i sin enklaste form av en pinne nerstucken i marken [2]. Pinnen kastade en skugga som ändrade riktning och längd beroende på solens position på himlen. Metoden vidareutvecklades så att pinnen kastade sin skugga på en bräda med markeringar som i sin tur kunde avläsas och ge betraktaren en uppfattning om tiden [2].

Omkring år 325 f.Kr. i antika Grekland uppfanns vattenklockan, som utnyttjade ett regelbundet droppflöde från en behållare [3]. Se Figur 1.1. Denna klocka baserades på att vattennivån gradvis sjönk, vilket möjliggjorde tidmätning genom observation av nivåförändringarna. Grekerna kallade vattenklockan för *clepsydra*, eller 'vattentjuv'. Ett vanligt användningsområde var i domstolar och debatter, där vattenklockan användes för att säkerställa att alla fick lika lång tid att tala. Beroende på vilket typ av tal som skulle hållas, kunde mängden vatten tillsatt till behållaren anpassas. Det finns indikationer på att stora historiska personer, såsom Aristoteles och Demosthenes, har använt vattenklockan under deras tal [3].

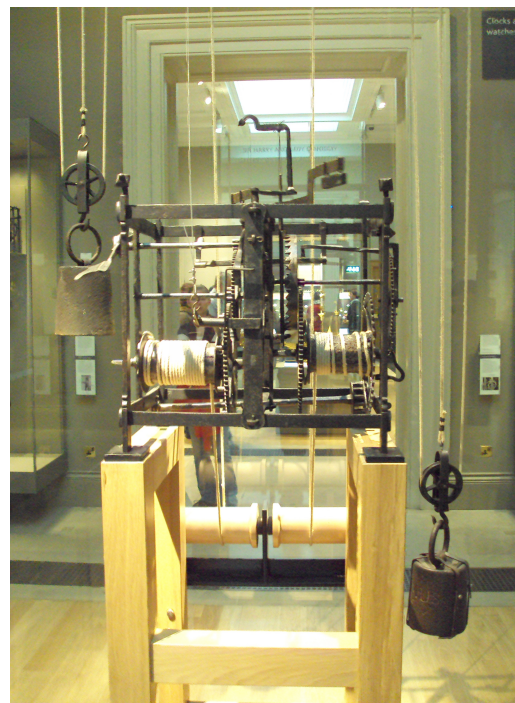
Den första erkända och dokumenterade mekaniska klockan dök upp i Europa på 1300-talet. Det som gjorde uppfinningen revolutionerande var *flyktmekanismen*, en mekanism som gjorde det möjligt att omvandla en kontinuerlig rörelse till en oscillerande rörelse med en specifik frekvens. Flyktmekanismen var helt avgörande

för klockans utveckling, eftersom den gjorde det möjligt att konstruera mekaniska klockor som höll tiden mycket bättre under längre tid än förut [4]. Klockan var från början en stor apparat som använde tunga vikter för att driva klockvisarna, se Figur 1.2. Trots uppfinnandet av flyktmekanismen var klockan inte fulländad; den hade en felmarginal på två timmar per dygn [4].

Exaktheten hos klockan förbättrades under de kommande århundrena, men det dröjde ända fram till mitten på 1600-talet innan holländaren Christian Huygens uppfann pendelklockan, som hade en felmarginal på en minut per dygn. Senare förfinades teknologin ytterligare, vilket gjorde det möjligt att bygga klockor med en felmarginal på mindre än tio sekunder per dygn [5]. Dessa betydande framsteg i att minska felmarginalen möjliggjordes av en grundläggande förståelse för de olika mekanismerna i den mekaniska klockan.



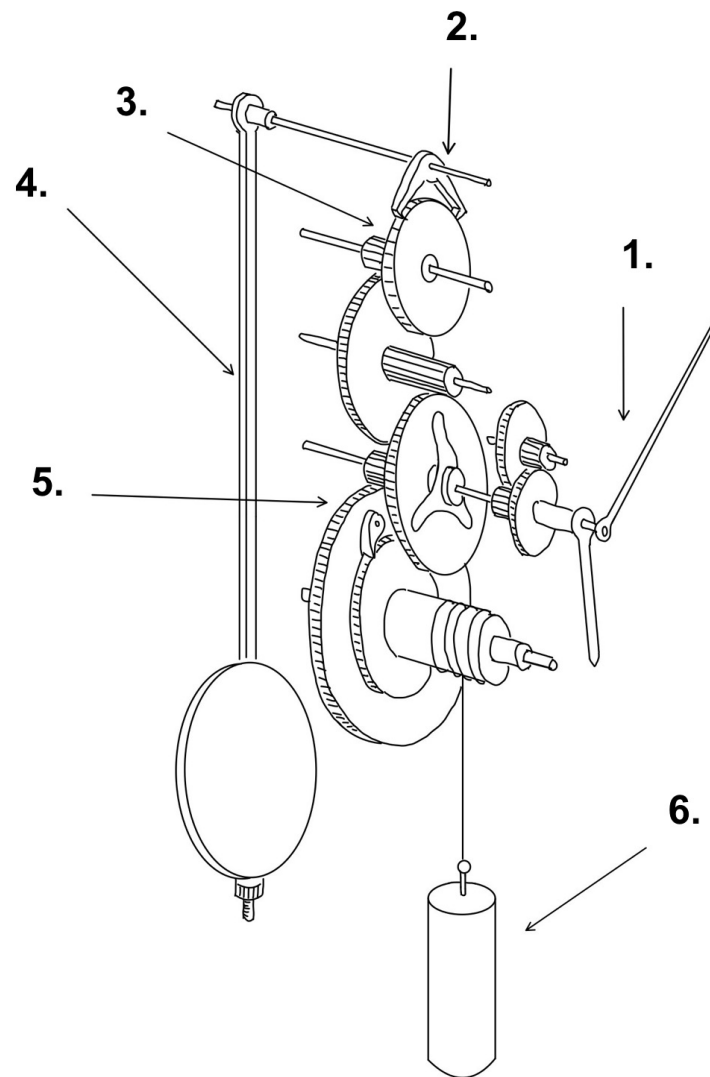
Figur 1.1: Clepsydra- vattenklocka. [6] CC BY-SA 4.0.



Figur 1.2: Mekanisk klocka med flyktmekanism [7], CC BY-SA 3.0.

1.2 Grundläggande principer i mekaniska klockor

Mekaniska klockor bygger på system av komponenter i samverkan för att mäta och visa tid. Dessa system är drivna av en energikälla, vanligtvis en uppvriddbar fjäder eller en upphängd vikt, där energin gradvis frigörs genom klockans flyktmekanism. Energin överförs genom en serie av kugghjul som slutligen driver klockans visare eller andra tidsindikerande mekanismer. Figur 1.3 visar de grundläggande delarna i en mekanisk klocka.



Figur 1.3: Översikt av en mekanisk klockas viktigaste delar: 1) Visarna; 2-4) Flyktmekanismen, med ankare, flykthjul respektive pendel; 5) Utväxling genom en serie kugghjul; 6) Energikälla, här en fallande vikt.

Flyktmekanismen är ett centralt element i en mekanisk klocka, eftersom den tillåter omvandling av lagrad energi till rörelser i kontrollerade intervaller. Denna mekanism samverkar i harmoni med en oscillator, vanligtvis en pendel, för att bibehålla en konstant rörelse och därigenom säkerställa en jämn tidräkning.

Pendelklockor är beroende av gravitationen och den regelbundna rörelsen hos pendeln för att mäta tiden. Den periodiska svängningen fungerar som en reglerande mekanism för att kontrollera energiflödet från den fallande vikten. För att säkerställa noggrann tidshållning är denna mekanism avgörande.

1.3 Syfte, mål och frågeställningar

Syftet med projektet är att få ökad förståelse och insikt inom tillämpad mekaniken och de tekniker som krävs för tillverkning av mekaniska klockor. Uppgiften består av att designa och bygga en mekanisk klocka. Projektet har fyra definierade mål. En analytisk samt fysisk modell av en mekanisk klocka ska tillverkas. Den fysiska modellen ska kontinuerligt gå i 48 timmar oavbrutet med en felmarginal på högst ± 5 minuter per dygn. Slutligen ska den analytiska och fysiska modellen stämma överens. Kopplat till målen har tre frågeställningar formulerats, vilka kommer att besvaras genom projektets gång:

- Vilka förenklingar och antaganden kan göras i den analytiska modellen med ett tillfredställande resultat?
- Vilka är de begränsande faktorerna när det kommer till klockans exakthet?
- Hur väl stämmer den analytiska modellen överens med den fysiska och var uppstår de största skillnaderna?

1.4 Avgränsningar

Avgränsningar görs i syfte att fokusera projektet och fördela resurser effektivt. Nedan listas de avgränsningar som ska tas i beaktning:

- Klockan ska bestå av endast mekaniska komponenter. Ingen elektronik kommer användas, varken för drift eller frekvensreglering.
- Klockan ska drivas enbart av en upphängd vikt, alltså kommer inga fjädrar användas i konstruktionen.
- Flyktmekanismen ska inkludera en pendel för att kontrollera energitillförseln.
- Klockan ska inte vara så tung och otymplig att den inte kan förflyttas av en person.
- För datorberäkningar, simulering och modellering kommer mjukvarorna MATLAB®[8] samt CATIA V5[9] nyttjas.
- Språkmodellerna GPT-3.5 samt GPT-4 [10] kommer att användas för att skriva ekvationer i Latex, MATLAB®-kod samt viss texthantering.
- Beräkningar på den analytiska modellen kommer avgränsas till ordinära differentialekvationer; partiella differentialekvationer kommer inte användas.
- Luftmotstånd försummas i beräkningar.

Projektet kommer att präglas av vissa begränsningar, som listas nedan:

- Projektet är tidsbegränsat till mitten av maj 2024.
- Gruppledningarna föreskrivs 20 arbetstimmar per vecka.
- Eventuella inköp måste hållas inom en budget som uppgår till 4000 SEK.
- Tillverkningsprocessen är begränsad till de tillverkningsmetoder och material som erbjuds av Maskinsektionens Prototyplaboratorium och FUSE Rapid Prototyping.

2

Teori för mekaniska klockor

I detta kapitel förklaras teorin bakom mekaniska klockor. De centrala delarna innefattar en flyktmekanism, utväxling samt analytisk modelleringar.

En mekanisk klocka består av flera dynamiska komponenter som rör sig relativt varandra i olika sekvenser. Att modellera samspelet mellan dessa rörliga delar är utmanande på grund av den stundvis ickelinjära kinematiken. För att hantera dessa utmaningar krävs förståelse för hur delarna rör sig och samverkar i olika scenarier.

För att erhålla en mer verklighetstrogen bild av klockans beteende inom ramen för projektets begränsningar och avgränsningar, klargjorda i avsnitt 1.3, måste ett antal antaganden göras. Klockan analyseras som ett rotationsproblem i ett plan, därav inkluderas varken krafter eller moment utanför planet som kan uppkomma till följd av eventuella vibrationer eller translaterande rörelser i en analytisk modell. Dessutom antas de komponenter som ingår i klockan vara stela, således kommer differentialekvationerna som beskriver rörelsen för de dynamiska komponenterna vara ordinära. De ekvationer som ligger till grund för beskrivningen av de ingående komponenternas rörelse utgår från Newtons andra lag för rotationsrörelse runt en fixerad axel [11, s. 460],

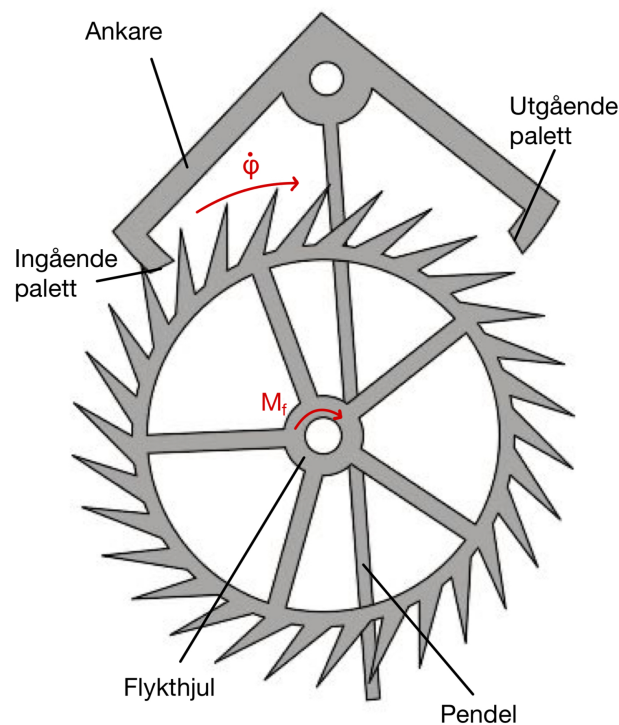
$$\sum_i^n M_{O,i} = I_O \dot{\omega} \quad (2.1)$$

där M_O är de moment som verkar kring en rotationsaxel O , I_O är den stela kroppens masströghetsmoment och $\dot{\omega}$ är kroppens vinkelacceleration.

2.1 Flyktmekanism

Flyktmekanismen har funnits och utvecklats lika länge som de mekaniska klockorna och dess funktion kan åstadkommas på olika sätt. Utmaningen med mekaniska klockor ligger i att upprätthålla en jämn tidshållning. Flyktmekanismen spelar en nyckelroll i att reglera energiflödet i systemet och kontrollera hur snabbt klockan går. Principen för dess funktion är att den består av en del som rör sig harmoniskt, vilket ger en konstant frekvens, samt en del som låter denna harmoniska rörelse påverka klockans tidsvisare korrekt. En annan vanlig mekanism som används för att reglera tid i mekaniska klockor är balanshjulet, särskilt vanligt förekommande i mekaniska armbandsur. Balanshjulet fungerar genom att oberoende av gravitationen svänga fram och tillbaka med en konstant frekvens, vilket i sin tur reglerar klockans tid.

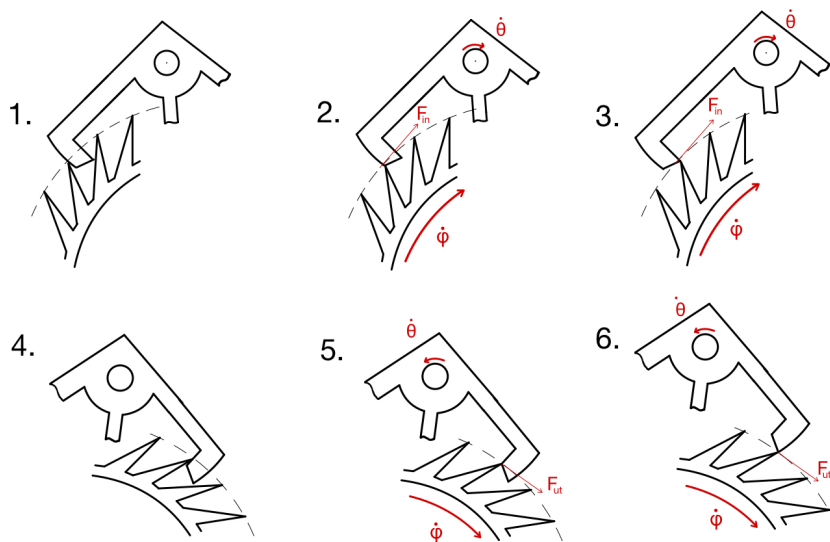
Projektet kommer att arbeta med en väl utvecklad och relativt enkel modell som kallas för *The Graham Escapement Mechanism*[12]. Denna mekanism har utvecklats och förfinats under lång tid och har etablerat sig som god lösning för att reglera tid i mekaniska klockor. Dess precision och stabilitet gör den till ett bra val för att säkerställa noggrann tidshållning i klockor. Det görs genom samspel av tre delar: ankare, pendel och flykthjul, vilka framgår av figur 2.1. Pendeln står för den harmoniska rörelsen, medan relationen mellan flykthjulet och ankaret är den del som låter den harmoniska rörelsen påverka klockans visare. Ytan på ankarets vänstra sida som slår i tänderna på flykthjulet kallas *ingående palett* och den högra kallas *utgående palett*. I figuren drivs flykthjulet medurs av ett moment M_f , som ger upphov till en rotationshastighet ω_f . Med pendelns svängningar medges och förhindras flykthjulets rörelse om vartannat i olika *faser*. Varje hel svängning av pendeln släpper paletterna på ankaret förbi en tand på flykthjulet. Genom en noggrant utformad design och effektiv koppling mellan ankaret och flykthjulet kan önskad rotationshastighet uppnås runt flykthjulets axel, vilket i sin tur styr visarnas rörelse på urtavlan. Om designen å andra sidan är bristfälligt utformad kan onödigt mycket energi gå förlorad vilket efter viss tid leder till att pendeln inte orkar upprätthålla sin svängningsrörelse och således slutar att gå.



Figur 2.1: Flyktmekanism av typ Graham Escapement med ingående delar.

Det är flyktmekanismens olika faser som gör mekaniska klockor komplicerade att modellera. Dels eftersom tidmätning kräver snäva toleranser för att uppnå hög precision och dels eftersom de kinematiska sambanden i flyktmekanismens är förhållandevis komplexa i jämförelse med till exempel utväxling mellan kuggar. Flyktmekanismens rörelse kan delas in i sex faser [13], som beskrivs kronologiskt i Figur 2.2. I fas 1

glider ankaret över tanden på ingångspaletten, flykthjulet är då hindrat från att rotera medan pendelrörelsen fortsätter. I fas 2 är flykthjulet inte längre låst i sin position, ankaret glider då med kontakt över tandens spets medan flykthjulet börjar rotera. Det är i fas 2 (och 5) som energi tillsätts pendeln från flykthjulet. När ankaret och tandspetsen glidit ifrån varandra inleds fas 3, som även kommer att benämnas *frispelet* i fortsättningen. Pendeln och flykthjulet roterar då fritt och oberoende av varandra tills ankaret åter igen träffar en tand och låser flykthjulet, denna gång på utgångspaletten. Fas 4, 5 och 6 följer samma princip som 1 till 3, men på utgångssidan.



Figur 2.2: Flyktmekanismens lägen. Fas 1 är mellan läge 1 och 2, fas 2 är mellan läge 2 och 3, och så vidare.

Pendeln

Pendelns syfte är att fungera som en harmonisk oscillator, som säkerställer en önskad och jämn frekvens i klockan. Genom att justera pendelns parametrar kan frekvensen och periodtiden anpassas. Enligt Jansson et al, [11, s. 343] kan frekvensen f för en matematisk pendel beskrivas som

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}}, \quad (2.2)$$

där g är gravitationskonstanten och h är den totala längden på pendeln. För den matematiska pendeln är frekvensen oberoende av pendelns massa och den enda justerbara parametern är pendelns längd, h . För att komma lite närmare verkligheten kan pendelns periodtid istället härledas från en fysikalisk pendels rörelseekvation där frekvensen, utöver pendelns längd, också är beroende av dess massa m_p och masströghetsmoment I_o , som är kopplad till pendelns geometri och massa. Frekvensen kan enkelt [11, s. 463] härledas att vara

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_p g h}{I_o}}, \quad (2.3)$$

där längden h nu är sträckan mellan pendelns rotation- och masscentrum. Teorin bakom pendelns frekvens är grundläggande och ger en god approximation av frekvensen för små svängningar för den mekaniska klockan.

För att beskriva en pendels rörelse i planet används rörelsemängdsmomentlagen (2.1). Vinkeln θ är pendelns vinkelposition mot vertikalaxeln och är positiv moturs. Pendelns rotationshastighet och acceleration är första respektive andra tidsderivatan av vinkeln och betecknas $\dot{\theta}$ respektive $\ddot{\theta}$. Momenten som uppstår kring rotationsaxeln är till följd av pendelns egentyngd $m_p g$ och pendelns dämpning c_p som antas verka linjärt med rotationshastigheten. För att säkerställa kontinuerlig energitillförsel till pendeln kommer en kraft F med hävarmen l från flykthjulet ge upphov till ett moment på pendeln. Det är den kraften som motverkar dämpningen och tillför tillräckligt med energi till pendeln för att den ska fortsätta svänga med rätt frekvens. Pendelrörelsen kan då härledas att vara

$$-m_p g h \sin(\theta) - c_p \dot{\theta} + Fl = I_p \ddot{\theta}, \quad (2.4)$$

där h är sträckan mellan rotationscentrum och tyngdpunktens läge, och egentyngdens hävarm är $h \sin(\theta)$. Kraften F och dess hävarm l , härleds i kapitel 3. Den första termen i ekvationen är negativ eftersom momentet alltid verkar i motsatt riktning i förhållande till vinkeln. På samma sätt är dämpningstermen negativ eftersom även det momentet alltid är motsatt rotationsriktningen. Lösningen $\theta(t)$ till denna ordinarie differentialekvation (2.4), kommer att visa hur pendelns position ändras med tiden, men eftersom krafternas storlekar är svåra att uppskatta är de obekanta fler än antalet ekvationer. Av den anledningen är det nödvändigt att studera de kinematiska sambanden i de faser då krafterna verkar som kan användas för att eliminera dem.

Flykthjulet

Flykthjulet är en komponent i flyktmekanismen och utgör länken mellan pendelrörelsen som stegvis stannar klockan och energikällan som driver på systemet igen genom *utväxlingen*. Flykthjulets geometriska utformning är av stor betydelse för klockans funktion, i synnerhet för hur väl flykthjulet samspelar med ankaret i kontaktfaserna och tillför energi till pendeln.

Som tidigare nämnts är flykthjulet indirekt kopplat till den fallande vikten och påverkas av ett moment M_f . Det är detta moment som tillför energi till pendeln och möjliggör kontinuerlig rörelse utan att den dämpas ut. Energin överförs genom flykthjulets tänder, vilka är utformade för att vid kontakt med ankaret överföra energi som genereras av M_f , illustrerad i fas två och fem i Figur 2.2. Flykthjulets rörelseekvation är formulerad utifrån rörelsemängdsmomentlagen, se ekvation (2.1). Vinkelavvikelsen från en referenspunkt betecknas φ och är positiv moturs. Hjulets rotations-hastighet och acceleration är vinkelns första och andra tidsderivata och betecknas $\dot{\varphi}$ samt $\ddot{\varphi}$. Summan av momenten inkluderar den drivande kraften från

drivkällan och en dämpningsterm, c_f , som är beroende av vinkelhastigheten. Med dessa omskrivningar ges flykthjulets rörelseekvation som

$$M_f - c_f \dot{\varphi} = I_f \ddot{\varphi}. \quad (2.5)$$

2.2 Utväxling

Grundprincipen för att kunna överföra rätt mängd kraft och energi i en mekanisk klocka krävs utväxling, i_ω . Ekvation (2.6) till (2.10) har tagits från *Maskinelement* [14, s.344]. Utväxlingen färdas utefter transmissionens effektväg och kan beskrivas som kvoten mellan ingående och utgående hastighet, och formuleras enligt

$$i_\omega = \frac{\omega_{in}}{\omega_{ut}}, \quad (2.6)$$

där ω_{in} och ω_{ut} är rotationshastigheterna på det ingående och utgående kugghjulet. Observera att definitionen av (2.6) kräver att transmissionens riktning bestäms. Bortser man från förluster i transmissjonen kan effektöverföring P , beskrivs utifrån rotationshastigheten ω och momentet på rotationscentrum M

$$P = M\omega, \quad (2.7)$$

som från in- och utgående sida av transmissionen kan beskrivas som

$$M_{in}\omega_{in} = M_{ut}\omega_{ut} \implies \frac{M_{ut}}{M_{in}} = \frac{\omega_{in}}{\omega_{ut}}. \quad (2.8)$$

En transmissjon kan innehålla flera utväxlingar där den totala utväxlingen i_{tot} , uttrycks som produkten av alla utväxlingar i systemet enligt

$$i_{tot} = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \cdot \dots \cdot i_n = \prod_{j=1}^n i_j. \quad (2.9)$$

I kugghjul används så kallad formbetingad utväxling. Denna typ av utväxling bygger på principen att två kugghjul med olika antal tänder, hädanefter *kuggtal*, samverkar. Skillnaden i kuggtal, z , genererar hastighetskvoten mellan kugghjulen och utgör på så sätt utväxlingen [14, s. 347] enligt

$$i_\omega = \frac{\omega_{in}}{\omega_{ut}} = \frac{z_{ut}}{z_{in}}. \quad (2.10)$$

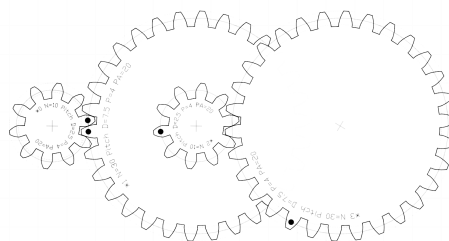
Det finns olika sätt att koppla samman kugghjul; enkel kugghjulskoppling (*eng: Simple gears*) samt sammansatt kugghjulskoppling (*eng: Compound gears*), Se Figur 2.3 respektive 2.4. Enkel kugghjulskoppling är när två eller fler kugghjul är kopplade i serie, och varje kugghjul roterar runt en egen axel. Sammansatt kopplade

kugghjul innebär att två kugghjul med olika kuggtal är sammansatta och roterar synkroniserat på samma axel. Se det mittersta kugghjulet i Figur 2.4.

Det kan uppstå problem med enkel koppling om den slutliga totala utväxlingen är för stor. Stor utväxling leder dels till stora diameterskillnader hos kugghjulen, dels till stora moment som kan leda till hållfasthetsproblem. Figur 2.3 illustrerar en enkel koppling av två kugghjul. Under en given tidsenhet passerar lika många kuggar genom kuggingreppet, vilket ger att transmissionen i figuren har utväxlingen 1:9. På motsvarande sätt visar Figur 2.4 en utväxling på 1:9 för ett sammansatt system. Sammansatta kugghjul används för att uppnå högre utväxlingsförhållanden på ett mer kompakt sätt än enkel kugghjulskoppling, dock med fler rörliga delar som konsekvens. Principen är användbar i många tillämpningar där volym och effektivitet är kritiska parametrar, såsom i klockor.



Figur 2.3: Enkel koppling med en 1:9 utväxling. Notera den stora diameterskillnaden på kugghjulen.



Figur 2.4: Sammansatt koppling med en 1:9 utväxling.

I en klocka är utväxlingsförhållandet mellan sekund- och minuthjulet 60:1. Detta innebär att för varje helt varv som minuthjulet gör har sekundhjulet roterat 60 gånger. Utväxlingen mellan minut- och timhjulet är 12:1, eftersom timvisaren roterar ett varv på en 12-timmars period. Den totala utväxlingen blir således 720:1.

2.3 Analytisk modellering av en mekanisk klocka

En analytisk modell möjliggör både kvantitativ analys och utveckling av den mekaniska klockan. Modellen utgör ett matematiskt och systematiskt ramverk för studie och analys av komponenternas beteende och samspel. För att skapa en fullständig modell bör varje ingående komponent tas hänsyn till i rörelseekvationerna, parametervärdena vara korrekta och differentialekvationernas begynnelsevärden stämma för de olika faserna. Först då kan ekvationssystemen implementeras och lösas i kod, och därmed kunna användas som verktyg för modellering av den fysiska klockan.

Rörelseekvationer

Komponenters rörelse i ett system kan beskrivas med rörelseekvationer. Rörelseekvationer grundar sig på kinetik, som enligt [11, s. 264] definieras som ett system i

rörelse med hänsyn till orsak. Genom att koppla samman dem kan en övergripande analytisk modell simuleras, där kraften från den drivande vikten är kopplad till, och påverkar, pendelns vinkel. Det drivande hjulet utsätts för en kraft som i sin tur påverkar nästkommande hjul med en kraft vilken till slut påverkar pendeln.

Kinematiska samband

Eftersom ett ekvationssystem med fler obekanta än ekvationer generellt är olösligt behövs ett sätt att antingen reducera de obekanta eller öka antalet ekvationer för att göra det lösbart. För två kroppar som rör sig i kontakt finns ett samband mellan deras lägen, hastigheter och accelerationer [11, s. 264]. Ett sådant samband kallas *kinematiskt samband* och betyder samband för system i rörelse utan hänsyn till orsak [11, s. 9]. För kuggar som roterar med kontakt kan den ena kuggens rotationshastighet som bekant beskrivas som den andres multiplicerat med en utväxlingsfaktor, ett linjärt kinematiskt samband. I andra dynamiska system kan sambandet vara mer svårbeskrivet och ha ett icke linjärt beroende. Oavsett hur det kinematiska sambandet yttrar sig kan det användas för att antingen reducera antalet obekanta eller öka antalet ekvationer.

Det kinematiska sambandet för flyktmekanismen kan skrivas som en implicit beskrivande funktion k på formen

$$k(\theta, \varphi, \phi) = 0, \quad (2.11)$$

där ϕ är en nyinförd vinkel, vilken förklaras i Kapitel 3. Givet att (2.11) gäller måste också tidsderivatan

$$\dot{k}(\theta, \varphi, \phi) = \frac{\partial k}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial k}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial k}{\partial \phi} \dot{\phi} = 0 \quad (2.12)$$

gälla. Och lika så för andra tidsderivatan

$$\ddot{k}(\theta, \varphi, \phi) = 0. \quad (2.13)$$

3

Metod

Detta kapitel presenterar i detalj utvecklingsförfarandet för både den analytiska och fysiska modellen. Det inkluderar även beskrivningen av de tester som utfördes på dessa modeller. Metoden utgår från den teori som presenterats i kapitel 2. I projektet fortgick teoretisk och fysisk prototypframtagande parallellt med matematisk modellering i en iterativ process. På så sätt kunde den fysiska prototypen användas som underlag för den matematiska modellen, samtidigt som den matematiska modellen fyllde sitt syfte då den kunde verifiera förändringar i beteendet hos den fysiska prototypen vid justeringar av parametervärden.

3.1 Analytisk modell

Den analytiska modellen grundas i kinetisk och kinematisk analys av klockans rörliga delar under de olika faserna. Kinetiken innefattar rörelseekvationer enligt Newtons andra lag och kinematiken används som ett komplement till kinetiken där obekanta och svåruppskattade krafter uppstår mellan de rörliga delarna. Ekvationerna kan sedan implementeras och lösas i MATLAB®. I grunden av den analytiska modellen är utväxlingen, som beskriver hur kugghjulen rör sig i förhållande till varandra. Rörelseekvationerna för hela systemet innefattar ett antal differentialekvationer och utgår från hur flyktmekanismen rör sig. Med kinematiska samband, som härleds främst ur flyktmekanismens geometri, kan dessa differentialekvationer lösas. Slutligen kan klockans rörelse simuleras.

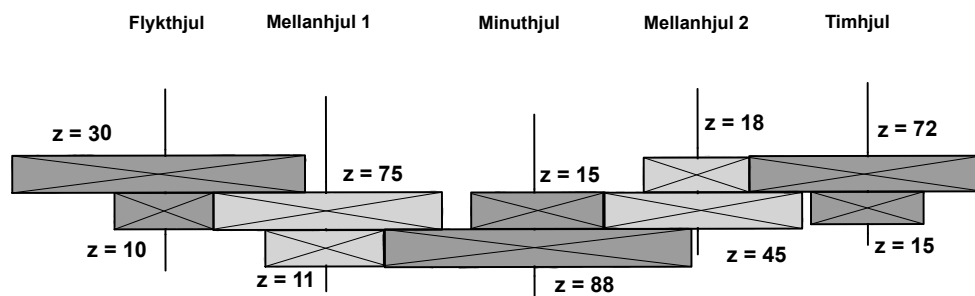
Utväxling

Utväxlingens design har stor betydelse för klockans rörelse, dels vad gäller överföring av moment och dels rörelse från den fallande vikten till flykthjulet. Således bör den totala utväxlingen i_{tot} (2.9) såväl som det enskilda kugghjulets utformning tas i beaktning vid modellering. Varje enskilt kugghjul kommer att tillföra ett bidrag av tröghet och dämpning, dessutom leder kontakten mellan kugghjulen till friktionsförluster. För att modellera klockan på ett så effektivt sätt som möjligt behöver sådana parametrar tas hänsyn till.

Tabell 3.1: Utväxling från Flykthjul till timhjul.

	Kuggtal, z , yttre hjul	Kuggtal, z , inre hjul	Utväxling
Flykthjul/ Sekundhjul	30	10	1
Mellanhjul 1	75	11	7.5:1
Minuthjul	88	15	8:1
Mellanhjul 2	45	18	3:1
Timhjul	72	15	4:1

Den totala utväxlingen i en klocka, som specificeras i avsnitt 2.2, är 720:1. För att erhålla en så kompakt klocka som möjligt utvecklades en serie sammansatta kugghjul, vars kuggtal är anpassade efter dels krav på den totala utväxlingens och dels storleksbegränsningen. Antal kugghjul och dessas kuggtal presenteras i Tabell 3.1. I varje rad i tabellen är innerhjulet på ett kugghjul kopplat till ytterhjulet på kugghjulet i raden nedanför; Flykthjulets innerhjul ansluts till ytterhjulet på mellanhjul 1. Därefter kopplas innerhjulet på mellanhjul 1 till ytterhjulet på minuthjulet. Minuthjulets innerhjul ansluts sedan till innerhjulet på mellanhjul 2, och så fortsätter kopplingarna i systemet, enligt prinipen för sammansatt kopplade kugghjul, beskrivet i avsnitt 2. Systemets integration synliggörs ytterligare i Figur 3.1, där systemet visualiseras ovanifrån med inner- och ytterhjul markerade med ett kryss och respektive kuggtal, z .

**Figur 3.1:** Toppvy av utväxlingen, med flykthjulet till vänster och timhjulet till höger.

För att möjliggöra upphängning av vikten som ska driva systemet designas även timhjulet som ett sammansatt kopplat kugghjul, alltså med ett inre kugghjul, se sista raden i Tabell 3.1 och Figur 3.1. Kugghjulet är till för systemets drivande mekanism som består av en spole med en fallande vikt. Spolen konstrueras med invändiga kuggar så att den roterar synkront med timhjulet, de invändiga kuggarna motverkar glidning. Eftersom den totala utväxlingen i_{tot} (2.9) är oberoende av spolens geometri

kan den, till skillnad från kugghjulens dimensioner, enkelt justeras för att antingen minska eller öka momentet från den fallande vikten. Justeringar av spolens diameter kan även göras för att ändra klockans drifttid, förhållandet mellan spolens diameter och klockans drifttid ges av

$$O_s = d_s \cdot \pi, \quad (3.1)$$

där O_s är spolens omkrets och d_s är spolens diameter. Antal varv N , givet snörets längd L_s , ges av

$$N = \frac{L_s}{O_s}. \quad (3.2)$$

Timhjulet roterar som tidigare nämnt 1 varv på 12 timmar, således blir drifttiden

$$T_h = N \cdot 12. \quad (3.3)$$

Kombinerar ekvationerna fås uttrycket

$$T_h = \frac{L_s}{d_s \cdot \pi} \cdot 12. \quad (3.4)$$

Rörelseekvationerna för hela systemet

I analysen av flyktmekanismens rörelse frilades pendeln och flykthjulet från varandra, se Figur 3.3 och 3.4, och kunde på så sätt analyseras var för sig. På grund av att flyktmekanismen går igenom sex olika faser krävs det sex olika ekvationssystem för att beskriva rörelsen som sker under respektive fas. I de faser då flykthjulet och ankaret är i kontakt verkar krafter mellan dem, medan under frispelen rör de sig oberoende av varandra, vilket illustreras i Figur 2.2.

För att bestämma pendels rörelseekvation i flyktmekanismen användes ekvation (2.4) som grund. Krafterna F_{in} och F_{ut} uppkommer till följd av kontakten i fas 2 och 5. Deras riktning antas vara tangentiell med flykthjulets ytterradie enligt Figur 3.2. Däremot är de till storleken okända. Pendels rörelseekvation ges då som

$$-c_p \dot{\theta} - m_p g h \sin(\theta) - \underbrace{F_{in}}_{fas2} l_{in} + \underbrace{F_{ut}}_{fas5} l_{ut} = I_p \ddot{\theta}, \quad (3.5)$$

där kraften i fas 2 ger upphov till ett negativt moment på pendeln, medan den i fas 5 ger ett positivt. För att beräkna hävarmen l_{in} från kraften F_{in} med avseende på pendels rotationsaxel utnyttjades geometrin i Figur 3.5. Då kraften F_{in} har en riktning tangentiell med flykthjulets ytterradie blir hävarmen med avseende på pendels rotationsaxel

$$l_{in} = r_f - H \cos(\alpha), \quad (3.6)$$

där H är sträckan mellan pendels och flykthjulets rotationscentrum och r_f är flykthjulets ytterradie och α uttrycks som

$$\alpha = \alpha_o + \varphi, \quad \alpha_o > 0. \quad (3.7)$$

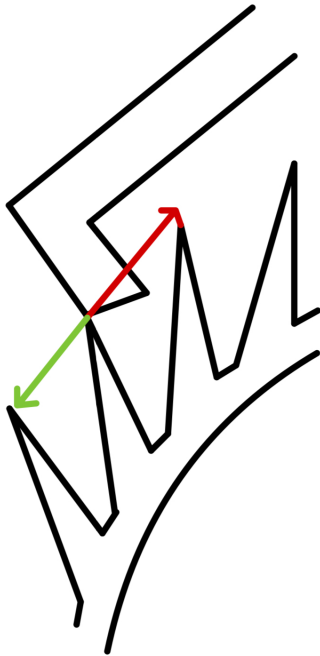
På samma sätt fås hävarmen l_{ut} från kraften F_{ut} med avseende på pendelns rotationsaxel som

$$l_{ut} = H \cos(\alpha') - r_f \quad (3.8)$$

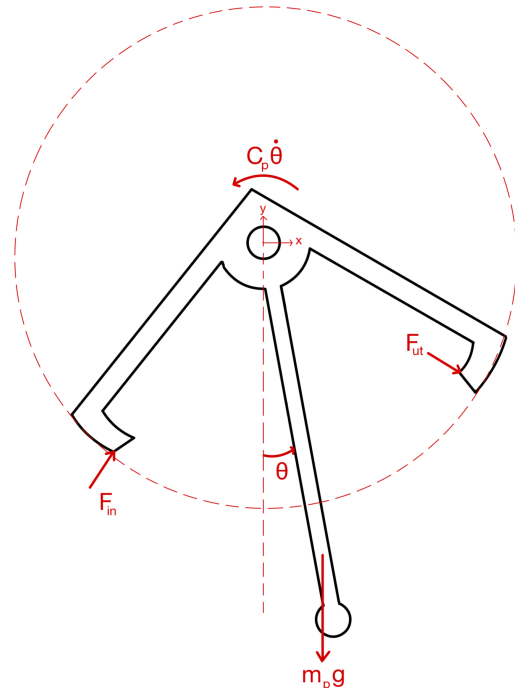
där

$$\alpha' = \alpha'_0 + \varphi, \quad \alpha'_0 < 0. \quad (3.9)$$

Fullständig härledning av krafternas hävarmar med avseende på pendelns rotationsaxel ges i Appendix A.2.



Figur 3.2: Kontaktkraften F_{in} i fas 2.



Figur 3.3: Krafter från flykthjulet som verkar på pendel och ankare.

Rörelsen för ett hjul som roterar kring en fixerad axel kan beskrivas enligt ekvation (2.5), där ett moment M_f driver hjulet och motverkas av dämpningen. Flykthjulets rörelse kan beskrivas på ett liknande sätt där den fallande vikten driver på systemet och motverkas av en dämpning.

Eftersom flykthjulet hela tiden är i kontakt med utväxlingen behöver tröghet och dämpning från varje enskilt kugghjul tas hänsyn till i rörelseekvationer. På grund av utmaningen i att bestämma enskilda dämpningskonstanter genomfördes ett test som återges i avsnitt 3.3 för att bestämma den sammantagna dämpningen för hela utväxlingen, inklusive flykthjulet. Med ett sådant test inkluderas dämpning från statisk- och dynamisk friktion i kuggarnas lagring, även friktion i kuggkontakterna

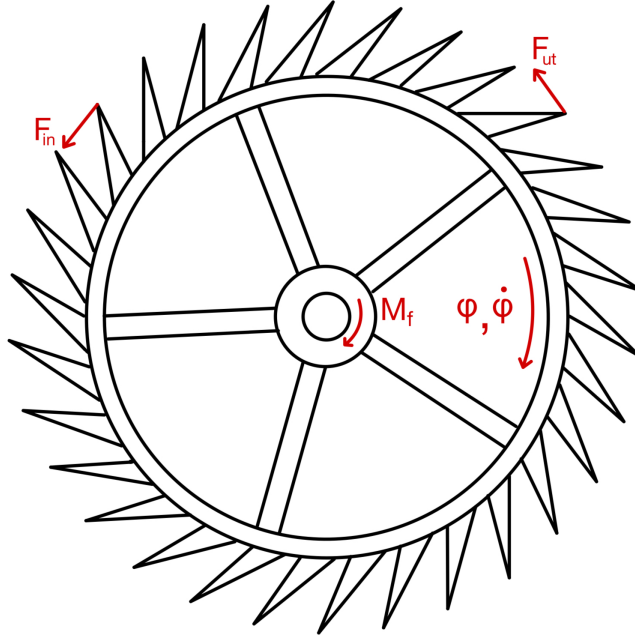
inkluderas i dämpningstermen. Även om det går att hävda att det också finns ett bidrag av dämpning från luftmotstånd kan det antas vara försummbart litet relativt friktionen på grund av de låga hastigheterna.

Flykthjulets och utväxlingens sammantagna rörelseekvation ges av

$$-\lambda_g m_d g - c_f \dot{\varphi} + \underbrace{F_{in} r_f}_{fas2} + \underbrace{F_{ut} r_f}_{fas5} = \Lambda_I \ddot{\varphi}, \quad (3.10)$$

där $m_d g$ är kraften från den fallande vikten verkande i negativ riktning och λ_g är hävarmen som blir till följd av utväxlingen; c_f är den estimerade dämpningskoefficienten; F_{in} och F_{ut} är resulterande krafter från fas 2 och 5 som verkar i motsatt riktning relativt de på ankaret och r_f är flykthjulets ytterradie. Λ_I är utväxlingens sammantagna masströghetsmoment kring flykthjulets rotationsaxel.

För att inkludera utväxlingens kugghjul i rörelseekvationen friläggs varje kugghjul för sig och beskrivs med var sin rörelseekvation enligt (2.5). Genom kinematiska samband kan de enskilda ekvationerna relateras till varandra och sättas ihop till en ekvation giltig för hela utväxlingen, från timhjul till flykthjul. Härledningen för flykthjulets rörelseekvation finns i Appendix A.1.



Figur 3.4: Reaktionskrafterna från pendeln som verkar på flykthjulet.

Genom att addera (3.5) och (3.10) kan krafterna F_{in} och F_{ut} elimineras i respektive fas. Sammansättning av ekvationerna i fas 2 ger

$$\frac{I_p \ddot{\theta}}{r_f - H \cos(\alpha)} + \frac{\Lambda_I \ddot{\varphi}}{r_f} = \frac{-c_p \dot{\theta} - m_p g h \sin(\theta)}{r_f - H \cos(\alpha)} + \frac{-c_f \dot{\varphi} - \lambda_g m_d g}{r_f} \quad (3.11)$$

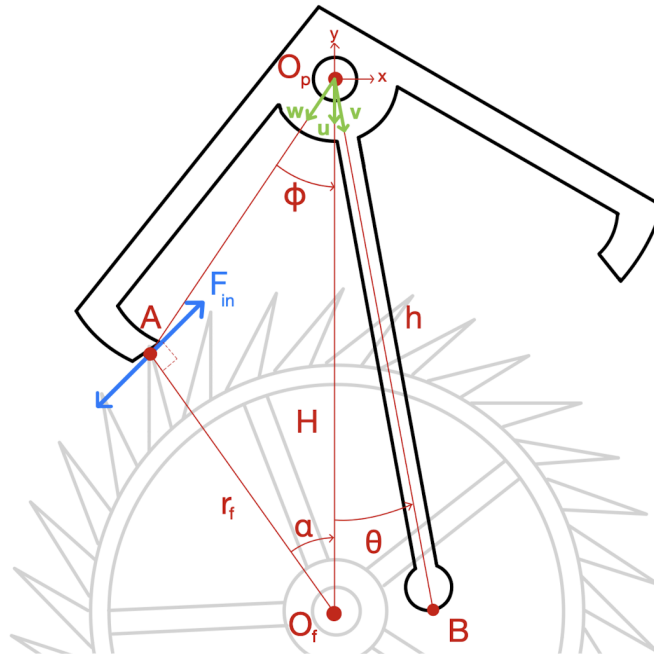
och i fas 5

$$\frac{\Lambda_I \ddot{\varphi}}{r_f} - \frac{I_p \ddot{\theta}}{H \cos(\alpha') - r_f} = \frac{c_p \dot{\theta} + m_p g h \sin(\theta)}{H \cos(\alpha') - r_f} + \frac{-\lambda_g m_d g - c_f \dot{\varphi}}{r_f}. \quad (3.12)$$

Konsekvensen av sammansättningen blir att de obekanta blir två istället för tre och ekvationerna blir en istället för två. För att jämna ut antalet obekanta och ekvationer studeras kinematiken nedan.

Kinematiska samband

Med två kinematiska samband för pendelns och flykthjulets rörelse under fas 2 och 5 kan de obekanta krafterna F_{in} och F_{ut} i (3.5) och (3.10) elimineras. För att ta fram det sambandet infördes en vektor \mathbf{w} som går mellan pendelns rotationsaxel O_p och kontaktpunkten A för ankaret och flykthjulet, se Figur (3.5). Vektorn \mathbf{w} är en funktion av vinkeln α som är flykthjulets vinkelkoordinat förskjuten moturs med en konstant α_0 . Ytterligare två vektorer \mathbf{u} och \mathbf{v} infördes som går från pendelns rotationsaxel till flykthjulets rotationsaxel O_f längs vertikalaxeln, respektive pendelns masscentrum B . Mellan \mathbf{w} och \mathbf{u} bildas en ny vinkel ϕ , medan \mathbf{u} och \mathbf{v} bildar pendelns vinkel θ .



Figur 3.5: Förhållande mellan geometri i fas 2.

Genom att beräkna skalärprodukten av \mathbf{w} och \mathbf{u} , erhålls ett icke-linjärt kinematiskt samband

$$k_2^\phi(\phi, \varphi) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - |\mathbf{w}| |\mathbf{u}| \cos(\phi) = 0 \quad (3.13)$$

mellan flykthjulets position och den nyinförda vinkeln ϕ . Ytterligare ett samband

$$k_2^{\phi+\theta}(\phi, \theta, \varphi) = \mathbf{v} \bullet \mathbf{w} - |\mathbf{v}||\mathbf{v}| \cos(\phi + \theta) = 0 \quad (3.14)$$

mellan pendelns läge, vinkeln ϕ och flykthjulets läge fås genom att ta skalärprodukten mellan \mathbf{w} och \mathbf{v} . Då (3.13) och (3.14) deriveras två gånger med avseende på tiden fås två kinematiska samband

$$\ddot{k}_2^\phi(\phi, \varphi) = 0 \quad (3.15)$$

och

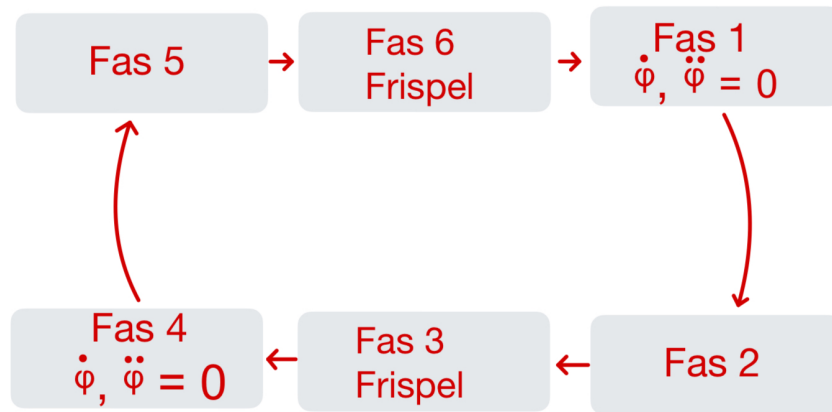
$$\ddot{k}_2^{\phi+\theta}(\phi, \theta, \varphi) = 0 \quad (3.16)$$

innehållande vinkeln, rotationshastigheten och vinkelaccelerationen, för både pendeln och flykthjulet samt mellan \mathbf{w} och \mathbf{u} . Med en ny okänd vinkel ϕ och två nya ekvationer kommer systemet nu vara möjligt att lösa utan att känna kraften F_{in} . Hädanefter kommer de kinematiska sambanden att benämnas *tvångsekvationer* eftersom de är ekvationer som måste gälla under den aktuella fasen. På samma sätt kan två tvångsekvationer för fas 5 tas fram för att eliminera kraften F_{ut} . I de ekvationerna förskjuts flykthjulets vinkelkoordinat istället medurs med en konstant α'_0 ; och den nya okända vinkeln mellan vertikalaxeln och vektorn mellan flykthjulets rotationsaxel och kontaktpunkten för ankaret och flykthjulet bestäms β . Fullständig härledning av tvångsekvationerna ges i Appendix A.2.1.

Simulering

För att simulera klockans rörelse implementerades rörelseekvationerna under de olika faserna i MATLAB®, och löstes med differentialekvationslösaren ode45. Innan ekvationerna kunde lösas med ode45 behövde de skrivas om till ett system av första ordningens differentialekvationer.

För att få programmet att lösa rätt ekvation vid ett givet tillfälle nyttjades funktionen *events*. Ett event inträffar då ett förutbestämt värde på en angiven parameter nås, exempelvis då pendelns vinkel $\theta = 0$. Givet att programmet löser en ekvation och ett event inträffar, kan programmet påbörja lösningen av en annan ekvation. På så sätt kan programmet hoppa mellan faserna och lösa rätt ekvation vid rätt tillfälle. I detta specifika fall, med sex olika ekvationer och faser, finns också sex events, ett tillhörande varje ekvation, som säger åt programmet när den nuvarande ekvationen ska sluta lösas och påbörja lösningen av ekvationen tillhörande fasen efter. Den sekvensen illustreras schematiskt i Figur 3.6. MATLAB®-koden i sin helhet kan ses i bilaga B.



Figur 3.6: Schematisk representation av mappningssekvensen för faserna. Mellan varje fas sker ett event.

Under metoden, särskilt när det gäller simuleringen som utfördes i MATLAB®, fastställdes specifika parametrar från den fysiska modellen i CATIA V5. Dessa parametrar uppskattades baserat på geometrin som representerar förhållandet mellan ankaret, pendeln och flykhjulet. Denna process innefattade att fastställa initiala värden för vinkeln θ , vilket behövdes för simuleringen. Dessutom härleddes andra parametrar, såsom massa och tröghetsmoment, från CATIA V5. Det är dock viktigt att lägga märke till att dessa värden är associerade med CAD modellen, som representerar ett solid objekt, medan klockans komponenter är 3D-utskrivna, vilket gör dem icke-solida och istället sammansatta av vävda plaststrukturer. Följaktligen är det viktigt att inse att de värdena inte helt motsvarar de verkliga värdena för den mekaniska klockan.

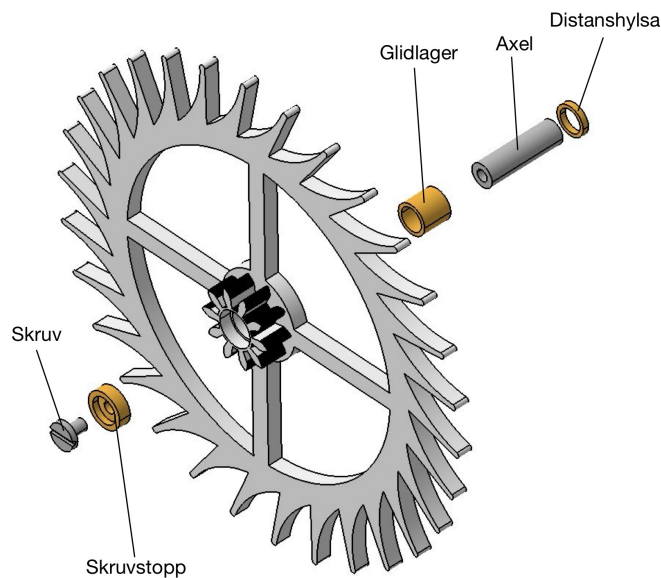
3.2 Fysisk modell

Den analytiska och fysiska modellen utvecklades iterativt, där ingen modell kunde anses fullständig utan information från den andra. I den fysiska modellen var en av de främsta utmaningarna friktion. Klockan är konstruerad med ett system med stor total utväxling på 720:1. Detta innebär att små krafter kan få betydande effekter, och friktionen utgör en av de mest utmanande faktorerna.

Med hjälp av programvaran CATIA V5 skapades CAD-ritningar. Ritningarna användes för att visualisera delarna och fungerade som underlag inför tillverkningen. Kugghjulens ritningar skapades med hjälp av en generator [15] för kugghjul med cykloida kuggprofiler och med tidigare beräknade kuggtal, se Tabell 3.1. De genererade kugghjulen modifierades för att passa systemets utväxling och klockans utseende.

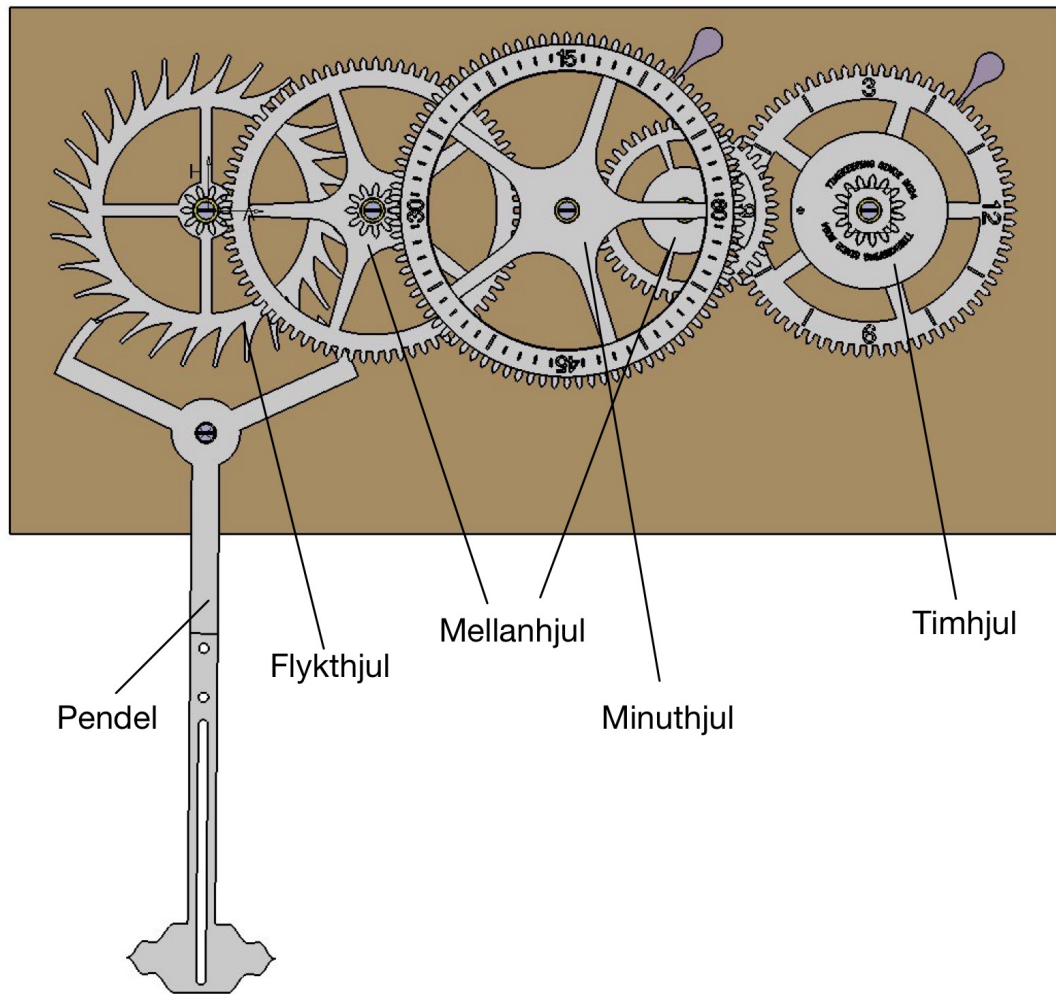
Konstruktionen av flyktmekanismen följde metoden enligt artikeln *Clock And Watch Escapement Mechanics* [16]. Genom att göra detta säkerställdes korrektheten på flyktmekanismens komplexa geometri och att relationen mellan pendeln, ankaret och flykthjulet uppfylldes.

Tillverkningsprocessen för klockan var som tidigare nämnt iterativ med CAD-modellerna som utgångspunkt. Kugghjulen tillverkades i E-PLA med hjälp av en 3D-skrivare för att säkerställa noggrannheten och effektiviteten i tillverkningen. För att minimera friktionen skapades glidlager av mässing i metallverkstaden som sedan monterades på rostfria stålaxlar. Distanshylsor användes för att säkerställa korrekta avstånd, samt minska friktion, mellan kugghjulen och specialtillverkade stopp användes för att låsa hjulen och begränsa deras rörelse till 1 mm i sidled. Figur 3.7 visar en sprängbild av ett monterat kugghjul och dess komponenter.



Figur 3.7: Sprängbild av ett monterat kugghjul.

Bakstycket tillverkades av en MDF-skiva och fungerade som bas för att fästa axlarna. Initialt skars pendeln ut med laser i akrylglas, men materialet visade sig efter testning inte vara styvt nog. Därför skrevs pendeln därefter ut i E-PLA med 3D-skrivare i flera segment som sedan sammankopplades för att ge en styvare struktur. Ett spår gjordes i mitten av pendeln för att möjliggöra fästandet av vikter och därmed ändring av masscentrum, vilket är en viktig variabel i klockans frekvens och därmed dess precision. För att förenkla monteringen av klockan monterades ankaret nedertill på flykthjulet, i kontrast till hur ankaret och flyktmekanismen har presenterats tidigare i rapporten, då ankaret har suttit ovanför flykthjulet. Detta medför ingen skillnad i klockans funktion. Figur 3.8 visar CAD-modellen av klockan.



Figur 3.8: CAD-modell av klockan.

3.3 Testning

Syftet med att testningen var dels att utvärdera funktionen och lägga en grund för utvärdering av arbetet, men även för att ta fram en dämpningskonstant för systemet för att komplettera den analytiska modellen. De testerna som genomfördes var dämpningskoefficienttest, test av fysisk modell, test av analytisk modell samt en jämförelse mellan de två modellerna.

Dämpningskoefficienttest

Dämpning är ett fenomen där rörelseenergin överförs från det mekaniska systemet till omgivningen. I det här fallet, när ett antal kopplade kugghjul roterar runt axlar, kan det uppstå dämpning och energiförluster på grund av den friktion som finns i systemet. För att undersöka omfattningen av dämpningen genomfördes ett test där klockan filmades med pendeln avkopplad och vikten påhängd. Flykthjulet startades från vila och tilläts rotera en kort sekvens för att illustrera frispelsfasen, som förklarats i kapitel 2. Från filmen kunde en vinkel avläsas vid en given tidpunkt, vilket

användes för att lösa rörelseekvationen (3.10), som är

$$-\lambda_g m_d g - c_f \dot{\varphi} + F_{in} r_f + F_{ut} r_f = \Lambda_I \ddot{\varphi}. \quad (3.17)$$

I detta skede har krafterna F_{in} och F_{ut} ingen påverkan på grund av frispelsfasen. Genom att lösa denna differentialekvation med en given vinkel vid en tidpunkt $\varphi(t)$ kunde värdet på dämpningstermen beräknas.

Ett liknande test genomfördes på pendeln, där den släpptes vid en startvinkel och tilläts dämpas ut. Genom att anteckna startvinkeln och den tid det tog för pendeln att stanna, kunde dämpningstermen beräknas med hjälp av ekvationen (2.4).

Test av fysisk modell

Noggrannheten hos klockan är av yttersta vikt för dess pålitlighet och utgör ett av projektets mål. Noggrannheten är direkt relaterad till pendelns frekvens och genom att skapa en korrekt konstruerad fysisk modell kan frekvensen finjusteras för att systematiskt testa sig fram till ett tillfredsställande resultat. Frekvensen beskrivs enligt (3.5) i avsnitt 3.1 som

$$-m_p g h \sin(\theta) - c_p \dot{\theta} + F_{in} l_{in} + F_{ut} l_{ut} = I_p \ddot{\theta}.$$

Denna ekvation är en del av den analytiska modellen och kan inte antas illustrera verkligheten korrekt. Därav användes ekvationen som en startpunkt för att undersöka frekvensen. Justeringen skedde genom systematisk parametervariation. F_{in} och F_{ut} är beroende på den drivande vikten och verkar aldrig samtidigt. För att justera krafterna ändrades massan på den drivande vikten. Testerna fortsatte med att variera h , distansen mellan rotation- och masscentrum. Distansen ändrades genom att justera positionen på pendelns masscentrum. Den kan ändras genom att antingen förlänga pendeln eller addera vikt.

Det slutgiltiga testet inleddes genom att finjustera frekvensen för att säkerställa att flykthjulet roterade med en hastighet på 1 RPM. Med den valda frekvensen registrerades rotationen av flykthjulet fem gånger och ett genomsnitt beräknades. Utifrån detta genomsnitt justerades frekvensen ytterligare för att uppnå det önskade värdet på 1 RPM. När den önskade rotationshastigheten hade uppnåtts återställdes visarna till noll och den drivande vikten vevades upp. En digital klocka startades samtidigt med testet, och tiderna noterades vid tre olika tillfällen för att sedan jämföras.

Jämförelse av modeller

En analytisk modell kan, som tidigare nämnt, aldrig perfekt beskriva verkligheten, men genom iterativ testning kan en god approximation uppnås. Den fysiska modellen fungerar som ett facit för den analytiska modellen, vilken strävar efter att återspegla verkliga förhållanden. Testningen mellan modellerna genomfördes stegvis under projektets gång för att säkerställa att de beräkningar och approximationer som gjorts är tillförlitliga och korrekta. Dessa tester utfördes genom att mäta parametervärden på den fysiska klockan och använda samma värden i den analytiska

modellen. Därefter genomfördes en jämförelse för att bedöma hur väl den analytiska modellen representerade verkligheten. Resultaten från dessa tester låg som grund för vidareutveckling genom en noggrann felsökning. Med en välplanerad testuppställning kan variabler isoleras och modifieras för att identifiera och åtgärda eventuella felkällor.

4

Resultat

I detta kapitel kommer resultaten, utifrån de satta målen i avsnitt 1.3 för både den fysiska och analytiska modellerna presenteras. Inledningsvis redogörs för resultaten rörande den fysiska modellen med tidmätning och presentation av de använda parametervärdena. Därefter redovisas resultaten för den analytiska modellen, här med olika parametervärden för att belysa dess funktionalitet.

4.1 Fysisk modell

Resultat för den fysiska modellen visas i Figur (4.1). Vid det slutgiltiga testet hade klockan en total drifttid på 44 timmar och 30 minuter och 41 sekunder, utan att den fallande vikten höjdes igen. Klockan visade då en uppmätt tid på 44 timmar och 32 minuter. Det betyder att den totalt gick 1 minut och 19 sekunder fel under testet. Det motsvarar cirka 40 sekunder per dygn.

Tabell 4.1: Tidmätning fysisk modell

	Klockans drivtid [h:m:s]	Verklig drivtid [h:m:s]	Tidsdifferens [h:m:s]
Mätning 1	18:00:00	17:58:55	00:01:05
Mätning 2	38:00:00	37:58:40	00:01:20
Mätning 3	44:32:00	44:30:41	00:01:19

Tabell 4.1 återger modellens drifttid, den faktiska tiden och differensen mellan dem under tre olika mätningar. Under testets gång kunde en genomsnittlig frekvens uppmätas till 0.5005 [Hz] och en periodtid till 1.998 sekunder.

Följande parametrar användes för den fysiska prototypen:

- Drivande viktens massa: 15.05 kg.
- Spolens diameter: 40 mm.
- Pendelns vikt: 0.418 kg.
- Total pendellängd: 1.15 m.
- Längd mellan pendelns rotation- och masscentrum: 0.865 m.

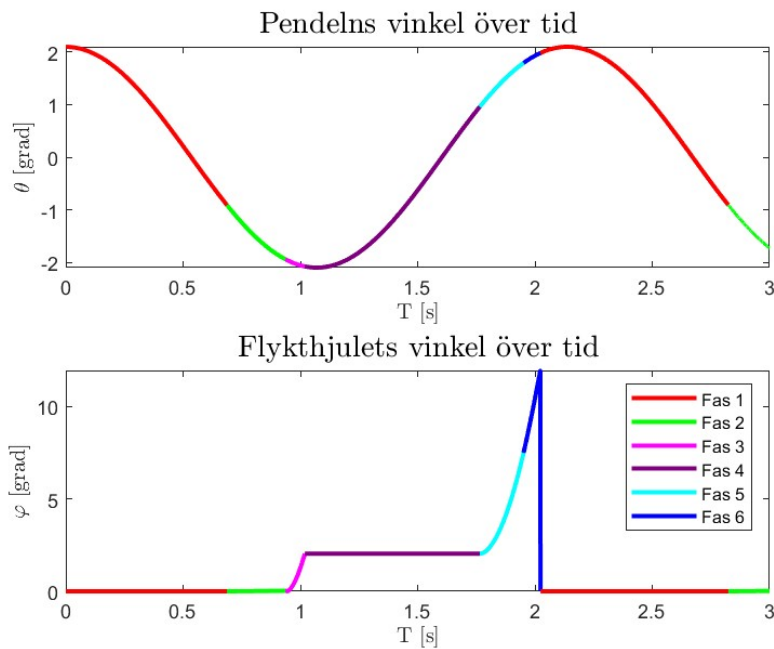
Figur 4.1 visar den färdiga klockan under tidmätningen.



Figur 4.1: Slutgiltiga fysiska modellen av klockan.

4.2 Analytisk modell

Efter att flykthjulets och pendelns rörelseekvationer lösts i MATLAB® enligt kapitel 3.1 kunde lösningarna $\theta(t)$ och $\varphi(t)$ plottas, se Figur 4.2.



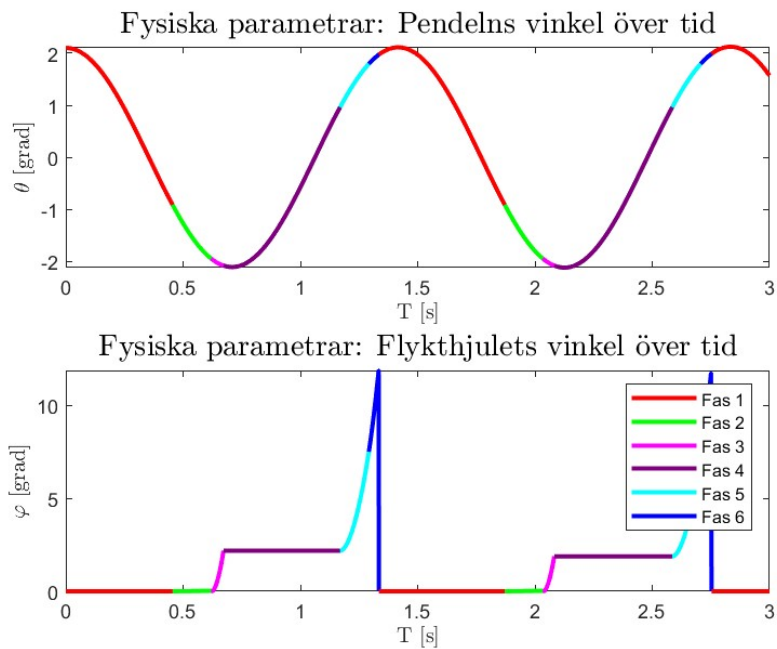
Figur 4.2: Grafisk illustration av pendelns vinkel $\theta(t)$ och flykthjulets vinkel $\varphi(t)$ i de olika faserna med anpassade parametervärden.

Parametervärdena som användes vid lösningen av rörelsekvationerna illustrerad i Figur 4.2 är inte samma som de uppmätta värdena för den fysiska prototypen, presenterade i avsnitt 4.1. Värdena är istället anpassade för att matcha den fysiska prototypens rörelse. De använda värdena är:

- Drivande viktens massa: 5 kg.
- Spolens diameter: 0.2 m.
- Pendelns vikt: 0.6 kg.
- Längd mellan pendelns rotation- och masscentrum: 0.68 m.

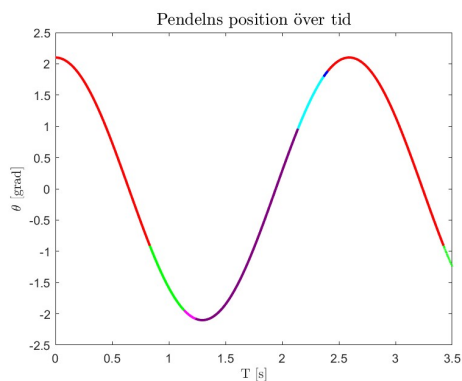
Med dem värdena kunde en frekvens på 0.47 [Hz] uppmätas då flykthjulet roterade med 1 RPM.

Figur 4.3 illustrerar lösningarna till pendeln och flykthjulets rörelsekvationer, $\theta(t)$ och $\varphi(t)$ då parametervärden från den fysiska modellen användes. Med dem värdena hade pendeln en frekvens på 0.714 [Hz].

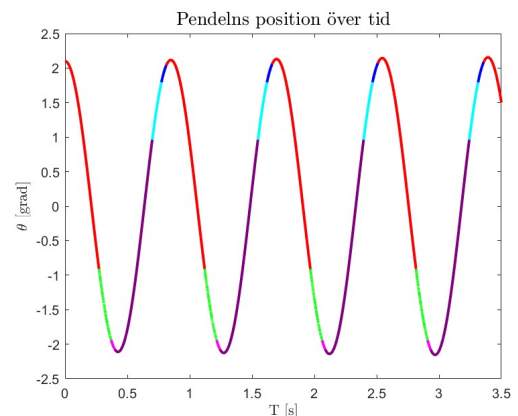


Figur 4.3: Fysiska parametrar: Grafisk illustration av pendelns position $\theta(t)$ och flykthjulets position $\varphi(t)$ i de olika faserna.

Olika delar av linjen i grafen är färgade i både Figur 4.2 och 4.3 och de motsvara olika faser under rörelsen av en tand. Där en tands rörelse avslutas när det har gått ungefär två sekunder respektive 1.3 sekunder och totalt 12 grader på φ , efter det återställs händelserna i koden och startar om igen för nästa tand.



Figur 4.4: Graf över pendelns vinkel med en längd på 1 m.



Figur 4.5: Graf över pendelns vinkel med en längd på 0.1 m.

Figur 4.4 och 4.5 presenterar förändringen av pendelns vinkel med avseende på två olika längder för pendeln. Från graferna kan pendelns frekvensen avläsas till 2.6 respektive 0.75 [Hz].

5

Diskussion

I den analytiska modellen begränsades analysen till endast rotationsrörelser i planet, vilket ledde till att vibrationer och translaterande rörelser ej beaktades. Vid testning av den fysiska modellen påvisades dessa faktorer närvaro, vilka identifierades som potentiella källor till förbättringar. Trots utgångspunkten att använda stela kroppar, producerade den analytiska modellen tillfredsställande resultat.

En faktor som potentiellt kan ha påverkat resultaten negativt är hur dämpning hanterades i den analytiska modellen. Antagandet att dämpningen var linjärt proportionell mot rotationshastigheten reflekterar inte helt verkligheten. Betydande mängder statisk och dynamisk friktion förekommer i systemet, vilket gör antagandet till en betydande förenkling.

Komponenterna behandlades även som odeformerade och under ideala smörjningsförhållanden i modellen. Utan beaktande av utmattning, smörjningsförhållanden och närvaron av smuts i glidlagren, antogs en oändlig hållfasthet och livslängd, vilket starkt förenklar verklighetens komplexitet. Dessa faktorer kan också leda till tidmättningsfel, även i den fysiska modellen, vilket ej tillräckligt beaktades.

Ett påtagligt behov av fortsatt analys och testning för att bestämma dessa felkällors omfattning är uppenbart, vilket inte kunde inkluderas i detta projekt. Dämpning och friktion är komplext och utmanande att uppskatta korrekt, och kräver därför ytterligare utforskning och detaljerad analys.

Klockans exakthet är direkt kopplad till dimensioneringen och parametriseringen av flyktmekanismen. Med geometrier för flykthjulet och ankaret fastställda kunde pendeln iterativt modelleras om för att justera dess frekvens. Genom att lägga till vikter och ändra geometrin på pendeln, vars rörelse beskrivs enligt ekvation (3.5), ändras även masströgheten, I_p , massan, m_p , och längden till pendelns masscentrum h , som i sin tur påverkar momentet runt pendelns rotationspunkt. Därför krävdes försiktighet vid förändringar av parametrar, eftersom en ändring av en parameter resulterade i flera förändringar i rörelseekvationen. Det visade sig att olika tillvägagångssätt för att justera masscentrum gav olika resultat för frekvensen. Tanken var att en kortare pendel med stor tillagd vikt längst ner skulle ge samma resultat som en längre pendel utan tillagd vikt. I testet av den fysiska modellen, som beskrivs i avsnitt 3.3, visade det sig dock att pendeln hade svårare att bibehålla en jämn frekvens utan att stanna när den var kortare med stor tillagd vikt, jämfört med en längre pendel. Detta kan vara ett resultat av skillnad i masströgheten som påverkas annorlunda i de olika fallen. En kortare pendel med tillagd vikt blir även mer känslig för justeringar.

I tabell 4.1 noterades tiderna under det fysiska testet vid tre tillfällen. En observation från tabellen är att felmarginalen på klockan inte förändras linjärt över

tid. Under de första 18 timmarna av testet visade den fysiska modellen en felmarginal på 1 minut och 5 sekunder, vilket ökade till 1 minut och 20 sekunder under de följande 20 timmarna. Det indikerar att energin i systemet inte är konstant och att störningar har inträffat. Dessa störningar kan ha flera orsaker, såsom att snöret till den drivande vikten kan trassla sig på spolen och att friktion tar upp en del av energin som annars skulle driva pendeln. En annan möjlig orsak kan vara att de 3D-utskrivna kugghjulen, som tidigare antogs vara stela kroppar, faktiskt deformeras under testets gång, vilket resulterar i ojämnt energiflöde som visas i tabellen.

Den analytiska modellen lyckades beskriva en rörelse som liknade den fysiska modellen, där svängningar och vinkelförändringar som observerades i resultaten var rimliga och kunde översättas till den verkliga fysiska modellen. De kinematiska sambanden mellan alla komponenter är korrekt beskrivna då samtliga vinklar ändras enligt önskad utväxling och riktning. Parametrarnas påverkan på systemets beteende är i enlighet med de rörelseekvationer som tagits fram, exempelvis, enligt (2.4) så innebär en kortare pendellängd en högre frekvens. Detta illustreras i Figur 4.4 och Figur 4.5 under avsnitt 4.2.

De största skillnaderna mellan modellerna ligger i storleken på parametervärdena som inte överensstämmer. För att uppnå och bibehålla den önskade frekvensen på 1 RPM för flykthjulet var parametervärdena märkbart skilda mellan den fysiska modellen och den analytiska. En möjlig orsak till detta kan vara resultatet av dämpningstestet, där systemet delades upp och pendelns dämpning tillsammans med ankaret testades separat från resten av systemet. Vid detta test förbisågs dock effekten av stötarna mellan ankaret och flykthjulet som påverkar klockan genom energiförluster. Då denna påverkan förbisågs i testningen av de separata delarna ledde det till att dess effekt inte beaktades i modelleringen. För att uppnå samma frekvens i både den analytiska och fysiska modellen krävdes exempelvis en drivande vikt med tre gånger så stor massa i den fysiska modellen. Det är rimligt att anta att den ökade massan krävdes för att kompensera för en del av de energiförluster som kan ha uppstått till följd av de förbisedda stötarna.

Givet att projektets två första mål var att konstruera både en analytisk modell och en fysisk modell av en klocka anses dessa vara uppfyllda, då projektet har resulterat i dessa två modeller. Däremot har konstruktionen av båda modellerna varit mer omfattande och tidskrävande än planerat.

En av de större målsättningarna med den fysiska modellen var att denna skulle kunna ha en drivtid på minst 48h och ha en felmarginal på högst ± 5 minuter per dygn, det var även det mest krävande målet. Genom testningen kunde det konstateras att det krävdes en tyngre vikt än vad beräkningarna för utväxlingen visade. Dessa hade till viss del att göra med just dessa beräkningar genomfördes utan hänsyn till förluster mellan kugghjulen och övriga förluster i systemet. Testet av den fysiska modellen avslutades innan 48 timmar hade passerat. Att klockan stannade efter 44 timmar, 30 minuter beror på att den drivande vikten efter denna tid hade slut på utrymme att falla. Det är dock rimligt att anta att klockan hade drivits i 48 timmar om vikten fortsatt att falla. På grund av tidsbrist för ytterligare test kan detta dock inte säkerställas.

Figur 4.3 visar flykthjulets rörelse. Under fas 2 roterar flykthjulet 0.02 grader och i fas 5 ungefär 6 grader. Från modellen i CATIA V5 kan flykthjulets vinkeländring

under de faserna beräknas till ungefär 4 grader. Denna avvikelse kan ha uppstått på grund av felaktiga ekvationer, parametrar, eller andra faktorer. Att lösa detta problem kräver grundlig felsökning vilket skulle kunna göras i mån av mer tid.

Vid analys av Figur 4.3 observeras att en tands rörelse, från fas 1 till fas 6, tar ungefär 1.3 sekunder. I den analytiska modellen med anpassade parametrar rör sig tanden samma vinkel på två sekunder, vilket krävs för att uppnå en rotationstid på en minut. Orsakerna till det kan vara, och är antagligen många. Exempelvis kan felestimerade parametrar vara en bidragande orsak, en felkälla kan vara att antagandet att krafternas riktning tangentiellt med flykthjulets ytterradi i fas 2 och 5 är ett dåligt antagande.

6

Slutsatser

Detta projekt hade som mål att skapa en analytisk och en fysisk modell av en mekanisk pendelklocka i syfte att uppnå en djupare förståelse för den underliggande mekaniken, ett mål och syfte som har uppnåtts. Den analytiska modellen utvecklades med vissa förenklingar och antaganden för att möjliggöra en beräkningsmässig lösning. Den fysiska modellen testades noggrant utefter målsättningarna med avseende på kontinuerlig gångtid och felmarginal.

De huvudsakliga resultaten visade att den analytiska modellen kan representera faserna och pendelns rörelse på ett tillfredsställande sätt. Den fysiska modellen uppnådde målen avseende gångtid och felmarginal.

Genom projektets gång framkom det tydligt att friktion i hela klockan är den mest avgörande faktorn för att uppnå önskad noggrannhet. 3D-printade delar i PLA medförde en viss friktion, och det är möjligt att andra material hade kunnat prestera bättre i det avseendet.

En viktig lärdom från detta projekt var insikten om att mekaniska system snabbt blir mycket komplicerade när fler delar och rörliga komponenter inkluderas. Även en relativt enkel mekanism som en klocka innefattar många samverkande delar där varje del påverkar systemets totala prestanda. Små variationer och toleranser i enskilda komponenter kan få stora konsekvenser när de adderas genom hela mekanismen.

En annan viktig lärdom var behovet av en kompromiss mellan pendelns längd och drivkraftens storlek. En för lång pendel är opraktisk på grund av den stora drivande vikten som krävs för att övervinna friktionen och trögheten i systemet, samt att konstruktionen blir otymplig.

Sammanfattningsvis har de skapade modellerna för den mekaniska klockan nått de uppsatta målen. Trots detta finns det fortsatt utrymme för vidareutveckling och förbättringar för att skapa en ännu mer exakt, effektiv och tilltalande klocka.

Referenser

- [1] Margolis, Helen. *A brief history of timekeeping*. Physics World. 2018. <https://physicsworld.com/a/a-brief-history-of-timekeeping> (hämtad 2024-03-08).
- [2] Editors of Britannica. *Sundial*. 2023. <https://www.britannica.com/technology/sundial#ref752131> (hämtad 2024-01-23).
- [3] Mingren, Wu. "The Ancient Invention of the Water Clock". I: *Ancient Origins* (3 juli 2014). <https://www.ancient-origins.net/ancient-technology/ancient-invention-water-clock-001818> (hämtad 2024-02-08).
- [4] McFadden, Christopher. *The fascinating history of clocks; journey from analogs*. 2023. <https://interestingengineering.com/science/the-very-long-and-fascinating-history-of-clocks> (hämtad 2024-01-19).
- [5] Bellis, Mary. *The History of Mechanical Pendulum Clocks and Quartz Clocks*. 2018. <https://www.thoughtco.com/history-of-mechanical-pendulum-clocks-4078405> (hämtad 2024-01-19).
- [6] User:Dorieo, via Wikimedia Commons. *Klepsydra - Water Clock: Reconstruction of a clay original of the late 5th cent. B.C. Ancient Agora Museum in Athens. [Photograph]*. Aug. 2007. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:AGMA_Klepsydra_-_Water_Clock_1.JPG (hämtad 2024-05-06).
- [7] User:Rept0n1x, via Wikimedia Commons. *Cassiobury Park turret clock (1610) - bare working clock mechanism inside the British Museum, London [Photograph]*. Nov. 2009. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cassiobury_Park_turret_clock,_British_Museum.jpg (hämtad 2024-05-06).
- [8] The MathWorks Inc. *MATLAB version: 9.13.0 (R2022b)*. Natick, Massachusetts, United States, 2022. <https://www.mathworks.com>.
- [9] *CATIA*. Dassault Systèmes. latest version. <https://www.3ds.com/products-services/catia/>.
- [10] Altman, Sam. *OpenAI*. Dec. 2015. <https://openai.com> (hämtad 2024-05-03).
- [11] Jansson Per-Åke, Grahn Ragnar och Enelund Mikael. *Mekanik*. Studentlitteratur AB, Lund, 2019.
- [12] Karfo Justin, Liew Kenneth. *Who was George Graham?* Princeton Univeristy. 2009. <https://www.princeton.edu/~timeteam/graham.html> (hämtad 2024-03-26).
- [13] Petrangeli, Dr. Eng. Gianni. *MATHEMATICS OF A CLOCK ESCAPEMENT*. Maj 2017. <https://www.hsn161.com/HSN/Petrangeli.pdf> (hämtad 2024-04-01).
- [14] Mägi Mart, Melkersson Kjell och Evertsson Magnus. *Maskinelement*. Studentlitteratur AB, Lund, 2020.

- [15] Hessmer, Dr. Rainer. *Cycloidal Gear Builder*. 2003. <https://www.hessmer.org/gears/CycloidalGearBuilder.html> (hämtad 2024-05-07).
- [16] Headrick, Mark V. *CLOCK AND WATCH ESCAPEMENT MECHANICS*. 1997. <http://www.abbeyclock.com/EscMechanics.pdf> (hämtad 2024-04-26).

Bilagor

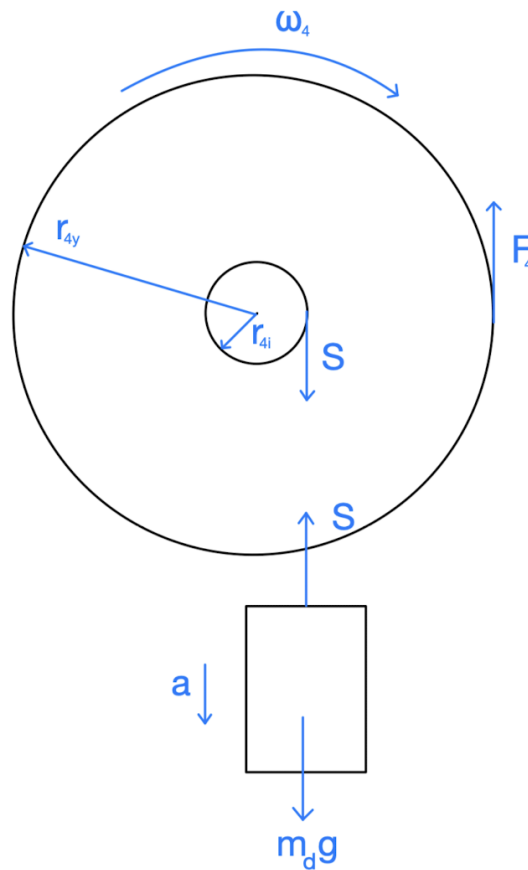
A Härledningar

A.1 Härledning av utväxlingens rörelseekvation

I följande bilaga härleds ekvationen för flykthjulets och utväxlingens sammantagna rörelse. Kugghjulen friläggs, se Figur A.2, och en rörelseekvation enligt (2.1) erhålls för varje hjul. Genom kinematiska samband kan de enskilda ekvationerna kopplas samman till en.

För denna härledning gäller följande:

- r_{jy} är ytterradien och r_{ji} innerradien för kugghjul nummer j , $j = 1, 2, \dots, 4$
- där $j = 1$ indikerar det kugghjul som sitter an mot flykthjulet och index 4 indikerar det sista kugghjulet varpå den fallande vikten är kopplad till. Index f indikerar flykthjulet.
- Positiv vinkel är definierad enligt högerhandsregeln, positiv moturs.
- Vinkelhastigheten benämns ω och vinkelaccelerationen $\dot{\omega}$.
- I_j är masströghetsmomentet för kugghjul j .



Figur A.1: Kugghjul 4 varpå vikten sitter.

Lagen för rörelsemängdsmomentet (2.1), ger för kugghjul 4

$$-Sr_{4i} + F_4r_{4y} = I_4\dot{\omega}_4 \quad (\text{A.1})$$

där S är snörkraften från den fallande vikten, F_4 är en resulterande kraft från kontakten med hjul 3, se Figur A.1. För den fallande vikten med massa m_d gäller att

$$S - m_d g = m_d a$$

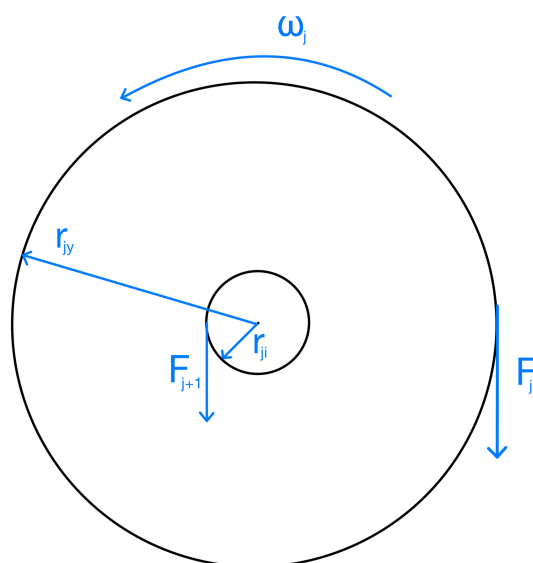
där accelerationen,

$$a = \dot{\omega}_4 r_{4i}.$$

Snörkraften kan då uttryckas som:

$$S = m_d(\dot{\omega}_4 r_{4i} + g) \quad (\text{A.2})$$

För kugghjul 3, se Figur A.2, gäller, enligt rörelsemängdsmomentlagen (2.1), att:



Figur A.2: Allmän principfigur för de krafter som verkar på kugghjul j , för kugghjul med udda index verkar krafterna, och roterar kugghjulet, enligt bilden. för de med jämt index roterar kugghjulet och verkar krafterna med motsatt riktning.

$$F_4 r_{3i} - F_3 r_{3y} = I_3 \dot{\omega}_3 \quad (\text{A.3})$$

där F_4 och F_3 är krafter som uppkommer i kontakt med kugghjul 4 respektive 2. På samma sätt som för kugghjul 3 fås rörelseekvationerna för 2 respektive 1 som:

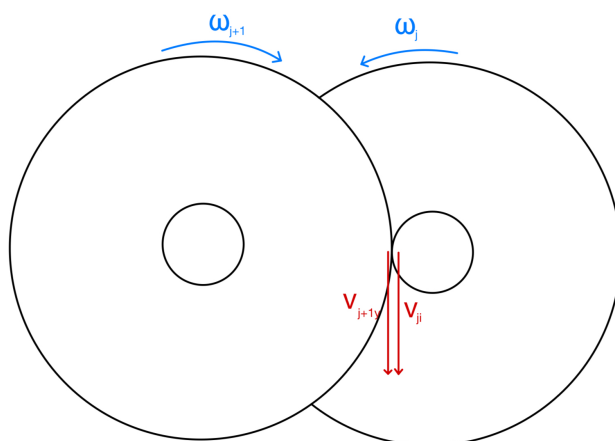
$$-F_3 r_{2i} + F_2 r_{2y} = I_2 \dot{\omega}_2 \quad (\text{A.4})$$

$$F_2 r_{1i} - F_1 r_{1y} = I_1 \dot{\omega}_1 \quad (\text{A.5})$$

De fyra självständiga rörelseekvationerna: [A.1](#), [A.3](#), [A.4](#) och [A.5](#) kan slås ihop givet att det finns kinematiska samband mellan dem. På grund av hur kugghjulen är kopplade till varandra måste två kugghjul som sitter ihop ha samma tangentiella hastighet V i kontaktpunkten, se Figur ???. På så sätt kan vinkelhastigheten och vinkelaccelerationen mellan två kugghjul relateras. För kugghjul 1 och 2 gäller:

$$\begin{aligned} V_{2y} &= V_{1i} \\ \Rightarrow -\omega_2 r_{2y} &= \omega_1 r_{1i} \end{aligned}$$

där minustecknet följer av definitionen av positiv riktning. Således kan vinkelhastigheten och vinkelaccelerationen för kugghjul 2 uttryckas som:



Figur A.3: Kinematik, hjul 1 och 2

$$\omega_2 = -\frac{r_{1i}}{r_{2y}}\omega_1 = -i_{12}\omega_1 \quad (\text{A.6a})$$

respektive

$$\dot{\omega}_2 = -i_{12}\dot{\omega}_1 \quad (\text{A.6b})$$

där i_{12} är utväxlingen uttryckt i ett radieförhållande. Samma utväxling fås då kvoten mellan antalet tänder används istället. På samma sätt kan vinkelhastigheten och vinkelaccelerationen för kugghjul 3 skrivas som en funktion av dem för kugghjul 1

$$\omega_3 = -\frac{r_{2i}}{r_{3y}}\omega_2 = \frac{r_{1i}r_{2i}}{r_{2y}r_{3y}}\omega_1 = i_{13}\omega_1 \quad (\text{A.7a})$$

$$\Rightarrow \dot{\omega}_3 = i_{13}\dot{\omega}_1 \quad (\text{A.7b})$$

och lika så för kugghjul 4

$$\omega_4 = -\frac{r_{3i}}{r_{4y}}\omega_3 = -\frac{r_{1i}r_{2i}r_{3i}}{r_{2y}r_{3y}r_{4y}}\omega_1 = -i_{14}\omega_1 \quad (\text{A.8a})$$

$$\Rightarrow \dot{\omega}_4 = -i_{14}\dot{\omega}_1 \quad (\text{A.8b})$$

Utväxlingsförhållandet mellan kugghjul j och 1 kan generellt uttryckas som:

$$\frac{r_{1i}\dots r_{j-1i}}{r_{2y}\dots r_{jy}} \quad (\text{A.9})$$

Ekvation (A.8) i A.1 ger,

$$-Sr_{4i} + F_4r_{4y} = I_4\dot{\omega}_4 \rightarrow -Sr_{4i} + F_4r_{4y} = -I_4(i_{14}\dot{\omega}_1) \quad (\text{A.10})$$

ekvation (A.7) i (A.3) ger

$$F_4r_{3i} - F_3r_{3y} = I_3\dot{\omega}_3 \rightarrow F_4r_{3i} - F_3r_{3y} = I_3(i_{13}\dot{\omega}_1) \quad (\text{A.11})$$

och ekvation (A.6) i (A.4) ger

$$-F_3 r_{2i} + F_2 r_{2y} = I_2 \dot{\omega}_2 \rightarrow -F_3 r_{2i} + F_2 r_{2y} = -I_2 (i_{12} \dot{\omega}_1) \quad (\text{A.12})$$

Med vinkelaccelerationer i ekvationerna (A.10), (A.11) och (A.12) uttryckta som $\dot{\omega}_1$ kan rörelseekvationerna succesivt adderas. På så sätt kan krafterna elimineras från uttrycken. Kvar blir en rörelseekvation med alla kugghjuls ingående trögheter, kraften från den fallande vikten samt den kraft F_1 som verkar på flykthjulet.

Lös ut F_2 ur ekvation (A.5) och (A.12):

$$F_2 = \frac{1}{r_{1i}} I_1 \dot{\omega}_1 + \frac{1}{r_{1i}} F_1 r_{1y} \quad (\text{A.13})$$

$$(\text{A.14})$$

$$-F_2 = -\frac{1}{r_{2y}} F_3 r_{2i} + \frac{1}{r_{2y}} I_2 (i_{12} \dot{\omega}_1) \quad (\text{A.15})$$

Vi kan sedan addera ekvationerna och bryta ut F_3 :

$$F_3 = \dot{\omega}_1 \left(\frac{r_{2y}}{r_{1i} r_{2i}} I_1 + \frac{1}{r_{2i}} I_2 i_{12} \right) + \frac{r_{1y} r_{2y}}{r_{1i} r_{2i}} F_1 \quad (\text{A.16})$$

Bryt ut F_3 ur ekvation (A.11)

$$-F_3 = \frac{1}{r_{3y}} I_3 (i_{13} \dot{\omega}_1) - \frac{1}{r_{3y}} F_4 r_{3i} \quad (\text{A.17})$$

och addera ekvation (A.16) med (A.17), och bryt ut F_4

$$F_4 = \dot{\omega}_1 \left(\frac{r_{2y} r_{3y}}{r_{1i} r_{2i} r_{3i}} I_1 + \frac{r_{3y}}{r_{2i} r_{3i}} I_2 i_{12} + \frac{1}{r_{3i}} I_3 i_{13} \right) + \frac{r_{1y} r_{2y} r_{3y}}{r_{1i} r_{2i} r_{3i}} F_1 \quad (\text{A.18})$$

Bryt ut F_4 ur ekvation (A.10):

$$-F_4 = -\frac{1}{r_{4y}} S r_{4i} + \frac{1}{r_{4y}} I_4 (i_{14} \dot{\omega}_1) \quad (\text{A.19})$$

och addera ekvationerna (A.18) och (A.19), och bryt ut F_1

$$\Rightarrow F_1 = -\dot{\omega}_1 \left(\frac{1}{r_{1y}} I_1 + \frac{r_{1i}}{r_{1y} r_{2y}} I_2 i_{12} + \frac{r_{1i} r_{2i}}{r_{1y} r_{2y} r_{3y}} I_3 i_{13} + \frac{r_{1i} r_{2i} r_{3i}}{r_{1y} r_{2y} r_{3y} r_{4y}} I_4 i_{14} + \frac{r_{1i} r_{2i} r_{3i} r_{4i}^2}{r_{1y} r_{2y} r_{3y} r_{4y}} i_{14} m_d \right) \quad (\text{A.20})$$

$$+ \frac{r_{1i} r_{2i} r_{3i} r_{4i}}{r_{1y} r_{2y} r_{3y} r_{4y}} m_d g \quad (\text{A.21})$$

Om det hjul som sitter på flykthjulets axel där kraften F_1 verkar i motsatt riktning den på hjul 1 kan vi eliminera kraften F_1 och erhålla en rörelseekvation för hela systemet. Notera att vi här inte tar hänsyn till kontaktkrafter som verkar mellan

pendeln och flykthjulet.

Utän hänsyn till flyktmekanismens inverkan kan flykthjulets rörelse beskrivas som:

$$-F_1 r_f = I_f \dot{\omega}_f \quad (\text{A.22})$$

där F_1 är kraften som uppstår i kontakten med kugghjul 1. Det kinematiska sambandet mellan flykthjulet och kugghjul 1 är:

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{r_f}{r_{1y}} \dot{\omega}_f \rightarrow \dot{\omega}_1 = -i_{f1} \dot{\omega}_f \quad (\text{A.23})$$

$$(\text{A.24})$$

Uppdateras ekvation (A.20) med det nya kinematiska sambandet (A.23) fås:

$$F_1 = \dot{\omega}_f \left(\frac{1}{r_{1y}} I_1 i_{f1} + \frac{r_{1i}}{r_{1y} r_{2y}} I_2 i_{f2} + \frac{r_{1i} r_{2i}}{r_{1y} r_{2y} r_{3y}} I_3 i_{f3} + \frac{r_{1i} r_{2i} r_{3i}}{r_{1y} r_{2y} r_{3y} r_{4y}} I_4 i_{f4} + \frac{r_{1i} r_{2i} r_{3i} r_{4i}^2}{r_{1y} r_{2y} r_{3y} r_{4y}} i_{f4} m_d \right) + \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{r_{1i} r_{2i} r_{3i} r_{4i}}{r_{1y} r_{2y} r_{3y} r_{4y}} m_d g \quad (\text{A.26})$$

Stoppa in uttrycket för F_1 ovan i flykthjulets rörelseekvation (A.22):

$$-\frac{r_f r_{1i} r_{2i} r_{3i} r_{4i}}{r_{1y} r_{2y} r_{3y} r_{4y}} m_d g \quad (\text{A.27})$$

$$= \dot{\omega}_f \left(I_f + \frac{r_f}{r_{1y}} I_1 i_{f1} + \frac{r_f r_{1i}}{r_{1y} r_{2y}} I_2 i_{f2} + \frac{r_f r_{1i} r_{2i}}{r_{1y} r_{2y} r_{3y}} I_3 i_{f3} + \frac{r_f r_{1i} r_{2i} r_{3i}}{r_{1y} r_{2y} r_{3y} r_{4y}} I_4 i_{f4} + \frac{r_f r_{1i} r_{2i} r_{3i} r_{4i}^2}{r_{1y} r_{2y} r_{3y} r_{4y}} i_{f4} m_d \right) \quad (\text{A.28})$$

Vi kan förenkla uttrycket genom att införa nya beteckningar för radiekvoterna.

$$\frac{r_f}{r_{1y}} i_{f1} = \left(\frac{r_f}{r_{1y}} \right)^2 = \lambda_1 \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{r_f r_{1i}}{r_{1y} r_{2y}} i_{f2} = \left(\frac{r_f r_{1i}}{r_{1y} r_{2y}} \right)^2 = \lambda_2 \quad (\text{A.30})$$

$$\frac{r_f r_{1i} r_{2i}}{r_{1y} r_{2y} r_{3y}} i_{f3} = \left(\frac{r_f r_{1i} r_{2i}}{r_{1y} r_{2y} r_{3y}} \right)^2 = \lambda_3 \quad (\text{A.31})$$

$$\frac{r_f r_{1i} r_{2i} r_{3i}}{r_{1y} r_{2y} r_{3y} r_{4y}} i_{f4} = \left(\frac{r_f r_{1i} r_{2i} r_{3i}}{r_{1y} r_{2y} r_{3y} r_{4y}} \right)^2 = \lambda_4 \quad (\text{A.32})$$

$$\frac{r_f r_{1i} r_{2i} r_{3i} r_{4i}^2}{r_{1y} r_{2y} r_{3y} r_{4y}} i_{f4} = \left(\frac{r_f r_{1i} r_{2i} r_{3i} r_{4i}}{r_{1y} r_{2y} r_{3y} r_{4y}} \right)^2 = \lambda_a \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{r_{1i} r_{2i} r_{3i} r_{4i} r_f}{r_{1y} r_{2y} r_{3y} r_{4y}} = \lambda_g \quad (\text{A.34})$$

Vi får då det slutgiltiga uttrycket för flykthjulets rörelse

$$-\lambda_g m_d g = \dot{\omega}_f (I_f + \lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \lambda_3 I_3 + \lambda_4 I_4 + \lambda_a m_d) \quad (\text{A.35})$$

Notera att:

$$\dot{\omega}_f = \ddot{\varphi} \quad (\text{A.36})$$

Inför ytterligare:

$$I_f + \lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \lambda_3 I_3 + \lambda_4 I_4 + \lambda_a m_d = \Lambda_I \quad (\text{A.37})$$

Således kan flykthjulets och utväxlingens sammantagna rörelse, utan dämpning och utan påverkan från ankaret i flyktmekanismen, beskrivas som:

$$-\lambda_g m_d g = \ddot{\varphi} \Lambda_I \quad (\text{A.38})$$

A.2 Härledning av hävarmarna l_{in} och l_{ut}

Hävarmen l_{in} för kraften F_{in} med avseende på pendelns rotationsaxel kunde härledas på följande sett utifrån geometrin i Figur 3.5, [11, s. 54].

Punkterna A , B och O_f har följande koordinater i x, y och z-riktningen.

$$A = \begin{bmatrix} -r_f \sin(\alpha) \\ r_f \cos(\alpha) - H \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -H \\ 0 \end{bmatrix}, \quad O_f = \begin{bmatrix} 0 \\ -H \\ 0 \end{bmatrix}, \quad O_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kraften F_{in} antas vara tangentiell med flykthjulets ytterradi r_f och är således ortogonal mot vektorn mellan mellan punkten O_f och A :

$$|\mathbf{F}_{in}| \perp |\overrightarrow{O_f A}| \Rightarrow \mathbf{F}_{in} = F_{in} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}$$

där F_{in} är kraftens storlek. Kraftens moment med avseende på O_p ges som:

$$M_A = |\overrightarrow{O_p A}| \times \vec{F}_{in} = \det \left(\begin{bmatrix} e_x & e_y & e_z \\ r_f \sin(\alpha) & -r_f \cos(\alpha) + H & 0 \\ F_{in} \cos(\alpha) & F_{in} \sin(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \right) = (0, 0, F_{in}(r_f - H \cos(\alpha)))$$

Där $\alpha = \alpha + \varphi$ och den sökta hävarmen vid fas 2 är $r_f - H \cos(\alpha)$. Med samma metod kan hävarmen l_{ut} från kraften F_{ut} med avseende på pendelns rotationsaxel beräknas.

För utgångsidan sidan finns det en ny punkt \mathbf{C} vilket visar koordinaterna för kontaktet vid fas 5:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -r_f \sin(\alpha') \\ r_f \cos(\alpha') - H \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kraften F_{ut} antas vara tangentiell med flykthjulets ytterradie r_f och är således ortogonal mot vektorn mellan mellan punkten O_f och C :

$$|\mathbf{F}_{ut}| \perp |\overrightarrow{O_f C}| \Rightarrow \mathbf{F}_{ut} = F_{ut} \begin{bmatrix} \cos(\alpha') \\ \sin(\alpha') \\ 0 \end{bmatrix}$$

där F_{ut} är kraftens storlek. Kraftens moment med avseende på O_p ges som:

$$M_C = |\overrightarrow{O_p C}| \times \vec{F}_{ut} = \det \left(\begin{bmatrix} e_x & e_y & e_z \\ r_f \sin(\alpha') & r_f \cos(\alpha') - H & 0 \\ F_{ut} \cos(\alpha') & F_{ut} \sin(\alpha') & 0 \end{bmatrix} \right) = (0, 0, F_{ut}(H \cos(\alpha') - r_f))$$

Hävarmen vid fas 5 är då: $H \cos(\alpha') - r_f$.

A.2.1 Härledning av tvångsekvationer

Följande vektorer \mathbf{v} och \mathbf{u} är detsamma oavsett vilket sida man befinner sig, den vektor som skiljer är \mathbf{w} på grund av att koordinaterna för kontaktpunkten vid fas 2 och 5 är detsamma:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} h \sin(\theta) \\ -h \cos(\theta) \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{e}_v = \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{v}| = h$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -H \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{e}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{u}| = H$$

A.3 Ingångssidans tvångsekvationer k_2^ϕ och $k_2^{\phi+\theta}$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -r \sin(\alpha) \\ r \cos(\alpha) - H \end{bmatrix} \quad |\mathbf{w}| = \sqrt{(-r \sin(\alpha))^2 + (r \cos(\alpha) - H)^2}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{w}| &= \sqrt{(r \sin(\alpha))^2 + (r \cos(\alpha) - H)^2} \\ &= \sqrt{r^2 \sin^2(\alpha) + r^2 \cos^2(\alpha) - 2rH \cos(\alpha) + H^2} \\ &= \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2} \end{aligned}$$

Skalärprodukten mellan vektorn \mathbf{u} och \mathbf{w} :

$$\begin{aligned}
 \phi : \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} &= w_x u_x + w_y u_y \\
 &= |\mathbf{w}| |\mathbf{u}| \cos(\phi) \rightarrow \\
 &= r \sin(\alpha) \cdot 0 + (r \cos(\alpha) - H)(-H) = H^2 - rH \cos(\alpha) \rightarrow \\
 |\mathbf{w}| |\mathbf{u}| &= H \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2} \\
 H^2 - rH \cos(\alpha) &= H \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2} \cdot \cos(\phi) \\
 \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2} \cdot \cos(\phi) + r \cos(\alpha) - H &= 0 \quad (f_2^\phi)
 \end{aligned}$$

Där andra derivatan av f_2^ϕ blev den resulterande tvångsekvationen:

$$\frac{dk_2^\phi}{dt} :$$

$$\frac{\dot{\alpha} H r \sin(\alpha) \cos(\phi)}{\sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2}} - \dot{\phi} \sin(\phi) \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2} - \dot{\alpha} r \sin(\alpha) = 0$$

(A.39)

$$\frac{d^2 k_2^\phi}{dt^2} :$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{\ddot{\alpha} H r \sin(\alpha) \cos(\phi)}{\sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2}} - \frac{\dot{\alpha} \dot{\theta} H r \sin(\alpha) \sin(\phi)}{\sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2}} + \frac{\dot{\alpha}^2 H r \cos(\alpha) \cos(\phi)}{\sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2}} - \\
 &\frac{\dot{\alpha}^2 H^2 r^2 \sin^2(\alpha) \cos(\phi)}{(r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\dot{\alpha} \dot{\phi} H r \sin(\alpha) \sin(\phi)}{\sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2}} \\
 &- \ddot{\phi} \sin(\phi) \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2} - \dot{\phi}^2 \cos(\phi) \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2} \\
 &- \ddot{\alpha} r \sin(\alpha) - \dot{\alpha}^2 r \cos(\alpha) = 0
 \end{aligned}$$

(A.40)

Skalär produkten mellan vektorn \mathbf{w} och \mathbf{v} :

$$\begin{aligned}
 \phi + \theta : \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} &= w_x v_x + w_y v_y \\
 &= |\mathbf{w}| |\mathbf{v}| \cos(\phi + \theta) \rightarrow \\
 &= r \sin(\alpha) h \sin(\theta) + (r \cos(\alpha) - H)(-h \cos(\theta)) = \\
 &= -r \sin(\alpha) h \sin(\theta) + hH \cos(\theta) - hr \cos(\alpha) \cos(\theta) = \\
 &= hH \cos(\theta) - hr(\sin(\alpha) \sin(\theta) + \cos(\alpha) \cos(\theta)) = \\
 &= hH \cos(\theta) - hr \cos(\alpha - \theta) \\
 |\mathbf{w}| |\mathbf{v}| &= h \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2} \rightarrow \\
 hH \cos(\theta) - hr \cos(\alpha - \theta) &= h \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2} \cdot \cos(\phi + \theta) \\
 \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2} \cdot \cos(\phi + \theta) + r \cos(\alpha - \theta) - H \cos(\theta) &= 0 \quad (f_2^{\phi+\theta})
 \end{aligned}$$

Där andra derivatan av $k_2^{\phi+\theta}$ blev den resulterande tvångsekvationen:

$$\frac{dk_2^{\phi+\theta}}{dt}:$$

$$\begin{aligned} & \frac{\dot{\alpha}Hr \sin(\alpha) \cos(\theta + \phi)}{\sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2}} - \dot{\theta} \sin(\theta + \phi) \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2} \\ & - \dot{\theta} \sin(\theta + \phi) \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2} \\ & - \dot{\alpha}r \sin(\alpha - \theta) + \dot{\theta}r \sin(\alpha - \theta) + \dot{\theta} \sin(\theta) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

$$\frac{d^2k_2^{\phi+\theta}}{dt^2}:$$

$$\begin{aligned} & \frac{\ddot{\alpha}Hr \sin(\alpha) \cos(\phi + \theta)}{\sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2}} - \frac{\dot{\alpha}Hr \sin(\alpha) \sin(\phi + \theta) * (\dot{\phi} + \dot{\theta})}{\sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2}} + \frac{\dot{\alpha}^2 Hr \cos(\alpha) \cos(\phi + \theta)}{\sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2}} \\ & - \frac{\dot{\alpha}^2 H^2 r^2 \sin^2(\alpha) \cos(\phi + \theta)}{(r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\dot{\alpha}Hr \sin(\alpha) \sin(\phi + \theta)}{\sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2}} \\ & - \ddot{\phi} \sin(\phi + \theta) \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2} - \ddot{\theta} \sin(\phi + \theta) \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2} \\ & - (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 \cos(\phi + \theta) \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha) + H^2} + \ddot{\theta}r \sin(\alpha - \theta) - \ddot{\alpha}r \sin(\alpha - \theta) \\ & - r(\dot{\alpha} - \dot{\theta})^2 \cos(\alpha - \theta) + \ddot{\theta}H \sin(\theta) + \dot{\theta}^2 H \cos(\theta) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

A.4 Utgångssidans tvångsekvationer $k_5^{\beta+\theta}$ och k_5^β

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} r \sin(\alpha') \\ r \cos(\alpha') - H \end{bmatrix} \quad |\mathbf{w}| = \sqrt{(r \sin(\alpha'))^2 + (r \cos(\alpha') - H)^2}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{w}| &= \sqrt{(r \sin(\alpha'))^2 + (r \cos(\alpha') - H)^2} \\ &= \sqrt{r^2 \sin^2(\alpha') + r^2 \cos^2(\alpha') - 2rH \cos(\alpha') + H^2} \\ &= \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha') + H^2} \end{aligned}$$

Skalär produkten mellan vektorn \mathbf{w} och \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} \beta + \theta : \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} &= w_x v_x + w_y v_y \\ &= |\mathbf{w}| |\mathbf{v}| \cos(\theta + \beta) \rightarrow \\ & (h \sin(\theta))(r \sin(\alpha')) + (-h \cos(\theta))(r \cos(\alpha') - H) = \\ & h \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha') + H^2} \cdot \cos(\beta + \theta) \rightarrow \\ & r \sin(\theta) \sin(\alpha') + H \cos(\theta) - r \cos(\theta) \cos(\alpha') = \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha') + H^2} \rightarrow \\ & H \cos(\theta) - r \cos(\theta + \alpha') \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha') + H^2} \cdot \cos(\beta + \theta) = 0 \quad (f_5^{\beta+\theta}) \end{aligned}$$

Där andra derivatan av $k_5^{\beta+\theta}$ blev den resulterande tvångsekvationen:

$$\frac{d^2 k_5^{\beta+\theta}}{dt_2}:$$

$$\begin{aligned} & \frac{2\ddot{\alpha}' Hr \sin(\alpha')(\dot{\beta} + \dot{\theta}) \sin(\beta + \theta)}{\sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha') + H^2}} + \frac{\ddot{\alpha}' Hr \sin(\alpha') \cos(\beta + \theta)}{\sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha') + H^2}} + \frac{\dot{\alpha}'^2 Hr \cos(\alpha') \cos(\beta + \theta)}{\sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha') + H^2}} - \\ & \frac{\dot{\alpha}'^2 H^2 r^2 \sin^2(\alpha') \cos(\beta + \theta)}{(r^2 - 2rH \cos(\alpha') + H^2)^{\frac{3}{2}}} - r(\dot{\alpha}' + \dot{\beta})^2 \cdot \cos(\alpha' + \theta) - \ddot{\alpha}' r \sin(\alpha' + \theta) - \ddot{\theta} r \sin(\alpha' + \theta) \\ & - (\dot{\beta} + \dot{\theta})^2 \cos(\beta + \theta) \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha') + H^2} - \ddot{\beta} \sin(\beta + \theta) \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha') + H^2} \\ & - \ddot{\theta} \sin(\beta + \theta) \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha') + H^2} + \dot{\theta}^2 H \cos(\theta) + \ddot{\theta} H \sin(\theta) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Skalär produkten mellan vektorn \mathbf{u} och \mathbf{w} :

$$\begin{aligned} \beta : \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} &= w_x u_x + w_y u_y \\ &= |\mathbf{w}| |\mathbf{u}| \cos(\beta) \rightarrow \\ (-H)(r \cos(\alpha') - H) &= H \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha') + H^2} \cdot \cos(\beta) \rightarrow \\ H^2 - rH \cos(\alpha') &= H \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha') + H^2} \cdot \cos(\beta) \rightarrow \\ H - r \cos(\alpha') &= \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha') + H^2} \cdot \cos(\beta) \rightarrow \\ \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha') + H^2} \cdot \cos(\beta) &+ r \cos(\alpha') - H = 0 \quad (f_5^\beta) \end{aligned}$$

Där andra derivatan av k_5^β blev den resulterande tvångsekvationen:

$$\frac{d^2 k_5^\beta}{dt_2}:$$

$$\begin{aligned} & \frac{\ddot{\alpha}' Hr \sin(\alpha') \cos(\beta)}{\sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha') + H^2}} - \frac{\dot{\alpha}' \dot{\beta} Hr \sin(\alpha') \sin(\beta)}{\sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha') + H^2}} + \frac{\dot{\alpha}'^2 Hr \cos(\alpha') \cos(\beta)}{\sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha') + H^2}} - \\ & \frac{\dot{\alpha}'^2 H^2 r^2 \sin^2(\alpha') \cos(\beta)}{(r^2 - 2rH \cos(\alpha') + H^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\dot{\alpha}' \dot{\beta} Hr \sin(\alpha') \sin(\beta)}{\sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha') + H^2}} \\ & - \ddot{\beta} \sin(\beta) \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha') + H^2} - \dot{\beta}^2 \cos(\beta) \sqrt{r^2 - 2rH \cos(\alpha') + H^2} \\ & - \ddot{\alpha}' r \sin(\alpha') - \dot{\alpha}'^2 r \cos(\alpha') = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

B Matlabskript

B.1 Anpassade parametrar

```
clear; clc; close all

% *****
% Titel: Konstruktion och tillverking av en klocka med fokus
% pa klassisk mekanik
% Datum: May 8, 2024
```

```
% Chalmers tekniska hogskola
% Copyright (c) 2024 [GRUPP: MMSX21-VT24-06]
%
% Denna MATLAB-kod ar en del av Kandidatarbetet inom
  Maskinteknik med titeln
% "Konstruktion och tillverkning av en klocka med fokus pa
  klassisk mekanik",
% forfattad av samma grupp som i Kandidatarbetet vid
  Chalmers tekniska hogskola.
% Om du anv nder eller anpassar denna kod maste du citera
  arbetet i enlighet med detta.
% *****
% BASERAD PA INNRE RADIUS AV FLYKTHJULET FRAN CATIA V5

clear all
clc
% Global input
md = 5;           % Drivande viktens massa [kg]
g = 9.81;        % Gravitationskonstant [m/s^2]
H = 113.137e-3; % Avstand mellan pendel- och flykthjulets
  rotationsaxel
r = 80e-3;       % Flykthjulets radius

% Initial alpha-v rden
a0 = deg2rad(47);
a0p = deg2rad(43);

% Pendelns input
mp = 0.6;        % massa [kg]
h = 0.68;        % Avstand mellan pendelns rotationsaxel
  och tyngdpunkten
cp = 1e-5;
Ip = calc_Ip(h);

% Transmission input parametrar
[I0 ,c0 ,r0] = flykthjul;
[I1 ,c1 ,r1i ,r1y] = kugg1;
[I2 ,c2 ,r2i ,r2y] = kugg2;
[I3 ,c3 ,r3i ,r3y] = kugg3;
[I4 ,c4 ,r4i ,r4y] = kugg4;

% Utvarling
[lam1 ,lam2 ,lam3 ,lam4 ,lama ,lamg] = Lambda(r0 , r1i , r1y , r2i , r2y ,
  r3i , r3y , r4i , r4y);
```

```

% Dampning och troghetskoefficienter
[c_coeff, I_coeff] = coeff(c0, c1, c2, c3, c4, I0, I1, I2, I3, I4, lam1
    , lam2, lam3, lam4, lama, md);

% Initiala villkor
theta0 = deg2rad(2.1); theta_dot0 = 0; phi0 = 0; phi_dot0 =
    0;
u_init = [theta0, theta_dot0, phi0, phi_dot0, 0, 0];

phi0 = deg2rad(44.966); % Fran CATIA V5
beta0 = deg2rad(44.964);

tnow = 0; tend = 3; % Start och slut tid
tspan = [tnow, tend];

state = 1;

c_coeff=0.00475; % Dampning fran 'Dampningskoefficienttest'
    i Kapitel 3
%% Lagra vardena i arrayer
U = [];
T = [];
UE = [];
TE = [];

%% Los ekvationssystem
colors = {'b', 'r', 'g', 'm', [0.5,0,0.5], 'c'};
legend_labels = {'Fas_1', 'Fas_2', 'Fas_3', 'Fas_4', 'Fas_5',
    , 'Fas_6'};

while tnow<tend

    % Options (events & step-size)
    options = odeset('events', @(t,u) event(t,u,state,theta0
        ), 'MaxStep', 0.01, 'Refine', 3);
    u_init;
    [t,u,te,ue,ie] = ode45(@(t, u) model(t, u, state, Ip,
        c_coeff, cp, I_coeff, a0, a0p, h, md, mp, g, H, r,
        lamg),tspan, u_init, options);

    if state == 2
        u(1,3)
        u(end,3)
    end
end

```

```
% Om  $u(2) > 12\text{deg} - 1$  tand har passerat
if abs(u(end,3)) >=abs(deg2rad(12))
    u(end,3) = 0;
end

% I tillstand 1 eller 4 - r flykthjulet l st
if state == 1 || state == 4
    u(:,4) = zeros(length(u(:,4)),1);
end

% Spara losningen i globala vektorer
U = [U; u];
T = [T; t];
UE = [UE; ue];
TE = [TE; te];

% Uppdatera tspan
tnow = t(end); tspan = [tnow, tend];

% Byta fas
if state == 6
    state = 1;
else
    state = state + 1;
end

% Initial vilkor f r n sta tillst nd
if state == 1
    u_init = [u(end,1), u(end,2), 0, 0, 0, 0];
elseif state == 2
    u_init = [u(end,1), u(end,2), u(end,3), u(end,4),
        phi0, 0];
elseif state == 5
    u_init = [u(end,1), u(end,2), u(end,3), u(end,4),
        beta0, 0];
else
    u_init = [u(end,1), u(end,2), u(end,3), u(end,4), 0,
        0];
end

% Konvertera (rad) till mer synlig (grader)
theta = rad2deg(u(:,1));
varphi = rad2deg(u(:,3));

% Plotta inuti loopen
figure(1)
```

```

subplot(2,1,1)
plot(t,theta,'-', 'linewidth', 2,'Color', colors{state})
title('Pendelns vinkel\''over tid', 'Interpreter', '
    latex', 'FontSize', 14)
xlabel('T[s]', 'Interpreter', 'latex')
ylabel('$\theta$[grad]', 'Interpreter', 'latex')
hold on

subplot(2,1,2)
plot(t,abs(varphi),'-', 'linewidth', 2, 'Color', colors{
    state})
title('Flykthjulets vinkel\''over tid', 'Interpreter', '
    latex', 'FontSize', 14)
ylabel('$\varphi$[grad]', 'Interpreter', 'latex')
xlabel('T[s]', 'Interpreter', 'latex')
hold on
% Add legend
legend(legend_labels);
end

function [check,isterminal,direction] = event(t,u,state,
theta0)

    switch state
        % deg2rad vardena ar fran CATIA V5 for
        de olika fasern
        case 1
            check = u(1) + deg2rad(0.911);
            isterminal = 1;
            direction = -1;

        case 2
            check = u(1) + deg2rad(1.943);
            isterminal = 1;
            direction = -1;

        case 3
            check = u(1) + theta0*0.99;
            isterminal = 1;
            direction = -1;

        case 4
            check = u(1) - deg2rad(0.961);
            isterminal = 1;
            direction = 1;
    end

```



```
f2 = [-lamg*md*g/r - mp*g*h*sin(u1)/(-H*cos2 + r
) - cp*u2/(-H*cos2 + r) - c_coeff*u4/r;
u2;
u4;
u6;
u4*u6*H*r*sin(a0+u3)*sin(u5)/sqrt(D2) - (
u4^2)*H*r*cos(a0+u3)*cos(u5)/sqrt(D2) +
(u4^2)*(H^2)*(r^2)*(sin(a0+u3)^2)*cos(
u5)/((D2)^(3/2)) + u4*u6*H*r*sin(a0+u3)
*sin(u5)/sqrt(D2) + (u6^2)*cos(u5)*sqrt
(D2) + (u4^2)*r*cos(a0+u3);
(u4*(-2)*(-H*r*sin(a0+u3)*(u6+u2)*sin(u5+u1
)))/sqrt(D2) + (-1)*(u4^2)*(((-(H^2)*(r
^2))*sin(a0+u3)*cos(u1+u5))/(D2^(3/2)) +
(H*r*cos(a0+u3)*cos(u1+u5))/(sqrt(D2)))
+ (-1)*((u6 + u2)^2)*(-cos(u1+u5)*sqrt(
D2)) + (-1)*((u4-u2)^2)*(-cos(a0+u3-u1)*
r) + (-1)*(u2^2)*H*cos(u1)];
dudt = m2\f2;
```

```
case 3 % Frispelet
```

```
dudt = [u2;
-mp*g*h*sin(u1)/Ip - cp*u2/Ip;
u4;
-u4*c_coeff/I_coeff - lamg*md*g/I_coeff;
0;
0];
```

```
case 4 % Flykthjulet i stopp (lockphase)
```

```
dudt = [u2;
-mp*g*h*sin(u1)/Ip - cp*u2/Ip;
0;
0;
0;
0];
```

```
case 5 % Utgaende pallet sida
```

```
cos5=cos(a0p + u3);
D5=r^2-2*r*H*cos5+H^2;
```

```
m5 = [0, -Ip/(H*cos5 - r), 0, I_coeff/r, 0, 0;
1, 0, 0, 0, 0, 0;
0, 0, 1, 0, 0, 0;
0, 0, 0, 0, 1, 0;
```

```

0, 0, 0, -H*r*sin(a0p-u3)*cos(u5)/sqrt(D5)
+ r*sin(a0p-u3), 0, -sin(u5)*sqrt(D5);
0, H*sin(u1) - r*sin(a0p-u3+u1) - sin(u5+
u1)*sqrt(D5), 0, -H*r*sin(a0p-u3)*cos(
u5+u1)/sqrt(D5) + r*sin(a0p-u3+u1), 0,
-sin(u5+u1)*sqrt(D5)];

f5 = [-lamg*md*g/r + mp*g*h*sin(u1)/(H*cos5 - r)
+ cp*u2/(H*cos5 - r) - c_coeff*u4/r;
u2;
u4;
u6;
-u4*u6*H*r*sin(a0p-u3)*sin(u5)/sqrt(D5) - (
u4^2)*H*r*cos(a0p-u3)*cos(u5)/sqrt(D5) +
(u4^2)*(H^2)*(r^2)*(sin(a0p-u3)^2)*cos(
u5)/((D5)^(3/2)) - u4*u6*H*r*sin(a0p-u3)
*sin(u5)/sqrt(D5) + (u6^2)*cos(u5)*sqrt(
D5) + (u4^2)*r*cos(a0p-u3);
(-2*u4*H*r*sin(a0p-u3)*(u6+u2)*sin(u5+u1))/
sqrt(D5) - (u4^2)*r*H*cos(a0p-u3)*cos(u5
+u1)/sqrt(D5) + (u4^2)*(H^2)*(r^2)*(sin(
a0p-u3)^2)*cos(u1+u5)/((D5)^(3/2)) + r
*((-u4+u2)^2)*cos(a0p-u3+u1) + ((u6+u2)
^2)*cos(u1+u5)*sqrt(D5) - (u2^2)*H*cos(
u1)];

dudt = m5\f5;

case 6      % Frispelet
dudt = [u2;
-mp*g*h*sin(u1)/Ip - cp*u2/Ip;
u4;
-u4*c_coeff/I_coeff - lamg*md*g/I_coeff;
0;
0];

end
end

```

B.2 Fysiska modellens parametrar

```

clear; clc; close all

% *****

```

```
% Titel: Konstruktion och tillverking av en klocka med fokus
% pa klassisk mekanik
% Datum: May 8, 2024
% Chalmers tekniska hogskola
% Copyright (c) 2024 [GRUPP: MMSX21-VT24-06]
%
% Denna MATLAB-kod ar en del av Kandidatarbetet inom
% Maskinteknik med titeln
% "Konstruktion och tillverkning av en klocka med fokus pa
% klassisk mekanik",
% forfattad av samma grupp som i Kandidatarbetet vid
% Chalmers tekniska hogskola.
% Om du anv nder eller anpassar denna kod maste du citera
% arbetet i enlighet med detta.
% *****
% BASERAD PA INNRE RADIUS AV FLYKTHJULET FRAN CATIA V5
clear all
clc

% Global input
md = 15.05;           % Drivande viktens massa [kg]
g = 9.81;            % Gravitationskonstant [m/s^2]
H = 113.137e-3;     % Avstand mellan pendel- och flykthjulets
% rotationsaxel
r = 80e-3;          % Flykthjulets radius

% Initial alpha-v rden
a0 = deg2rad(47);
a0p = deg2rad(43);

% Pendelns input
mp = 0.418;         % massa [kg]
h = 0.865;         % Avstand mellan pendelns rotationsaxel
% och tyngdpunkten
cp = 1e-5;
Ip = 0.18;

% Transmission input parametrar
[I0 ,c0 ,r0] = flykthjul;
[I1 ,c1 ,r1i ,r1y] = kugg1;
[I2 ,c2 ,r2i ,r2y] = kugg2;
[I3 ,c3 ,r3i ,r3y] = kugg3;
[I4 ,c4 ,r4i ,r4y] = kugg4;

% Utvaxling
```

```

[lam1 , lam2 , lam3 , lam4 , lama , lamg ] = Lambda( r0 , r1i , r1y , r2i , r2y ,
    r3i , r3y , r4i , r4y );

% Dampning och troghetskoefficienter
[c_coeff , I_coeff ] = coeff( c0 , c1 , c2 , c3 , c4 , I0 , I1 , I2 , I3 , I4 , lam1
    , lam2 , lam3 , lam4 , lama , md );

% Initiala villkor
theta0 = deg2rad( 2.1 ); theta_dot0 = 0; phi0 = 0; phi_dot0 =
    0;
u_init = [ theta0 , theta_dot0 , phi0 , phi_dot0 , 0 , 0 ];

phi0 = deg2rad( 44.966 ); % Fran CATIA V5
beta0 = deg2rad( 44.964 );

tnow = 0; tend = 3; % Start och slut tid
tspan = [ tnow , tend ];

state = 1;

c_coeff = 0.00475; % Dampning fr n 'Dampningskoefficienttest'
    i Kapitel 3
I_coeff = 6.6359e-4;
%% Lagra vardena i arrayer
U = [];
T = [];
UE = [];
TE = [];

%% Los ekvationssystem
colors = { 'b' , 'r' , 'g' , 'm' , [ 0.5 , 0 , 0.5 ] , 'c' };
legend_labels = { 'Fas_1' , 'Fas_2' , 'Fas_3' , 'Fas_4' , 'Fas_5'
    , 'Fas_6' };

while tnow < tend

    % Options (events & step-size)
    options = odeset( 'events' , @( t , u ) event( t , u , state , theta0
        ) , 'MaxStep' , 0.01 , 'Refine' , 3 );
    u_init;
    [ t , u , te , ue , ie ] = ode45( @( t , u ) model( t , u , state , Ip ,
        c_coeff , cp , I_coeff , a0 , a0p , h , md , mp , g , H , r ,
        lamg ) , tspan , u_init , options );

    if state == 2

```

```
    u(1,3)
    u(end,3)
end

% Om u(2)>12deg - 1 tand har passerat
if abs(u(end,3))>=abs(deg2rad(12))
    u(end,3) = 0;
end

% I tillst nd 1 eller 4 - r flykthjulet l st
if state == 1 || state == 4
    u(:,4) = zeros(length(u(:,4)),1);
end

% Spara l sningen i globala vektorer
U = [U; u];
T = [T; t];
UE = [UE; ue];
TE = [TE; te];

% Uppdatera tspan
tnow = t(end); tspan = [tnow, tend];

% Byta fas
if state == 6
    state = 1;
else
    state = state + 1;
end

% Initial vilkor f r n sta tillst nd
if state == 1
    u_init = [u(end,1), u(end,2), 0, 0, 0, 0];
elseif state == 2
    u_init = [u(end,1), u(end,2), u(end,3), u(end,4),
              phi0, 0];
elseif state == 5
    u_init = [u(end,1), u(end,2), u(end,3), u(end,4),
              beta0, 0];
else
    u_init = [u(end,1), u(end,2), u(end,3), u(end,4), 0,
              0];
end

% Konvertera (rad) till mer synlig (grader)
```

```

theta = rad2deg(u(:,1));
varphi = rad2deg(u(:,3));

% Plotta inuti loopen
figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(t,theta,'-', 'linewidth', 2, 'Color', colors{state})
title('Fysiska parametrar: Pendelns vinkel\' over tid',
      'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14)
xlabel('T[s]', 'Interpreter', 'latex')
ylabel('$\theta$[grad]', 'Interpreter', 'latex')
hold on

subplot(2,1,2)
plot(t,abs(varphi),'-', 'linewidth', 2, 'Color', colors{
state})
title('Fysiska parametrar: Flykthjulets vinkel\' over
tid', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14)
ylabel('$\varphi$[grad]', 'Interpreter', 'latex')
xlabel('T[s]', 'Interpreter', 'latex')
hold on
% Add legend
legend(legend_labels);
end

function [check, isterminal, direction] = event(t,u,state,
theta0)

switch state
    % deg2rad vardena ar fran CATIA V5 for
    % de olika fasern
    case 1
        check = u(1) + deg2rad(0.911);
        isterminal = 1;
        direction = -1;

    case 2
        check = u(1) + deg2rad(1.943);
        isterminal = 1;
        direction = -1;

    case 3
        check = u(1) + theta0*0.99;
        isterminal = 1;
        direction = -1;

```

```

    case 4
    check = u(1) - deg2rad(0.961);
    isterminal = 1;
    direction = 1;

    case 5
    check = u(1) - deg2rad(1.795);
    isterminal = 1;
    direction = 1;

    case 6
    check = u(3) + deg2rad(12);
    isterminal = 1;
    direction = -1;
end

end

function dudt = model(t, u, state, Ip, c_coeff, cp, I_coeff,
    a0, a0p, h, md, mp, g, H, r, lamg)

u1=u(1); u2=u(2); u3=u(3); u4=u(4); u5=u(5); u6=u(6);

switch state

    case 1    % Flykthjulet i stopp (lockphase)
        dudt = [u2;
                -mp*g*h*sin(u1)/Ip - cp*u2/Ip;
                0;
                0;
                0;
                0];

    case 2    % Ingaende pallet sida
        cos2=cos(a0 + u3);
        D2=r^2 - 2*r*H*cos2 + H^2;

        m2 = [0, Ip/(-H*cos2 + r), 0, I_coeff/r, 0, 0;
              1, 0, 0, 0, 0, 0;
              0, 0, 1, 0, 0, 0;
              0, 0, 0, 0, 1, 0;
              0, 0, 0, H*r*sin(a0+u3)*cos(u5)/sqrt(D2) -
                r*sin(a0+u3), 0, -sin(u5)*sqrt(D2);

```

```

0, -sin(u5+u1)*sqrt(D2) + r*sin(a0+u3-u1)
+ H*sin(u1), 0, (H*r*sin(a0+u3)*cos(u5+
u1))/sqrt(D2) - r*sin(a0+u3-u1), 0, -
sin(u5+u1)*sqrt(D2)];

f2 = [-lamg*md*g/r - mp*g*h*sin(u1)/(-H*cos2 + r
) - cp*u2/(-H*cos2 + r) - c_coeff*u4/r;
u2;
u4;
u6;
u4*u6*H*r*sin(a0+u3)*sin(u5)/sqrt(D2) - (
u4^2)*H*r*cos(a0+u3)*cos(u5)/sqrt(D2) +
(u4^2)*(H^2)*(r^2)*(sin(a0+u3)^2)*cos(
u5)/((D2)^(3/2)) + u4*u6*H*r*sin(a0+u3)
*sin(u5)/sqrt(D2) + (u6^2)*cos(u5)*sqrt
(D2) + (u4^2)*r*cos(a0+u3);
(u4*(-2)*(-H*r*sin(a0+u3)*(u6+u2)*sin(u5+u1
)))/sqrt(D2) + (-1)*(u4^2)*(((-(H^2)*(r
^2))*sin(a0+u3)*cos(u1+u5))/(D2^(3/2)) +
(H*r*cos(a0+u3)*cos(u1+u5))/sqrt(D2)))
+ (-1)*((u6 + u2)^2)*(-cos(u1+u5)*sqrt(
D2)) + (-1)*((u4-u2)^2)*(-cos(a0+u3-u1)*
r) + (-1)*(u2^2)*H*cos(u1)];
dudt = m2\f2;

case 3 % Frispelet
dudt = [u2;
-mp*g*h*sin(u1)/Ip - cp*u2/Ip;
u4;
-u4*c_coeff/I_coeff - lamg*md*g/I_coeff;
0;
0];

case 4 % Flykthjulet i stopp (lockphase)
dudt = [u2;
-mp*g*h*sin(u1)/Ip - cp*u2/Ip;
0;
0;
0;
0];

case 5 % Utgaende pallet sida
cos5=cos(a0p + u3);
D5=r^2-2*r*H*cos5+H^2;

```

```

m5 = [0, -Ip/(H*cos5 - r), 0, I_coeff/r, 0, 0;
      1, 0, 0, 0, 0, 0;
      0, 0, 1, 0, 0, 0;
      0, 0, 0, 0, 1, 0;
      0, 0, 0, -H*r*sin(a0p-u3)*cos(u5)/sqrt(D5)
      + r*sin(a0p-u3), 0, -sin(u5)*sqrt(D5);
      0, H*sin(u1) - r*sin(a0p-u3+u1) - sin(u5+
      u1)*sqrt(D5), 0, -H*r*sin(a0p-u3)*cos(
      u5+u1)/sqrt(D5) + r*sin(a0p-u3+u1), 0,
      -sin(u5+u1)*sqrt(D5)];

f5 = [-lamg*md*g/r + mp*g*h*sin(u1)/(H*cos5 - r)
      + cp*u2/(H*cos5 - r) - c_coeff*u4/r;
      u2;
      u4;
      u6;
      -u4*u6*H*r*sin(a0p-u3)*sin(u5)/sqrt(D5) - (
      u4^2)*H*r*cos(a0p-u3)*cos(u5)/sqrt(D5) +
      (u4^2)*(H^2)*(r^2)*(sin(a0p-u3)^2)*cos(
      u5)/((D5)^(3/2)) - u4*u6*H*r*sin(a0p-u3)
      *sin(u5)/sqrt(D5) + (u6^2)*cos(u5)*sqrt(
      D5) + (u4^2)*r*cos(a0p-u3);
      (-2*u4*H*r*sin(a0p-u3)*(u6+u2)*sin(u5+u1))/
      sqrt(D5) - (u4^2)*r*H*cos(a0p-u3)*cos(u5
      +u1)/sqrt(D5) + (u4^2)*(H^2)*(r^2)*(sin(
      a0p-u3)^2)*cos(u1+u5)/((D5)^(3/2)) + r
      *((-u4+u2)^2)*cos(a0p-u3+u1) + ((u6+u2)
      ^2)*cos(u1+u5)*sqrt(D5) - (u2^2)*H*cos(
      u1)];

dudt = m5\f5;

case 6      % Frispelet
dudt = [u2;
      -mp*g*h*sin(u1)/Ip - cp*u2/Ip;
      u4;
      -u4*c_coeff/I_coeff - lamg*md*g/I_coeff;
      0;
      0];

end
end

```

Resterande kod används i båda [B.1](#) och [B.2](#), de kallas in i kodfilerna ovan

```
function [I1 ,c1 ,r1i ,r1y] = kugg1
%properties of kugghjul no 1

I1 = 5e-4; %masstroghet [kgm^2]
c1 = 1e-5; %dampningskonstant [kgm^2/s]
r1i = 22e-3; %innerradie [m]
r1y = 150e-3; %ytterradie [m]
end
```

```
function [I2 ,c2 ,r2i ,r2y] = kugg2
%properties of kugghjul no 2

I2 = 5e-4; %masstroghet [kgm^2]
c2 = 1e-5; %dampningskonstant [kgm^2/s]
r2i = 30e-3; %innerradie [m]
r2y = 176e-3; %ytterradie [m]
end
```

```
function [I3 ,c3 ,r3i ,r3y] = kugg3
%properties of kugghjul no 3

I3 = 5e-4; %masstroghet [kgm^2]
c3 = 1e-5; %dampningskonstant [kgm^2/s]
r3i = 36e-3; %innerradie [m]
r3y = 90e-3; %ytterradie [m]
end
```

```
function [I4 ,c4 ,r4i ,r4y] = kugg4
%properties of kugghjul no 4

I4 = 5e-4; %masstroghet [kgm^2]
c4 = 1e-5; %dampningskonstant [kgm^2/s]
r4i = 100e-3; %innerradie [m] stammer den verkligen?
r4y = 144e-3; %ytterradie [m]
end
```

```
function [I0 ,c0 ,r0] = flykthjul
% Properties of flykthjul

I0 = 5e-4; %masstroghet [kgm^2]
c0 = 1e-5; %dampningskonstant [kgm^2/s]
r0 = 20e-3; %radie [m]
end
```

```
function [lam1 ,lam2 ,lam3 ,lam4 ,lama ,lamg] = Lambda(r0 , r1i , r1y
, r2i , r2y , r3i , r3y , r4i , r4y)
```

```

% Beraknar utvaxlingarna

lam1 = (r0/r1y)^2;
lam2 = (r0*r1i/r1y/r2y)^2;
lam3 = (r0*r1i*r2i/r1y/r2y/r3y)^2;
lam4 = (r0*r1i*r2i*r3i/r1y/r2y/r3y/r4y)^2;
lama = (r0*r1i*r2i*r3i*r4i/r1y/r2y/r3y/r4y)^2;
lamg = (r0*r1i*r2i*r3i*r4i/r1y/r2y/r3y/r4y);

end

```

```

function [c_coeff,I_coeff] = coeff(c0,c1,c2,c3,c4,I0,I1,I2,
    I3,I4,lam1,lam2,lam3,lam4,lama,md)
% Beraknar koeficienterna

c_coeff = c0-lam1*c1+lam2*c2-lam3*c3+lam4*c4; %overall
    damping coefficient
I_coeff = I0+lam1*I1+lam2*I2+lam3*I3+lam4*I4+lama*md; %
    overall inertia coefficient

end

```

```

function Ip = calc_Ip(h)
% Inputs:
% weight_position: avstand fran den flyttbara massan till
    pendelns rotationsaxel
% I_base: troghetsmomentet for pendeln UTAN den flyttbara
    massan (CATIA-modell 'Anchor v2')
% weight_mass: den flyttbara viktens massa

%OBS: Pendeln utan den flyttbara massan ar gjord i
    plexiglas (akrylglas) med en
%densitet p 1200kg/m3. Anchor v2 bor saledes ha massan
    0.029kg (v rt att
%kontrollera detta genom att vaga den efter vi har
    laserskurit den).

fb_m = 1; % [kg] flyttbara massan
I_base = 6.87e-4; % [kgm^2] uppmatta troghetsmomentet for
    pendeln utan den flyttbara massan
Ip = I_base + fb_m * h^2; % formel for det totala
    troghetsmomentet

end

```

INSTITUTIONEN FÖR MEKANIK OCH MARITIMA VETENSKAPER
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

Göteborg, Sverige 2024

www.chalmers.se



CHALMERS