Lösning av diofantiska ekvationer med hjälp av Fourieranalys

En studie av Hardy-Littlewoods cirkelmetod

Solving Diophantine equations using Fourier analysis

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet
Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers

Hugo Bäckman
Tony Gromer
Rebecka Mårtensson
Elina Möller

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2023

Lösning av diofantiska ekvationer med hjälp av Fourieranalys

En studie av Hardy-Littlewoods cirkelmetod

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet
Hugo Bäckman

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk fysik vid Chalmers
Rebecka Mårtensson

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik vid Chalmers
Tony Gromer Elina Möller

Handledare: Julia Brandes

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2023

Förord

Vi vill börja med att tacka vår handledare Julia Brandes för ett stort engagemang och intresse för vår inlärning likväl som för vårt kandidatarbete.

Under arbetets gång har en tidslogg och en dagbok skrivits. Nedan följer även en tabell med ansvarsområden i slutrapporten. Elina Möller och Tony Gromer skulle vilja kommentera att i stort sett allt arbete har skett via samtal och diskussioner mellan dem. Det är svårt att avgöra vem av de två som lade fram idéerna eftersom problemlösningen ofta skedde tillsammans. Hugo Bäckman och Rebecka Mårtensson har mestadels jobbat separat men även fortsatt varandras påbörjade texter.

Avsnitt	Författare
Populärvetenskaplig presentation	Elina Möller
Sammanfattning och abstract	Elina Möller, Rebecka Mårtensson
1.1 Bakgrund stycke ett	Elina Möller
1.1 Bakgrund stycke två	Hugo Bäckman, Rebecka Mårtensson
1.2 Mål, Sats 2.2.1	Elina Möller, Tony Gromer
1.2 Mål, Sats 2.2.2	Hugo Bäckman, Rebecka Mårtensson
1.3 Cirkelmetoden fram till och med Ekvation (7)	Elina Möller, Tony Gromer
1.3 Cirkelmetoden efter Ekvation (7)	Hugo Bäckman, Rebecka Mårtensson
2.1 Hardy-Littlewood uppdelning	Elina Möller, Tony Gromer
2.2.1 Weyls sats	Elina Möller, Tony Gromer
2.4 Minor arcs	Elina Möller
2.4 Major arcs	Elina Möller, Tony Gromer
2.4.1 Den singulära integralen	Tony Gromer
2.4.2 Den singulära serien fram till och med Lemma 3.4.5	Elina Möller, Tony Gromer
2.4.2 Den singulära serien efter Lemma 3.4.5	Tony Gromer
2.5 Hardy-Littlewoods asymptotiska formel	Tony Gromer
3.0 Vinogradovs sats (innan subsection)	Hugo Bäckman
3.1 Singulära serien	Rebecka Mårtensson
3.2 Integral över major arcs	Rebecka Mårtensson, Hugo Bäckman
3.3 Integral över minor arcs	Hugo Bäckman
3.4 Bevis av asymptotiska formel	Hugo Bäckman, Rebecka Mårtensson
Källhänvisning	Tony Gromer, Rebecka Mårtensson

Följande tabell anger ansvarsområden ifrån appendix.

Författare	Satser och lemman eller delkapitel
Elina Möller	Kapitel A.3, A.1.1, A.4.1, A.4.2, A.1.2, A.4.5, A.1.3, A.5.2 och A.5.3
Tony Gromer	A.4.3, A.4.4, A.4.6, A.4.7, A.4.8 och A.5.1
Hugo Bäckman	A.2.2, A.2.3, A.2.9, A.2.10, A.2.11, Kapitel A.6
Rebecka Mårtenson	A.2.1, A.2.3, A.2.4, A.2.5, A.2.7, A.2.8, A.2.6,

Populärvetenskaplig presentation

Den 7 juli år 1742 skrev den tyska matematikern Christian Goldbach ett brev till en av de mest framgångsrika matematikerna någonsin: Leonhard Euler. I detta brev hävdade Goldbach att varje jämnt heltal kan skrivas som en summa av två primtal. Primtal är heltal som endast är delbara med sig själva och ett. Några exempel på primtal är 2, 3, 5, 7, 37, 79, 97 eller 5197. Det är lätt att se att Goldbachs påstående gäller för de lägsta jämna heltalen. Talet 8, som exempel, kan skrivas som en summa av primtalen 5 och 3: 8=5+3. Detta påstående, känt som Goldbach hypotes, är trots sin enkla formulering ej bevisad.

Det finns en svagare Goldbachs hypotes vilken säger att varje udda heltal större än 5 kan skrivas som en summa av 3 primtal. Som exempel kan vi ta det udda talet 15, vilket kan skrivas som summan av primtalen 3, 5 och 7: 15=3+5+7. Som sagt finns inget bevis på Goldbachs hypotes, men om det fanns skulle det även direkt bevisa Goldbach svaga hypotes. Dock bevisade Ivan Matveyevich Vinogradov på 1930-talet att Goldbachs svaga hypotes stämmer för alla tillräckligt stora heltal. Beviset utvidgades till alla heltal av Harald Helfgott år 2013.

Även innan 1700-talet har folk varit intresserade av liknande problem. Redan under antiken kan man se att matematikern Diophantus var medveten om vad som idag kallas för Lagranges fyra-kvadrats sats. Lagranges fyra-kvadrats sats säger att varje heltal kan skrivas som en summa av fyra stycken icke-negativa heltal upphöjt till två. Som exempel tar vi tre. Detta heltal kan skrivas som en summa av kvadraterna av 1 och 0 på följande sätt

$$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2.$$

Ett annat exempel är talet 31 där vi använder talen 1, 2 och 5 på följande sätt

$$31 = 5^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2.$$

Diophantus text översattes år 1621 från grekiska till latin och år 1770 bevisades Lagranges fyra-kvadrats sats av Joseph Lagrange. Samma år funderade matematikern Waring på om detta påstående kunde generaliseras ännu mer, vilket han till slut uttryckte i Warings problem. Innan vi formulerar Warings problem ska vi fundera på en annan fråga.

Vad skulle hända om vi i Lagranges fyra-kvadrats sats skulle upphöja talen med ett annat tal än 2? Om vi exempelvis tar 3. Skulle fyra stycken icke negativa tal upphöjt till tre räcka för att kunna skriva varje heltal som finns? Svaret är nej. Vi skulle behöva 9 stycken tal där alla är upphöjda till 3 för att kunna addera dessa till varenda heltal som finns. Vad händer om vi upphöjer talen med 4? Hur många tal skulle vi då behöva för att kunna summera till alla heltal? Finns det för varje heltalspotens ett specifikt nummer för hur många tal vi måste summera ihop för att kunna få varenda heltal? Detta är vad Warings problem frågar oss. Detta arbete undersöker Warings problem och metoder som tagits fram av matematiker för att svara på frågan sedan problemet blev formulerat år 1770. Mer specifikt presenterar vi Vinogradovs sats och undersöker en generalisering av Warings problem till flera olika potenser.

Sammandrag

I detta kandidatarbete i matematik vid Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet studeras två applikationer av Hardy-Littlewoods cirkelmetod. Det redogörs för en förbättring på Warings problem för ett godtyckligt antal olika potenser. Integralen från Hardy-Littlewoods cirkelmetod löses med Hardy-Littlewood uppdelning i major och minor arcs. Vid uppskattningen av minor arcsen används Hölders olikhet tillsamans med ett korollarium visat av Wooley. Major arcsen delas up i singulära serien och singulära integralen som estimeras separat. Slutligen kombineras detta för att få en asymptotisk formel.

Hardy-Littlewoods cirkelmetod används även för att visa Vinogradovs sats. För att kunna estimera antalet sätt att representera ett heltal i termer av olika antal primtal delas enhetsintervallet upp i major och minor arcs. En uppskattning görs sedan av integralen över de båda mängderna med bland annat Siegel-Walfisz sats. Genom sammanslagning av dessa tar vi fram den slutgiltiga asymptotiska formlen.

Abstract

This bachelor's thesis in mathematics at Chalmers University of Technology and University of Gothenburg examines two applications of Hardy-Littlewoods circle method. Firstly we show an improvement of Waring's problem for an arbitrary number of different exponents. The integral from Hardy-Littlewood circle method is solved with Hardy-Littlewood decomposition into major and minor arcs. Hölder's inequality and a Corollary by Wooley are used to estimate the minor arcs. The major arcs are split into the singular series and the singular integral and they are estimated separately. Finally, this is combined into an asymptotic formula.

The Hardy-Littlewood circle method is also used to demonstrate Vinogradov's theorem. In order to estimate the number of ways to represent an integer in terms of prime numbers, the unit interval is divided into major and minor arcs. An estimate of the integral is then made over these two using, among other things, the Siegel-Walfisz theorem. By combining these, we obtain the final asymptotic formula.

Innehåll

1 Notationer

Definition 1. $(m, n) = 1$ *innebär att heltalen* m *och* n *är relativt prima.*

Definition 2. *För två funktioner* f *och* g *där* f *är reell- eller komplexvärd och* g *positiv och reellvärd skrivs*

$$f = \mathcal{O}(g) \qquad \text{eller} \qquad f \ll g, \tag{1}$$

om det finns någon konstant c *så att* $|f(x)| \leq cg(x)$ *för alla* x *i definitionsmängden. Talet* c *kallas den implicerade konstanten och kan bero av andra variabler* a, b, $\ldots$. *Om både* $f \ll g$ *och* $g \ll f$ *skrivs*

$$f \asymp g. \tag{2}$$

Definition 3. *Ett förkortat sätt att skriva en punkt på enhetscirkeln är*

$$e^{2\pi ik} = e(k).$$

Båda skrivsätten kommer användas.

Definition 4. *Heltalsdelen av det reella talet* x *betecknas* $[x]$ *och bestäms av olikheten*

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Heltalsdelen för ett tal är unikt.

Definition 5. $\{x\}$ *betecknar decimaldelen av* x, *sådan att* $\{x\} = x - [x] \in [0, 1)$.

Definition 6. $\|x\|$ *betecknar avståndet från det reella talet* x *till det närmaste heltalet, det vill säga att*

$$\|x\| = \min\{|x - n| : n \in \mathbb{Z}\} = \min\{\{x\}, 1 - \{x\}\} \in [0, 1/2].$$

2 Inledning

2.1 Bakgrund

Warings problem ställer frågan om det för varje heltal k finns ett heltal s så att varje heltal N kan skrivas som en summa av som högst s stycken heltal upphöjt i k, det vill säga

$$N = x_1^k + \cdots + x_s^k.$$

Problemet lades fram av Waring år 1770 [War82]. För att visa detta så hittar vi en asymptotisk formel för $r_{k,s}(N)$, vilken definieras som antalet representationer som lösningen kan skrivas på. Vi kan se att $r_{k,s}(N)$ konvergerar då s är tillräckligt stort. Hilbert gav ett första bevis, vilket inte var konstruktivt, till detta problem år 1909 [Hil09]. Hardy, Littlewood och Ramanujan [HL20] tog fram cirkelmetoden som fortfarande är relevant inom ämnet. Vinogradov förbättrade och förenklade denna metod i ett flertal artiklar, bland annat i [Vin84][Vin54]. Hardy och Littlewood lade även fram en första övre gräns så att $r_{k,s}(N)$ håller. Sedan har flera matematiker gjort denna gränsen bättre, däribland Hua [Hua38], Vaughan [Vau86] och nyligen Boklan [Bok94]. Wooley lade grunden för vidare framsteg [Woo12][Woo18], då han hittade en ny lägre uppskattning av en integral som krävs för att visa konvergens. Browning och Yamagishi generaliserade år 2021 problemet för flera olika potenser i [BY19], men utan att använda Wooleys uppskattning från [Woo18] i sin starkaste form. För vidare information hänvisas till läsaren till [VW02]. Detta arbete kommer presentera en förbättring av Browning och Yamagishis argumentation genom att införa Wooleys resultat. Detta leder till ett bättre krav på s.

Ett centralt resultat inom additiv talteori, mer specifikt inom studier om primtal, är Vinogradovs sats. Den påstår att alla tillräckligt stora udda heltal N kan skrivas som en summa av tre primtal $N = p_1 + p_2 + p_3$. Likt Warings problem visas Vinogradovs sats genom att ge en asymptotisk formel för antalet representationer av primtalstripplar ett udda tal kan skrivas som en summa av. Detta visas med hjälp av Hardy-Littlewoods cirkelmetod. Ivan Vinogradov var först med att visa påståendet [Vin37] och han delade upp den asymptotiska formeln i en huvudterm och en felterm. Huvudtermen började dock dominera först vid enormt stora tal, och år 2002 visade Liu och Wang att 10^{1346} var tillräckligt stort [LW02]. Drygt ett decennium senare visade Harald Helfgott att påståendet gäller för alla heltal $N \geq 7$ [Hel13]. Helfgotts huvudterm började dominera mycket tidigare, och för heltalen innan dess gick det att kontrollera med datorers hjälp. Målet med denna del är att presentera Vinogradovs sats för godtyckligt antal primtal. Det görs genom att finna en asymptotisk formel för antalet representationer för ett positivt heltal N (samma paritet som h) som en summa av $h \geq 3$ primtal.

Ett välkänt öppet problem inom matematiken är Goldbachs hypotes som påstår att varje jämnt tal större än eller lika med 4 kan skrivas som en summa av två primtal. Med samma metoder som används för att visa Vinogradovs sats kan man även visa att nästan alla jämna heltal kan skrivas som en summa av två primtal.

2.2 Mål

Slutligen kommer argumentationen för Warings problem med godtyckligt antal potenser leda till att visa Sats 2.2.1. Låt nu $r_{\mathbf{k}}(N)$ vara antalet representationer utav N som en summa av s stycken k_i-potenser av positiva heltal.

Sats 2.2.1. *Låt $k_i \geq 2$ och*

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{s_1(k_i)} > 1 \tag{3}$$

där $s_1(k_i) = k_i^2 - k_i + 2\lfloor\sqrt{2k_i + 2}\rfloor - 2$. Då existerar det $\eta = \eta(k, s) > 0$ sådan att

$$r_{\mathbf{k}}(N) = \mathfrak{S}(N) \frac{\prod_{i=1}^{s} \Gamma\left(1 + \frac{1}{k_i}\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i}\right)} N^{\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i} - 1} + \mathcal{O}\left(N^{\left(\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i}\right) - 1 - \eta}\right) \tag{4}$$

där den implicerade konstanten endast beror på k och s, och $\mathfrak{S}(N)$ är aritmetisk funktion sådan att

$$0 \le \mathfrak{S}(N) < c_2$$

för alla N, där c_2 är en positiv konstant endast beroende av k och s.

Browning och Yamagishi etablerade den asymptotiska formeln (4), men med kravet $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{s} \frac{1}{k_i(k_i+1)} \ge 1$ för något $j \in \{1, \ldots, s\}$. Vårt resultat ger alltså en relaxering av deras villkor.

Vi kommer även redovisa Vinogradovs sats 2.2.2.

Sats 2.2.2. *Låt $r_h(N)$ vara antalet sätt som ett heltal N kan skrivas som en summa av $h \ge 3$ primtal, där $N \equiv h \pmod 2$. Då gäller*

$$r_h(N) = \mathfrak{S}_h(N) \frac{N^{h-1}}{(h-1)(\log N)^h} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\log\log N}{\log N}\right)\right),$$

där $\mathfrak{S}_h(N)$ är en aritmetisk funktion sådan att

$$c_1 < \mathfrak{S}_h(N) < c_2$$

för positiva konstanter c_1 och c_2.

2.3 Cirkelmetoden

Vi låter $r_{k,s}(N)$ för positiva heltal k och s beteckna antalet representationer av heltalet N som en summa av s positiva tal med exponenten k, det vill säga antalet s-tuplar av positiva heltal sådan att

$$N = x_1^k + \cdots + x_s^k.$$

Warings problem innebär att bevisa att varje ickenegativt heltal är en summa av ett begränsat antal potenser av k. Det är ekvivalent med att visa att till varje k finns s sådan att $r_{k,s}(N) > 0$. Warings problemet för godtyckligt antal olika potenser går att lösa med samma metod, men skulle istället skrivas som

$$N = x_1^{k_1} + \cdots + x_s^{k_s}. \tag{5}$$

Detta innebär att varje term har sin egna potens k_i. Notera att det inte finns något krav på att k_i måste vara distinkta. Grundidéen vi utgår ifrån är Fourierortogonaliten som säger att

$$\int_0^1 e(m\alpha)e(-n\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \begin{cases} 1 & \text{då } m = n, \\ 0 & \text{då } m \neq n. \end{cases} \tag{6}$$

Vi kan utnyttja detta faktum för att ta reda på när Ekvation (5) har en lösning genom att beräkna

$$\int_0^1 e((x_1^{k_1} + \cdots + x_s^{k_s} - N)\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \begin{cases} 1 & \text{då } x_1^{k_1} + \cdots + x_s^{k_s} = N, \\ 0 & \text{då } x_1^{k_1} + \cdots + x_s^{k_s} \neq N. \end{cases}$$

Då vi vill testa för godtyckliga heltal x_i, så ansätter vi för $k \ge 2$ det trigonometriska polynomet

$$F(\alpha) = \sum_{n=1}^{[N^{\frac{1}{k}}]} e(\alpha n^k).$$

Genom att multiplicera polynomet med sig själv s gånger så får vi en summa över $e((x_1^k + \ldots + x_s^k)\alpha)$ som innehåller alla möjliga kombinationer av heltal n. Endast de termer som ger en lösning är nollskiljda, och vi får då att

$$r_{k,s}(N) = \int_0^1 F(\alpha)^s e(-\alpha N)\, d\alpha.$$

För att anpassa kapitel 5 i [Nat96] till ett godtyckligt antal olika potenser så definierar vi istället

$$F_{k_i}(\alpha) = \sum_{n=1}^{[N^{\frac{1}{k_i}}]} e(\alpha n^{k_i})$$

och för s stycken godtyckliga potenser får vi att

$$r_{\mathbf{k}}(N) = \int_0^1 \left(\prod_{i=1}^{s} F_{k_i}(\alpha) \right) e(-\alpha N)\, d\alpha. \tag{7}$$

På liknande sätt definierar vi $r_h(N)$ som antal representationer av N skrivet som en summa av h primtal

$$N = p_1 + \cdots + p_h.$$

Dessutom definieras $R_h(N)$ som motsvarande viktade summa enligt

$$R_h(N) = \sum_{p_1+p_2+\ldots+p_h=N} \log p_1 \cdots \log p_h. \tag{8}$$

Denna summa kan formuleras som en integral med Hardy-Littlewoods cirkelmetod

$$R_h(N) = \int_0^1 F(\alpha)^h e(-N\alpha)\, d\alpha, \tag{9}$$

där funktionen $F(\alpha)$ nu definieras som

$$F(\alpha) := \sum_{p \leq N} \log(p) e(p\alpha). \tag{10}$$

Detta följer från att $F(\alpha)^h$ betraktar alla möjliga summor av h primtal upp till N. Vid integrering så kommer Fourierortogonaliten (6) medföra att endast de summor som blir N betraktas.

3 Warings problem för olika potenser

3.1 Hardy-Littlewood uppdelning

Det finns inget sätt att beräkna integralen (7) uttryckligen för $k_i \geq 2$, men det går att få fram Hardy-Littlewoods asymptotiska formel, genom att göra uppskattningar. Det första steget är att dela upp intervallet $[0, 1]$ i två disjunkta mängder, vilka vi kallar för major arcs $\mathfrak{M}$ och minor arcs $\mathfrak{m}$. Sedan kommer integralen uppskattas separat på dessa två mängder. Major arcsen kommer vara de reella talen $\alpha \in [0, 1]$ som i stort sätt kan approximeras till rationella tal med liten nämnare. Minor arcsen kommer vara resten av intervallet, det vill säga dem som inte kan uppskattas väl. Den största massan av intervallet hamnar i minor arcsen. Major arcsen kommer sedan att ses som en produkt av vad som kallas för singulära integralen och singulära serien. Vi kommer att anpassa argumentet i [Nat96] till flera olika potenser och på detta sätt visa Hardy-Littlewoods asymptotiska formel för $\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{s_0(k_i)} > 1$ och $k_i \geq 2$, där $s_0(k_i)$ ges av Sats 3.3.1. Låt oss nu konstruera major och minor arcsen. Vi låter $N \geq 2^{k_i}$. Vi kan även anta att $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_s$ utan att göra påståendet mindre generellt. Välj ett fixt tal $\delta > 0$ som är godtyckligt litet i termer av k och s. Vi låter a och q vara heltal sådana att $0 \leq a \leq q$ och $(a, q) = 1$. Sedan låter vi

$$\mathfrak{M}(q, a) = \left\{ \alpha \in [0, 1] : \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{N^{1-\delta}} \right\}$$

och

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{1 \leq q \leq N^{\delta}} \bigcup_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q} \mathfrak{M}(q, a).$$

Här är $\mathfrak{M}(q,a)$ en major arc och $\mathfrak{M}$ mängden av alla major arcs. Vi kan se att

$$\mathfrak{M}(1,0) = [0, N^{-1+\delta}], \qquad \mathfrak{M}(1,1) = [1-N^{-1+\delta}, 1]$$

och

$$\mathfrak{M}(q,a) = \left[\frac{a}{q} - N^{-1+\delta}, \frac{a}{q} + N^{-1+\delta}\right]$$

för $q \geq 2$. Här kan man se att major arcsen kan approximeras med hjälp av rationella tal på sättet att de är nära ett sådant, med ett avstånd $N^{-1+\delta}$. Ifall $\alpha \in \mathfrak{M}(q,a) \cap \mathfrak{M}(q^*, a^*)$ och $\frac{a}{q} \neq \frac{a^*}{q^*}$, då är $|aq^* - a^*q| \geq 1$ och

$$\frac{1}{N^{2\delta}} \leq \frac{1}{qq^*} \leq \left|\frac{a}{q} - \frac{a^*}{q^*}\right| \leq \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| + \left|\alpha - \frac{a^*}{q^*}\right| \leq \frac{2}{N^{1-\delta}},$$

vilket är omöjligt för $N \geq 2$. På grund av det så är major arcsen $\mathfrak{M}(q,a)$ parvis disjunkta. Volymen av mängden $\mathfrak{M}(1,0) \cup \mathfrak{M}(1,1)$ är $2N^{-1+\delta}$, och för varje $q \geq 2$ och $(a,q) = 1$, så är volymen av en major arc $\mathfrak{M}(q,a)$ är $2N^{-1+\delta}$. För varje $q \geq 2$ så finns det mer exakt $\varphi(q)$ positiva heltal a så att $1 \leq a \leq q$ och $(q,a) = 1$, där $\varphi(q)$ betecknar Eulers fi-funktion. Det följer nu att volymen av mängden utav major arcsen ges av

$$\mathrm{vol}(\mathfrak{M}) = \frac{2}{N^{1-\delta}} \sum_{1 \leq q \leq N^\delta} \varphi(q) \leq \frac{2}{N^{1-\delta}} \sum_{1 \leq q \leq N^\delta} q \leq \frac{2}{N^{1-\delta}} N^{2\delta} \leq \frac{1}{N^{-3\delta+1}} \tag{11}$$

vilket går mot 0 då N går mot oändligheten. Vi definierar mängden av minor arcsen som

$$\mathfrak{m} = [0,1] \setminus \mathfrak{M}.$$

Denna mängd är en ändlig union av öppna interval och är uppbyggd av alla $\alpha \in [0,1]$ som inte går att approximera med hjälp av bråk. Volymen av minor arcsen blir

$$\mathrm{vol}(\mathfrak{m}) = 1 - \mathrm{vol}(\mathfrak{M}) > 1 - \frac{1}{N^{-3\delta+1}}.$$

3.2 Uppskattningar

För att kunna presentera slutsatsen måste först en del satser och lemman redogöras för vilka underbygger argumenten. De flesta presenteras i appendix, men den viktigaste visas här.

3.2.1 Weyls sats

Weyls sats och dess bevis är delvis taget från Sats 4.3 i [Nat96] och delvis från Lemma 2.4 i [Vau97].

Lemma 3.2.1. *Låt $f(x) = \alpha x^k + \ldots$ vara ett polynom av grad $k \geq 2$ med reella koefficienter, och antag att α har den rationella approximationen $\frac{a}{q}$ så att*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2},$$

där $q \geq 1$ och $(a,q) = 1$. Låt

$$S(f) = \sum_{n=1}^{P} e(f(n)).$$

Låt $K = 2^{k-1}$ och $\varepsilon > 0$. Då är

$$S(f) \ll P^{1+\varepsilon}(P^{-1} + q^{-1} + P^{-k}q)^{\frac{1}{K}},$$

där den implicerade konstanten endast beror på k och ε.

Bevis. På grund av att $|S(f)| \leq P$ så fås resultatet direkt om $q \geq P^k$. Med andra ord kan vi anta att $1 \leq q < P^k$, och då är

$$\log(q) \ll \log(P) \ll P^{\varepsilon}.$$

Från Lemma A.4.3 har vi att

$$\begin{aligned}|S(f)|^K &\ll P^{K-1} + P^{K-k+\varepsilon} \sum_{m=1}^{k!P^{k-1}} \min(P, \|m\alpha\|^{-1}) \\ &\ll P^{K-k+\varepsilon} \left(P^{K-1} \sum_{m=1}^{k!P^{k-1}} \min(P^k m^{-1}, \|m\alpha\|^{-1}) \right).\end{aligned}$$

Från Lemma A.1.2 får vi att

$$\begin{aligned}|S(f)|^K &\ll P^{K-k+\varepsilon} \left(P^{K-1} + P^{\varepsilon} \left(P^{k-1}P\right) \left(qP^{-k} + P^{-1} + q^{-1}\right) \right) \\ &\ll P^{K+\varepsilon} \left(qP^{-k} + P^{-1} + q^{-1}\right),\end{aligned}$$

vilket avslutar beviset. □

3.3 Minor arcs

För att visa att integralen över minor arcs blir tillräckligt liten för ett lägre antal termer än [BY19] så behöver vi Korollarium 14.7 från [Woo18].

Sats 3.3.1. *Låt*

$$s_0(k_i) = k_i(k_i - 1) + \min_{0 \leq m < k_i} \frac{2k_i + m(m-1)}{m+1}.$$

I så fall, då $s \geq s_0(k_i)$, har vi att

$$\int_0^1 \left| \sum_{1 \leq n \leq N^{\frac{1}{k_i}}} e(\alpha n^{k_i}) \right|^s d\alpha \ll N^{\frac{s-k_i+\epsilon}{k_i}}.$$

Observera att [Woo18] i beviset för Korollarium 14.7 uppskattar

$$\min_{0 \leq m \leq k_i} \frac{2k_i + m(m-1)}{m+1} \leq 2\lfloor \sqrt{2k_i + 2} \rfloor - 2,$$

vilket ger att $s_0(k_i) \leq s_1(k_i)$. Notera även att $s_0(k_i) \geq 2k_i$ för alla i. Lemma 3.3.2 och dess bevis följer bevisgången som Nathanson lägger fram i delkapitel 5.4 i [Nat96] men har även tagit inspiration från [BBK+23]. Notera att följande lemma skiljer sig från Nathanson i att begränsning på s är mindre strikt och att den behandlar Warings problem för olika potenser.

Lemma 3.3.2. *Vi låter $k_i \geq 2$ och $\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{s_0(k_i)} > 1$. Det existerar då ett $\delta_1 > 0$ så att*

$$\int_{\mathfrak{m}} \left(\prod_{i=1}^{s} F_{k_i}(\alpha) \right) e(-N\alpha)\, d\alpha = \mathcal{O}\left(N^{\left(\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i}\right) - 1 - \delta_1} \right).$$

där den implicerade kontanten endast beror på k och s.

Bevis. Från Dirichlets sats A.1.1 med $Q = N^{1-\delta}$ får vi slutsatsen att för varje reellt tal α finns det ett korresponderande bråk $\frac{a}{q}$ så att $1 \leq q \leq N^{1-\delta}$ och $(a, q) = 1$ med egenskapen

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{qN^{1-\delta}} \leq \min\left(\frac{1}{N^{1-\delta}}, \frac{1}{q^2} \right).$$

Ifall $q \leq N^{\delta}$ följer det att $\alpha \in \mathfrak{M}(q,a) \subseteq \mathfrak{M} = [0,1] \setminus \mathfrak{m}$, vilket motsäger vårt antagande. Vi kan alltså anta att

$$N^{\delta} < q \leq N^{1-\delta}.$$

Från Weyls olikhet, Lemma 3.2.1, med $f(x) = \alpha x^{k_i}$ och $P = N^{\frac{1}{k_i}}$ får vi att

$$\begin{aligned} F_{k_i}(\alpha) &\ll (N^{\frac{1}{k_i}})^{1+\varepsilon}((N^{\frac{1}{k_i}})^{-1} + q^{-1} + (N^{\frac{1}{k_i}})^{-k_i}q)^{\frac{1}{2^{k_i-1}}} \\ &\ll N^{\frac{1+\varepsilon}{k_i}}(N^{-\frac{1}{k_i}} + N^{-\delta} + N^{-1}N^{1-\delta})^{\frac{1}{2^{k_i-1}}} \ll N^{\frac{1}{k_i}+\frac{\varepsilon}{k_i}-\frac{\delta}{2^{k_i-1}}}. \end{aligned}$$

Nedan följer uppskattningen av integralen över minor arcsen. För ett urval av $\sigma_1, \ldots, \sigma_s \in [0,1]$ så får vi med hjälp av triangelolikheten för integraler

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathfrak{m}} \prod_{i=1}^{s} F_{k_i}(\alpha) e(-N\alpha)\, d\alpha \right| \leq \left| \int_{\mathfrak{m}} \prod_{i=1}^{s} F_{k_i}(\alpha)^{1-\sigma_i} F_{k_i}(\alpha)^{\sigma_i}\, d\alpha \right| \\ &\leq \int_{\mathfrak{m}} \prod_{i=1}^{s} |F_{k_i}(\alpha)|^{1-\sigma_i} |F_{k_i}(\alpha)|^{\sigma_i}\, d\alpha \leq \prod_{i=1}^{s} \sup_{\alpha \in \mathfrak{m}} |F_{k_i}(\alpha)|^{1-\sigma_i} \int_0^1 |F_{k_i}(\alpha)|^{\sigma_i}\, d\alpha. \end{aligned}$$

Sedan via Weyls olikhet fås

$$\ll \prod_{i=1}^{s} (N^{\frac{1}{k_i}+\frac{\varepsilon}{k_i}-\frac{\delta}{2^{k_i-1}}})^{1-\sigma_i} \int_0^1 |F_{k_i}(\alpha)|^{\sigma_i}\, d\alpha.$$

Genom att använda Hölders olikhet på integralen får vi

$$\ll \prod_{i=1}^{s} (N^{\frac{1}{k_i}+\frac{\varepsilon}{k_i}-\frac{\delta}{2^{k_i-1}}})^{1-\sigma_i} \left(\int_0^1 |F_{k_i}(\alpha)|^{\sigma_i p_i}\, d\alpha \right)^{\frac{1}{p_i}} \tag{12}$$

där p_i är valfria så att $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_s} = 1$. Dessutom ska $\sigma_i p_i \geq s_0(k_i)$ med $s_0(k_i)$ taget från Sats 3.3.1. Med hjälp av detta ser vi att $\frac{\sigma_i}{s_0(k_i)} \geq \frac{1}{p_i}$. Om vi summerar både höger och vänsterledet får vi $\sum_{i=1}^{s} \frac{\sigma_i}{s_0(k_i)} \geq 1$. Vi konkluderar att vårt antagande $\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{s_0} > 1$ innebär att vi kan välja $\sigma_i \in [0,1]$, där alla inte är identiskt ett, så att $\sum_{i=1}^{s} \frac{\sigma_i}{s_0} \geq 1$. Slutligen ser vi då att

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{s_0(k_i)} > 1 \;\Rightarrow \sum_{i=1}^{s} \frac{\sigma_i}{s_0(k_i)} \geq 1 \;\Rightarrow \frac{\sigma_i}{s_0(k_i)} \geq \frac{1}{p_i}.$$

Nu kan vi genom att applicera Wooleys sats 3.3.1 på uttrycket (12) få följande

$$\ll \prod_{i=1}^{s} (N^{\frac{1}{k_i}+\frac{\varepsilon}{k_i}-\frac{\delta}{2^{k_i-1}}})^{1-\sigma_i} (N^{\frac{\sigma_i p_i}{k_i}-1+\frac{\varepsilon}{k_i}})^{\frac{1}{p_i}} = N^{\left(\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i}\right)-1-\delta_1},$$

där $\delta_1 = \sum_{i=1}^{s} \frac{\delta}{2^{k_i-1}}(1-\sigma_i) + \varepsilon > 0$. Detta avslutar beviset. $\square$

3.4 Major arcs

Som redan nämnts i texten ska integralen över major arcsen uppskattas genom att delas upp i två delar vilka vi kallar för singulära serien och singulära integralen. För att göra detta introducerar vi först hjälpfunktionerna

$$v_{k_i}(\beta) = \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{k_i} m^{\frac{1}{k_i}-1} e(\beta m) \tag{13}$$

och

$$S_{k_i}(q,a) = \sum_{r=1}^{q} e\left(\frac{ar^{k_i}}{q}\right).$$

Detta motsvarar hur Nathanson definierar dem i [Nat96, Kapitel 5.5], fast anpassat för flera olika potenser. Vi ska nu bevisa att ifall α ligger i major arcsen $\mathfrak{M}(q,a)$ så kan $F_{k_i}(\alpha)$ skrivas som produkten av $\frac{S_{k_i}(q,a)}{q}$ och $v_{k_i}(\alpha - \frac{a}{q})$, samt en liten ordoterm. Vi börjar med att estimera dessa funktioner och på så sätt estimerar vi även $F_{k_i}(\alpha)$. Låt nu

$$\mathfrak{S}(N, N^\delta) = \sum_{1 \le q \le N^\delta} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q} \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{S_{k_i}(q,a)}{q} \right) e\left(\frac{-Na}{q} \right)$$

och

$$J^*(N) = \int_{-N^{-1+\delta}}^{N^{-1+\delta}} \prod_{i=1}^{s} v_{k_i}(\beta) e(-N\beta)\, d\beta.$$

Följande Lemma 3.4.1 använder argumentationen av Sats 5.3 i [Nat96], fast anpassat för godtyckligt antal olika potenser i Warings problem.

Lemma 3.4.1. *Låt $\mathfrak{M}$ benämna mängden av major arcs. I så fall är*

$$\int_{\mathfrak{M}} \prod_{i=1}^{s} F_{k_i}(\alpha) e(-N\alpha)\, d\alpha = \mathfrak{S}(N, N^\delta) J^*(N) + \mathcal{O}(N^{(\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i}) - 1 - \delta_2})$$

där $\delta_2 = \frac{1}{k_s} - 5\delta > 0$.

Bevis. Vi låter $\alpha \in \mathfrak{M}(q,a)$ och

$$\beta = \alpha - \frac{a}{q}.$$

Sedan låter vi

$$V_{k_i} = V_{k_i}(\alpha, q, a) = \frac{S_{k_i}(q,a)}{q} v_{k_i}\left(\alpha - \frac{a}{q} \right) = \frac{S_{k_i}(q,a)}{q} v_{k_i}(\beta)$$

för alla möjliga k_i. Följande nämns några nödvändiga uppskattningar för att beviset ska kunna genomföras. Eftersom $|S_{k_i}(q,a)| \le q$ får vi att $|V_{k_i}| \ll |v_{k_i}(\beta)| \ll N^{\frac{1}{k_i}}$ från Lemma A.4.4. Vi låter $F_{k_i} = F_{k_i}(\alpha)$. I så fall är $|F_{k_i}| \le N^{\frac{1}{k_i}}$. Dessutom har vi att $F_{k_i} - V_{k_i} = \mathcal{O}(N^{2\delta})$ från Lemma A.4.5 och då får vi att

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{s} F_{k_i} - \prod_{i=1}^{s} V_{k_i} &= \prod_{i=1}^{s} ((F_{k_i} - V_{k_i}) + V_{k_i}) + \prod_{i=1}^{s} V_{k_i} \\
&= \prod_{i=1}^{s} V_{k_i} - \prod_{i=1}^{s} V_{k_i} + \mathcal{O}\left(\prod_{i=1}^{s} |F_{k_i} - V_{k_i}| + \sum_{l=1}^{s} |F_{k_l} - V_{k_l}| \prod_{j \ne l} |V_{k_j}| \right) \\
&\ll \sum_{l=1}^{s} |F_{k_l} - V_{k_l}| \prod_{j \ne l} |V_{k_j}| \ll |F_{k_s} - V_{k_s}| N^{\sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{k_i}} = N^{(\sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{k_i}) + 2\delta}
\end{aligned}$$

där vi utnyttjar vårt antagande att $\max k_i = k_s$. På grund av att $\mathrm{vol}(\mathfrak{M}) \ll N^{3\delta - 1}$ från Ekvation (11) följer det att

$$\begin{aligned}
\int_{\mathfrak{M}} \left| \prod_{i=1}^{s} F_{k_i} - \prod_{i=1}^{s} V_{k_i} \right| d\alpha &\ll N^{3\delta - 1} N^{\left(\sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{k_i} \right) + 2\delta} = N^{(\sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{k_i}) - 1 + 5\delta} \\
&= N^{(\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i}) - 1 - \frac{1}{k_s} + 5\delta} = N^{(\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i}) - 1 - \delta_2},
\end{aligned}$$

då $\delta_2 = \frac{1}{k_s} - 5\delta > 0$. På grund av detta kan vi se att

$$\int_{\mathfrak{M}} \left(\prod_{i=1}^{s} F_{k_i}(\alpha)\right) e(-N\alpha)\, d\alpha = \int_{\mathfrak{M}} \left(\prod_{i=1}^{s} V_{k_i}(\alpha, q, a)\right) e(-N\alpha)\, d\alpha + \mathcal{O}\left(N^{(\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i})-1-\delta_2}\right)$$
$$= \sum_{1\leq q\leq N^{\delta}} \sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q} \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{S_{k_i}(q,a)}{q}\right) e\left(\frac{-Na}{q}\right) \int_{-N^{-1+\delta}}^{N^{-1+\delta}} \left(\prod_{i=1}^{s} v_{k_i}(\beta)\right) e(-N\beta)\, d\beta$$
$$+ \mathcal{O}\left(N^{(\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i})-1-\delta_2}\right).$$

Vi konkluderar att

$$\int_{\mathfrak{M}} \left(\prod_{i=1}^{s} F_{k_i}(\alpha)\right) e(-N\alpha)\, d\alpha$$
$$= \sum_{1\leq q\leq N^{\delta}} \sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q} \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{S_{k_i}(q,a)}{q}\right) e\left(\frac{-Na}{q}\right) J^*(N) + \mathcal{O}\left(N^{(\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i})-1-\delta_2}\right)$$
$$= \mathfrak{S}(N, N^{\delta}) J^*(N) + \mathcal{O}(N^{(\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i})-1-\delta_2}),$$

vilket avslutar beviset. □

3.4.1 Den singulära integralen

Den singulära integralen för Warings problem med godtyckligt antal olika potenser betecknar vi som

$$J(N) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{i=1}^{s} v_{k_i}(\beta)\right) e(-\beta N)\, d\beta. \tag{14}$$

Argumenten för Lemma 3.4.2 följer den som Nathanson gör för fallet då $k_1 = \ldots = k_s$ i [Nat96] (Sats 5.4).

Lemma 3.4.2. *Det existerar ett $\delta_3 > 0$ så att*

$$J(N) \ll N^{(\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i})-1}$$

och

$$J^*(N) = J(N) + \mathcal{O}\left(N^{(\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i})-1-\delta_3}\right).$$

Bevis. Från Lemma A.4.4 inser vi att

$$J(N) \ll \int_0^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{s} \min\left(N^{\frac{1}{k_i}}, |\beta|^{-\frac{1}{k_i}}\right) d\beta = \int_0^{\frac{1}{N}} N^{\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i}}\, d\beta + \int_{\frac{1}{N}}^{\frac{1}{2}} \beta^{-\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i}}\, d\beta \ll N^{(\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i})-1}$$

och

$$J(N) - J^*(N) \ll \int_{N^{-1+\delta}}^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{s} |v_{k_i}(\beta)|\, d\beta \ll \int_{N^{-1+\delta}}^{\frac{1}{2}} \beta^{-\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i}}\, d\beta$$
$$\ll N^{(\delta-1)(1-\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i})} = N^{-1+\delta-\delta\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i} + \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i}} = N^{(\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i})-1-\delta_3},$$

där $\delta_3 = \delta(\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i} - 1) > 0$ då vi enligt olikheten (3) får att $\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i} > 2$. □

Beviset för Lemma 3.4.3 följer argumentationen från Sats 5.5 i [Nat96].

Lemma 3.4.3. *Om $s \geq 2$, så är*

$$J(N) = \frac{\prod_{i=1}^{s} \Gamma\left(1 + \frac{1}{k_i}\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i}\right)} N^{\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i} - 1} + \mathcal{O}\left(N^{\left(\sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{k_i}\right) - 1}\right). \tag{15}$$

Bevis. Ekvation (13) ger att

$$\prod_{i=1}^{s} v_i(\beta) = \left(\prod_{i=1}^{s} \sum_{m_i=1}^{N} \frac{1}{k_i} m_i^{\frac{1}{k_i}-1}\right) e((m_1 + \ldots + m_s)\beta),$$

vilket tillsammans med Ekvation (14) leder till att

$$\begin{aligned} J(N) &= \left(\prod_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i}\right) \left(\prod_{i=1}^{s} \sum_{m_i=1}^{N} m_i^{\frac{1}{k_i}-1}\right) \int_{-1/2}^{1/2} e((m_1 + \ldots + m_s - N)\beta) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i}\right) \sum_{\substack{m_1+\ldots+m_s=N \\ 1\leq m_i \leq N}} \prod_{i=1}^{s} m_i^{\frac{1}{k_i}-1}. \end{aligned}$$

Vi skriver nu

$$J_n(N) = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}\right) \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_n=N \\ 1\leq m_i \leq N}} \prod_{i=1}^{n} m_i^{\frac{1}{k_i}-1}.$$

Vi kommer nu att använda induktion för att visa Ekvation (15). För basfallet då $n = 2$ använder vi Lemma A.4.6 med $\alpha = \frac{1}{k_1}$ och $\beta = \frac{1}{k_2}$, vilket ger oss att

$$\begin{aligned} J_2(N) &= \left(\frac{1}{k_1}\right)\left(\frac{1}{k_2}\right) \sum_{m=1}^{N-1} m^{\frac{1}{k_2}-1}(N-m)^{\frac{1}{k_1}-1} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{k_1}\right)\left(\frac{1}{k_2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{k_1}\right)\Gamma\left(\frac{1}{k_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)} N^{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}-1} + \mathcal{O}\left(N^{\frac{1}{k_1}-1}\right) \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{2} \Gamma\left(1+\frac{1}{k_1}\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{k_i}\right)} N^{(\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{k_i})-1} + \mathcal{O}\left(N^{\frac{1}{k_1}-1}\right), \end{aligned}$$

där vi i sista steget använder Gammafunktionens funktionalekvation $z\Gamma(z) = \Gamma(1+z)$, se [WW21, Kapitel 12.12]. Antag nu att påståendet gäller för något $n \geq 2$. Vi får via Ekvation (13) att

$$\begin{aligned} J_{n+1}(N) &= \int_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{m_{n+1}=1}^{N} \frac{1}{k_{n+1}} (m_{n+1})^{\frac{1}{k_{n+1}}-1} e(\beta m_{n+1})\right) \prod_{i=1}^{n} v_i(\beta) e(-N\beta)\, \mathrm{d}\beta \\ &= \sum_{m_{n+1}=1}^{N} \frac{1}{k_{n+1}} (m_{n+1})^{\frac{1}{k_{n+1}}-1} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\prod_{i=1}^{n} v_i(\beta)\right) e(-(N-m_{n+1})\beta)\, \mathrm{d}\beta \\ &= \sum_{m_{n+1}=1}^{N} \frac{1}{k_{n+1}} (m_{n+1})^{\frac{1}{k_{n+1}}-1} J_n(N-m_{n+1}). \end{aligned}$$

Vi använder nu induktionsantagandet vilket ger

$$\begin{aligned} J_{n+1}(N) &= \sum_{m_{n+1}=1}^{N} \frac{1}{k_{n+1}} (m_{n+1})^{\frac{1}{k_{n+1}}-1} (N-m_{n+1})^{(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i})-1} \frac{\prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(1+\frac{1}{k_i}\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}\right)} \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{k_{n+1}} m^{\frac{1}{k_{n+1}}-1} (N-m)^{(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{k_i})-1}\right). \end{aligned}$$

Vi kan nu använda Lemma A.4.6 på huvudtermen, med $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}$ och $\beta = \frac{1}{k_{n+1}}$. För feltermen använder vi återigen oss av Lemma A.4.6, fast med $\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{k_i}$ och $\beta = \frac{1}{k_n}$. För huvudtermen får vi

$$\begin{aligned}
\frac{\prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(1+\frac{1}{k_i}\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}\right)} &\sum_{m_{n+1}=1}^{N} \frac{1}{k_{n+1}} (m_{n+1})^{\frac{1}{k_{n+1}}-1} (N-m_{n+1})^{(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i})-1} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(1+\frac{1}{k_i}\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}\right)} \frac{\left(\frac{1}{k_{n+1}}\right) \Gamma\left(\frac{1}{k_{n+1}}\right) \Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{k_i}\right)} N^{(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_{n+1}})-1} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{n+1} \Gamma\left(1+\frac{1}{k_i}\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{k_i}\right)} N^{(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{k_i})-1} + \mathcal{O}\left(N^{(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i})-1}\right),
\end{aligned}$$

där vi återigen använder oss av [WW21, Kapitel 12.12]. För feltermen får vi på samma sätt

$$\sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{k_{n+1}} m^{\frac{1}{k_{n+1}}-1} (N-m)^{(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{k_i})-1} = N^{(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{k_i}) - \frac{1}{k_{n+1}} - 1} \ll N^{(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i})-1}.$$

Tillsammans ger nu huvudtermen och feltermen att

$$J_{n+1}(N) = \frac{\prod_{i=1}^{n+1} \Gamma\left(1+\frac{1}{k_i}\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{k_i}\right)} N^{(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{k_i})-1} + \mathcal{O}\left(N^{(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i})-1}\right),$$

vilket fullbordar induktionsbeviset. □

3.4.2 Den singulära serien

För att introducera den singulära serien behöver vi först presentera en sats. Lemma 3.4.4 är tagen från Lemma 4.2 i [Vau97].

Lemma 3.4.4. *Antag att* $(a, q) = 1$. *Då är*

$$S(q, a) \ll q^{1-\frac{1}{k}}.$$

Vi har redan introducerat funktionen

$$\mathfrak{S}(N, N^{\delta}) = \sum_{1 \le q \le N^{\delta}} A_N(q)$$

där

$$A_N(q) = \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q} \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{S_{k_i}(q,a)}{q}\right) e\left(\frac{-Na}{q}\right).$$

Vi definierar då den singulära serien för Warings problem som

$$\mathfrak{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} A_N(q).$$

För att visa att $A_N(q)$ är absolutkonvergent, låt $0 < \varepsilon < \frac{1}{s}$, och anta att

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i} > 2. \tag{16}$$

Låt även $(a, q) = 1$. Vi har då enligt Lemma 3.4.4 att

$$S_{k_i}(q, a) \ll q^{1-\frac{1}{k_i}},$$

vilket ger oss

$$\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q}\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{S_{k_i}(q,a)}{q}\right) \ll q^{1-\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{k_i}\right)} = \frac{1}{q^{\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{k_i}\right)-1}}.$$

Vi betraktar nu exponenten. Då $\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{k_i} > 2$ har vi att

$$\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{k_i} - 1 > 1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{s}\frac{1}{k_i} - 1 = 1 + \delta_4,$$

där $\delta_4 > 0$. Vi kan då se att

$$A_N(q) \ll \sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q}\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{S_{k_i}(q,a)}{q}\right) \ll \frac{1}{q^{1+\delta_4}}.$$

Således är $\sum_a A_N(q)$ absolutkonvergent om $\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{k_i} > 2$. Notera att kravet $\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{k_i} > 2$ är något svagare än kravet för minor arcs, att $\sum s_0(k_i)^{-1} > 1$. Låt nu

$$\chi_N(p) = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} A_N(p^h).$$

Lemma 3.4.5 motsvarar Lemma 5.7 och Sats 5.6 i [Nat96].

Lemma 3.4.5. *Om $\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{k_i} > 2$, så är*

$$\mathfrak{S}(N) = \prod_{p}\chi_N(p). \tag{17}$$

Vidare så existerar det en konstant c_2 beroende endast på k och s sådan att $0 \le \mathfrak{S}(N) < c_2$ för alla N, och det existerar även ett primtal p_0 beroende av endast k och s sådan att

$$1/2 < \prod_{p>p_0}\chi_N(p) \le 3/2 \tag{18}$$

för alla $N \ge 1$. Vidare, så gäller det för tillräckligt stora N att

$$\mathfrak{S}(N, N^{\delta}) = \mathfrak{S}(N) + \mathcal{O}\left(N^{-\delta\delta_4}\right).$$

Bevis. Vi har visat att om $\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{k_i} > 2$, så är

$$A_N(q) \ll \frac{1}{q^{1+\delta_4}}, \tag{19}$$

där δ_4 beror endast på k och s, sådan att serien $\sum_q A_N(q)$ är absolutkonvergent. Eftersom att $A_N(q)$ är multiplikativ så implicerar Lemma A.5.3 direkt att produkten i Ekvation (17) konvergerar. Från Lemma A.4.7 så följer det att $\chi_N(p)$ är ett icke-negativt reellt tal för alla N och p, så den singulära serien $\mathfrak{S}(N)$ är positiv. Vi har alltså

$$0 \le \mathfrak{S}(N) \le \sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{1+\delta_4}} = c_2 < \infty$$

och

$$|\chi_N(p) - 1| \le \sum_{h=1}^{\infty}\left|A_N(p^h)\right| \ll \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{p^{h(1+\delta_4)}} \ll \frac{1}{p^{1+\delta_4}}.$$

Därför existerar det en konstant c endast beroende av k och s sådan att

$$1 - \frac{c}{p^{1+\delta_4}} \le \chi_N(p) \le 1 + \frac{c}{p^{1+\delta_4}}$$

för alla N och p. Olikheten (18) följer från konvergens av $\prod_p(1 \pm cp^{-1-\delta_4})$. $\square$

3.5 Hardy-Littlewoods asymptotiska formel

Vi har nu alla delar som behövs för att visa Hardy-Littlewoods formel för Warings problem. Låt $\eta = \min(1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta\delta_4)$. Vi använder oss nu av Hardy-Littlewoods uppdelning och nyttjar Lemma 3.3.2 på minor arcsen och Lemma 3.4.1 på major arcsen. Då får vi att

$$\begin{aligned} r_{k,s}(N) = \int_0^1 \prod_{i=1}^{s} F_{k_i}(\alpha)e(-\alpha N)\,\mathrm{d}\alpha &= \int_{\mathfrak{M}} \prod_{i=1}^{s} F_{k_i}(\alpha)e(-\alpha N)\,\mathrm{d}\alpha + \int_{\mathfrak{m}} \prod_{i=1}^{s} F_{k_i}(\alpha)e(-\alpha N)\,\mathrm{d}\alpha. \\ &= \mathfrak{S}(N, N^{\delta})J^*(N) + \mathcal{O}\left(N^{\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{k_i}\right)-1-\delta_2}\right) + \mathcal{O}\left(N^{\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{k_i}\right)-1-\delta_1}\right). \end{aligned}$$

Genom att nu använda oss av Lemma 3.4.2 för att uppskatta $J^*(N)$ och Lemma 3.4.5 för att uppskatta $\mathfrak{S}(N, N^{\delta})$ så får vi att

$$\begin{aligned} r_{k,s}(N) &= \mathfrak{S}(N, N^{\delta})J^*(N) + \mathcal{O}\left(N^{\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{k_i}\right)-1-\delta_2}\right) + \mathcal{O}\left(N^{\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{k_i}\right)-1-\delta_1}\right) \\ &= \left(\mathfrak{S}(N) + \mathcal{O}\left(N^{-\delta\delta_4}\right)\right)\left(J(N) + \mathcal{O}\left(N^{\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{k_i}\right)-1-\delta_3}\right)\right) \\ &+ \mathcal{O}\left(N^{\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{k_i}\right)-1-\delta_2}\right) + \mathcal{O}\left(N^{\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{k_i}\right)-1-\delta_1}\right) \\ &= \mathfrak{S}(N)J(N) + \mathcal{O}\left(N^{\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{k_i}\right)-1-\eta}\right). \end{aligned}$$

Till slut använder vi oss av Lemma 3.4.3 för att uppskatta $J(N)$ och vi får då

$$\begin{aligned} r_{k,s}(N) &= \mathfrak{S}(N)\frac{\prod_{i=1}^{s}\Gamma\left(1+\frac{1}{k_i}\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{k_i}\right)}N^{\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{k_i}\right)-1} + \mathcal{O}\left(N^{\left(\sum_{i=1}^{s-1}\frac{1}{k_i}\right)-1}\right) + \mathcal{O}\left(N^{\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{k_i}\right)-1-\eta}\right) \\ &= \mathfrak{S}(N)\frac{\prod_{i=1}^{s}\Gamma\left(1+\frac{1}{k_i}\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{k_i}\right)}N^{\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{k_i}\right)-1} + \mathcal{O}\left(N^{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}\right)-1-\eta}\right), \end{aligned}$$

vilket skulle visas.

4 Vinogradovs sats

En annan applikation av Hardy-Littlewoods cirkelmetod är i summation över primtal. Genom att ändra domänen som summeras över skapas ett helt nytt problem, vi går från summation av heltalspotenser till summation av primtal. Antalet representationer bestäms av tätheten av primtalen. Chebyshevs sats beskriver detta asymptotiskt.

Sats 4.0.1. *(Chebyshev) Definiera $\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1$ som antalet primtal mindre än eller lika med x. Då gäller*

$$\pi(x) \asymp \frac{x}{\log(x)}.$$

Det gäller även att

$$\sum_{p\leq x}\log p \asymp \sum_{n\leq x}\Lambda(n) \asymp x,$$

där Mangoldtfunktionen $\Lambda(n) := \begin{cases}\log(p) & \text{om } n = p^t, \\ 0 & \text{annars.}\end{cases}$

Beviset finns i Sats A.2.11.

Låt nu $r_h(N)$ beteckna antalet representationer som N kan skrivas som en summa av h primtal, med restriktionen att N har samma paritet som h, dvs $N \equiv h \pmod 2$. För att beräkna det asymptotiska beteendet av $r_h(N)$ så betraktas den viktade summan $R_h(N)$ i Ekvation (8). Från Fourierortogonaliten kan den skrivas som en integral enligt $R_h(N) = \int_0^1 F(\alpha)^h e(-N\alpha)\,d\alpha$, se Ekvation (9), där $F(\alpha)$ definieras i Ekvation (10). Storleksordningen på $F(\alpha)$ beror på α, mer exakt hur nära α är ett rationellt tal.

Likt som för Warings problem görs en uppdelning av enhetsintervallet $[0,1]$ i två disjunkta delar, major arcs $\mathfrak{M}$ och minor arcs $\mathfrak{m}$. Då $R_h(N)$ kan skrivas som en integral från 0 till 1 motsvarar integralen över $\mathfrak{M}$ huvudtermen och $\mathfrak{m}$ feltermen. Partitionen av enhetsintervallet till major arcs $\mathfrak{M}$ och minor arcs $\mathfrak{m}$ bygger på kapitel 8.3 i [Nat96].

Låt $Q = (\log N)^B$, där $B > 0$. För heltalen a och q där $q \in [1, Q]$ och $a \in [0, q]$ med $(a, q) = 1$ definieras major arc $\mathfrak{M}(q, a)$ som intervallet

$$\mathfrak{M}(q,a) = \left\{ \alpha \in [0,1]; |\alpha - \frac{a}{q}| \leq \frac{Q}{N} \right\}.$$

Längden av varje $\mathfrak{M}(q, a)$ betecknar vi $\mathrm{vol}(\mathfrak{M}(\mathfrak{q}, \mathfrak{a}))$ och är $2\frac{Q}{N}$ om $q \geq 2$ och $\frac{Q}{N}$ om $q = 1$ och för stora N så är dessa mängder disjunkta över (q, a), vilket följer från ett motsägelsebevis. Antag motsatsen, att $\alpha \in \mathfrak{M}(q, a) \cap \mathfrak{M}(q', a')$. Med villkoret $(a, q) = (a', q') = 1$ och $\frac{a}{q} \neq \frac{a'}{q'}$ gäller $|aq' - a'q| \geq 1$. Detta ger

$$\frac{1}{Q^2} \leq \frac{1}{qq'} \leq \frac{|aq' - a'q|}{qq'} = |\frac{a}{q} - \frac{a'}{q'}| \leq |\frac{a}{q} - \alpha| + |\alpha - \frac{a'}{q'}| \leq \frac{2Q}{N}$$

Detta implicerar att $N \leq 2Q^3 = 2(\log N)^{3B}$ vilket är omöjligt för tillräckligt stora N. Därmed får vi en motsägelse.

Definiera mängden av major arcs som

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{q=1}^{Q} \bigcup_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q} \mathfrak{M}(q,a) \subseteq [0,1].$$

Egenskapen att $\mathfrak{M}(q, a)$ är disjunkta medför att om $\alpha \in \mathfrak{M}$ så existerar unika q och a så att $\alpha \in \mathfrak{M}(q, a)$. Det gäller även att $\mathrm{vol}(\mathfrak{M}) \leq \frac{Q^3}{N}$. Minor arcs $\mathfrak{m}$ definieras som komplementet till $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{m} = [0, 1] \setminus \mathfrak{M}$.

Partitionen av enhetsintervallet till två mätbara delar medför att vi kan skriva om $R_h(N)$ som en integral över major- och minor arcs,

$$R_h(N) = \int_{\mathfrak{M}} F(\alpha)^h e(-N\alpha) d\alpha + \int_{\mathfrak{m}} F(\alpha)^h e(-N\alpha) d\alpha.$$

4.1 Singulära serien

För att beskriva integralen över major arcs behöver vi den singulära serien $\mathfrak{S}_h(N)$. Det är en aritmetisk funktion som definieras enligt

$$\mathfrak{S}_h(N) := \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q)^h c_q(N)}{\varphi(q)^h}.$$

Om man istället endast summerar över $q \leq Q$ definieras

$$\mathfrak{S}_h(N,Q) = \sum_{q \leq Q} \frac{\mu(q)^h c_q(N)}{\varphi(q)^h}. \tag{20}$$

Lemma 4.1.1. *För alla positiva heltal $N \equiv h \pmod 2$ går det att hitta positiva konstanter c_1 och c_2 så att $c_1 < \mathfrak{S}_h(N) < c_2$. För varje $\varepsilon > 0$ gäller*

$$\mathfrak{S}_h(N,Q) = \sum_{q \leq Q} \frac{\mu(q)^h c_q(N)}{\varphi(q)^h} = \mathfrak{S}_h(N) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Q^{h-2-\varepsilon}}\right), \tag{21}$$

där den implicerade konstanten endast beror av ε. Den singulära serien konvergerar absolut och uniformt och har Eulerprodukten

$$\mathfrak{S}_h(N) = \prod_{p\nmid N}\left(1+\frac{(-1)^h}{(p-1)^h}\right)\prod_{p\mid N}\left(1-\frac{(-1)^h}{(p-1)^{h-1}}\right).$$

Bevis. Från Lemma A.2.8 i har vi $\varphi(q) > q^{1-\varepsilon}$ för $\varepsilon > 0$ och tillräckligt stora q. Eftersom $c_q(N) \ll \varphi(q)$ och $|\mu(q)^h| \le 1$ ger det

$$\frac{\mu(q)^h c_q(N)}{\varphi(q)^h} \ll \frac{1}{\varphi(q)^{h-1}} \ll \frac{1}{q^{h-1-\varepsilon}}.$$

Detta visar att $\mathfrak{S}_h(N)$ konvergerar absolut och uniformt. Det ger även att

$$\mathfrak{S}_h(N) - \mathfrak{S}_h(N,Q) = \sum_{q>Q}\frac{\mu(q)^h c_q(N)}{\varphi(q)^h} \ll \sum_{q>Q}\frac{1}{q^{h-1-\varepsilon}} \ll \frac{1}{Q^{h-2-\varepsilon}}.$$

Lemma A.2.6 ger att $c_q(N)$ är multiplikativ i termer av q, och

$$c_p(N) = \begin{cases} p-1 & \text{om } p \mid N \\ -1 & \text{om } p \nmid N, \end{cases}$$

där p är ett primtal. Det ger att funktionen $\frac{\mu(q)^h c_q(N)}{\varphi(q)^h}$ också är multiplikativ och från Lemma A.5.3 följer det att

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_h(N) &= \prod_p\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mu(p^j)^h c_{p^j}(N)}{\varphi(p^j)^h}\right) = \prod_p\left(1+\frac{(-1)^h c_p(N)}{\varphi(p)^h}\right)\\ &= \prod_{p\nmid N}\left(1-\frac{(-1)^h}{(p-1)^h}\right)\prod_{p\mid N}\left(1+\frac{(-1)^h}{(p-1)^{h-1}}\right),\end{aligned}$$

där andra likheten följer från Definition A.2.4. Då den singulära serien är en del av huvudtermen så är det viktigt att den är begränsad då $n \to \infty$. Detta är sant från

$$\begin{aligned}c_1 &< \prod_p\left(1-\frac{1}{(p-1)^h}\right)\prod_p\left(1-\frac{1}{(p-1)^{h-1}}\right) \le \mathfrak{S}_h(N)\\ &\le \prod_p\left(1+\frac{1}{(p-1)^h}\right)\prod_p\left(1+\frac{1}{(p-1)^h}\right) < c_2,\end{aligned}$$

där $c_1, c_2 > 0$. Alla faktorer är nollskilda då $N \equiv h \pmod 2$ och produkterna konvergerar eftersom motsvarande summor $\sum_p \frac{1}{(p-1)^h}$ och $\sum_p \frac{1}{(p-1)^{h-1}}$ konvergerar, enligt Lemma A.5.1. Om $N \not\equiv h \pmod 2$ så är $\mathfrak{S}_h(N) = 0$, vilket följer från insättningen $p = 2$ i produkten. För $N \equiv 0, h \equiv 1$ blir $1 + \frac{(-1)^h}{(2-1)^h} = 0$ och om $N \equiv 1, h \equiv 0$ blir $1 - \frac{(-1)^h}{(2-1)^{h-1}} = 0$. □

4.2 Integral över major arcs

I detta kapitel tas det fram en övre gräns för storleksordningen av integralen över major arcs i $R_h(N)$. Argumenten är inspirerade av kapitel 8.4 i [Nat96].

Lemma 4.2.1. *Låt $u(\beta) = \sum_{m=1}^{N} e(m\beta)$, då gäller*

$$\int_{-1/2}^{1/2} u(\beta)^h e(-N\beta)\,d\beta = \frac{N^{h-1}}{h-1} + \mathcal{O}(N^{h-2}).$$

Bevis. Genom insättning av $u(\beta) = \sum_{m=1}^{N} e(m\beta)$ i summan erhålls

$$\int_{-1/2}^{1/2} \sum_{m_1=1}^{N} \cdots \sum_{m_h=1}^{N} e\left((m_1 + \cdots + m_h - N)\beta\right) d\beta = \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_h=N \\ m_i \geq 1 \forall i}} 1 = \binom{N-1}{h-1} = \frac{N^{h-1}}{h-1} + \mathcal{O}(N^{h-2}).$$

Första likheten följer från ekvation (6). Andra likheten motsvarar antalet representationer ett tal N kan skrivas som summan av h positiva heltal vilket kan beskrivas kombinatoriskt med stars and bars. □

Sats 4.2.2. *(Siegel-Walfisz) Låt $q \geq 1$ med $(q, a) = 1$, då gäller för alla $C > 0$ att*

$$\vartheta(x; q, a) := \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod q}} \log(p) = \frac{x}{\varphi(q)} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{(\log x)^C}\right).$$

Beviset återfinns i Davenports *Multiplicative number theory* [Dav13], se framför allt §22.

Lemma 4.2.3. *Låt $F_x(\alpha) = \sum_{p \leq x} (\log p) e(p\alpha)$, med $x \leq N$. Givet positiva konstanter B och C, samt positiva heltal q och a sådana att $1 \leq q \leq Q = (\log N)^B$ och $(a, q) = 1$ så gäller att*

$$F_x\left(\frac{a}{q}\right) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} x + \mathcal{O}\left(\frac{QN}{(\log N)^C}\right).$$

Bevis. Låt $p \equiv r \pmod q$. Då gäller $p | q \iff (r, q) > 1$ och alltså

$$\sum_{\substack{r=1 \\ (r,q)>1}}^{q} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv r \pmod q}} (\log p) e\left(\frac{pa}{q}\right) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p | q}} (\log p) e\left(\frac{pa}{q}\right) \ll \sum_{p|q} \log p \leq \log q.$$

Därutav gäller

$$\begin{aligned}
F_x\left(\frac{a}{q}\right) &= \sum_{r=1}^{q} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv r \pmod q}} (\log p) e\left(\frac{pa}{q}\right) = \sum_{\substack{r=1 \\ (r,q)=1}}^{q} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv r \pmod q}} (\log p) e\left(\frac{ra}{q}\right) + \mathcal{O}(\log q) \\
&= \sum_{\substack{r=1 \\ (r,q)=1}}^{q} e\left(\frac{ra}{q}\right) \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv r \pmod q}} (\log p) \ + \mathcal{O}(\log Q) \ = \sum_{\substack{r=1 \\ (r,q)=1}}^{q} e\left(\frac{ra}{q}\right) \vartheta(x; q, r) \ + \mathcal{O}(\log Q) \\
&= \sum_{\substack{r=1 \\ (r,q)=1}}^{q} e\left(\frac{ra}{q}\right) \left(\frac{x}{\varphi(q)} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{(\log x)^C}\right)\right) + \ \mathcal{O}(\log Q) \\
&= \frac{c_q(a)}{\varphi(q)} x + \mathcal{O}\left(\frac{qx}{(\log x)^C}\right) + \mathcal{O}(\log Q) \ = \ \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} x + \mathcal{O}\left(\frac{QN}{(\log N)^C}\right),
\end{aligned}$$

där femte likheten använder Sats 4.2.2 och sista likheten följer av Lemma A.2.6. □

Lemma 4.2.4. *Låt $\alpha \in \mathfrak{M}(q, a)$ och $\beta = \alpha - \frac{a}{q}$. För varje positiva reella tal B och C med $C > 2B$ gäller för alla tal $h \geq 3$ att*

$$F(\alpha) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} u(\beta) + \mathcal{O}\left(\frac{Q^2 N}{(\log N)^C}\right) \quad \text{och} \quad F(\alpha)^h = \frac{\mu(q)^h}{\varphi(q)^h} u(\beta)^h + \mathcal{O}\left(\frac{Q^2 N^h}{(\log N)^C}\right).$$

Bevis. Definiera $\lambda(m) = \begin{cases} \log p & \text{om } m = p \text{ är ett primtal,} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$

Som ett förberedande steg definieras $U(x)$ och uppskattas från Lemma 4.2.3 enligt

$$\begin{aligned} U(x) &:= \sum_{1\le m\le x} \left(\lambda(m)e\left(\frac{ma}{q}\right) - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right) = \sum_{1\le m\le x} \lambda(m)e\left(\frac{ma}{q}\right) - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}x + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varphi(q)}\right) \\ &= F_x\left(\frac{a}{q}\right) - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}x + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}\left(\frac{QN}{(\log N)^C}\right). \end{aligned}$$

Det gäller även

$$\begin{aligned} F(\alpha) - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}u(\beta) &= \sum_{m=1}^{N} \lambda(m)e(m\alpha) - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\sum_{m=1}^{N} e(m\beta) \\ &= \sum_{m=1}^{N} \lambda(m)e\left(\frac{ma}{q} + m\beta\right) - \sum_{m=1}^{N}\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}e(m\beta) = \sum_{m=1}^{N}\left(\lambda(m)e\left(\frac{ma}{q}\right) - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)e(m\beta). \end{aligned}$$

Notera nu att $|\beta| \le \frac{Q}{N}$. Genom partiell summering, Lemma A.1.3, får vi

$$\begin{aligned} F(\alpha) - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}u(\beta) &= U(N)e(N\beta) - 2\pi i\beta\int_1^N U(x)e(x\beta)\,dx \\ &\ll |U(N)| + |\beta|N \max_{1\le x\le N} U(x) \ll \frac{Q^2N}{(\log N)^C}. \end{aligned}$$

Eftersom $C > 2B$ och $Q = (\log N)^B$ gäller $\frac{Q^2N}{(\log N)^C} = \frac{N}{(\log N)^{C-2B}} = o(N)$. Tillsammans med $|u(\beta)| \le N$, $|\mu(q)| \le 1$ och binomialsatsen ger uppskattningen för $F(\alpha)^h$.

$$\begin{aligned} F(\alpha)^h &= \sum_{i=0}^{h}\binom{h}{i}\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}u(\beta)\right)^{h-i}\left(\mathcal{O}\left(\frac{Q^2N}{(\log N)^C}\right)\right)^i \\ &= \frac{\mu(q)^h}{\varphi(q)^h}u(\beta)^h + \sum_{i=1}^{h}\binom{h}{i}(\mathcal{O}(N))^{h-i}\left(\mathcal{O}\left(\frac{Q^2N}{(\log N)^C}\right)\right)^i = \frac{\mu(q)^h}{\varphi(q)^h}u(\beta)^h + \mathcal{O}\left(\frac{Q^2N^h}{(\log N)^C}\right), \end{aligned}$$

där den implicerade konstanten beror av B, C och h. □

Med satserna ovan kan vi beräkna huvudtermen till $R_h(N)$.

Sats 4.2.5. *För alla positiva heltal B, C och ε med $C > 2B$ gäller att*

$$\int_{\mathfrak{M}} F(\alpha)^h e(-N\alpha)\,d\alpha = \mathfrak{S}(N)\frac{N^{h-1}}{h-1} + \mathcal{O}\left(\frac{N^{h-1}}{(\log N)^{(h-2-\varepsilon)B}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{N^{h-1}}{(\log N)^{C-5B}}\right)$$

där de implicerade konstanterna för $\mathcal{O}$ beror på h och på valet av B, C och ε.

Bevis. Vi delar upp integralen i två delar,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathfrak{M}} F(\alpha)^h e(-N\alpha)\,d\alpha \\ =&\int_{\mathfrak{M}}\left(F(\alpha)^h - \frac{\mu(q)^h}{\varphi(q)^h}u\left(\alpha - \frac{a}{q}\right)^h\right)e(-N\alpha)\,d\alpha + \int_{\mathfrak{M}}\frac{\mu(q)^h}{\varphi(q)^h}u\left(\alpha - \frac{a}{q}\right)^h e(-N\alpha)\,d\alpha. \end{aligned}$$

Vi betecknar integralerna i höger led med I_1 och I_2. Första integralen uppskattas med hjälp av Lemma 4.2.4, och vi får

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathfrak{M}}\left(F(\alpha)^h - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)^h}u\left(\alpha - \frac{a}{q}\right)^h\right)e(-N\alpha)\,d\alpha \ll \int_{\mathfrak{M}}\frac{Q^2N^h}{(\log N)^C}d\alpha \\ &= \mathrm{vol}(\mathfrak{M})\frac{Q^2N^h}{(\log N)^C} \ll \frac{Q^5N^{h-1}}{(\log N)^C} \le \frac{N^{h-1}}{(\log N)^{C-5B}}. \end{aligned}$$

För andra integralen betraktar vi $\alpha = \frac{a}{q} + \beta \in \mathfrak{M}(q,a)$, vilket ger $|\beta| \leq \frac{Q}{N}$. Vi har

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{q\leq Q} \sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q} \frac{\mu(q)^h}{\varphi(q)^h} \int_{\mathfrak{M}(q,a)} u\left(\alpha - \frac{a}{q}\right)^h e(-N\alpha)\, d\alpha \\ &= \sum_{q\leq Q} \frac{\mu(q)^h}{\varphi(q)^h} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} e\left(\frac{-Na}{q}\right) \int_{-\frac{Q}{N}}^{\frac{Q}{N}} u(\beta)^h e(-N\beta)\, d\beta \\ &= \sum_{q\leq Q} \frac{\mu(q)^h}{\varphi(q)^h} c_q(N) \int_{-\frac{Q}{N}}^{\frac{Q}{N}} u(\beta)^h e(-N\beta)\, d\beta = \mathfrak{S}_h(N,Q) \int_{-\frac{Q}{N}}^{\frac{Q}{N}} u(\beta)^h e(-N\beta) \end{aligned}$$

där vi gjort variabelbytet $\alpha \to \beta$ i andra likheten, och tredje likheten följer från Definition A.2.5 samt ur symmetrin av exponentialfunktionen, att summera $e\left(\frac{-Na}{q}\right)$ ger samma som att summera $e\left(\frac{Na}{q}\right)$. Realdelen är samma i båda fall, och summan är reell. Sista likheten följer ur definitionen av singulära serien, se Ekvation (20).

Storleken av $u(\beta)$ fås genom Lemma A.4.1 till $u(\beta) \ll |\beta|^{-1}$ för $|\beta| \leq \frac{1}{2}$. Integralen kan då approximeras med Lemma 4.2.1 enligt

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{Q}{N}}^{\frac{Q}{N}} u(\beta)^h e(-N\beta)\, d\beta &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u(\beta)^h e(-N\beta)\, d\beta + \mathcal{O}\left(\frac{N^{h-1}}{Q^{h-1}}\right) \\ &= \frac{N^{h-1}}{h-1} + \mathcal{O}(N^{h-2}) + \mathcal{O}\left(\frac{N^{h-1}}{Q^{h-1}}\right) = \frac{N^{h-1}}{h-1} + \mathcal{O}\left(\frac{N^{h-1}}{Q^{h-1}}\right), \end{aligned}$$

där feltermen från approximationen kommer från

$$\int_{\frac{Q}{N}}^{\frac{1}{2}} u(\beta)^h e(-N\beta)\, d\beta \ll \int_{\frac{Q}{N}}^{\frac{1}{2}} |u(\beta)|^h\, d\beta \ll \int_{\frac{Q}{N}}^{\frac{1}{2}} \beta^{-h}\, d\beta \leq \frac{N^{h-1}}{Q^{h-1}},$$

och liknande för $\int_{-1/2}^{-Q/N} u(\beta)^h e(-N\beta) d\beta \ll \frac{N^{h-1}}{Q^{h-1}}$. Från Lemma 4.1.1 har vi $\mathfrak{S}_h(N,Q) = \mathfrak{S}_h(N) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Q^{h-2-\varepsilon}}\right)$ och därmed gäller

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{M}} F(\alpha)^h e(-N\alpha)\, d\alpha &= I_1 + I_2 = \mathcal{O}\left(\frac{N^{h-1}}{(\log N)^{C-5B}}\right) + \mathfrak{S}_h(N,Q)\left(\frac{N^{h-1}}{h-1} + \mathcal{O}\left(\frac{N^{h-1}}{Q^{h-1}}\right)\right) \\ &= \mathfrak{S}_h(N)\frac{N^{h-1}}{h-1} + \mathcal{O}\left(\frac{N^{h-1}}{(h-1)Q^{h-2-\varepsilon}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{N^{h-1}}{(\log N)^{B(h-1)}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{N^{h-1}}{(\log N)^{C-5B}}\right) \\ &= \mathfrak{S}_h(N)\frac{N^{h-1}}{h-1} + \mathcal{O}\left(\frac{N^{h-1}}{(\log N)^{(h-2-\varepsilon)B}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{N^{h-1}}{(\log N)^{C-5B}}\right). \end{aligned}$$

□

4.3 Integral över minor arcs

För att få en integraluppskattning över minor arcs så behövs storleken av summan $S(\alpha) = \sum_{n\leq N} \Lambda(n) e(n\alpha)$.

Sats 4.3.1. *Antag att α är nära ett rationellt tal enligt $|\alpha - \frac{a}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$, $(a,q) = 1$. Då gäller*

$$S(\alpha) \ll \left(Nq^{-1/2} + N^{4/5} + N^{1/2}q^{1/2}\right)(\log N)^4 \tag{22}$$

Moralen är att om α är ett tal som inte är nära ett rationellt tal med liten nämnare så kommer summan $\sum_{n\leq N} e(n\alpha)$ bli liten, då mycket förkortning sker. Från definitionen av Λ, så är summan $S(\alpha)$ och $F(\alpha)$ av samma storleksordning, se Sats 4.0.1, och mer exakt så har vi att

$$|S(\alpha) - F(\alpha)| \leq \sum_{p\leq N^{1/2}} \log(p)e(p\alpha) = \mathcal{O}(N^{1/2}\log N).$$

Därmed kan man använda samma uppskattning även för $F(\alpha)$. Vi följer Davenports bevis [Dav13] till Sats 4.3.1, med uppdelning av exponentialsummor, se Appendix A.6.

Lemma 4.3.2. *För alla $B^* > 0$ gäller*

$$\int_{\mathfrak{m}} F(\alpha)^h e(-\alpha N)d\alpha \ll_{B^*} \frac{N^{h-1}}{(\log N)^{B^*}}.$$

Bevis. Låt $\alpha \in [0,1] \setminus \mathfrak{M}$. Från Sats A.1.1 gäller att det existerar $\frac{a}{q} \in [0,1]$ med $1 \leq q \leq \frac{N}{Q}$ och $(a,q) = 1$ sådan att

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{Q}{q}. \tag{23}$$

Om då $q \leq Q$, så gäller att $\alpha \in \mathfrak{M}(q,a) \subseteq \mathfrak{M}$, vilket motsäger valet av α. Därmed är $(\log N)^B = Q < q \leq \frac{N}{Q} = \frac{N}{(\log N)^B}$. Med detta och Sats 4.3.1 följer det att

$$F(\alpha) \ll \left(Nq^{-1/2} + N^{4/5} + N^{1/2}q^{1/2}\right)(\log N)^4 \ll \frac{N}{(\log N)^{B/2-4}},$$

vilket medför en övre uppskattning av integralen över minor arcs enligt

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{m}} F(\alpha)^h e(-\alpha N)d\alpha &\leq \int_{\mathfrak{m}} |F(\alpha)|^h \leq \sup_{\beta\in\mathfrak{m}} |F(\beta)|^{h-2} \int_0^1 |F(\alpha)|^2 d\alpha \\ &\ll \frac{N^{h-2}}{(\log N)^{(h-2)(B/2-4)}} \int_0^1 |F(\alpha)|^2 d\alpha.\end{aligned}$$

Eftersom

$$\int_0^1 |F(\alpha)|^2 d\alpha = \int_0^1 F(\alpha)\overline{F(\alpha)}d\alpha = \int_0^1 \sum_{p_1,p_2\leq N} \log(p_1)\log(p_2)e\big((p_1-p_2)\alpha\big)d\alpha = \sum_{p\leq N}\log(p)^2,$$

där sista likheten följer från Fourierortogonaliteten, Ekvation (6), så kan vi använda Chebyshevs sats, Sats 4.0.1 och uppskatta $\log_{p\leq N}\log(p)^2 \leq \log N\sum_{p\leq N}\log p \ll N\log N$. Med insättningen $B^* = (h-2)(B/2-4)-1$ fås då $\int_{\mathfrak{m}} F(\alpha)^h e(-\alpha N)d\alpha \ll_{B^*} \frac{N^{h-1}}{(\log N)^{B^*}}$.

□

4.4 Bevis av asymptotiska formeln

Sats 4.4.1. *Låt $r_h(N)$ beteckna antalet representationer som $N \equiv h \pmod 2$ kan skrivas som summan utav h primtal. Det gäller att*

$$r_h(N) = \mathfrak{S}_h(N)\frac{N^{h-1}}{(h-1)(\log N)^h}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\log\log N}{\log N}\right)\right). \tag{24}$$

Bevis. Från Sats 4.2.5 för uppskattningen över major arcs tillsammans med Sats 4.3.2 för uppskattningen över minor arcs så härleds att för alla $B, C, B^* > 0$ med $C > 2B$ gäller

$$\begin{aligned}R_h(N) &= \int_0^1 F(\alpha)^h e(-N\alpha)d\alpha = \int_{\mathfrak{M}} F(\alpha)^h e(-N\alpha)d\alpha + \int_{\mathfrak{m}} F(\alpha)^h e(-N\alpha)d\alpha \\ &= \mathfrak{S}_h(N)\frac{N^{h-1}}{h-1} + \mathcal{O}\left(\frac{N^{h-1}}{(\log N)^{(h-2-\varepsilon)B}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{N^{h-1}}{(\log N)^{C-5B}}\right) + \frac{N^{h-1}}{(\log N)^{B^*}},\end{aligned}$$

där de implicerade konstanterna beror på B, B^*, C, ε samt h. För $A > 0$, sätt $B^* = A$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $B = \frac{A}{h-2-\epsilon}$ och $C = A + 5B$. Därmed erhålls för alla $A > 0$

$$R_h(N) = \mathfrak{S}_h(N)\frac{N^{h-1}}{h-1} + \mathcal{O}\left(\frac{N^{h-1}}{(\log N)^A}\right), \tag{25}$$

där den implicerade konstanten beror på A. Nu är vi redo att härleda det asymptotiska utseende för $r_h(N)$. Först härleds en övre och under gräns för $r_h(N)(\log N)^h$ i termer av $R_h(N)$.

$$R_h(N) = \sum_{p_1+\cdots+p_h=N} \log(p_1)\cdots\log(p_h) \leq \log(N)^h r_h(N).$$

För $0 < \delta < \frac{1}{2}$, låt $r_{h,\delta}(N)$ beteckna antalet representationer där $p_i \leq N^{1-\delta}$ för något $i \in 1, \ldots, h$. Då gäller

$$r_{h,\delta}(N) \leq h \sum_{\substack{p_1,\ldots,p_{h-1}\leq N \\ p_1\leq N^{1-\delta} \\ p_h=N-(p_1+\cdots+p_{h-1})}} 1 \leq h\pi(N^{1-\delta})\pi(N)^{h-2} \ll \frac{N^{h-1-\delta}}{(\log N)^{h-1}}$$

och därmed existerar det en konstant $c > 0$ sådan att $r_{h,\delta}(N) \leq c\frac{N^{h-1-\delta}}{(\log N)^{h-1}}$. En undre gräns för $R_h(N)$ ges av

$$\begin{aligned}R_h(N) &\geq \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_h=N \\ \forall i, p_i>N^{1-\delta}}} \log(p_1)\cdots\log(p_h) \geq (1-\delta)^h(\log N)^h \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_h=N \\ \forall i, p_i>N^{1-\delta}}} 1 \\ &\geq (1-\delta)^h(\log N)^h(r_h(N) - r_{h,\delta}(N)) \geq (1-\delta)^h(\log N)^h\left(r_h(N) - c\frac{N^{h-1-\delta}}{(\log N)^{h-1}}\right).\end{aligned}$$

Därmed fås en övre gräns för $(\log N)^h r_h(N)$ enligt

$$(\log N)^h r_h(N) \leq (1-\delta)^{-h}R_h(N) + c(\log N)N^{h-1-\delta}.$$

Detta gäller för alla $0 < \delta < 1/2$. Beteckna $f(\delta) = 1-(1-\delta)^h$. Vi har att $f(\delta) \leq \delta \max_{\beta\in(0,1/2)} f'(\beta) \ll \delta$. Tillsammans ger detta

$$0 \leq (\log N)^h r_h(N) - R_h(N) \leq (1-(1-\delta)^h)R_h(N) + c(\log N)N^{h-1-\delta} \ll \delta R_h(N) + \log(N)N^{h-1-\delta}.$$

Ansättning av storleken på $R_h(N)$ från ekvation (25) ger att uttrycket ovan är

$$\ll \delta N^{h-1} + \log(N)N^{h-1-\delta} = N^{h-1}(\delta + (\log N)N^{-\delta}).$$

Här ansätts ett δ så att termerna blir av samma storleksordning, $\delta = \frac{2\log\log N}{\log N}$, vilket medför att

$$0 \leq (\log N)^h r_h(N) - R_h(N) \ll \frac{N^{h-1}\log\log N}{\log N},$$

vilket med ekvation (25) ger att

$$(\log N)^h r_h(N) = \mathfrak{S}_h(N)\frac{N^{h-1}}{h-1} + \mathcal{O}\left(\frac{N^{h-1}}{(\log N)^A}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{N^{h-1}\log\log N}{\log N}\right),$$

alltså

$$r_h(N) = \mathfrak{S}_h(N)\frac{N^{h-1}}{(h-1)(\log N)^h}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\log\log N}{\log N}\right)\right).$$

$\square$

Referenser

[BBK+23] F. Balestrieri, J. Brandes, M. Kaesberg, J. Ortmann, M. Pieropan, and R. Winter, *Campana points on diagonal hypersurfaces*, arXiv:2302.08164 (2023).

[Bok94] K. D. Boklan, *The asymptotic formula in Waring's problem*, Mathematika **41** (1994), no. 2, 329–347.

[BY19] T. Browning and S. Yamagishi, *Arithmetic of higher-dimensional orbifolds and a mixed Waring problem*, Mathematische Zeitschrift **299** (2019), 1071–1101.

[Dav13] H. Davenport, *Multiplicative number theory*, vol. 74, Springer, 2013.

[Hel13] H. A. Helfgott, *The ternary Goldbach conjecture is true*, arXiv preprint arXiv:1312.7748 (2013).

[Hil09] D. Hilbert, *Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n-ter Potenzen (Waringsches Problem)*, Math. Ann. **67** (1909), 281–300.

[HL20] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *A new solution of Waring's problem*, Quart. J. Math. **48** (1920).

[Hua38] L. K. Hua, *On Waring's problem*, Quart. J. Math. **9** (1938), no. 1, 199–202.

[LW02] M. C. Liu and T. Z. Wang, *On the Vinogradov bound in the three primes Goldbach conjecture*, Acta Arithmetica **105** (2002), 133–175.

[Nat96] M. B. Nathanson, *Additive number theory: The classical bases*, 1st ed., Springer, New York, NY, 1996.

[Vau86] R. C. Vaughan, *On Waring's problem for smaller exponents. II*, Mathematika **33** (1986), no. 1, 6–22.

[Vau97] ———, *The Hardy-Littlewood method*, 2 ed., Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 1997.

[Vin37] I. M. Vinogradov, *The representation of an odd number as a sum of three primes*, Dokl. Akad. NaukSSSR, vol. 16, 1937.

[Vin54] ———, *The method of trigonometrical sums in the theory of numbers.*, Interscience Publishers, 1954.

[Vin84] ———, *Representation of an odd number as a sum of three primes*, pp. 61–64, World Scientific, 1984.

[VW02] R. C. Vaughan and T. D. Wooley, *Waring's problem: A survey*, NUMBER THEORY FOR THE MILLENNIUM III (United States) (MA Bennett, BC Berndt, N Boston, HG Diamond, AJ Hildebrand, and W Philipp, eds.), A K Peters, 2002, Millennial Conference on Number Theory ; Conference date: 21-05-2000 Through 26-05-2000, pp. 301–340 (English).

[War82] E. Waring, *Meditationes algebraicæ, ab Edvardo Waring ...*, Nineteenth Century Collections Online (NCCO): Science, Technology, and Medicine: 1780-1925, Typis academicis excudebat J. Archdeacon, 1782.

[Woo] T. D. Wooley, *Math 258x analytic methods for diophantine problems*, Föreläsningsanteckningar (opublicerad),University of Michigan, okänt år.

[Woo12] ———, *Vinogradov's mean value theorem via efficient congruencing*, Ann. Math. **175** (2012), no. 3, 1575–1627.

[Woo18] ———, *Nested efficient congruencing and relatives of Vinogradovs mean value theorem*, Proc. London Math. Soc. **118** (2018), no. 4, 942–1016.

[WW21] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A course of modern analysis*, 5 ed., Cambridge University Press, 2021.

A Appendix

A.1 Allmäna satser och lemman

Dessa satser och lemman används i båda av de två delarna av rapporten. Beviset för Dirichlets sats följer den [Nat96] lägger fram i Sats 4.1.

Sats A.1.1. *(Dirichlet) Låt α och Q vara reella tal, med $Q \geq 1$. Det existerar heltal a och q så att*

$$1 \leq q \leq Q, \quad (a,q) = 1,$$

och

$$\|\alpha q\| < \frac{1}{Q}.$$

Bevis. Låt $N = [Q]$. Om $\|\alpha q\| < \frac{1}{N+1}$ för något q är vi klara. Vi kan alltså anta att $\|\alpha q\| > \frac{1}{N+1}$ för alla q. Då följer det från Dirichlets lådprincip att det existerar heltal $i \in [1, N-1]$ och $q_1, q_2 \in [1, N]$ så att $1 \leq q_1 < q_2 \leq N$ och

$$\{q_1\alpha\}, \{q_2\alpha\} \in \left[\frac{i}{N+1}, \frac{i+1}{N+1}\right).$$

Låt $q = q_2 - q_1 \in [1, N-1]$ och $a = [q_2\alpha] - [q_1\alpha]$. Då är

$$|q\alpha - a| = |(q_2\alpha - [q_2\alpha]) - (q_1\alpha - [q_1\alpha])| = |\{q_2\alpha\} - \{q_1\alpha\}| < \frac{1}{N+1} < \frac{1}{Q}.$$

Detta avslutar beviset. □

Lemma A.1.2 fås från Lemma 2.2 i [Vau97] och opublicerade föreläsningsanteckningar [Woo].

Lemma A.1.2. *Antag att α, U och V är reella tal så att $U \geq 1$ och $V \geq 1$ samt att*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$$

med $(a,q) = 1$. Då är

$$\sum_{k \leq U} \min\left(\frac{UV}{k}, \|\alpha k\|^{-1}\right) \ll UV\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{V} + \frac{q}{UV}\right) \log 2Uq.$$

Bevis. Låt

$$S = \sum_{k \leq U} \min\left(UVk^{-1}, \|\alpha k\|^{-1}\right).$$

Man kan tydligt se att

$$S \leq \sum_{0 \leq j \leq \frac{U}{q}} \sum_{r=1}^{q} \min\left(\frac{UV}{qj+r}, \|\alpha(qj+r)\|^{-1}\right). \tag{26}$$

För varje j, låt $y_j = [\alpha j q^2]$ och $\theta = q^2\alpha - qa$. Då är

$$\alpha(qj+r) = (y_j + ar)\frac{1}{q} + \{\alpha j q^2\}\frac{1}{q} + \theta r q^{-2}.$$

Vi delar in i två fall. Först undersöker vi då $j = 0$ och $1 \leq r \leq \frac{q}{2}$. Detta ger oss

$$\|\alpha(qj+r)\| \geq \left\|\frac{ar}{q}\right\| - \frac{1}{2q} \geq \frac{1}{2}\left\|\frac{ar}{q}\right\|.$$

Nästa fall är att kolla vad som händer då $j \neq 0$ eller då $j = 0$ och $\frac{q}{2} \leq r \leq q$. Vi får att $qj + r \gg q(j+1)$. Observera att

$$\left\| \frac{y_j + ar}{q} \right\| \geq \frac{3}{q} \tag{27}$$

är sant så länge

$$ar + y_j \equiv b \pmod{q} \tag{28}$$

inte håller för något b som uppfyller $|b| \leq 2$. Vidare för ett fixt värde av j så finns det som mest 5 värden av r med $\frac{q}{2} < r \leq q$ så att Ekvation (28) stämmer. Notera att r endast löper över en period. Detta ger oss då att

$$\begin{aligned}
\|\alpha(qj + r)\| &\geq \left\| \frac{y_j + ar}{q} \right\| - \frac{2}{q} \geq \frac{1}{3} \left\| \frac{y_j + ar}{q} \right\| + \frac{2}{3} \left\| \frac{y_j + ar}{q} \right\| - \frac{2}{q} \\
&\geq \frac{1}{3} \left\| \frac{y_j + ar}{q} \right\| + \frac{2}{3}\frac{3}{q} - \frac{2}{q} \geq \frac{1}{3} \left\| \frac{y_j + ar}{q} \right\|.
\end{aligned}$$

Vi ska nu dela upp Ekvation (26) i de olika bidragen som vi arbetat fram. Först har vi bidraget från fallet då $j = 0$ och $1 \leq r \leq \frac{q}{2}$, sedan bidraget från de r när Ekvation (27) håller och till slut bidraget från de 5 stycken r så att det inte håller. Vi betecknar dessa 5 som $r_b = \{r : ar + y_j \not\equiv b \pmod{q},\ |b| \leq 2\}$. Vi får alltså

$$\begin{aligned}
S &\ll \sum_{1 \leq r \leq \frac{q}{2}} \|\alpha(qj + r)\|^{-1} + \sum_{0 \leq j \leq \frac{U}{q}} \sum_{\substack{r=1 \\ r \notin r_b}}^{q} \|\alpha(qj + r)\|^{-1} + \sum_{0 \leq j \leq \frac{U}{q}} \sum_{r \in r_b} \frac{UV}{qj + r} \\
&\ll \sum_{1 \leq r \leq \frac{q}{2}} \left\| \frac{ar}{q} \right\|^{-1} + \sum_{0 \leq j \leq \frac{U}{q}} \sum_{\substack{r=1 \\ r \notin r_b}}^{q} \left\| \frac{y_j + ar}{q} \right\|^{-1} + \sum_{0 \leq j \leq \frac{U}{q}} \sum_{r \in r_b} \frac{UV}{qj + r}.
\end{aligned} \tag{29}$$

Låt oss nu undersöka enbart den sista summan i Ekvation (29). Genom att använda $qj+r \gg q(j+1)$ får vi att

$$\sum_{0 \leq j \leq \frac{U}{q}} \sum_{r \in r_b} \frac{UV}{qj + r} \ll \sum_{0 \leq j \leq \frac{U}{q}} \frac{5UV}{q(j+1)} \ll \sum_{0 \leq j \leq \frac{U}{q}} \frac{UV}{q(j+1)}.$$

Nu med denna informationen kan vi återgå till S och då får vi att

$$\begin{aligned}
S &\ll \sum_{1 \leq r \leq \frac{q}{2}} \left\| \frac{ar}{q} \right\|^{-1} + \sum_{0 \leq j \leq \frac{U}{q}} \sum_{\substack{r=1 \\ r \notin r_b}}^{q} \left\| \frac{y_j + ar}{q} \right\|^{-1} + \sum_{0 \leq j \leq \frac{U}{q}} \frac{UV}{q(j+1)} \\
&= \sum_{1 \leq r \leq \frac{q}{2}} \left\| \frac{ar}{q} \right\|^{-1} + \sum_{0 \leq j \leq \frac{U}{q}} \left(\frac{UV}{q(j+1)} + \sum_{r=1}^{q} \left\| (y_j + ar)\frac{1}{q} \right\|^{-1} \right) \\
&\ll (Uq^{-1} + 1) \sum_{1 \leq h \leq \frac{q}{2}} \frac{q}{h} + \frac{UV}{q} \sum_{0 \leq j \leq \frac{U}{q}} \frac{1}{j+1} \\
&\ll (U + q)\log(q) + \frac{UV}{q} \log\left(\frac{U}{q} + 1\right) \\
&\ll UV \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{V} + \frac{q}{UV} \right) \log 2Uq,
\end{aligned}$$

vilket avslutar beviset. □

Sats A.1.3 är tagen ifrån Sats A.4 i [Nat96].

Sats A.1.3. *Låt u(n) och f(n) vara aritmetiska funktioner. Definiera funktionen*

$$U(t) = \sum_{n \le t} u(n).$$

Låt a och b vara ickenegativa heltal så att $a < b$. Då är

$$\sum_{n=a+1}^{b} u(n)f(n) = U(b)f(b) - U(a)f(a+1) - \sum_{n=a+1}^{b-1} U(n)\,(f(n+1)) - f(n)).$$

Låt x och y vara reella tal så att $0 \le y < x$. Ifall $f(t)$ är en funktion med en kontinuerlig derivata på intervallet $[y, x]$, då är

$$\sum_{y<n\le x} u(n)f(n) = U(x)f(x) - U(y)f(y) - \int_y^x U(t)f^{'}(t)\,dt.$$

Vidare om $f(t)$ har en kontinuerlig derivata på $[1, x]$ så har vi

$$\sum_{n\le x} u(n)f(n) = U(n)f(x) - \int_1^x U(t)f'(t)\,dt.$$

Bevis. Detta är endast uträkningar

$$\sum_{n=a+1}^{b} u(n)f(n) = \sum_{n=a+1}^{b} (U(n) - U(n-1))\,f(n) = \sum_{n=a+1}^{b} U(n)f(n) - \sum_{n=a+1}^{b-1} U(n)f(n+1)$$
$$= U(b)f(b) - U(a)f(a+1) - \sum_{n=a+1}^{b-1} U(n)\left(f(n+1) - f(n)\right).$$

Ifall funktionen $f(t)$ är kontinuerligt differentierbar inom intervallet $[y, x]$, då är

$$f(n+1) - f(n) = \int_n^{n+1} f'(t)\,dt$$

och

$$U(n)\,(f(n+1) - f(n)) = \int_n^{n+1} U(t)f'(t)\,dt$$

eftersom att $U(N)$ är styckvis kontinuerlig. Låt $a = [y]$ och $b = [x]$. Då är

$$\sum_{y<n\le x} u(n)f(n) = \sum_{n=a+1}^{b} u(n)f(n)$$
$$= U(b)f(b) - U(a)f(a+1) - \sum_{n=a+1}^{b-1} U(n)\,(f(n+1) - f(n))$$
$$= U(x)f(x) - U(y)f(y) - U(x)\,(f(x) - f(b)) - U(y)\,(f(a+1) - f(y)) - \int_{a+1}^{b} U(t)f'(t)\,dt.$$

Detta avslutar beviset. □

A.2 Teori om multiplikativa funktioner

Definition A.2.1. *En multiplikativ aritmetisk funktion är en funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ där $f(mn) = f(m)f(n)$ då $(m, n) = 1$.*

En konsekvens av definitionen är att en multiplikativ funktion är definierad av dess funktionsvärden i primtalspotenserna.

Sats A.2.2. *En aritmetisk funktion är multiplikativ om och endast om* $f(n) = \prod_{p^m \| n} f(p^m)$ *för varje* $n \in \mathbb{N}$*, där* $p^m \| n$ *betyder att* $p^m | n$ *men* $p^{m+1} \not| n$.

Nedan följer två vanliga multiplikativa funktioner.

Definition A.2.3. *Eulers* φ*-funktion* $\varphi(n) = \sum\limits_{\substack{1 \leq t \leq n \\ (t,n)=1}} 1$*. Funktionen* $\varphi(n)$ *betecknar alltså antalet naturliga tal mindre än eller lika med* n *som är relativt prima med* n.

Från att φ är en multiplikativ funktion och egenskapen att $\varphi(p^m) = p^m - p^{m-1} = p^m(1 - \frac{1}{p})$ så blir

$$\varphi(n) = p_1^{k_1}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots p_r^{k_r}\left(1 - \frac{1}{p_r}\right) = n \prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Definition A.2.4. *Möbiusfunktionen* $\mu(n)$ *är en multiplikativ funktion med* $\mu(p^r) = \begin{cases} -1 \text{ om } r = 1, \\ 1 \text{ om } r = 0, \\ 0 \text{ annars.} \end{cases}$

Definition A.2.5. *För heltal* N *och* q *med* $q \geq 1$ *definieras Ramanujans summa som*

$$c_q(N) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}} e\left(\frac{an}{q}\right).$$

Lemma A.2.6. *Ramanujans summa är multiplikativ i* q *och kan uttryckas i termer av möbiusfunktionen enligt*

$$c_q(n) = \sum_{d|(q,n)} \mu\left(\frac{q}{d}\right)d.$$

Speciellt har vi att $c_q(n) = \mu(q)$ *om* $(q,n) = 1$.

Bevis. Låt $f_d(n) := \sum\limits_{l=1}^{d} e\left(\frac{ln}{d}\right) = \begin{cases} d & \text{om } d \mid n \\ 0 & \text{om } d \nmid n. \end{cases}$ Det följer att

$$\begin{aligned} c_q(n) &= \sum_{\substack{k=1 \\ (k,q)=1}} e\left(\frac{kn}{q}\right) = \sum_{k=1}^{q} e\left(\frac{kn}{q}\right) \sum_{d|(k,q)} \mu(d) = \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{\substack{k=1 \\ d|k}}^{q} e\left(\frac{kn}{q}\right) = \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{l=1}^{q/d} e\left(\frac{ln}{q/d}\right) \\ &= \sum_{d|q} \mu(d) f_{q/d}(n) = \sum_{d|q} \mu\left(\frac{q}{d}\right) f_d(n) = \sum_{\substack{d|q \\ d|n}} \mu\left(\frac{q}{d}\right)d = \sum_{d|(q,n)} \mu\left(\frac{q}{d}\right)d. \end{aligned}$$

För $(q_1, q_2) = 1$ gäller att varje delare d till $q_1 q_2$ kan skrivas som $d = d_1 d_2$ med $d_1 \mid q_1$ och $d_2 \mid q_2$ och eftersom $\mu(k)$ är multiplikativ följer

$$\begin{aligned} c_{q_1 q_2}(n) &= \sum_{d|(q_1 q_2, n)} \mu\left(\frac{q_1 q_2}{d}\right)d = \sum_{\substack{d_1|(q_1,n) \\ d_2|(q_2,n)}} \mu\left(\frac{q_1 q_2}{d_1 d_2}\right)d_1 d_2 = \sum_{\substack{d_1|(q_1,n) \\ d_2|(q_2,n)}} \mu\left(\frac{q_1}{d_1}\right)d_1 \mu\left(\frac{q_2}{d_2}\right)d_2 \\ &= \sum_{d_1|(q_1,n)} \mu\left(\frac{q_1}{d_1}\right)d_1 \sum_{d_2|(q_2,n)} \mu\left(\frac{q_2}{d_2}\right)d_2 = c_{q_1}(n) c_{q_2}(n) \end{aligned}$$

vilket visar att $c_q(n)$ är multiplikativ i q. □

Lemma A.2.7. *Låt* $f(n)$ *vara en multiplikativ funktion med* $\lim_{p^k \to \infty} f(p^k) = 0$ *då* p^k *går igenom alla primtalspotenser. Då gäller*

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = 0.$$

Bevis. Eftersom gränsvärdet är noll finns endast ett ändligt antal primtalspotenser p^k så att $|f(p^k)| \geq 1$. Låt

$$A = \prod_{|f(p^k)| \geq 1} |f(p^k)|,$$

och $0 < \varepsilon < A$. Då är $A \geq 1$ och det finns endast ändligt många primtalspotenser p^k sådana att $|f(p^k)| \geq \varepsilon/A$. Det medför att det bara finns ett ändligt antal naturliga tal n sådana att

$$|f(p^k)| \geq \frac{\varepsilon}{A}$$

för varje primtalspotens $p^k \mid n$. Om n är tillräckligt stort gäller alltså att n delar åtminstone en primtalspotens p^k sådan att $|f(p^k)| < \varepsilon/A$, och n kan därmed skrivas som

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i} \prod_{i=r+1}^{r+s} p_i^{k_i} \prod_{i=r+s+1}^{r+s+t} p_i^{k_i},$$

där $p_1, \ldots, p_{r+s+t}$ är parvis distinkta primtal med $t \geq 1$ och

$$\begin{gathered} 1 \leq |f(p_i^{k_i})| \quad \text{för } i = 1, \ldots, r, \\ \varepsilon/A \leq |f(p_i^{k_i})| < 1 \quad \text{för } i = r+1, \ldots, r+s \\ |f(p_i^{k_i})| < \varepsilon/A \quad \text{för } i = r+s+1, \ldots, r+s+t. \end{gathered}$$

Eftersom $f(n)$ är multiplikativ gäller därmed

$$|f(n)| = \prod_{i=1}^{r} |f(p_i^{k_i})| \prod_{i=r+1}^{r+s} |f(p_i^{k_i})| \prod_{i=r+s+1}^{r+s+t} |f(p_i^{k_i})| < A(\varepsilon/A)^t \leq \varepsilon.$$

□

Lemma A.2.8. *För alla tillräckligt stora N, och alla $\varepsilon > 0$ gäller*

$$N^{1-\varepsilon} < \varphi(N) < N$$

Bevis. Vi vet att $\varphi(N) < N$ för alla $N > 1$ och eftersom $\frac{p}{p-1} < 2$ för alla primtal p gäller

$$\frac{p^{m(1-\varepsilon)}}{\varphi(p^m)} = \frac{p^{m(1-\varepsilon)}}{p^m - p^{m-1}} = \frac{p}{p-1}\frac{p^{m(1-\varepsilon)}}{p^m} \leq \frac{2}{p^{m\varepsilon}}$$

och alltså $\lim_{p^m \to \infty} \frac{p^{m(1-\varepsilon)}}{\varphi(p^m)} = 0$. Från Lemma A.2.7 följer $\lim_{N \to \infty} \frac{N^{1-\varepsilon}}{\varphi(N)} = 0$ eftersom funktionen $\frac{N^{1-\varepsilon}}{\varphi(N)}$ är multiplikativ. □

Definition A.2.9. *Dirichletkonvolutionen av två aritmetiska funktioner f och g definieras som $f * g := \sum_{ab=n} f(a)g(b)$.*

Nedan följer några egenskaper för Dirichletkonvolutionen. En av dessa är att Dirichletkonvolution skapar en kommutativ ring med avseende på $(+, *)$ över mänden av aritmetiska funktioner:

1. (associativ) $(f * g) * h = f * (g * h)$;
2. (distributiv) $f * (g + h) = f * g + f * h$;
3. (kommutativ) $f * g = g * f$;
4. (enhetselement) $\varepsilon(n) = \begin{cases} 1 \text{ om } n = 1 \\ 0 \text{ annars} \end{cases}$, det vill säga $\varepsilon * f = f * \varepsilon = f$;
5. om $f(1) = 1$ så existerar f^{-1} sådan $f^{-1} * f = f * f^{-1} = \varepsilon$;

6. om f och g är multiplikativa så är $f * g$ också multiplikativ;

7. om f är multiplikativ så är f^{-1} multiplikativ.

Vi har följande identiteter

$$1 * \mu(n) = \sum_{d|n} \mu(d) = \varepsilon(n)$$

det vill säga $1^{-1} = \mu(n)$ och

$$1 * \Lambda(n) = \sum_{d|n} \Lambda(d) = \log(n).$$

Till varje aritmetisk funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ kan man definiera korresponderande Dirichletserie $F_f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genom

$$F_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}.$$

Dirichletserien är multiplikativ med avseende på Dirichletkonvolution av två aritmetiska funktioner $f * g$. Det vill säga att

$$F_{f*g}(s) = F_f(s)F_g(s).$$

Från $1 * \mu(n) = \varepsilon(n)$ och $1 * \Lambda(n) = \log(n)$ så kan man härleda att

$$F_\mu(s) = \frac{1}{\zeta(s)}, \quad F_\Lambda(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

där ζ är Riemanns zetafunktion som definieras som

$$\zeta(s) = F_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Konvergensen av alla dessa funktioner är då $\Re(s) = \sigma > 1$.

Chebyshevs sats ger det asymptotiska beteendet av chebyshevfunktionerna

- $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$;
- $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log(x)$;
- $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^k \leq x} \log(x)$.

Proposition A.2.10. *Storheterna* $\frac{\pi(x)}{x/\log x}, \frac{\theta(x)}{x}, \frac{\psi(x)}{x}$ *har samma* $\limsup$ *och* $\liminf$.

Bevis. Vi bevisar att de har samma $\limsup$, beviset för $\liminf$ kan visas analogt. Genom att gruppera termerna i $\psi(x)$ med avseende på primtalspotenserna fås $\psi(x) = \sum_{p \leq x} \lfloor \frac{\log x}{\log p} \rfloor \log p$. Detta tillsammans med definitionerna ovan medför att

$$\theta(x) \leq \psi(x) \leq \sum_{p \leq x} \frac{\log x}{\log p} \log p = \log x \cdot \pi(x).$$

Därmed gäller $\limsup \frac{\theta(x)}{x} \leq \limsup \frac{\psi(x)}{x} \leq \limsup \frac{\pi(x)}{x/\log x}$. Samtidigt gäller för $\alpha < 1$ att

$$\theta(x) \geq \sum_{x^\alpha < p \leq x} \log p \geq \big(\pi(x) - \pi(x^\alpha)\big) \log(x^\alpha)$$

och från detta följer att

$$\frac{\theta(x)}{x} \geq \alpha \frac{\pi(x)}{x/\log x} - \alpha \log x \frac{\pi(x^\alpha)}{x}.$$

Eftersom $\pi(x^\alpha) < x^\alpha$ försvinner andra termen då $x \to \infty$ och därmed $\limsup \theta(x) \geq \limsup \alpha \frac{\pi(x)}{x/\log x}$. Detta gäller för alla $\alpha < 1$ och då vi låter α gå mot 1 så fås den önskade olikheten och vi är klara. $\square$

Sats A.2.11. *(Chebyshev) Storheterna $\pi(x), \theta(x), \psi(x)$ har för tillräckligt stora x följande asymptotiska beteende*

$$\pi(x) \asymp \frac{x}{\log x}, \quad \theta(x) \asymp x, \quad \psi(x) \asymp x.$$

Bevis. Vi visar att $\psi(x) \asymp x$, resten följer från Proposition A.2.10. Vi ska alltså visa att det för tillräckligt stora x existerar $c_1, c_2 > 0$ sådana att

$$c_1 x < \psi(x) < c_2 x.$$

Definiera $S(x) := \sum_{n \le x} \log(n)$ och $D(x) = S(x) - 2S(\frac{x}{2})$. Från Sats A.4.8 så fås $S(x) = x(\log x - 1) + \mathcal{O}(\log x)$. Därmed blir

$$D(x) = x(\log x - 1) + \mathcal{O}(\log x) - 2\frac{x}{2}(\log \frac{x}{2} - 1) + \mathcal{O}(\log \frac{x}{2}) = \log(2)x + \mathcal{O}(\log x)$$

och därmed $\frac{x}{2} \le D(x) \le x$ för tillräckligt stora x, $x > x_0$. Från identiteten $1 * \Lambda(n) = \log n$, det vill säga $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log(n)$ insatt i summan $S(x)$, fås

$$S(x) = \sum_{n \le x} \log(n) = \sum_{n \le x} \sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{d \le n} \Lambda(d) \sum_{\substack{n \le x \\ d|n}} 1 = \sum_{d \le x} \Lambda(d) \lfloor \frac{x}{d} \rfloor,$$

där $\lfloor \frac{x}{d} \rfloor$ motsvarar heltalsdelen av $\frac{x}{d}$. Då blir

$$D(x) = \sum_{d \le x} \Lambda(d) f\left(\frac{x}{d}\right),$$

där $f(t) = \lfloor t \rfloor - 2\lfloor t/2 \rfloor$. För $1 \le t < 2$ så är $f(t) = 1$ och för $t \ge 2$ är $f(t) \in \{0, 1\}$. Detta ger

$$\psi(x) - \psi(x/2) \le \sum_{\frac{x}{2} < d \le x} \Lambda(d) \le D(x) \le \sum_{d \le x} \Lambda(d) = \psi(x),$$

vilket tillsammans med $\frac{x}{2} \le D(x) \le x$ för $x \ge x_0$ medför att

(a) $\frac{x}{2} \le D(x) \le \psi(x)$;

(b) $\psi(x) \le D(x) + \psi(\frac{x}{2}) \le x + \psi(\frac{x}{2})$.

Olikhet (a) ger den undre begränsningen $c_1 = \frac{1}{2}$. En övre begränsning följer från (b) enligt

$$\psi(x) \le x + \psi(\frac{x}{2}) \le x + \frac{x}{2} + \psi(\frac{x}{4}) \le \cdots \le x \sum_{i=0}^{k-1} 2^{-i} \psi(\frac{x}{2^k}) \le 2x + \psi(\frac{x}{2^k}) \le 2x + \psi(x_0)$$

där k är vald sådan att $\frac{x}{2^k} \le x_0 \le \frac{x}{2^{k-1}}$. Då $\psi(x)$ växer till oändligheten fås en övre begränsning med $c_2 = 2.5$. □

A.3 Differensoperatorn

I detta stycke så definieras differensoperatorn tillsammans med lemman och satser som bygger på den, vilka alla är nödvändiga för vår kommande slutsats. Dessa definitioner följer från dem i Kapitel 4.2 i [Nat96]. Den linjära differensoperatorn Δ_d över en funktion f ges av

$$\Delta_d(f)(x) = f(x + d) - f(x).$$

Fortsättningsvis definieras den itererade differensoperatorn $\Delta_{d_l, d_{l-1}, \ldots, d_1}$ som

$$\Delta_{d_l, d_{l-1}, \ldots, d_1} = \Delta_{d_l} \circ \Delta_{d_{l-1}, \ldots, d_1} = \Delta_{d_l} \circ \Delta_{d_{l-1}} \circ \ldots \circ \Delta_{d_1}.$$

Vi låter Δ^l vara den itererade differensoperatorn med $d_i = 1$ för alla $i = 1, \ldots, l$. Följande Lemma A.3.1 och dess bevisgång är taget från Lemma 4.2 i [Na96].

Lemma A.3.1. *Låt $k \geq 1$ och låt $1 \leq l \leq k$. Vi låter $\Delta_{d_l, d_{l-1}, \ldots, d_1}$ vara itererade differensoperatorn. Då är*

$$\Delta_{d_l, d_{l-1}, \ldots, d_1}(x^k) = \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_l+j=k \\ j \geq 0, j_1, \ldots, j_l \geq 1}} \frac{k!}{j! j_1! \cdots j_l!} d_1^{j_1} \cdots d_l^{j_l} x^j = d_1 \cdots d_l p_{k-l}(x),$$

där $p_{k-l}(x)$ är ett polynom med grad $k-l$ och ledande koefficient $k(k-1)\cdots(k-1+1)$. Notera att om d_i för $i = 1, \ldots, l$ är heltal så är koefficienterna i polynomet $p_{k-l}(x)$ också heltal.

Bevis. Detta lemma förklarar polynomet som fås av den itererade differensoperatorn använt på funktionen $f(x) = x^k$. Detta bevis kommer vara ett induktionsbevis på l. Induktionsbasen är att visa att påståendet gäller för $l = 1$, vilket via binomialsatsen ger

$$\begin{aligned}
\Delta_{d_1}(x^k) &= (x + d_1)^k - x^k \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} d_1^{k-j} x^j - x^j \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} d_1^{k-j} x^j \\
&= \sum_{\substack{j_1+j=k \\ j \geq 0, j_1 \geq 1}} \frac{k!}{j! j_1!} d_1^{j_1} x^j.
\end{aligned}$$

Vi låter induktionsantagandet vara att lemmat håller för l. Sedan låter vi $1 \leq l \leq k-1$ och då får vi att

$$\begin{aligned}
\Delta_{d_{l+1}, d_l, d_{l-1}, \ldots, d_1}(x^k) &= \Delta_{d_{l+1}}(\Delta_{d_l, d_{l-1}, \ldots, d_1}(x^k)) = \\
&= \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_l+m=k \\ m \geq 0, j_1+\cdots+j_l \geq 1}} \frac{k!}{m! j_1! \cdots j_l!} d_1^{j_1} \cdots d_l^{j_l} \Delta_{d_{l+1}}(x^m) \\
&= \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_l+m=k \\ m \geq 0, j_1+\cdots+j_l \geq 1}} \frac{k!}{m! j_1! \cdots j_l!} d_1^{j_1} \cdots d_l^{j_l} \sum_{\substack{j_{l+1}+j=m \\ j \geq 0, j_{l+1} \geq 1}} \frac{m!}{j! j_{l+1}!} d_{l+1}^{j_{l+1}} x^j \\
&= \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_l+j_{l+1}+j=k \\ j \geq 0, j_1, \ldots, j_l, j_{l+1} \geq 1}} \frac{k!}{j! j_1! \cdots j_l! j_{l+1}!} d_1^{j_1} \cdots d_l^{j_l} d_{l+1}^{j_{l+1}} x^j.
\end{aligned}$$

På grund av att de multinomiala koefficienterna $\frac{k!}{j! j_1! \cdots j_l!}$ är heltal följer det att ifall $d_1, \ldots, d_l$ också är heltal, så har polynomet $p_{k-l}(x)$ heltalskoefficienter. Detta avslutar beviset. $\square$

Lemma A.3.2 och dess bevisgång är från Lemma 4.4 ifrån [Nat96].

Lemma A.3.2. *Låt $l \geq 1$ och $\Delta_{d_l, d_{l-1}, \ldots, d_1}$ vara den itererade differensoperatorn. Låt $f(x) = \alpha x^k + \ldots$ vara ett polynom av grad k där α är den ledande koefficienten. Då är*

$$\Delta_{d_l, \ldots, d_1}(f)(x) = d_1 \cdots d_l k(k-1) \cdots (k-l+1) \alpha x^{k-l} + O(x^{k-l-1})$$

ifall $1 \leq l \leq k$ och

$$\Delta_{d_l, \ldots, d_1}(f)(x) = 0$$

ifall $l > k$. Mer specifikt, ifall $l = k-1$ och $d_1 \cdots d_{k-1} \neq 0$, då är

$$\Delta_{d_l, \ldots, d_1}(f)(x) = d_1 \cdots d_{k-1} k! \alpha x + \beta,$$

alltså ett polynom av grad ett.

Bevis. Låt $f(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x^j$, där $\alpha_k = \alpha$. Genom att utnyttja Lemma A.3.1 få vi att

$$\Delta_{d_1,\ldots,d_l}(f)(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \Delta_{d_l,\ldots,d_1}(x^j) = d_l \cdots d_1 \frac{k!}{(k-l)!} \alpha x^{k-l} + \mathcal{O}(x^{k-l-1}).$$

Detta avslutar beviset. □

Lemma A.3.3 och dess bevisgång från Lemma 4.5 ifrån [Nat96].

Lemma A.3.3. *Låt $1 \leq l \leq k$. Ifall*

$$-P \leq d_1, \ldots, d_l, x \leq P,$$

då är

$$\Delta_{d_l,\ldots,d_1}(x^k) \ll P^k,$$

där den implicerade konstanten beror endast på k.

Bevis. Beviset följer direkt från Lemma A.3.1. □

A.4 Uppskattningar till Warings problem med flera olika potenser

Här följer en del satser och lemman som underbygger argumentet för slutsatsen i Warings problem för flera olika potenser. Beviset för A.4.1 följer beviset av Lemma 4.7 i [Nat96].

Lemma A.4.1. *För varje reellt tal α och alla heltal $N_1 < N_2$ gäller det att*

$$\sum_{n=N_1+1}^{N_2} e(\alpha n) \ll \min(N_2 - N_1, \|\alpha\|^{-1}).$$

Bevis. På grund av att $|e(\alpha n)| = 1$ för alla heltal n, så har vi

$$\left| \sum_{n=N_1+1}^{N_2} e(\alpha n) \right| \leq \sum_{n=N_1+1}^{N_2} 1 = N_2 - N_1.$$

Ifall $\alpha \notin \mathbb{Z}$, då är $\|\alpha\| > 0$ och $e(\alpha) \neq 1$. På grund av att summan är en geometrisk serie så har vi

$$\left| \sum_{n=N_1+1}^{N_2} e(\alpha n) \right| = \left| e(\alpha(N_1+1)) \sum_{n=0}^{N_2-N_1-1} e(\alpha)^n \right| = \left| \frac{e(\alpha(N_2-N_1)) - 1}{e(\alpha) - 1} \right| \leq \frac{2}{|e(\alpha) - 1|}$$
$$= \frac{2}{\left|e(\frac{\alpha}{2}) - e(-\frac{\alpha}{2})\right|} = \frac{2}{|2i\sin(\pi\alpha)|} = \frac{1}{|\sin(\pi\alpha)|} = \frac{1}{\sin(\pi\|\alpha\|)} \leq \frac{1}{2\|\alpha\|}$$

och därmed avslutas beviset. □

Bevis av Lemma A.4.2 följer dem från Lemma 4.12 och 4.13 i [Nat96].

Lemma A.4.2. *Låt N_1, N_2, N och l vara heltal så att $l \geq 1, N_1 < N_2$, och $0 \leq N_2 - N_1 \leq N$. Låt $f(n)$ vara en reellvärd aritmetisk funktion, och låt*

$$S(f) = \sum_{n=N_1+1}^{N_2} e(f(n)).$$

Då är

$$|S(f)|^{2^l} \leq (2N)^{2^l - l - 1} \sum_{|d_1|<N} \cdots \sum_{|d_1|<N} |S_{d_l,\ldots,d_1}(f)|,$$

där

$$S_{d_l,\ldots,d_1}(f) = \sum_{n \in I(d_l,\ldots,d_1)} e(\Delta_{d_l,\ldots,d_1})(f)(n)) \tag{30}$$

och $I(d_l, \ldots, d_1)$ är ett intervall av på rad följande heltal inom intervallet $[N_1 + 1, N_2]$.

Bevis. Bevisgången för detta bevis är en induktion. Basfallet är att visa för $l = 1$. För ett godtyckligt heltal d, låt

$$I(d) = [N_1 + 1 - d, N_2 - d] \cap [N_1 + 1, N_2].$$

Genom att ta kvadraten av absolutvärdet av den exponentiella summan så får vi

$$\begin{aligned}
|S(f)|^2 &= \sum_{n=N_1+1}^{N_2} \sum_{m=N_1+1}^{N_2} e(f(m) - f(n)) = \sum_{n=N_1+1}^{N_2} \sum_{d=N_1+1-n}^{N_2-n} e(f(n+d) - f(n)) \\
&= \sum_{d=-(N_2-N_1-1)}^{N_2-N_1-1} \sum_{n\in I(d)} e(\Delta_d(f)(n)) \leq \sum_{|d|<N} \left| \sum_{n\in I(d)} e(\Delta_d(f)(n)) \right| = \sum_{|d|<N} |S_d(f)|,
\end{aligned}$$

vilket visar basfallet. Induktionsantagandet är att antagandet gäller för något l. Vi ska nu i induktionssteget visa att påståendet gäller för $l + 1$. Vi använder Cauchy-Schwarz olikheten, och får

$$\begin{aligned}
|S(f)|^{2^{l+1}} &= (|S(f)|^{2^l})^2 \leq \left((2N)^{2^l-l-1} \sum_{|d_1|<N} \cdots \sum_{|d_l|<N} |S_{d_l,\ldots,d_1}(f)| \right)^2 \\
&= (2N)^{2^{l+1}-2l-2} \left(\sum_{|d_1|<N} \cdots \sum_{|d_l|<N} |S_{d_l,\ldots,d_1}(f)| \right)^2 \\
&\leq (2N)^{2^{l+1}-2l-2} (2N)^l \sum_{|d_1|<N} \cdots \sum_{|d_l|<N} |S_{d_l,\ldots,d_1}(f)|^2,
\end{aligned}$$

där $S_{d_l,\ldots,d_1}(f)$ är en exponentiell summa liknande den i Ekvation (30). Från basfallet får vi att för varje $d_1, \ldots, d_l$ finns det ett intervall

$$I(d_{l+1}, d_l, \ldots, d_1) \subseteq I(d_l, \ldots, d_1) \subseteq [N_1 + 1, N_2].$$

Detta intervall kan vara tomt, i det fallet kommer följande summeringen inte bidra med något. Vi får

$$\begin{aligned}
|S_{d_l,\ldots,d_1}(f)|^2 &= \left| \sum_{n\in I(d_l,\ldots,d_1)} e(\Delta_{d_l,\ldots,d_1}(f)(n)) \right|^2 \\
&\leq \sum_{|d_{l+1}|<N} \left| \sum_{n\in I(d_{l+1},d_l,\ldots,d_1)} e(\Delta_{d_{l+1},d_l,\ldots,d_1}(f)(n)) \right| \\
&= \sum_{|d_{l+1}|<N} \left| S_{d_{l+1},d_l,\ldots,d_1}(f) \right|
\end{aligned}$$

och slutligen så får vi att

$$|S(f)|^{2^{l+1}} \leq (2N)^{2^{l+1}-(l+1)-1} \sum_{|d_1|<N} \cdots \sum_{|d_l|<N} \sum_{|d_{l+1}|<N} \left| S_{d_{l+1},d_l,\ldots,d_1}(f) \right|.$$

Detta avslutar beviset. □

Lemma A.4.3 har argumenten från Lemma 4.14 i [Nat96].

Lemma A.4.3. *Låt $k \geq 1$, $K = 2^{k-1}$, och $\varepsilon > 0$. Låt $f(x) = \alpha x^k + \ldots$ vara ett polynom av grad k med reella koefficienter. Om*

$$S(f) = \sum_{n=1}^{N} e(f(n)),$$

så är

$$|S(f)|^K \ll N^{K-1} + N^{K-k+\varepsilon} \sum_{m=1}^{k!N^{k-1}} \min\left(N, \|m\alpha\|^{-1}\right),$$

där den implicerade konstanten endast beror på k och ε.

Bevis. Genom att använda Lemma A.4.2 med $l = k-1$ så får vi att

$$|S(f)|^K \leq (2N)^{K-k} \sum_{|d_1|<N} \cdots \sum_{|d_{k-1}|<N} |S_{d_{k-1},\ldots,d_1}(f)|,$$

där

$$S_{d_{k-1},\ldots,d_1}(f) = \sum_{n\in I(d_{k-1},\ldots d_1)} e(\Delta_{d_{k-1},\ldots d_1}(f)(n))$$

och $I(d_{k-1},\ldots d_1)$ är ett interval av heltal i $[1,N]$. Eftersom att $|e(t)| = 1$ för alla reella t så har vi övre gränsen

$$|S_{d_{k-1},\ldots d_1}(f)| \leq \sum_{n\in I(d_{k-1},\ldots,d_1)} |e(\Delta_{d_{k-1},\ldots d_1}(f)(n))| \leq N.$$

Enligt Lemma A.3.2 så gäller det att för nollskilda heltal $d_1,\ldots,d_{k-1}$ att differensoperatorn $\Delta_{d_{k-1},\ldots,d_1}$ använt på polynomet $f(x)$ av grad k, skapar ett linjärt polynom

$$\Delta_{d_{k-1},\ldots,d_1}(f)(x) = d_{k-1}\cdots d_1 k!\alpha x + \beta = \lambda x + \beta,$$

där $\lambda = d_{k-1},\ldots d_1 k!\alpha$ och $\beta \in \mathbb{R}$. Låt nu $I(d_{k-1},\ldots,d_1) = [N_1+1, N_2]$. Nu enligt Lemma A.4.1 har vi

$$\begin{aligned}
|S_{d_{k-1},\ldots,d_1}(f)| &= \left| \sum_{n\in I(d_{k-1},\ldots,d_1)} e\left(\Delta_{d_{k-1},\ldots,d_1}(f)(n)\right) \right| \\
&= \left| \sum_{n=N_1+1}^{N_2} e(\lambda n + \beta) \right| = \left| \sum_{n=N_1+1}^{N_2} e(\lambda n) \right| \ll \frac{1}{\|\lambda\|} = \frac{1}{\|d_{k-1}\cdots d_1 k!\alpha\|}
\end{aligned}$$

för $\lambda \notin \mathbb{Z}$. Det följer att

$$|S_{d_{k-1},\ldots,d_1}(f)| \leq \min(N, \|d_{k-1},\ldots,d_1 k!\alpha\|^{-1}).$$

Således får vi att

$$\begin{aligned}
|S(f)^K| &\leq (2N)^{K-k} \sum_{|d_1|<N} \cdots \sum_{|d_{k-1}|<N} |S_{d_{k-1},\ldots,d_1}(f)| \\
&\leq (2N)^{K-k} \sum_{|d_1|<N} \cdots \sum_{|d_{k-1}|<N} \min(N, \|d_{k-1}\cdots d_1 k!\alpha\|^{-1}).
\end{aligned}$$

Eftersom att det finns som mest $(k-1)(2N)^{k-2}$ val av $d_1,\ldots,d_{k-1}$ sådana att $d_1\cdots d_{k-1} = 0$, och varje sådant val bidrar N till summan, så följer det att

$$\begin{aligned}
|S(f)^K| &= (2N)^{K-k}(k-1)(2N)^{k-2}N + (2N)^{K-k} \sum_{1\leq|d_1|<N} \cdots \sum_{1\leq|d_{k-1}|<N} \min(N, \|d_{k-1}\cdots d_1 k!\alpha\|^{-1}) \\
&\ll N^{K-1} + N^{K-k} \sum_{d_1=1}^{N} \cdots \sum_{d_1=1}^{N} \min(N, \|d_{k-1}\cdots d_1 k!\alpha\|^{-1}),
\end{aligned}$$

där den implicerade konstanten endast beror på k. Eftersom att

$$1 \leq d_{k-1}\cdots d_1 k! \leq k!N^{k-1},$$

och att delarfunktionen $\tau(m)$ uppfyller $\tau(m) \ll_\varepsilon m^\varepsilon$, så följer det att antalet representationer av heltalet m på formen $d_{k-1}\cdots d_1 k! \leq m^\varepsilon \ll N^\varepsilon$. På grund av detta så får vi att

$$N^{K-1} + N^{K-k+\varepsilon} \sum_{m=1}^{k!N^{k-1}} \min(N, \|m\alpha\|^{-1}).$$

□

Bevisgången för Lemma A.4.4 är tagen från Lemma 5.1 i [Nat96].

Lemma A.4.4. *Ifall $|\beta| \leq \frac{1}{2}$, så gäller det att*

$$v_{k_i}(\beta) \ll \min(N^{\frac{1}{k_i}}, |\beta|^{-\frac{1}{k_i}}).$$

Bevis. Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{k_i} x^{\frac{1}{k_i}-1}$$

är positiv, kontinuerlig och avtagande för $x \geq 1$. Från Sats A.4.8 följer det att

$$|v_{k_i}(\beta)| \leq \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{k_i} m^{\frac{1}{k_i}-1} \leq \int_1^N k_i^{-1} x^{\frac{1}{k_i}-1}\, dx + f(1) \ll [N^{\frac{1}{k_i}}].$$

Ifall $|\beta| \leq \frac{1}{N}$ då är $[N^{\frac{1}{k_i}}] \leq N^{\frac{1}{k_i}} \leq |\beta|^{-\frac{1}{k_i}}$ och $v_{k_i}(\beta)) \ll \min(N^{\frac{1}{k_i}}, |\beta|^{-\frac{1}{k_i}})$. Antag att $\frac{1}{N} < |\beta| \leq \frac{1}{2}$. Då är $|\beta|^{-\frac{1}{k_i}} \ll N^{\frac{1}{k_i}}$. Låt $M = [|\beta|^{-1}]$. Då är

$$M \leq \frac{1}{\beta} < M+1 \leq N.$$

Låt $U(t) = \sum_{m \leq t} e(\beta m)$. Från Lemma A.4.1 har vi att $U(t) \ll \|\beta\|^{-1} = |\beta|^{-1}$. Med hjälp av Sats A.1.3 så kan vi se att

$$\begin{aligned}\sum_{m=M+1}^{N} \frac{1}{k_i} m^{\frac{1}{k_i}-1} e(\beta m) &= f(N)U(N) - f(M)U(M) - \int_M^N U(t) f'(t)\, dt \\ &\ll \frac{M^{\frac{1}{k_i-1}}}{|\beta|} \leq |\beta|^{-\frac{1}{k_i}} \ll \min(N^{\frac{1}{k_i}}, |\beta|^{-\frac{1}{k_i}}).\end{aligned}$$

På grund av detta så är

$$v_{k_i}(\beta) = \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{k_i} m^{\frac{1}{k_i}-1} e(\beta m) + \sum_{m=M+1}^{N} \frac{1}{k_i} m^{\frac{1}{k_i}-1} e(\beta m) \ll \min(N^{\frac{1}{k_i}}, |\beta|^{-\frac{1}{k_i}}).$$

Detta avslutar beviset. □

Bevisgången för Lemma A.4.5 är tagen från Lemma 5.2 i [Nat96].

Lemma A.4.5. *Låt q och a vara heltal så att $1 \leq q \leq N^\delta$, $0 \leq a \leq q$, och $(a,q) = 1$. Ifall $\alpha \in \mathfrak{M}(q,a)$, då är*

$$F_{k_i}(\alpha) = \left(\frac{S_{k_i}(q,a)}{a}\right) v_{k_i}\left(\alpha - \frac{a}{q}\right) + \mathcal{O}(N^{2\delta}).$$

Bevis. Låt $\beta = \alpha - \frac{a}{q}$ och $|\beta| \leq N^{-1+\delta}$ och

$$\begin{aligned}F_{k_i}(\alpha) - \frac{S(q,a)}{q} v(\beta) &= \sum_{m=1}^{\left[N^{\frac{1}{k_i}}\right]} e(\alpha m^{k_i}) - \frac{S_{k_i}(q,a)}{q} \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{k_i} m^{\frac{1}{k_i}-1} e(\beta m) \\ &= \sum_{m=1}^{\left[N^{\frac{1}{k_i}}\right]} e\left(\frac{\alpha m^{k_i}}{q}\right) e(\beta m^{k_i}) - \frac{S_{k_i}(q,a)}{q} \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{k} m^{\frac{1}{k_i}-1} e(\beta m) = \sum_{m=1}^{N} u(m) e(\beta m),\end{aligned}$$

där

$$u(m) = \begin{cases} e\left(\frac{am}{q}\right) - \left(\frac{S_{k_i}(q,a)}{q}\right) k_i^{-1} m^{\frac{1}{k_i}-1} & \text{ifall } m \text{ är en } k_i\text{:te potens,} \\ \\ -\left(\frac{S_{k_i}(q,a)}{q}\right) k_i^{-1} m^{\frac{1}{k_i}-1} & \text{annars.} \end{cases}$$

Vi ska estimera den sista summan. Låt $y \geq 1$. På grund av att $|S(q,a)| \leq q$, så har vi

$$\begin{aligned} \sum_{1\leq m\leq y} e\left(\frac{am^{k_i}}{q}\right) &= \sum_{r=1}^{q} e\left(\frac{ar^{k_i}}{q}\right) \sum_{\substack{a\leq m\leq y \\ m\equiv r (\mathrm{mod} q)}} 1 \\ &= S_{k_i}(q,a)\left(\left(\frac{y}{q}\right) + \mathcal{O}(1)\right) = y\left(\frac{S_{k_i}(q,a)}{q}\right) + \mathcal{O}(q). \end{aligned}$$

Låt $t \geq 1$. På grund av att $v_{k_i}(\beta) \ll P$, har vi

$$\begin{aligned} U(t) = \sum_{1\leq m\leq t} u(m) &= \sum_{1\leq m\leq t^{\frac{1}{k_i}}} e\left(\frac{am^{k_i}}{q}\right) - \frac{S_{k_i}(q,a)}{q} \sum_{1\leq m\leq t} \frac{1}{k_i} m^{\frac{1}{k_i}-1} \\ &= t^{\frac{1}{k_i}}\left(\frac{S_{k_i}(q,a)}{q}\right) + \mathcal{O}(q) - \left(\frac{S_{k_i}(q,a)}{q}\right)\left(t^{\frac{1}{k_i}} + \mathcal{O}(1)\right). \end{aligned}$$

Med hjälp av Sats A.1.3 så får vi

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N} u(m)e(\beta m) &= e(\beta N)U(N) - 2\pi i\beta \int_1^N e(\beta t)U(t)\,dt = \mathcal{O}(q) - 2\pi i\beta \int_1^N e(\beta t)\mathcal{O}(q)\,dt \\ &\ll q + |\beta|\,Nq \ll N^{2\delta}, \end{aligned}$$

vilket avslutar beviset. □

Följande lemma, Lemma A.4.6 tar inspiration från Lemma 5.3 i [Nat96] och Lemma 2.9 i [Vau97].

Lemma A.4.6. *Låt α och β vara reella tal sådan att $0 < \beta < 1$ och $\alpha \geq \beta$. Då blir*

$$\sum_{m=1}^{N-1} m^{\beta-1}(N-m)^{\alpha-1} = N^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \mathcal{O}\left(N^{\alpha-1}\right).$$

Bevis. Betrakta funktionen

$$g(x) = x^{\beta-1}(N-x)^{\alpha-1}.$$

Eftersom att

$$g'(x) = g(x)\left(\frac{\beta-1}{x} - \frac{\alpha-1}{N-x}\right)$$

så har $g(x)$ högst en stationär punkt på intervallet $(0,N)$. Således kan intervallet $(0,N)$ delas upp i två delintervall, $(0,c)$ och (c,N), sådan att $g(x)$ antingen är monoton på båda, eller ökar på det ena och minskar på det andra. Vi använder Lemma A.4.8 och får att

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{N-1} g(x) &= \sum_{x=1}^{c} g(x) + \sum_{x=c+1}^{N} g(x) \\ &= \int_0^c g(x)\,\mathrm{d}x + \mathcal{O}\left(g(1)+g(c)\right) + \int_c^N g(x)\,\mathrm{d}x + \mathcal{O}\left(g(c)+g(N-1)\right) \\ &= \int_0^N g(x)\,\mathrm{d}x + \mathcal{O}\left(g(1)+g(c)+g(N-1)\right). \end{aligned}$$

Notera att $g(1) \ll N^{\alpha-1}$, $g(c) \ll N^{\alpha+\beta-2}$ och $g(N-1) \ll N^{\beta-1}$. Vi ser då att

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{N-1} g(x) &= \int_0^N x^{\beta-1}(N-x)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x + \mathcal{O}\left(N^{\alpha-1}+N^{\alpha+\beta-2}+N^{\beta-1}\right)\\
&= N^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t + \mathcal{O}\left(N^{\alpha-1}\right)\\
&= N^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta) + \mathcal{O}\left(N^{\alpha-1}\right) = N^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \mathcal{O}\left(N^{\alpha-1}\right),
\end{aligned}$$

där $B(\alpha,\beta)$ är Beta-funktionen och $\Gamma(\alpha)$ är Gamma-funktionen. □

För att visa Lemma A.4.7 så definierar vi först $M_N(q)$ som antalet lösningar till kongruensen $x_1^{k_1}+\ldots+x_s^{k_s} \equiv N \pmod{q}$. Lemma A.4.7 är taget från Lemma 5.6 i [Nat96].

Lemma A.4.7. *Låt $\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{k_i} > 2$. För varje primtal p så konvergerar serien*

$$\chi_N(p) = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} A_N(p^h),$$

och

$$\chi_N(p) = \lim_{h\to\infty}\frac{M_N(p^h)}{p^{h(s-1)}}.$$

Bevis. Konvergensen av $\chi_N(p)$ följer direkt från Ekvation (19). Om $(a,q)=d$, så är

$$S_{k_i}(q,a) = \sum_{x=1}^{q} e\left(\frac{ax^{k_i}}{q}\right) = \sum_{x=1}^{q} e\left(\frac{(a/d)x^{k_i}}{q/d}\right) = d\sum_{x=1}^{q/d} e\left(\frac{(a/d)x^{k_i}}{q/d}\right) = d\,S_{k_i}(q/d,a/d).$$

Eftersom

$$\frac{1}{q}\sum_{a=1}^{q} e\left(\frac{am}{q}\right) = \begin{cases}1 & \text{om } m \equiv 0 \pmod{q}\\ 0 & \text{om } m \not\equiv 0 \pmod{q}\end{cases}$$

så följer det att för godtyckliga heltal $x_1,\ldots,x_s$ att

$$\frac{1}{q}\sum_{a=1}^{q} e\left(\frac{a(x_1^{k_1}+\cdots+x_s^{k_s}-N)}{q}\right) = \begin{cases}1 & \text{om } x_1^{k_1}+\cdots+x_s^{k_s} \equiv N \pmod{q}\\ 0 & \text{om } x_1^{k_1}+\cdots+x_s^{k_s} \not\equiv N \pmod{q},\end{cases}$$

vilket ger att

$$\begin{aligned}
M_N(q) &= \sum_{x_1=1}^{q}\cdots\sum_{x_s=1}^{q}\frac{1}{q}\sum_{a=1}^{q} e\left(\frac{a(x_1^{k_1}+\ldots+x_s^{k_s}-N)}{q}\right)\\
&= \frac{1}{q}\sum_{a=1}^{q}\sum_{x_1=1}^{q} e\left(\frac{ax_1^{k_1}}{q}\right)\cdots\sum_{x_s=1}^{q} e\left(\frac{ax_s^{k_s}}{q}\right) e\left(\frac{-aN}{q}\right)\\
&= \frac{1}{q}\sum_{a=1}^{q}\left(\prod_{i=1}^{s} S_{k_i}(q,a)\right) e\left(\frac{-aN}{q}\right)\\
&= \frac{1}{q}\sum_{d|q}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=d}}^{q}\left(\prod_{i=1}^{s} dS_{k_i}(q/d,a/d)\right) e\left(\frac{-(a/d)N}{q/d}\right)\\
&= \frac{1}{q}\sum_{d|q}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=d}}^{q}\left(\prod_{i=1}^{s} q\left(\frac{S_{k_i}(q/d,a/d)}{q/d}\right)\right) e\left(\frac{-(a/d)N}{q/d}\right)\\
&= q^{s-1}\sum_{d|q} A_N(q/d).
\end{aligned}$$

Vi kan då se att

$$\sum_{d|q} A_N(q/d) = q^{1-s} M_N(q)$$

för alla $q \geq 1$. För $q = p^h$ har vi särskilt att

$$1 + \sum_{j=1}^{h} A_N(p^j) = \sum_{d|p^h} A_N(p^h/d) = p^{h(1-s)} M_N(p^h),$$

och således är

$$\chi_N(p) = \lim_{h\to\infty} \left(1 + \sum_{j=1}^{h} A_N(p^j)\right) = \lim_{h\to\infty} p^{h(1-s)} M_N(p^h).$$

□

Sats A.4.8 är taget från Sats A.2 i [Nat96].

Sats A.4.8. *Låt a och b vara två heltal sådan att $a < b$ och låt $f(t)$ vara en monoton funktion på intervallet $[a, b]$. Då har vi att*

$$\min(f(a), f(b)) \leq \sum_{k=a}^{b} f(k) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \max(f(a), f(b)).$$

Bevis. Om $f(t)$ ökar på intervallet $[a, b]$, så är

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

för $k = a, a+1, \ldots, b-1$, och

$$f(k) \geq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

för $k = a+1, \ldots, b$. Därför följer det att

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \sum_{k=a}^{b-1} f(k) + f(b) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + f(b)$$

och att

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \sum_{k=a+1}^{b} f(k) + f(a) \geq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + f(a).$$

Således får vi att

$$f(a) \leq \sum_{k=a}^{b} f(k) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(b).$$

På samma sätt får vi att om $f(t)$ är avtagande, så får vi

$$f(b) \leq \sum_{k=a}^{b} f(k) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(a).$$

□

A.5 Konvergens av oändlig produkt

Detta delkapitel tar upp en mängd satser vilka används för att underbygga argument för konvergens av oändliga produkter. Sats A.5.1 är taget från A.26 i [Nat96].

Lemma A.5.1. *Låt $a_k \geq 0$ för alla $k \geq 1$. Då konvergerar oändliga produkten $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ om och endast om den oändliga serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar.*

Bevis. Låt $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ vara den n:te partialsumman och låt $p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$ vara den n:te partialprodukten. Eftersom att $a_n \geq 0$, så är talföljderna $\{s_n\}$ och $\{p_n\}$ båda monotont ökande, och $p_n \geq 1$ för alla n. Eftersom

$$1 + x \leq e^x$$

för alla $x \in \mathbb{R}$, så har vi att

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k < \prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \leq \prod_{k=1}^{n} e^{a_k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right),$$

och således är

$$0 \leq s_n \leq p_n \leq e^{s_n}.$$

Denna olikhet implicerar att talföljden p_n konvergerar om och endast om talföljden s_n konvergerar. Notera att p_n kan bli noll på två olika sätt, antingen att $p_n = 0$ eller att $p_n \to 0$. □

Sats A.5.2 följer från Sats A.27 i [Nat96].

Sats A.5.2. *Ifall den oändliga $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ är absolutkonvergent, så konvergerar den.*

Bevis. Låt

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$$

och låt

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+|a_k|).$$

Ifall den oändliga produkten är absolutkonvergent så kommer sekvensen av partiella produkter P_n konvergera och serien

$$\sum_{n=2}^{\infty}(P_n - P_{n-1})$$

konvergerar. På grund av

$$0 \leq |p_n - p_{n-1}| = |a_n p_{n-1}| = \left| a_n \prod_{k=1}^{n-1}(1+a_k) \right| \leq |a_n| \prod_{k=1}^{n-1}(1+|a_k|) = |a_n|\, P_{n-1} = P_n - P_{n-1},$$

följer det att

$$\sum_{n=2}^{\infty} |p_n - p_{n+1}|$$

konvergerar och då kommer

$$\sum_{n=2}^{\infty}(p_n - p_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n}(p_k - p_{k-1}) = \lim_{n\to\infty}(p_n - p_1)$$

konvergera. Då har vi visat att sekvensen av partiella produkter $\{p_n\}$ konvergerar till ett gränsvärde. Nu måste vi bevisa att gränsvärdet inte är noll om inte någon av feltermerna är noll. På grund av att den oändliga produkten $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ konvergerar absolut, så följer det av Sats A.5.1 att serien $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ konvergerar, och således konvergerar talen a_k till noll. Nu ser vi att för alla tillräckligt stora heltal k att

$$|1+a_k| \geq \frac{1}{2}$$

och

$$\left|\frac{-a_k}{1+a_k}\right| \leq 2\,|a_k|\,.$$

Det följer att serien

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{-a_k}{1+a_k}\right|$$

konvergerar, och den oändliga produkten

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_k}{1+a_k}\right)$$

konvergerar absolut. Detta implicerar att talföljden av n:te partiella produkter

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_k}{1+a_k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}=\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)}=\frac{1}{p_n}$$

konvergerar till ett gränsvärde, och således är gränsvärdet av talföljden $\{p_n\}$ ej noll. På grund av detta konvergerar den oändliga produkten $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$. □

Följande Sats A.5.3 motsvarar Sats A.28 i [Nat96].

Sats A.5.3. *Låt $f(n)$ vara en multiplikativ funktion som inte är identiskt noll. Ifall serien*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

konvergerar absolut så är

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\prod_{p}\left(1+f(p)+f(p^2)+\cdots\right)=\prod_{p}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}f(p^k)\right).$$

Ifall $f(n)$ är fullständigt multiplikativ, så är

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\prod_{p}(1-f(p))^{-1}\,.$$

Bevis. Ifall $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ är absolutkonvergent, då är serien

$$a_p=\sum_{k=1}^{\infty}f(p^k)$$

absolutkonvergent för varje primtal p. Dessutom konvergerar

$$\sum_{p}|a_p|=\sum_{p}\left|\sum_{k=1}^{\infty}f(p^k)\right|\leq\sum_{p}\sum_{k=1}^{\infty}\left|f(p^k)\right|<\sum_{n=1}^{\infty}|f(n)|\,.$$

Således är den oändliga produkten

$$\prod_p (1 + a_p) = \prod_p \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)\right)$$

är absolutkonvergent. Från Sats A.5.2 får vi att den oändliga summan konvergerar. Låt $\varepsilon > 0$ och välj ett heltal N_0 så att

$$\sum_{n > N_0} |f(n)| < \varepsilon.$$

För varje positivt heltal n, låt $P(n)$ vara den största primtalsfaktorn av n. Då betecknar $\sum_{P(n) \leq N}$ summan över heltalen vars primtalsfaktorer är mindre eller lika med N och $\sum_{P(n) > N}$ betecknar summan över alla heltal som har minst en primtalsfaktor som är strikt större än N. På grund av att serien $\sum_{k=0}^{\infty} f(p^k)$ konvergerar absolut för varje primtal p, kan ett godtyckligt begränsat antal av dessa serier multipliceras ihop termvis. Låt $N \geq N_0$. Det följer från den unika faktoriseringen av heltal som produkter av primtal att

$$\prod_{p \leq N} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)\right) = \sum_{P(n) \leq N} f(n)$$

och att

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \prod_{p \leq N} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)\right) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \sum_{P(n) \leq N} f(n) \right| = \left| \sum_{P(n) > N} f(n) \right|$$
$$\leq \sum_{P(n) > N} |f(n)| \leq \sum_{n > N} |f(n)| \leq \sum_{n > N_0} |f(n)| < \varepsilon.$$

Därmed är

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \lim_{x \to \infty} \prod_{p \leq N} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)\right) = \prod_p \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)\right).$$

Ifall $f(n)$ är fullständigt multiplikativ, då är $f(p^k) = f(p)^k$ för alla primtal p och alla ickenegativa heltal k. På grund av att $f(p^k)$ går mot noll då k går mot oändligheten, så följer det att $|f(p)| < 1$. Summering ger

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p)^k = \frac{1}{1 - f(p)},$$

och då får vi att

$$\prod_p \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)\right) = \prod_p (1 - f(p))^{-1}.$$

Detta avslutar beviset. □

A.6 Bevis för Vinogradovs Summa, Sats 4.3.1

Sats A.6.1. *Antag att α är nära ett rationellt tal enligt* $|\alpha - \frac{a}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$, $(a, q) = 1$. *Då gäller*

$$S(\alpha) \ll (N q^{-1/2} + N^{4/5} + N^{1/2} q^{1/2})(\log N)^4.$$

Bevis. För att betrakta $S(\alpha)$ generaliserar vi uttrycket och utnyttjar egenskaper hos Dirichletserier, se Appendix A.1 för teori om Dirichletserier. Genom att ansätta att

$$F(s) = \sum_{m \leq U} \frac{\Lambda(m)}{m^s}, \quad G(s) = \sum_{d \leq V} \frac{\mu(d)}{d^s}$$

för något $U, V \geq 2$ med $UV \leq N$ och utnyttja identiteten (givet konvergens $\sigma > 1$)

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = F(s) - \zeta(s)F(s)G(s) - \zeta'(s)G(s) + \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - F(s)\right) \cdot (1 - \zeta(s)G(s)),$$

så fås en användbar identitet för Λ. Vänsterledet är Dirichletserien av Λ och högerledet kan också ses som en Dirichletserie av flera termer, därmed fås likheten att

$$\Lambda(n) = a_1(n) + a_2(n) + a_3(n) + a_4(n)$$

där

$$a_1 = \begin{cases} \Lambda(n) & \text{om } n \leq U, \\ 0 & \text{om } n > U \end{cases}, \qquad a_2(n) = -\sum_{\substack{mdr=n \\ m\leq U \\ d\leq V}} \Lambda(m)\mu(d)$$

$$a_3(n) = \sum_{\substack{hd=n \\ d\leq V}} \mu(d)\log(h), \qquad a_4(n) = -\sum_{\substack{mk=n \\ m>U \\ k>1}} \Lambda(m) \left(\sum_{\substack{d|k \\ d\leq V}} \mu(d) \right).$$

Ovan utnyttjas Dirichletseriens multiplikativa egenskap över konvolution $F_{f*g}(s) = F_f(s)F_g(s)$. Termerna multipliceras parvis med $e(n\alpha)$, och då termerna sedan summeras över n, så erhålls $S(\alpha)$ enligt

$$S(\alpha) = \sum_{n\leq N} e(n\alpha)\Lambda(n) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \tag{31}$$

där

$$S_i = \sum_{n\leq N} e(n\alpha)a_i(n).$$

För att få en uppskattning av S betraktas varje summa för sig. Från Chebyshevs sats, Sats A.2.11, så är

$$S_1(N) \ll U. \tag{32}$$

För S_2 ändras summationsordning, med summation över möjliga produkter $md = t$, $t = 1, 2, \dots, N$ med $n = rt$ där $r = 1, 2, \ \dots, \lfloor \frac{N}{t} \rfloor$, därmed blir

$$S_2 = -\sum_{t\leq UV} \left(\sum_{\substack{md=t \\ m\leq U \\ d\leq V}} \mu(d)\Lambda(m) \right) \sum_{r\leq N/t} e(rt\alpha).$$

Från att

$$\left| \sum_{\substack{md=t \\ m\leq U \\ d\leq V}} \mu(d)\Lambda(m) \right| \leq \sum_{\substack{m|t \\ m\leq U}} \Lambda(m) \leq \log(t) \leq \log(UV)$$

fås en övre begränsning av S_2 enligt

$$S_2 \ll (\log UV) \sum_{t\leq UV} \left| \sum_{r\leq N/t} e(rt\alpha) \right|.$$

Från Lemma A.4.1 och Lemma A.1.2 blir

$$S_2 \ll (\log UV) \sum_{t\leq UV} \min(\frac{N}{t}, \frac{1}{\|t\alpha\|}) \ll (q + UV + \frac{N}{q})(\log 2qN)^2. \tag{33}$$

Summan S_3 skrivs om med samma summationsordning som S_2 enligt

$$S_3 = \sum_{d\leq V} \mu(d) \sum_{h\leq N/d} e(dh\alpha)\log(h).$$

Därefter används att $\log(h) = \int_1^h \frac{dw}{w}$ och byte av summationsordning ger att

$$S_3 = \sum_{d\le V} \mu(d) \sum_{h\le N/d} e(dh\alpha) \int_1^h \frac{dw}{w} = \int_1^N \sum_{d\le V} \mu(d) \sum_{w\le h\le N/d} e(dh\alpha) \frac{dw}{w}.$$

Från detta fås en övre begränsning av S_3 enligt

$$S_3 = \int_1^N \sum_{d\le V} \sum_{w\le h\le N/d} e(dh\alpha) \frac{dw}{w} \ll (\log N) \sum_{d\le V} \max_w \Big| \sum_{w\le h\le N/d} e(dh\alpha) \Big|.$$

Från Lemma A.4.1 och Lemma A.1.2 blir

$$S_3 \ll (\log N) \sum_{d\le V} \min(\frac{N}{d}, \frac{1}{\|d\alpha\|}) \ll (q + V + \frac{N}{q})(\log 2qN)^2. \tag{34}$$

Summan S_4 är mer komplicerad och som kräver följande lemma:

Lemma A.6.2. *Det existerar ett $\Delta = \Delta(\alpha, M, N, V)$ sådan att för alla komplexa tal b_m, c_k så gäller det att*

$$\left| \sum_{M<m\le 2M} b_m \sum_{V<k\le N/m} c_k e(mk\alpha) \right| \le \Delta \left(\sum_{M\le m\le 2M} |b_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k\le N/M} |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

där

$$\Delta \ll (M + \frac{N}{M} + \frac{N}{q} + q)^{1/2} (\log qN)^{1/2}.$$

Bevis. För att få ut Δ så används Cauchys olikhet på vänsterledet

$$\left| \sum_{M<m\le 2M} b_m \sum_{V<k\le N/m} c_k e(mk\alpha) \right| \le \left(\sum_{n=M}^{2M} |b_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=M}^{2M} \left| \sum_{V<k\le N/M} c_k e(mk\alpha) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Den andra faktorn vill man jämföra med storleken på $\sum |c_j|^2$, därmed skrivs den om som

$$\sum_{V<j\le N/M} c_j \sum_{V<k\le N/M} \overline{c_k} \sum_{\substack{M<m\le 2M \\ m\le N/j \\ m\le N/k}} e(mj\alpha)\overline{e(mk\alpha)}.$$

Med egenskapen att $|c_j \overline{c_k}| \le \frac{1}{2}|c_j|^2 + \frac{1}{2}|c_k|^2$ så fås

$$\ll \sum_{V<j\le N/M} |c_j|^2 \sum_{V<k\le N/M} \left| \sum_{\substack{M<m\le 2M \\ m\le N/j \\ m\le N/k}} e\left(m(j-k)\alpha\right) \right|$$

och därmed är

$$\Delta \ll \left(\max_{V<j\le N/M} \sum_{V<k\le N/M} \left| \sum_{\substack{M<m\le 2M \\ m\le N/j \\ m\le N/k}} e\left(m(j-k)\alpha\right) \right| \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vilket från Lemma A.4.1 är

$$\Delta \ll \max_{V<j\le N/M} \left(\sum_{V<k\le N/M} \min(M, \frac{1}{\|k-j\|\alpha}) \right)^{\frac{1}{2}} \ll \left(M + \sum_{1\le m\le N/M} \min(\frac{N}{m}, \frac{1}{\|m\alpha\|}) \right)^{\frac{1}{2}}$$

och därmed ännu en summa där Lemma A.1.2 används, vilket ger slutligen att

$$\Delta \ll (M + \frac{N}{M} + \frac{N}{q} + q)^{\frac{1}{2}} (\log qN)^2$$

som önskat. $\square$

Vi återvänder nu till uppskattningen av S_4, eftersom

$$\sum_{\substack{d|k \\ d \leq V}} \mu(d) = 0$$

för $1 < k \leq V$ så bidrar inte dess termer och vi får

$$S_4 = \sum_{U < m \leq N/V} \Lambda(m) \sum_{V < k \leq N/m} \Bigg(\sum_{\substack{d|k \\ d \leq V}} \mu(d) \Bigg) e(nm\alpha).$$

Lemma A.6.2 implicerar då att

$$S_4 \ll (\log N) \max_{U \leq M \leq N/V} \Delta \Bigg(\sum_{M \leq m \leq 2M} \Lambda(m)^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \Bigg(\sum_{k \leq N/M} d(k)^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}}$$

där funktionen $d(k) := \sum_{d|k} 1$, det vill säga antalet positiva heltalsdelare till k. Summationen över Λ kan uppskattas med Chebyshevs sats, Sats A.2.11, enligt

$$\sum_{m \leq z} \Lambda(m)^2 \leq (\log z) \sum_{m \leq z} \Lambda(m) \ll z \log z$$

Funktionen d^2 är en multiplikativ funktion och därmed existerar det en multiplikativ funktion f med egenskapen att $d(k)^2 = 1 * f(k) = \sum_{d|k} f(d)$. Detta ger att

$$\sum_{k \leq z} d(k)^2 = \sum_{k \leq z} \sum_{d|k} f(d) = \sum_{d \leq z} f(d) \lfloor \frac{z}{d} \rfloor \leq z \sum_{d \leq z} f(d)/d.$$

Från Lemma A.5.3 så kan summan begränsas av en produkt, detta tillsammans med egenskapen att $f(p^a) = 2a + 1$ ger

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq z} d(k)^2 &= z \prod_{p \leq z} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^k} \right) \leq z \prod_{p \leq z} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{p^k} \right) \\ &\leq z \prod_{p \leq z} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)}{p^k} \right) = z \prod_{p \leq z} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-3}. \end{aligned}$$

Produkten $\prod_{p \leq z} (1 - \frac{1}{p})^{-1} \leq \log 2z$, vilket följer från Mertens sats, se Davenport [Dav13] §7. Detta ger att

$$\sum_{k \leq z} d(k)^2 \ll z \log(2z)^3$$

och därmed blir

$$\begin{aligned} S_4 &\ll N^{1/2} (\log N)^3 \max_{U \leq M \leq N/V} \Delta \\ &\ll N^{1/2} (\log N)^3 \max_{U \leq M \leq N/V} \left(M + \frac{N}{M} + \frac{N}{q} + q \right)^{1/2} (\log qN)^{1/2} \\ &\ll (NV^{-1/2} + NU^{-1/2} + Nq^{-1/2} + N^{1/2} q^{1/2}) (\log qN)^4. \end{aligned} \tag{35}$$

Vi använder nu (32), (33), (34) och (35), inom (31) och finner

$$S(\alpha) \ll (UV + q + NU^{-1/2} + NV^{-1/2} + Nq^{-1/2} + N^{1/2} q^{1/2}) (\log qN)^4.$$

Den önskade olikheten fås med insättning $U = V = N^{2/3}$ för $q \leq N$. Om $q > N$ är olikheten trivial.

□