



CHALMERS



GÖTEBORGS UNIVERSITET

---

# Den Relativistiska Himmelsfären

## The Relativistic Celestial Sphere

*Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet*

*Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers*

Magnus Lorinius

Anton Skoglund

Arber Vokshi



# Den Relativistiska Himmelssfären

*Examensarbete för kandidatexamen i matematik inom Matematikprogrammet vid  
Göteborgs universitet*

Magnus Lorinius

*Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Bioteknik vid Chalmers*

Anton Skoglund

*Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Automation och mekatronik  
vid Chalmers*

Arber Vokshi

Handledare: Andreas Rosén

Institutionen för Matematiska vetenskaper  
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA  
GÖTEBORGS UNIVERSITET  
Göteborg, Sverige 2021



# Förord

Arbetet med projektet "Den Relativistiska Himmelssfären" har till stor del gått ut på att få en förståelse för de matematiska koncept som krävs för att besvara frågeställningen. En litteraturstudie har genomförts med "Geometric Multivector Analysis", av Andreas Rosén, som huvudsaklig resurs. På grund av den rådande pandemin har allt arbete skett på distans, och varje vecka har Zoom-möten hållits där handledare och författarna till rapporten diskuterat innehållet i litteraturen samt planerat litteraturstudien med hjälp av läsanvisningar. Utöver mötena i Zoom har arbetet dokumenterats löpande via loggböcker. Vidare har även individuella dokumentationer utförts där arbetsuppgift samt antalet timmar noterats. Två individuella delrapporter har skrivits vilka tillsammans omfattar all teori kopplat till projektet och frågeställningen, dessa har även lämnats in till handledare för kommentarer och respons.

Följande avsnitt i rapporten har i huvudsak behandlats av respektive författare:

Arber Vokshi:

- Förord
- 2.1 Minkowskirummet
- 2.2 Galileitransformationen
- 2.3 Lorentztransformationen
- 2.4 Ljuskonen
- 3.1 Multivektorer
- 3.2 Cliffordprodukten

Anton Skoglund:

- Populärvetenskaplig Inledning
- Sammanfattning & Abstract
- 2.5 Relativistisk Aberration
- 3.3 Vektorinvers
- 4 Rotationer med Cliffordalgebran
- 5 Himmelssfären
- 8 Diskussion (med Magnus)
- Appendix D: Stjärnkoordinater

Magnus Lorinius:

- Inledningen (redigering, skriven gemensamt)
- 2.0 Postulat för den Speciella Relativitetsteorin
- 3.4 Inre och yttre Produkt
- 3.5 Matrisrepresentation
- 6 Möbiusavbildningar
- 7 Visualisering
- 8 Diskussion (med Anton)
- Utfört visualiseringen i MATLAB
- Appendix A: Bevis för Associativitet

Till sist vill vi personligen tacka vår handledare, Andreas Rosén, för sitt stora engagemang samt all den hjälp och vägledning vi fått under projektets gång. Det har varit ett sant nöje att ha dig som handledare och tack vare dig har vi lärt oss oerhört mycket. Tack.

## Populärvetenskaplig presentation

HAN SOLO: Traveling through hyperspace ain't like dusting crops, boy! Without precise calculations we could fly right through a star or bounce too close to a supernova and that'd end your trip real quick, wouldn't it?

LUKE SKYWALKER: [Points to an alarm on the control panel] What's that flashing?

HAN SOLO: We're losing our deflector shield! Go strap yourself in, I'm going to make the jump to light speed.

De flesta känner till scenen i figur 1 från filmserien Star Wars när Han Solo och Chewbacca gör hoppet till ljusets hastighet, och visst är det en slående scen där stjärnorna dras bakåt likt lysande linjer då skeppet far iväg ut i rymden. Men hur nära verkligheten är egentligen den dramatiska visualiseringen? Men hur hade det egentligen sett ut i vårt universum? I dagsläget finns inget sätt att praktiskt göra visualiseringen, men med matematik kan vi göra en simulering.



Figur 1: Hoppet till hyperspace som visualiserat i det populära Sci-Fi universumet av Star Wars. **Star Wars** © &™ Lucasfilm Ltd. All Rights Reserved. Used under authorization. COURTESY OF LUCASFILM LTD.

Först behövs förståelse av Albert Einsteins (1879-1955) *relativitetsteori*; och följaktligen vad som faktiskt gör det en teori om just *relativitet*. Säg att Han och Chewbacca spelar holografiskt schack ombord på skeppet någonstans ute i rymden. I deras perspektiv spelar de bara på ett ställe, i skeppet, men för en åskådare utanför rör sig skeppet och därmed tycks de spela på flera olika platser - platsen är relativ till vem man frågar. Enligt relativitetsteorin är en ännu intressantare fråga *när* de spelar, då även tiden verkar gå olika snabbt beroende på vem man frågar. Idén att både rum och tid är relativ till åskådaren är vad som namngivit Einsteins kända teori, och gett upphov till fusionen av rummet och tiden vanligtvis refererad till i science-fiction som *rumtiden*. I matematikens värld används *Minkowskirummet* som synonym till rumtiden, ett koncept först introducerat av Einsteins mentor Hermann Minkowski (1864-1909).

När skeppet befinner sig i vila, vilket i relativitetsteorin också innebär att det kan röra sig med konstant hastighet, rör det sig på en rak linje genom rumtiden, en linje vi kallar för *världslinjen*. Åskådaren nere på planeten och våra hjältar inuti skeppet befinner sig på olika världslinjer och det är just detta som leder till att de mäter tid och rum olika. Vi gör bytet mellan världslinjer, alltså byter perspektiv, med *Lorentztransformationen*, uppkallad av Hendrik Lorentz (1853-1928), och det är alltså med denna transformation vi kan sätta oss in i Han och Chewies perspektiv ombord på skeppet.

För att genomföra Lorentztransformationen vänder vi oss till det matematiska språket *Cliffordalgebra*, uppkallad efter William Kingdon Clifford [4] (1845-1879), en geometrisk algebra vars applikationer passar utmärkt för beräkningar i rumtiden. Även om just relativitetsteorin och dess fenomen är vad vi vill analysera är den riktiga stjärnan Cliffordalgebran.

I Cliffordalgebran beskrivs varje objekt geometriskt med en så kallad *multivektor*, och tack vare dessa kan många av beräkningarna vi vill göra förenklas och generaliseras så de gäller i alla tänkbara dimensioner. Men vad är en multivektor och varför är de så användbara? En vanlig vektor i en dimension är helt enkelt en sträcka från en punkt till en annan. Går vi vidare till två dimensioner har vi med plan att göra, såkallade bivektorer. I tre dimensioner har vi kuber, eller trivektorer som de kallas i Cliffordalgebran. Objekt i dimensioner högre än tre är lite svårare att beskriva men även dessa representeras enkelt, och med en multivektor kan man beskriva alla möjliga kombinationer av dessa, exempelvis två plan och en kub, i ett enda 'tal'. Denna mycket vackra egenskap gör att Cliffordalgebran har applikationer inom allt från kvantfysik och strängteori till astronomi och elektrofysik, och därmed lämpar sig utmärkt som universellt språk inom fysiken. Trots detta har algebran fallit i glömska sedan dess upptäckt på 1800-talet, och vi ämnar med denna rapport föra ljus på några av dess oändliga applikationer. Bland annat visar vi hur den komplicerade Lorentztransformationen är ekvivalent med en mycket enklare rotation i Cliffordalgebran.

Efter Lorentztransformationen befinner vi oss på rätt världslinje, det vill säga vi har samma perspektiv som de på skeppet, men vi måste fortfarande visualisera vad vi faktiskt ser. Detta gör vi genom att avbilda stjärnorna i natthimlen på en bild med hjälp av *stereografisk projektion*, samma metod som används för att göra en platt karta av jordgloben. Även denna projektion förenklas avsevärt av Cliffordalgebran, och efter denna kan vi äntligen svara på vad våra hjältar hade sett ut genom fönstret då de färdas genom rymden med nära ljusets hastighet. Istället för att stjärnorna dras bakåt och blir som streck finner vi att de konvergerar i färdriktningen, tills hela universum befinner sig i en enda punkt framför skeppet. Fenomenet kallas *relativistisk aberration*, och möjliggör för våra resenärer att till slut faktiskt se *bakom sig* vilket visas i våra simuleringar genom att stjärnbilderna på södra sidan av halvklotet kommer in i synfältet då hastigheten ökar.

Animationen går att se på följande länk:

<https://youtu.be/E4CKfLV3NPI>



## **Sammanfattning**

I uppsatsen undersöks hur himmelssfären i den fyrdimensionella rumtiden förändras av en Lorentztransformation. Först introduceras relativitetsteorin samt Minkowskirummet, och Lorentztransformationen härleds från Einsteins postulat. Därefter introduceras Cliffordalgebran och hur man med hjälp av denna utför rotationer, med fokus på den hyperboliska rotationen vilken visas vara ekvivalent med Lorentztransformationen. Himmelssfären introduceras som matematiskt objekt till Minkowskirummet och med hjälp av stereografisk projektion visualiseras resultatet av transformationen i MATLAB.

## **Abstract**

In this paper it is examined how the celestial sphere in four-dimensional spacetime changes following a Lorentztransformation. First, the theory of relativity and the Minkowski space are introduced, and the Lorentztransformation is derived from Einstein's postulates. Then the Cliffordalgebra, and how to perform rotations using it, is introduced, with focus on the hyperbolic rotation which is shown to be equivalent with the Lorentztransformation. The celestial sphere is mathematically introduced to the Minkowski space and the result of a Lorentztransformation is visualized with the help of stereographic projection.

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Inledning</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Den speciella relativitetsteorin</b>	<b>1</b>
2.1	Minkowskirummet . . . . .	1
2.2	Galileitransformationen . . . . .	2
2.3	Lorentztransformationen . . . . .	4
2.4	Ljuskonen . . . . .	4
2.5	Relativistisk Aberration . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Cliffordalgebra</b>	<b>6</b>
3.1	Multivektorer . . . . .	6
3.2	Cliffordprodukten . . . . .	7
3.3	Vektorinvers . . . . .	8
3.4	Inre och yttre produkt . . . . .	8
3.5	Matrisrepresentation . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Rotationer med Cliffordalgebra</b>	<b>8</b>
4.1	Hyperboliska Rotationer . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Himmelssfären</b>	<b>12</b>
5.1	Himmelska Koordinater . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Möbiusavbildningar</b>	<b>12</b>
6.1	Möbiusavbildningar i det komplexa talplanet . . . . .	13
6.2	Möbiusavbildningar i tre dimensioner . . . . .	13
6.2.1	Möbiusavbildningen . . . . .	13
6.3	Vahlenmatriser . . . . .	14
6.4	Stereografisk Projektion . . . . .	15
6.4.1	Härledning av formler för stereografisk projektion . . . . .	15
6.4.2	Stereografisk projektion som Möbiusavbildning . . . . .	16
6.5	Projektivt rum . . . . .	16
6.6	Lorentztransformation i det projektiva rummet . . . . .	17
<b>7</b>	<b>Visualisering</b>	<b>18</b>
<b>8</b>	<b>Diskussion</b>	<b>19</b>
8.1	Sfärparadoxen . . . . .	20
	<b>Figurer</b>	<b>22</b>
<b>A</b>	<b>Bevis för Associativitet</b>	<b>25</b>
<b>B</b>	<b>MATLAB Lorentztransformation</b>	<b>27</b>
<b>C</b>	<b>MATLAB Globvisualisering</b>	<b>28</b>
<b>D</b>	<b>MATLAB Stjärnkoordinater</b>	<b>30</b>

# 1 Inledning

Syftet med projektet är att visualisera hur himmelssfären och det fyrdimensionella Minkowskirummet förändras av rumtidsisometrier, det vill säga rotationer i rumtiden, speciellt Lorentztransformationen, för att därmed uppnå en geometrisk förståelse av Einsteins speciella relativitetsteori. Vi föreställer oss en observatör färdandes i hastigheter jämförbara med ljusets och visualiserar hur denne uppfattar stjärnornas positioner på himlavalvet. För att göra visualiseringen mer konkret visualiseras himmelssfären sedd från jorden. Hur observatören uppfattar omgivningen påverkas i stor utsträckning av att färdas i relativistiska hastigheter, vilket beskrivs av den speciella relativitetsteorin. Enligt teorin roteras rumtiden hyperboliskt vid färd i relativistiska hastigheter, vilket ger upphov till relativistisk aberration; förskjutningen av riktningen som ljusstrålar träffar en observatör. Fenomenet kan beskrivas som att två inertial-observatörer har, relativt varandra, roterade koordinatsystem. Utöver visualiseringen av himmelssfären presenteras en illustration av ett klotformat objekt för att på så sätt undersöka det faktum att cirklar och sfärer inte tycks deformeras av rumtids-rotationer men det gör däremot mönster på dess yta.

Projektet avser studier av den speciella relativitetsteorin och den generella relativitetsteorin ligger utanför det. Det medför att vi bortser från observatörens massa och närliggande objekt som solen, planeter och stjärnor. Vidare antas att observatören befinner sig på jordens plats i universum men utan att påverkas av gravitation. Samma position kommer visualiseras vid relativistiska hastigheter och vi antar att alla synliga objekt i visualiseringen har konstant position och ingen hastighet. Anledningen är att arbetet underlättas avsevärt samt att avståndet till närmsta stjärna är 4 ljusår. Även om en relativt kort resa visualiseras i ljusets hastighet kommer man inte långt i jämförelse med de enorma avstånd i universum. En fysiskt korrekt representation av röd-förskjutning, på grund av hög hastighet från/mot vissa stjärnor, kommer inte tas med i visualiseringen då det är alltför omfattande. Beräkningar av relativistisk aberration kan göras med Cliffordalgebra, en icke-kommutativ geometrisk algebra vars definition av produkt lämpar sig bra för ändamålet.

Vi utgår från en karta av himmelssfären som förs över till ett plan  $Y$ , som via Möbiusavbildningar omvandlar från planet till rumtidskoordinater  $X$ , där den speciella relativitetsteorins effekter beräknas och sedan förs de nya  $X$ -koordinaterna tillbaka till stjärnkartan igen via den inverterade processen. Den teoretiska bakgrunden till stegen ovan kommer att förklaras i ordningen: speciell relativitetsteori, Cliffordalgebra, Möbiusavbildningar och slutligen visualiseringen.

## 2 Den speciella relativitetsteorin

I vanliga livet är mätning av avstånd och tid ganska oproblematiskt. Alla är överens om att en meter är en meter och våra klockor går lika fort oavsett var man befinner sig. Under 1800-talet gjordes dock landvinningar inom fysiken som resulterade i insikten att så möjligtvis inte alltid är fallet. Följande två postulater [3] presenterades av den speciella relativitetsteorin:

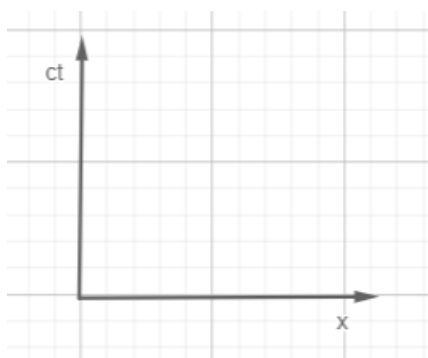
1. Fysikens lagar är lika för alla inertialobservatörer. Alla inertialobservatörer är ekvivalenta.
2. Ljusets hastighet i vakuum  $c$  är densamma för alla observatörer oavsett deras egen hastighet.

En *inertialobservatör* är en observatör som färdas med konstant hastighet. Ljusets hastighet är  $c = 299792458$  m/s. Vad postulaten får för följdverkningar härleds i kapitel 2.1.

### 2.1 Minkowskirummet

Ett *Euklidiskt* rum är ett rum av reell-värda vektorer med den vanliga inre produkten, även kallat skalärprodukten,  $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$  och där vi mäter avstånd med  $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ . Det ovan beskrivna leder till att  $\langle x, y \rangle = 0$  om och endast om  $x$  eller  $y$  är 0 och att  $|x| > 0, \forall x \neq 0$ . Minkowskirummet, även kallat *rumtiden*, presenterades av Hermann Minkowski 1908 och är det man kallar sammanfogningen mellan rummet och tiden, där tid betraktas som ännu en dimension utöver rumsdimensionerna. Den värld vi lever i kan ses som fyrdimensionell med tre rumsdimensioner och en tidsdimension. Detta innebär att om man vill sätta ut en punkt i detta koordinatsystem så måste man inte bara specificera var den befinner sig, utan också *när* den

befinner sig. För att skapa sig en bild av hur rumtiden fungerar kan följande vardagliga exempel beaktas: Säg att du planerar en träff med en god vän, vilken information är nödvändig för att kunna genomföra mötet? Först kan det vara bra att bestämma en plats, var i rummet mötet skall ske, vilket i vår värld kräver tre koordinater  $(x_1, x_2, x_3)$ . Men platsen för mötet får inte så värst stor betydelse om man inte också kommer överens om när man skall träffas, annars kommer man ju missa varandra även om man befunnit sig på samma plats eftersom man är där vid olika tidpunkter. När Minkowskirummet skall visualiseras så används för enkelhetens skull endast en koordinat  $x$  för att representera de Euklidiska koordinaterna, ta  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , samt en tidskoordinat  $ct$  för att representera tidsdimensionen. På så sätt kan man representera en punkt i rumtiden med endast två komponenter  $(x, t)$  istället för fyra. Notera att man uttrycker tidsaxeln med  $c \cdot t$  (där  $c$  är ljusets hastighet) snarare än bara med  $t$ , det vill säga man uttrycker tiden i termer av sträcka, eftersom det bättre passar in med de resterande rumslika koordinaterna - ofta låter man  $c = 1$  för att göra eventuella beräkningar enklare. Förenklat kan det fyrdimensionella Minkowskirummet illustreras tvådimensionellt i figur 2 [6]:



Figur 2: Minkowskirummet illustrerat i två dimensioner.

Eftersom rumtiden  $W$  är fyrdimensionell krävs fyra basvektorer för att spänna hela rummet enligt:  $W = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ , där  $e_0$  representerar tidsdimensionen. [1]

Det krävs därmed både en plats och tidpunkt för att kunna arrangera ett möte mellan två personer och vi kan säga att en *händelse* är något som sker vid en viss tid och plats. En händelse beskrivs därmed med tre rumskoordinater och en tidskoordinat och utgör därför en punkt i rumtidskoordinatsystemet.

## 2.2 Galileitransformationen

Antag två personer. Den ena, person A, färdas i bil med hastigheten  $u$  och den andra, person B står stilla utanför. Från klassisk fysik vet vi att om bilens startposition från origo är  $x'$  så kommer den enligt B:s referenssystem efter tiden  $t$  att ha tillryggaläggd sträckan  $x = x' + ut$ , alternativt  $x' = x - ut$  i A:s referenssystem. Om vi antar endast rörelse i x-led kommer *Galileitransformationen* från A:s referenssystem till B:s referenssystem att vara följande [7][8]:

$$\left. \begin{array}{l} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right\}.$$

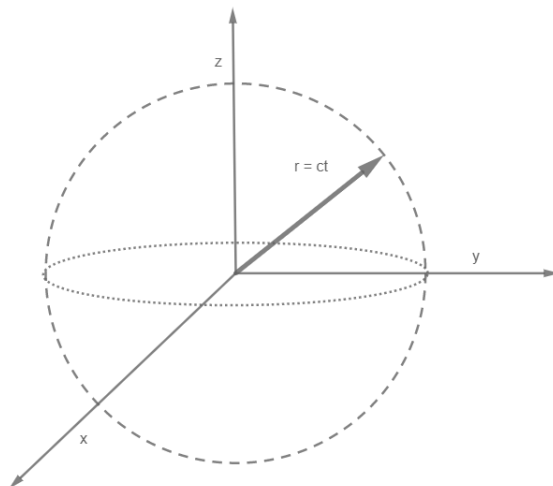
Lägg märke till att  $y$ - och  $z$ -ledet förblir oförändrat mellan referenssystemen eftersom den relativa rörelsen endast sker i  $x$ -led. Hade den skett i till exempel  $y$ -led hade man istället haft  $y' = y - vt$  samt  $x' = x$ . Det centrala är att vi antar rörelse i endast en riktning. Enligt Galilei är hastighet relativ och kan därför skilja sig beroende på referenssystem, t.ex. om person B från ovan bestämmer sig för att hoppa på en motorcykel och färdas i samma riktning som A men med hastighet  $v$  är den relativa hastigheten enligt B lika med  $u - v$ , medan den för A är  $-(u - v) = v - u$ .

Säg att B nu är stationär och mäter A:s hastighet till  $u$  som ovan. Vad händer om A sätter på

framljusen på bilen? Vilken hastighet får ljuset enligt  $B$ ? Eftersom ljusets hastighet är  $c$  och  $A$ :s hastighet är  $u$  måste den totala hastigheten enligt den klassiska fysiken vara  $c+u$ . Problemet är att ljusets hastighet enligt Einsteins andra postulat måste vara konstant i *alla* referenssystem, vilket innebär att den klassiska fysiken här fallerar.

Antag att en *händelse* enligt en observatör inträffar i punkten  $(x, t)$  i Minkowskirummet. Enligt Galileitransformationerna ovan vet vi att en observatör i rörelse, med hastighet  $u$  relativt den andra observatören, skulle betrakta samma punkt förskjuten i rummet enligt  $x' = x - ut$ . Båda observatörerna är därmed inte överens om *var* i rummet händelsen inträffar,  $(x, t)$  respektive  $(x', t)$ . Men eftersom vi får problem ovan när vi försöker addera hastigheter vars summa överskrider ljushastigheten måste det innebära att de båda observatörerna inte heller kan vara överens om *när* händelsen inträffar. Det är detta som är intressant när man försöker förklara begreppet "rumtid", enligt vardaglig intuition är tid något absolut, det upplevs samma för alla och går lika fort överallt. Rumtiden illustrerar dock tid som bara en annan dimension precis som rumsdimensionerna, och det är därför inte orimligt att den kan krökas precis som rummet och upplevas olika i olika referenssystem.

För att förstå varför Galileitransformationerna ovan inte fungerar för höga hastigheter rent matematiskt betraktar vi en sfär i det tredimensionella rummet med centrum i origo och från origo lysa en ficklampa mot sfärens yta enligt se figur 3.



Figur 3: Sfär med centrum i origo, tänk att en ficklampa lysas från centrum ut mot sfärens yta.

Eftersom ljusets hastighet är  $c$  och den på tiden  $t$  når sfärens rand så måste dess radie vara  $r = ct$ . Detta ger oss sfärens ekvation:  $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$ .

Betrakta nu samma sfär, men i ett annat referenssystem som färdas med konstant hastighet  $u$  i  $x$ -led:  $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$ . Om vi subtraherar med  $c^2t^2$ , respektive  $c^2t'^2$  på båda sidor får vi följande likhet:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2. \quad (1)$$

Följer vi nu Galileitransformationerna 1-4 ovan får vi:

$$x^2 = x'^2.$$

Insättning av  $x' = x - ut$  ger:

$$x^2 = (x - ut)^2.$$

Vilket endast stämmer då  $ut = 0$ , det vill säga om båda observatörer befinner sig i samma referenssystem. Vi behöver införa en faktor som modifierar Galileitransformationen så att likheten i ekvation 1 uppfylls.

## 2.3 Lorentztransformationen

Låt oss börja med att införa *Lorentzfaktorn*. Det visar sig att Galileitransformationerna gör fel förutsägelser för sträckan  $x' = x - ut$  då  $u \rightarrow c$ . Detta gör att den måste justeras med en faktor  $\gamma$  så att:

$$x' = \gamma(x - ut). \quad (2)$$

eller ekvivalent

$$x = \gamma(x' + ut'). \quad (3)$$

Där  $\gamma$  är Lorentzfaktorn, även kallat *gammafaktorn* [7][8]. Multiplicerar man nu vänster- respektive högerleden i ekvation 2 och 3 med varandra fås:

$$xx' = \gamma(xx' + xut' - x'ut - u^2tt'). \quad (4)$$

Minns från avsnitt 2.2 att en specifik händelse inträffade vid  $(x, t)$  för den stationära åskådaren respektive vid  $(x', t')$  för den som var i rörelse. Även om de inte är överens om varken var eller när händelsen inträffar så måste de vara överens om ljusets hastighet, detta innebär att om de båda precis innan de anser att händelsen äger rum skulle ta fram en lampa och lysa rakt i den riktningen och därmed utlösa händelsen skulle det ta tiden  $t$  för ljuset att nå  $x$  och  $t'$  för ljuset att nå  $x'$ , det vill säga  $x = ct$  och  $x' = ct'$ . Om vi sätter in dessa i ekvation 4 får vi:

$$c^2tt' = \gamma(c^2tt' + uctt' - uct't - u^2tt'). \quad (5)$$

Löser vi ut  $\gamma$  ur ekvation 5 får vi slutligen ett uttryck för Lorentzfaktorn:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (6)$$

Med ekvation 2 och 6 har vi:  $x' = \gamma(x - ut) = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ .

Vi löser ut  $t'$  ur ekvation 3 och får:  $t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ .

Sammanfattningsvis, går man från ett referenssystem till ett annat där det ena har en hastighet  $u$  i positiv riktning i  $x$ -led görs detta med följande modifierade transformationer [7]:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{array} \right\}.$$

Notera att även här förblir  $y$ - och  $z$ -ledet oförändrat ty den relativa rörelsen endast sker i  $x$ -led. Detta kallas för *Lorentztransformationen* mellan två olika referenssystem och kan på matrisform även skrivas [1]:

$$\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{1 - v^2} & v/\sqrt{1 - v^2} \\ v/\sqrt{1 - v^2} & 1/\sqrt{1 - v^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix}, \text{ där } v = \frac{u}{c}. \quad (7)$$

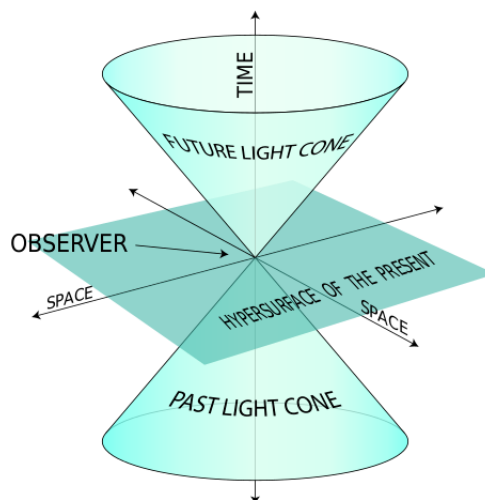
Nu återstår att kontrollera likheten i ekvation 1. Substituering och subtraktion i båda led ger slutligen:

$$x^2 - \left(\frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\right)^2 - c^2t^2 + c^2\left(\frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\right)^2 = 0.$$

## 2.4 Ljuskonen

Tänk att en lampa tänds i origo i det tvådimensionella rummet. Ljuset sprider sig i en växande cirkel bort från källan. Lägg till en tidsaxel och den växande cirkeln blir nu en växande kon, vars radie växer med ljusets hastighet. Konen blir större ju längre fram i tiden man går från origo och

kallas för *framtidskonon*. Om man speglar framtidskonon i  $xy$ -planet så får man en kon som istället blir större ju längre *bakåt* i tiden man går från origo. Denna kon kallas för *dåtidskonon*, illustrerad i figur 4 [9].



Figur 4: Framtidskonon och dåtidskonon illustrerad i tre dimensioner. CC-BY [10].

Här har vi för enkelhetens skull betraktat rummet som tredimensionellt, egentligen är ljuskoner tredimensionella ”ytor” i ett fyrdimensionellt rum. Om man betraktar en händelse  $E$  i origo så beskriver punkter på och innanför framtidskonon framtida händelser som påverkas av  $E$ . Dåtidskonon fungerar på liknande sätt: punkter på och innanför konen är dåtida händelser som påverkar  $E$ . Resterande punkter i rumtiden är händelser som varken kan påverkas av- eller påverkar  $E$ . Själva konen består av *ljuslika* vektorer, insidan av *tidslika* vektorer och utsidan runtomkring av *rumslika* vektorer [9][1].

Det intressanta med ljuskoner är att de förblir oförändrade oavsett vilket referenssystem man betraktar dem ur. Detta innebär att en händelse som befinner sig på ljuskonen kommer att finnas på ljuskonen även efter till exempel en Lorentztransformation [1].

## 2.5 Relativistisk Aberration

När skeppet befinner sig i vila rör det sig på en rak linje genom rumtiden vi kallar för världslinjen. Då skeppets hastighet är nära ljusets ligger linjen nära ljuskonen. Observatörer med olika referenssystem befinner sig på olika världslinjer, och vi gör bytet mellan världslinjerna med Lorentztransformationen. Då skeppet färdas med hastigheter nära ljusets uppstår som en konsekvens av Einsteins postulat *Relativistisk aberration*. Fenomenet uppstår eftersom en stillastående observatör på marken befinner sig i en annan referensram, världslinje, än skeppet och därför mäter avstånd till händelser i rumtiden annorlunda.

För att på ett enkelt sätt förklara fenomenet med en liknelse tänker vi oss att vi står ute i regnet på sidan av en motorväg i referensramen  $\mathbf{S}$  med koordinaterna  $(t, x, y, z)$ . En annan observatör passerar oss färdandes i en bil med hastigheten  $v$  i en annan referensram  $\mathbf{S}'$ . Vi uppfattar att det regnar rakt nedåt, men observatören i bilen träffas av regnet med en vinkel, en vinkel som blir större ju snabbare bilen färdas tills det möter bilen rakt framifrån. Referensramen  $\mathbf{S}'$  använder koordinatsystemet  $(t', x', y', z')$  för att mäta sträckor och referensramarna relaterar till varandra som tidigare nämnt med Galileitransformationen [2].

För Han och Chewie är det ljusstrålar och inte regn som träffar skeppet, istället för Galileitransformationen måste vi därför använda Lorentztransformationen för att beräkna vinkeln av aberrationen. Ju närmare ljusets hastighet de färdas desto mer fokuseras ljuset i färdriktningen, tills alla stjärnor samlats i en enda punkt framför dem. På grund av Jordens rotation runt solen

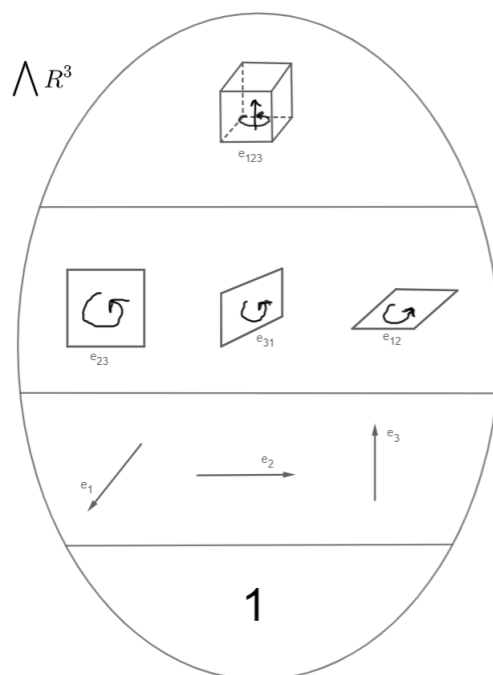
påverkar den relativistiska aberrationen även hur vi uppfattar ljuset som når oss från stjärnorna, ett fenomen som upptäckts av astronomer redan på 1800-talet även om de ej då kunde förklara det. Notera att denna aberration endast är 20 arcsekunder, det vill säga 0.00099365 radianer [3].

## 3 Cliffordalgebra

### 3.1 Multivektorer

Om vi betraktar vektorrummet  $\bigwedge^1 \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$  så vet vi sedan innan att varje given vektor kan uttryckas som en linjärkombination av den ortonormala basen som spänner rummet:  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Vektorer i detta rum är endimensionella objekt sk. 1-vektorer. Nolldimensionella objekt (0-vektorer) kallas skalärer och spänner  $\bigwedge^0 \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}$ . Om det både finns nolldimensionella- och endimensionella vektorer så är det vidare inte helt orimligt att tänka sig att det även finns tvådimensionella vektorer. Geometriskt kan dessa tolkas som orienterade ytor och kallas för bivektorer. Om vi vill spänna rummet av bivektorer,  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$  så krävs, precis som i 1-vektor fallet, en ortonormal bas som i detta fall blir:  $\{e_{23}, e_{31}, e_{12}\}$  där t.ex.  $e_{12}$  är det parallelogram som spänns av basvektorerna  $e_1$  och  $e_2$  och beloppet av  $e_{12}$  är arean för parallelogrammet. Rummet  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$  består av tvådimensionella vektorer, ytor, men eftersom  $\mathbb{R}^3$  är tredimensionellt bör det rimligen även finnas rum för volymer. En trivektor kan geometriskt tolkas som just en volym, med orientering enligt högerhandsregeln. Eftersom  $\mathbb{R}^3$  är tredimensionellt, precis som en trivektor, så säcker det med endast en bastrivektor för att spänna hela rummet av trivektorer  $\bigwedge^3 \mathbb{R}^3: \{e_{123}\}$ , där  $e_{123}$  är den volym som spänns av  $e_1, e_2, e_3$  [1].

Med detta kan vi nu spänna  $\bigwedge \mathbb{R}^3 = \bigwedge^0 \mathbb{R}^3 \oplus \bigwedge^1 \mathbb{R}^3 \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R}^3 : 1, e_1, e_2, e_3, e_{23}, e_{31}, e_{123}$  (0-vektorer, 1-vektorer, 2-vektorer och 3-vektorer). Varje objekt i detta rum kommer att vara en linjärkombination av dessa 8 komponenter och kallas för multivektor. Det vill säga, multivektorrummet  $\bigwedge \mathbb{R}^3$  har 8 dimensioner och består av 8-dimensionella multivektorer. Något som kan göra detta aningen förvirrande är att man i tidigare kurser etc. kallat 1-vektorer för vektorer och när man säger att  $\{e_1, e_2, e_3\}$  spänner vektorrummet  $\mathbb{R}^3$  så menar man egentligen rummet av 1-vektorer (dvs.  $\bigwedge^1 \mathbb{R}^3$ ), som är ett delrum av  $\bigwedge^3 \mathbb{R}^3$ . Naturligtvis sträcker sig denna princip även i  $n$  dimensioner och i godtyckliga rum  $V : \bigwedge^k V^n$ , där  $0 \leq k \leq n$ . Figur 5 illustrerar basmultivektorerna för  $\bigwedge \mathbb{R}^3$  [1]:



Figur 5: Basmultivektorerna för  $\bigwedge \mathbb{R}^3$ .

En multivektor är en vektor som består av en linjärkombination av minst två olika baser som tillhör samma multivektorrum, t.ex. ett komplext tal  $a + bi$  fungerar som en multivektor eftersom den består av både en skalär och en bivektor. Mer specifikt tillhör vektorerna på formen  $a + bi$  det jämna delrummet  $\bigwedge^{ev} \mathbb{R}^2 = \bigwedge^0 \mathbb{R}^2 \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^2$  [1].

### 3.2 Cliffordprodukten

Cliffordprodukten definieras av följande räkneregler, där  $e_i$  och  $e_j$  är basvektorer och  $i, j = 1, 2, 3$ :

1.  $e_i e_j = e_{ij}$
2.  $e_{ij} = -e_{ji}$
3.  $e_i e_i = e_j e_j = 1$ .

Med dessa regler ser vi att Cliffordprodukten är antikommutativ för ortogonala vektorer och kommutativ för parallella vektorer. Vidare är produkten även bi-linjär och associativ (se appendix A) [1][4].

Minns från avsnitt 2.1 att det krävs fyra basvektorer för att spänna den fyrdimensionella rumtiden:  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ . Från räknereglerna ovan vet vi att en Euklidisk, rumslik, vektor Cliffordmultipliserat med sig självt blir 1. Men för den tidslika vektorn  $e_0$  blir motsvarande produkt istället -1 (det vill säga  $e_0 e_0 = -1$ ) [1].

**Exempel:** Vi vill beräkna Cliffordprodukten av följande två vektorer:  $u = 3 + 6e_1 + e_{31} + 8e_{123}$  och  $v = 1 + 4e_3 + 7e_{12} + 5e_{23}$ .

Vi utnyttjar distributiva lagen, samt att produkten av två ortogonala vektorer antikommuterar:

$$uv = (3 + 6e_1 + e_{31} + 8e_{123})(1 + 4e_3 + 7e_{12} + 5e_{23}) = (3 + 12e_3 + 21e_{12} + 15e_{23}) + (6e_1 - 24e_{31} + 42e_2 + 30e_{123}) + (e_{31} - 4e_1 - 7e_{23} + 5e_{12}) + (8e_{123} + 32e_{12} - 56e_3 - 40e_1) = 3 - 38e_1 + 42e_2 - 44e_3 + 8e_{23} - 23e_{23} + 58e_{12} + 38e_{123}.$$

Till exempel beräknas:  $8e_{123}7e_{12} = 56e_1e_2e_3e_1e_2 = -56e_1e_2e_3e_2e_1 = -56e_1e_3e_2e_2e_1 = 56e_1e_3e_1 = -56e_3e_1e_1 = -56e_3$ . Samma princip används för resterande beräkningar ovan.

### 3.3 Vektorinvers

I Cliffordalgebran har varje vektor  $a$  en invers vilken definieras enligt:

$$a^{-1}a = 1.$$

För att lösa ekvationen utnyttjar vi kvadreringsregeln, det vill säga att kvadraten av en vektor är en skalär

$$a^2 = |a|^2.$$

Kombineras uttrycken finner vi

$$a^{-1} = \frac{a}{|a|^2}$$

för en vektor  $a$  med längden 1 gäller därav:

$$a^{-1} = a.$$

### 3.4 Inre och yttre produkt

Vi antar att vi har ett Euklidiskt rum och vektorerna  $a$  och  $b \in \wedge^1$ . I ett Euklidiskt rum uppfyller Cliffordalgebran följande:

$$ab = \langle a, b \rangle + a \wedge b. \quad (8)$$

där den *yttre produkten* som skrivs  $a \wedge b$  är det som blir kvar när man drar bort den inre produkten, skalärprodukten, från Cliffordprodukten. Ur den relationen kan vi även härleda:

$$\langle a, b \rangle = \frac{ab + ba}{2} \quad (9)$$

eftersom den inre produkten kommuterar medan den yttre antikommuterar. Exempel:  $(e_1 + 2e_2)(e_1 - e_2) + (e_1 - e_2)(e_1 + 2e_2) = (1 - e_{12} + 2e_{21} - 2) + (1 + 2e_{12} - e_{21} - 2) = -2$  vilket överensstämmer med vad vi väntar oss av en skalärprodukt. Situationen kompliceras en aning när  $a, b$  är multivektorer men det ligger utanför vårt projekt [1].

### 3.5 Matrisrepresentation

Varje Cliffordalgebra är isomorf med en matrisalgebra [1]. Det följer att vissa kända räkneregler för matriser även gäller för Cliffordalgebran. Exempelvis produkten av två inverterbara matriser:  $A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1}$ , där  $A, B$  är matriser. Analogt för multivektorerna  $a, b$  gäller:  $a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1}$ .

## 4 Rotationer med Cliffordalgebra

Cliffordalgebran är ett fantastiskt verktyg för fysiker då den är representativ för strukturen av världen vi lever i, och kan därför tillämpas inom allt från kvantfysik till astronomi. Den tydligaste illustrationen av Cliffordalgebras nytta för fysiker är hur den hanterar projektioner, rejektioner och reflektioner. Vi inleder genom att betrakta två vektorer,  $u$  och  $v$ , i  $\mathbb{R}^2$ . Vektorn  $u$  kan delas upp i en del parallell med och en del vinkelrät mot  $v$ , se figur 6. Detta ger oss uttrycket för uppdelningen av vektorn  $u$ :

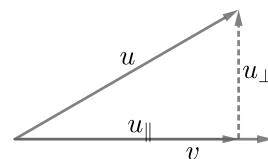
$$u = u_{\parallel} + u_{\perp}. \quad (10)$$

Den parallella delen är projektionen av  $u$  på  $v$ , betecknas  $u_{\parallel}$ , och den vinkelräta delen är rejektionen av  $u$  från  $v$ , betecknas  $u_{\perp}$ . För att härleda uttrycket för projektionen multiplicerar vi uttrycket med  $v$  på höger sida

$$uv = u_{\parallel}v + u_{\perp}v.$$

Vi utnyttjar att  $v$  antikommuterar med  $u_{\perp}$  och får

$$uv = u_{\parallel}v - vu_{\perp}.$$



Figur 6: Uppdelning av vektorn  $u$  på  $v$

Enligt ekvation 10 gäller sambandet:  $u_{\perp} = u - u_{\parallel}$

$$\begin{aligned} uv &= u_{\parallel}v - v(u - u_{\parallel}) \\ uv &= u_{\parallel}v - vu + vu_{\parallel} \\ uv + vu &= u_{\parallel}v + u_{\parallel}v. \end{aligned}$$

Vi utnyttjar att  $v$  kommuterar med  $u_{\parallel}$ , det vill säga:  $vu_{\parallel} = u_{\parallel}v$

$$\begin{aligned} uv + vu &= 2u_{\parallel}v \\ \frac{1}{2}(uv + vu) &= u_{\parallel}v. \end{aligned}$$

Vi ser att vänsterledet är lika med inre produkten av  $u$  och  $v$  enligt ekvation 9 från kapitel 3.4

$$\langle u, v \rangle = u_{\parallel}v.$$

Därefter multiplicerar vi med vektorinversen  $v^{-1} = \frac{v}{(|v|^2)}$  från avsnitt 3.3 på höger sida vilket ger oss uttrycket för projektionen av  $u$  på  $v$  i geometriska termer:

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle v^{-1} &= u_{\parallel}vv^{-1} = u_{\parallel} \\ u_{\parallel} &= \langle u, v \rangle v^{-1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Rejektionen av  $u$  från  $v$  härleds på liknande sätt från vektoruppdelningen, ekvation 10

$$u_{\perp} = u - u_{\parallel}.$$

Vi utnyttjar ekvation 11, uttrycket vi härledde för projektionen  $u_{\parallel}$

$$u_{\perp} = u - \langle u, v \rangle v^{-1}.$$

Vi ser att  $u = (uv)v^{-1}$  och bryter sedan ut  $v^{-1}$

$$\begin{aligned} u_{\perp} &= (uv)v^{-1} - \langle u, v \rangle v^{-1} \\ u_{\perp} &= (uv - \langle u, v \rangle)v^{-1}. \end{aligned}$$

Därefter utnyttjar vi ekvation 8 från avsnitt 3.4,  $uv = u \wedge v + \langle u, v \rangle$ , vilket ger oss uttrycket för rejektionen av  $u$  från  $v$  i geometriska termer:

$$\begin{aligned} u_{\perp} &= (u \wedge v + \langle u, v \rangle - \langle u, v \rangle)v^{-1} \\ u_{\perp} &= (u \wedge v)v^{-1}. \end{aligned} \tag{12}$$

Vi definierar reflektionen av  $u$  över  $v$ , se figur 7, som  $u' = u_{\parallel} - u_{\perp}$  och multiplicerar uttrycket med  $v$  på vänster sida

$$vu' = vu_{\parallel} - vu_{\perp}.$$

Vi utnyttjar att vektorn  $v$  kommuterar med  $u_{\parallel}$  och antikommuterar med  $u_{\perp}$  för att bryta ut  $v$

$$\begin{aligned} vu' &= u_{\parallel}v + u_{\perp}v \\ vu' &= (u_{\parallel} + u_{\perp})v. \end{aligned}$$

Vi utnyttjar uttrycket för vektoruppdelningen, ekvation 10, och multiplicerar därefter med vektorinversen till  $v$  på vänster sida

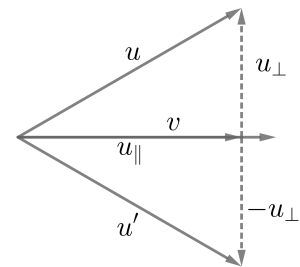
$$\begin{aligned} vu' &= (u)v \\ u' &= v^{-1}(u)v. \end{aligned}$$

Vi reflekterar  $u'$  över ännu en vektor  $w$  och betecknar den multipelt reflekterade vektorn  $u''$

$$u'' = w^{-1}u'w.$$

Vi använder det tidigare härledda uttrycket för  $u'$  samt  $w^{-1}v^{-1} = (vw)^{-1}$  och finner

$$u'' = w^{-1}v^{-1}uvw = (vw)^{-1}u(vw). \tag{13}$$



Figur 7: Vektorn  $u$  och dess reflektion över  $v$

Vi ser i figur 8 att den enda skillnaden mellan  $u''$  och  $u$  är dess riktning. Det framgår att vektorn  $u$  roterats i planet  $B$  uppspant av vektorerna  $v$  och  $w$ , och rotationsvinkeln är dubbelt så stor som vinkeln  $\theta$  mellan  $v$  och  $w$ .  $B$  är en bivector, ett imaginärlikt tal, och kan geometriskt tolkas som en orienterad yta, se figur 5, den yttre produkten av  $v$  och  $w$ . I Euklidiska rum, det vill säga vanliga rum där tiden inte är en dimension, definieras vinkeln  $\theta$  mellan två vektorer  $v$  och  $w$  som det unika talet  $0 \leq \theta \leq \pi$  så att ekvationen

$$\langle v, w \rangle = |v||w| \cos \theta.$$

är sann enligt *Cauchy-Schwarz olikhet* [1]. Lagranges identitet

$$|v|^2|w|^2 - \langle v, w \rangle^2 = |v \wedge w|^2$$

kan skrivas om med definitionen för vinkeln  $\theta$

$$|v|^2|w|^2(1 - \cos^2 \theta) = |v \wedge w|^2$$

och visar då med trigonometriska ettan,  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ :

$$|v \wedge w| = |v||w| \sin \theta.$$

Den yttre produkten relaterar till bivektorn  $B$  enligt

$$v \wedge w = B|v \wedge w|, \quad B = \frac{v \wedge w}{|v \wedge w|}$$

därför kan ekvation 8 från avsnitt 3.4 skrivas som

$$\begin{aligned} vw &= \langle v, w \rangle + v \wedge w \\ &= |v||w| \cos \theta + B|v||w| \sin \theta \\ &= |v||w|(\cos \theta + B \sin \theta). \end{aligned}$$

Där  $B$  är den imaginärlika bivektorn med norm 1 och samma orientering som  $v \wedge w$  vilken vi utför rotationen med. Vi utnyttjar *Eulers formel*,  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , och finner

$$vw = |v||w|e^{\theta B}$$

och dess invers

$$vw^{-1} = \frac{1}{|v||w|}e^{-\theta B}.$$

Med de nya uttrycken för  $vw$  och dess invers skriver vi om uttrycket för den multipelt reflekterade vektorn, ekvation 13:

$$u'' = \frac{1}{|v||w|}e^{-\theta B}u|v||w|e^{\theta B} = e^{-\theta B}ue^{\theta B}.$$

Den genomförda rotationen är av  $2\theta$  eftersom vektorerna  $v$  och  $w$  är separerade med vinkeln  $\theta$ . För en  $\theta$  rotation väljer vi istället vektorer separerade med vinkeln  $\theta/2$  vilka spänner upp en godtycklig bivector  $b$ , och den generella rotationsformeln för en  $\theta$  rotation kan uttryckas:

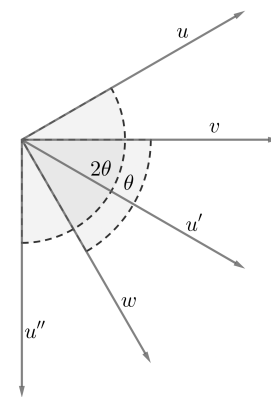
$$u'' = e^{-\frac{\theta}{2}b}ue^{\frac{\theta}{2}b}. \quad (14)$$

Notera att bivektorn  $b$  måste vara normaliserad för att den valda rotationsvinkeln ej ska påverkas. Anledningen till att vi har exponentialtermer på båda sidor av vektorn  $u$  är för att objektet vi roterar inte ska byta orientering. Om vi reflekterar en vektor över ett plan endast en gång hamnar den reflekterade vektorn på fel sida av planet. Eftersom enhetsvektorerna av alla rumsdimensioner kvadreras till +1 kvadreras följaktligen de tre rumslika bivektorerna till -1.

$$(e_1 e_2)^2 = e_1 e_2 e_1 e_2 = -e_1 e_1 e_2 e_2 = -(1)(1) = -1$$

$$(e_1 e_2)^2 = (e_2 e_3)^2 = (e_1 e_3)^2 = -1.$$

Rotationer i bivektorer vars kvadrat är lika med -1 kallas för *elliptiska rotationer* och är vanliga Euklidiska rotationer.



Figur 8: Två speglingar blir en rotation

## 4.1 Hyperboliska Rotationer

I Minkowskirummet har vi förutom de tre rumsliga vektorerna även den tidslika vektorn där  $e_0^2 = -1$  och följaktligen kvadreras de tre tidslika bivektorerna till  $+1$ .

$$(e_0e_1)^2 = e_0e_1e_0e_1 = -e_0e_0e_1e_1 = -(-1)(1) = +1$$

$$(e_0e_1)^2 = (e_0e_2)^2 = (e_0e_3)^2 = +1.$$

Detta betyder att vektorerna  $e_2$  och  $e_3$  kommuterar med  $e_0$ . Rotationer i tidslika bivektorer, vars kvadrat är lika med  $+1$ , kallas för *hyperboliska rotationer*. Det finns även ljuslika bivektorer vars kvadrat är lika med  $0$  vilket leder till *paraboliska rotationer*, men för projektet är det de hyperboliska rotationerna som är i fokus. En fördel med Cliffordalgebran är att den härledda rotationsformeln kan användas för samtliga rotationer. På samma sätt som en elliptisk rotation bevarar avståndet till origo, bevarar en hyperbolisk rotation avståndet i egentiden  $s$  enligt

$$-c^2s^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

Minkowskirummet har hyperbolisk geometri och för att kunna utföra rotationer i rumtiden vänder vi oss till den hyperboliska motsvarigheten av sinus och cosinus: *sinus hyperbolicus* och *cosinus hyperbolicus*. Dessa betecknas med *sinh* respektive *cosh*. Vi betecknar den tidslika bivektorn vi utför rotationen i med  $b$  och rotationsvinkeln med  $\varphi$ . Hastigheten  $u$  en observatör färdas med är kopplat till rotationsvinkeln som fraktionen  $v$  av ljusets hastighet  $c$  enligt

$$v = \frac{u}{c} = \tanh(\varphi) = \frac{\sinh(\varphi)}{\cosh(\varphi)}.$$

Det finns många sätt att definiera de hyperboliska funktionerna på. Ett av dem är genom att sätta in en tidslig bivektor, varav den enklaste är  $b = e_{01}$ , i rotationsformeln, ekvation 14, och med Maclaurin-utveckling dela upp exponentialfunktionen i en jämn och en udda del:

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\varphi b}{2}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\varphi b}{2}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{\varphi b}{2}\right)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{\varphi b}{2}\right)^{2k+1} \\ &= \cosh\left(\frac{\varphi}{2}\right) + b \cdot \sinh\left(\frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned}$$

Den jämna delen av exponentialfunktionen upphöjd till en tidslig bivektor motsvarar cosinus hyperbolicus av  $\varphi$  och den udda delen motsvarar sinus hyperbolicus av  $\varphi$ . Den hyperboliska rotationen  $T$  från  $(t', x')$  till  $(t, x)$  ges enligt definition [1] med matrisformalism av

$$\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\varphi) & \sinh(\varphi) \\ \sinh(\varphi) & \cosh(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix}.$$

Med hastigheten uttryckt i rotationsvinkeln  $\frac{u}{c} = \tanh(\varphi)$  kan vi skriva om uttrycket för definitionen av gammafaktorn

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2(\varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sinh^2(\varphi)}{\cosh^2(\varphi)}}} = \frac{\cosh(\varphi)}{\sqrt{\cosh^2(\varphi) - \sinh^2(\varphi)}}.$$

Uttrycket i nämnaren förenklas med den hyperboliska motsvarigheten till trigonometriska ettan, *hyperboliska ettan*:  $\cosh^2(\varphi) - \sinh^2(\varphi) = 1$ ,

$$\gamma = \frac{\cosh(\varphi)}{\sqrt{\cosh^2(\varphi) - \sinh^2(\varphi)}} = \frac{\cosh(\varphi)}{\sqrt{1}} = \cosh(\varphi).$$

Från  $\gamma = \cosh(\varphi)$  och  $v = \tanh(\varphi)$  följer det att  $\sinh(\varphi) = \gamma v$  och vi finner att  $T$  ges av

$$\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma v & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix}.$$

Uttryckt med de tidigare definierade  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}$  och  $v = \frac{u}{c}$  samt  $c = 1$  finner vi

$$\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{1-v^2} & v/\sqrt{1-v^2} \\ v/\sqrt{1-v^2} & 1/\sqrt{1-v^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix}.$$

Vilket är ekvivalent med den tidigare härledda Lorentztransformationen. Därmed följer det att Lorentz-transformationen är en hyperbolisk rotation.

## 5 Himmelsfären

För att kunna svara på vad Han Solo och Chewbacca hade sett genom rutan av rymdskeppet inför vi det matematiska objektet *himmelsfären*. Rymdskeppet, vilket vi här definierar som observatören, befinner sig i vila vid Minkowskirummets origo, det vill säga rumskoordinaterna  $(0, 0, 0)$  och tidpunkten 0. En händelse äger rum på himmelsfären vid  $(t, x_1, x_2, x_3)$ , där  $t < 0$  eftersom händelsen skedde i det förflutna. När ljuset från händelsen når skeppet har det således färdats sträckan  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  på tiden  $t$ , därav gäller

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 = 0.$$

Allt ljus som når skeppet kommer från händelser i det förflutna; händelser som ligger på dåtidens ljuskon, och det framgår att ljuset från konen når observatören exakt från riktningen  $(x_1, x_2, x_3)$ . Vi ser ingen skillnad på ljus som är en sekund gammalt och det som är miljontals år gammalt; det är bara riktningen ljuset har som är intressant. Vi låter därför tidskoordinaten  $t$  för alla stjärnor på himmelsfären vara  $-1$  vilket betyder att de ligger på ett enhetsavstånd från observatören enligt sambandet ovan då  $c = 1$ .

### 5.1 Himmelska Koordinater

Astronomer världen över samlar ständigt in information om nya stjärnor och kartlägger dessa i stjärnkartor. Det vanligaste koordinatsystemet är det ekvatoriella koordinatsystemet; ett sfäriskt koordinatsystem som liknar det vi använder på jorden, där himmelsekvatorn är projektionen av jordens ekvator [5]. Latitud räknar man på jorden som antalet grader från ekvatorn i riktning mot norra eller södra himmelspolen, med ett N respektive S som suffix till antalet grader för att indikera riktningen. Det ekvatoriella koordinatsystemets motsvarighet kallas deklination och räknas på samma sätt som latituden i antalet grader från ekvatorn mot polerna - istället för att indikera riktningen med suffix är deklinationen negativ på södra halvklotet och positiv på norra halvklotet. Motsvarigheten till longitud kallas rektascension. Eftersom jorden roterar är det omöjligt att direkt överföra Greenwichmeridianen till en fixerad himmelsk-Greenwichmeridian då detta hade medfört att stjärnornas koordinater varierat med tiden på dygnet. Rektascensionens nollmeridian definieras därför till punkten där solen befinner sig vid vårdagsjämningen då denna punkt flyttar sig endast väldigt långsamt. Till skillnad från longituden som delar in jorden i  $360^\circ$  använder rektascensionen vanligtvis en annan indelning baserad på tid, där 24 stjärntimmar motsvarar ett helt varv och en stjärntimme motsvarar  $360^\circ / 24 = 15^\circ$ . Rektascensionen utgår från dess nollmeridian och mäts mot öster runt himmelsekvatorn. Stjärnorna vi samlat in för visualiseringen finns i Appendix D.

## 6 Möbiusavbildningar

I detta avsnitt härleds avbildningar som behövs för att visualisera Lorentztransformationen.

## 6.1 Möbiusavbildningar i det komplexa talplanet

Från komplex analys finner vi att en Möbiusavbildning är en avbildning på formen  $z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}$ .

Vi har fyra typer av avbildningar  $z \in \mathbb{C}$ :

1.  $z \rightarrow ze^{i\theta}$ , *rotation* med vinkel  $\theta$ .
2.  $z \rightarrow z\alpha$  ( $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ ), skalning med faktor  $\alpha$  *dilation*.
3.  $z \rightarrow z + \beta$  ( $\beta \in \mathbb{C}$ ), *translation*.
4.  $z \rightarrow 1/z$  *inversion*.

En Möbiusavbildning är en sammansättning av dessa, vilket vi ska bevisa i högre dimension. Vidare har dessa avbildningar egenskapen att den alltid avbildar en cirkel på antingen en cirkel eller en linje, och en linje på antingen en cirkel eller en linje. För att definiera en Möbiusavbildning då  $\dim(n), n = 3$  behöver vi följande begrepp.

## 6.2 Möbiusavbildningar i tre dimensioner

Vi påminner om att en *sfär* beskrivs av ekvationen:

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = r^2. \quad (15)$$

Där  $r$  är sfärens radie, och ett *plan* beskrivs av ekvationen:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = k \text{ eller } \langle a, x \rangle = k, \quad (16)$$

där  $k, a_i, i = 1, 2, 3$  konstanter.

### 6.2.1 Möbiusavbildningen

För en Möbiusavbildning då  $n = 3$  avbildas en sfär på en sfär eller ett plan, och ett plan på en sfär eller ett plan. Vi har samma typer av avbildningar när  $n = 3$  för  $x$  i ett Euklidiskt rum  $G$ .

1.  $x \rightarrow \exp(-j\theta/2)x \exp(j\theta/2)$ , *rotation* med vinkel  $\theta$ .
2.  $x \rightarrow x\alpha$  ( $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ ), skalning med faktor  $\alpha$ , *dilation*.
3.  $x \rightarrow z + \beta$  ( $\beta \in G$ ), *translation*.
4.  $x \rightarrow x^{-1}$  *inversion*,

där  $x^{-1}$  är Cliffordinversen. Notera att Minkowskirummet inte är Euklidiskt eftersom  $e_0^2 = -1 \not\geq 0$  och vi kan inte tala om Möbiusavbildningar i rumtiden.

Vi ska nu visa att en sammansättning av dessa avbildningar är en Möbiusavbildning. Att rotation, translation och dilation bevarar sfärer och plan är enkelt att se men vi ska undersöka fallet inversion.

Vi tar en sfär definierad enligt ekvation 15

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = |x - a|^2 = r^2.$$

och betraktar sedan inversionen:

$$\begin{aligned} x \rightarrow x^{-1} = \hat{x} &\Rightarrow |\hat{x}^{-1} - a|^2 = r^2 \\ \Leftrightarrow |\hat{x}^{-1} - a|^2 \hat{x}^2 &= |1 - a\hat{x}|^2 = r^2 \hat{x}^2. \end{aligned}$$

Utveckling av vänsterledet ger oss:

$$1 - 2\langle a, \hat{x} \rangle + |a|^2 |\hat{x}|^2 = r^2 |\hat{x}|^2$$

där  $a\hat{x} = (a_1\hat{x}_1 + a_2\hat{x}_2 + a_3\hat{x}_3) = \langle a, \hat{x} \rangle$ . Vi ser att om  $r = |a|$ , det vill säga sfären går genom punkten 0, får vi

$$1 - 2\langle a, \hat{x} \rangle + r^2|\hat{x}|^2 = r^2|\hat{x}|^2 \Leftrightarrow 1 - 2\langle a, \hat{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow 1/2 = \langle a, \hat{x}_1 \rangle,$$

vilket är ett plan enligt ekvation 16. Om  $|a| \neq r$  blir det en sfär då

$$\begin{aligned} |\hat{x}^{-1} - a|^2 = r^2 &\Leftrightarrow |\hat{x}^{-1} - a|^2 \hat{x}^4 = r^2 \hat{x}^4 \Leftrightarrow \\ |\hat{x} - a\hat{x}^2| &= r^2 \hat{x}^4. \end{aligned} \tag{17}$$

I Euklidiska rum gäller  $|x|^2 = x^2$  och vi får  $|x - a|^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - a)^2 - r^2 = 0$  och eftersom Cliffordprodukten av  $(x - a)^2 = x^2 - a^2$  så är  $\hat{x}^2 = 1/(|a|^2 - r^2)$ . Insättning i ekvation 17 ger då:

$$|\hat{x} - a/(|a|^2 - r^2)|^2 = r^2/(|a|^2 - r^2)^2.$$

Här har vi följt ett bevis i [1] där även bevis för plan till sfär återfinns.

### 6.3 Vahlenmatriser

*Omvändningen* av en multivektor får man då man för varje element av vektorn tar ordningen av indexen baklänges, noteras  $\bar{a}$  för multivektorn  $a$ . Exempelvis blir  $e_{234}$  omvänt till  $e_{432}$ . För skalärer och vektorer gäller det att  $a = \bar{a}$ , men för bivektorer och trivektorer är  $a = -\bar{a}$ .

**Definition 1** (Vahlenmatriser). *Låt  $a, b, c, d$  vara multivektorer i ett Euklidiskt rum  $V$ , med  $\dim(V) \leq 3$ , sådana att*

1.  $a\bar{b}, c\bar{d} \in V = \wedge^1 V \setminus \{0\}$
2.  $\det(A) = a\bar{d} - b\bar{c} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

då kallas  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  för en Vahlenmatris.

Vahlenmatriserna kan användas för att representera Möbiusavbildningar genom följande identifikation:

$$(aw + b)(cw + d)^{-1} \leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \tag{18}$$

där  $w$  är den vektor vi önskar avbilda. Sammansatta avbildningar med hjälp av Vahlenmatriser görs enligt följande: Låt  $A, A'$  vara Vahlenmatriser och  $f$  och  $g$  de motsvarande Möbiusavbildningarna, då gäller

$$AA' \leftrightarrow f \circ g \tag{19}$$

Vilket kan visas enligt:

$$\begin{aligned} AA' &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + bc' & b'a + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix} \\ &\leftrightarrow (w(aa' + bc') + b'a + bd')(w(ca' + dc') + cb' + dd')^{-1}. \end{aligned}$$

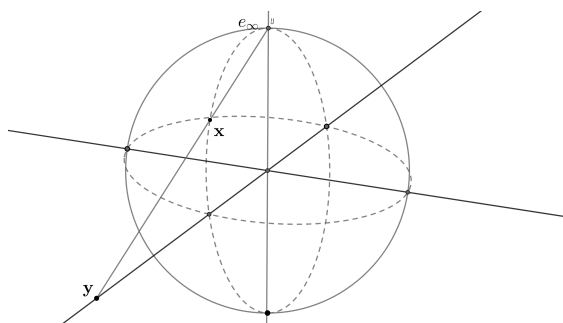
Vi finner vidare att

$$\begin{aligned} (f \circ g)(w) &= f(g(w)) = (ag(w) + b)(cg(w) + d)^{-1} \\ &= (a((a'w + b')(c'w + d')^{-1}) + b)(c((a'w + b')(c'w + d')^{-1}) + d)^{-1} \\ &= (a((a'w + b')(c'w + d')^{-1}) + b(c'w + d')(c'w + d')^{-1}) \\ &\times (c((a'w + b')(c'w + d')^{-1}) + d(c'w + d')(c'w + d')^{-1})^{-1} \\ &= (a(a'w + b') + b(c'w + d'))(c'w + d')^{-1}(c((a'w + b') + d(c'w + d'))(c'w + d')^{-1})^{-1} \\ &= (a(a'w + b') + b(c'w + d'))(c'w + d')^{-1}(c'w + d')(c(a'w + b') + d(c'w + d'))^{-1} \\ &= (w(aa' + bc') + b'a + bd')(w(ca' + dc') + cb' + dd')^{-1}. \end{aligned}$$

Ovan har regler för produkten av två inverterbara matriser använts. Dessa beskrivs i kapitel 3.5 om matrisrepresentation.

## 6.4 Stereografisk Projektion

För att avbilda punkter från en sfär på ett plan eller tvärtom kan stereografisk projektion, figur 9, användas.



Figur 9: Stereografisk projektion

Betrakta rummet  $Y$  med  $\dim(Y) = 2$ . Vi kan finna en vektor  $e_\infty$  ortogonal mot planet  $Y$ . Låt  $X = Y \oplus \text{span}(e_\infty)$ . Låt punkten  $x$  ligga på enhetssfären i  $X$  och  $y$  ligga i planet  $Y$ . Den stereografiska projektionen  $y_0$  av  $x_0$  är den punkt där en linje dragen genom  $e_\infty$  och  $x_0$  möter planet  $Y$ , se figur 10. Om  $x = e_\infty$  definieras  $y = \infty$ . Vi har följande formler för den stereografiska projektionen:

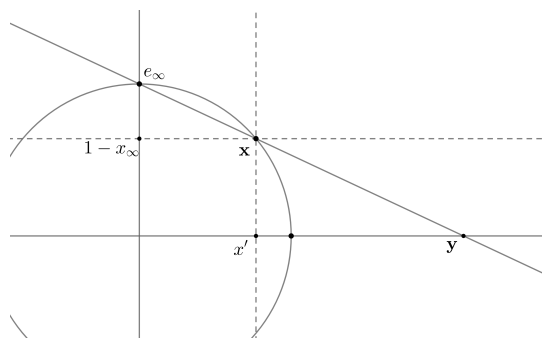
$$y = \frac{x'}{1 - x_\infty}, \quad x = \frac{2}{|y|^2 + 1}y + \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1}e_\infty. \quad (20)$$

där  $x'$  är  $x \in Y$

### 6.4.1 Härledning av formler för stereografisk projektion

För att härleda den första formeln noterar vi att avståndet från 0 till  $x'$  är en lika stor andel av avståndet  $|0 - y|$  (a) som  $1 - x_\infty$  är av avståndet  $e_\infty$  till 0 (b). Detta ger:

$$a = b \Leftrightarrow \frac{y}{x'} = \frac{1}{1 - x_\infty} \Leftrightarrow y = \frac{x'}{1 - x_\infty}.$$



Figur 10: Stereografisk projektion, tvärsnitt

För den andra formeln betraktar vi en parametrisering enligt figur 10 av linjen mellan  $e_\infty$  och  $y$ :

$$t(y_1e_1 + y_2e_2) + (1 - t)e_\infty. \quad (21)$$

Vi ser att vi får punkten  $y$  när  $t = 1$ . För att ta reda på när linjen skär enhetssfären använder vi följande ekvation:

$$\begin{aligned} t^2(y_1^2 + y_2^2) + (1 - t)^2 &= 1^2 = 1 \Leftrightarrow t^2y^2 + 1 - 2t + t^2 = 1 \\ \Leftrightarrow t(t(y^2 + 1) - 2) &= 0 \text{ och då } t \neq 0 \\ \Rightarrow t &= 2 \cdot (y^2 + 1)^{-1}. \end{aligned}$$

Vi sätter in  $t$  i ekvation 21 och får

$$x = 2y(y^2 + 1)^{-1} + (1 - 2y(y^2 + 1)^{-1})e_\infty = \frac{2}{|y|^2 + 1}y + \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1}e_\infty.$$

I ovanstående notera att  $e_i^2 = 1$ .

### 6.4.2 Stereografisk projektion som Möbiusavbildning

Den stereografiska projektionen kan skrivas på formen av en Möbiusavbildning:

$$f(y) = (e_\infty y + 1)(y - e_\infty)^{-1}.$$

Vi ska nu visa att den motsvarar tidigare givna formler. Anta först  $x \in X$  med  $x^2 = 1$ , det vill säga:  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_\infty e_\infty$ . Vi har då:

$$\begin{aligned} (e_\infty x + 1)(x - e_\infty)^{-1} &= \frac{(e_\infty x + 1)(x - e_\infty)}{|x - e_\infty|^2} = \frac{e_\infty - e_\infty x e_\infty + x - e_\infty}{1 - e_\infty x - x e_\infty + 1} \\ &= \frac{e_\infty x e_\infty + x}{2 - (e_\infty x + x e_\infty)}. \end{aligned}$$

Då  $-e_\infty x e_\infty + x = -e_\infty(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_\infty e_\infty)e_\infty + (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_\infty e_\infty) = -(-(x_1 e_1 + x_2 e_2 - x_\infty e_\infty) + (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_\infty e_\infty)) = 2x'$ , samt  $e_\infty x + x e_\infty = 2\langle x, e_\infty \rangle = 2x_\infty$  (se appendix 3.4) så har vi

$$\frac{e_\infty x e_\infty + x}{2 - (e_\infty x + x e_\infty)} = \frac{x'}{1 - x_\infty}.$$

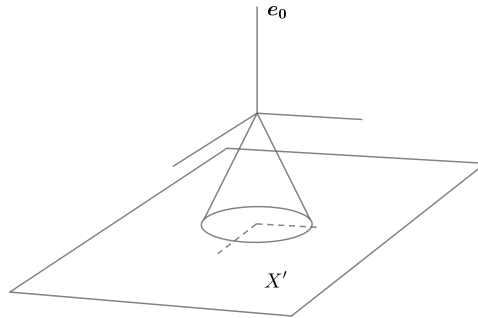
För inversen gäller på samma sätt om  $y \in Y, y = x_1 e_1 + x_2 e_2 + 0 \cdot e_\infty$ :

$$\begin{aligned} (e_\infty y + 1)(y - e_\infty)^{-1} &= \frac{e_\infty |y|^2 + y + y - e_\infty}{|y|^2 + 1} \\ &= \frac{2}{|y|^2 + 1}y + \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1}e_\infty. \end{aligned}$$

Eftersom avbildningen ger de väntade formlerna kan slutsatsen att den är självinvers dräs. Vi ser att det är en sammansättning av en dilation, en invers och ytterligare en dilation, vilket är en Möbiusavbildning.

## 6.5 Projektivt rum

En observatör i rymdskeppet ser stjärnljus från dåtiden, bara riktningen ljuset kommer ifrån är intressant. Vi låter därför den tidlika basvektorn  $e_0$  vara  $-1$ , vilket motsvarar att alla stjärnor ligger på enhetsavstånd från observatören ( $c = 1$ ). Vi kan formalisera detta resonemang. Betrakta rummet  $X = \mathbb{R}^3$  med basvektorerna  $e_0, e_1$  och  $e_\infty$ . Vi inför en framtidspekande tidsvektor ortogonal till  $X$  och får då Minkowskirummet  $W = X \oplus \text{span}(e_0)$ . Det *projektiva rummet*  $P(W)$  är då alla linjer  $\in P$  som passerar genom punkten 0. Tag nu planet  $x_0 = -1$  och kalla det  $X'$ . Man kan betrakta  $X'$  som ett slags plan i rumtiden; världen för en ljussekund sedan. Då sammanfaller snittet mellan ljuskonen och  $X'$  med enhetsfären i densamma, se figur 11.



Figur 11: Ljuskonen och rummet  $X'$

## 6.6 Lorentztransformation i det projektiva rummet

Vi ska nu härleda hur transformationen  $T$  av himmelssfären ser ut i projektiva koordinater  $Y$ . Vi har vår vektor  $x$  som vi placerar i planet  $X'$  och utför en Lorentztransformation. Notera att vi nedan sätter ett minustecken framför hastighetsvinkeln. Anledningen till det är att ljuset kommer emot oss ([3] s. 180).

$$\begin{aligned}
 Tx &= (\cosh(\frac{\varphi}{2}) - \sinh(\frac{\varphi}{2})e_{01})(x - e_0)(\cosh(\frac{\varphi}{2}) + \sinh(\frac{\varphi}{2})e_{01}) \\
 &= (\cosh(\frac{\varphi}{2}) - e_{01})(\cosh(\frac{\varphi}{2})x - \sinh(\frac{\varphi}{2})e_{01}) + e_0(\cosh(\frac{\varphi}{2}) + \sinh(\frac{\varphi}{2})e_{01})^2 \\
 &= \cosh(\frac{\varphi}{2})^2 + \sinh(\frac{\varphi}{2})\cosh(\frac{\varphi}{2})xe_{01} - \sinh(\frac{\varphi}{2})\cosh(\frac{\varphi}{2})e_{01}x + \sinh(\frac{\varphi}{2})^2e_{01}xe_{01} \\
 &\quad + \cosh(\frac{\varphi}{2})^2e_0 + \sinh(\frac{\varphi}{2})^2e_0 - 2\sinh(\frac{\varphi}{2})\cosh(\frac{\varphi}{2})e_1.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Här använder vi identiteten  $2\langle x, e_1 \rangle = xe_1 + e_1x$  och ser att  $\sinh(\frac{\varphi}{2})^2e_{01}xe_{01} = \sinh(\frac{\varphi}{2})^2e_1xe_1$  det vill säga en rumslig vektor. Insättning i 22 ger:

$$\begin{aligned}
 &-e_0(\sinh(\frac{\varphi}{2})\cosh(\frac{\varphi}{2})2\langle x, e_1 \rangle + \cosh(\frac{\varphi}{2})^2 + \sinh(\frac{\varphi}{2})^2) \\
 &+ (\cosh(\frac{\varphi}{2})^2x + \sinh(\frac{\varphi}{2})^2e_1xe_1 + 2\sinh(\frac{\varphi}{2})\cosh(\frac{\varphi}{2})e_1).
 \end{aligned}$$

Vi får

$$\begin{aligned}
 x' &= -e_0(\sinh(\frac{\varphi}{2})\cosh(\frac{\varphi}{2})2\langle x, e_1 \rangle + \cosh(\frac{\varphi}{2})^2 + \sinh(\frac{\varphi}{2})^2) \\
 &+ (\cosh(\frac{\varphi}{2})^2x + \sinh(\frac{\varphi}{2})^2e_1xe_1 + 2\sinh(\frac{\varphi}{2})\cosh(\frac{\varphi}{2})e_1) \\
 &= -e_0 + (\cosh(\frac{\varphi}{2})^2x + \sinh(\frac{\varphi}{2})^2e_1xe_1 + 2\sinh(\frac{\varphi}{2})\cosh(\frac{\varphi}{2})e_1) \\
 &\quad \times (\sinh(\frac{\varphi}{2})\cosh(\frac{\varphi}{2})2\langle x, e_1 \rangle + \cosh(\frac{\varphi}{2})^2 + \sinh(\frac{\varphi}{2})^2)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

och gör följande förenklingar

$$\begin{aligned}
 &\cosh(\frac{\varphi}{2})^2x + \sinh(\frac{\varphi}{2})^2e_1xe_1 + 2\sinh(\frac{\varphi}{2})\cosh(\frac{\varphi}{2})e_1 \\
 &= (\cosh(\frac{\varphi}{2})x + \sinh(\frac{\varphi}{2})e_1)(\cosh(\frac{\varphi}{2}) + \sinh(\frac{\varphi}{2})xe_1) \\
 &\text{och} \\
 &2\sinh(\frac{\varphi}{2})\cosh(\frac{\varphi}{2})\langle x, e_1 \rangle + \cosh(\frac{\varphi}{2})^2 + \sinh(\frac{\varphi}{2})^2 \\
 &= (\sinh(\frac{\varphi}{2})e_1x + \cosh(\frac{\varphi}{2}))(\cosh(\frac{\varphi}{2}) + \sinh(\frac{\varphi}{2})xe_1).
 \end{aligned}$$

Här kan vi bortse från  $e_0$  vektorn eftersom det är tydligt att den inte har någon påverkan på rumskoordinaterna, vilka är de intressanta här. Vi sätter sedan in detta i ekvation 23 och får

$$\begin{aligned}
 &(\cosh(\frac{\varphi}{2})x + \sinh(\frac{\varphi}{2})e_1)(\cosh(\frac{\varphi}{2}) + \sinh(\frac{\varphi}{2})xe_1) \\
 &\quad \times (\sinh(\frac{\varphi}{2})e_1x + \cosh(\frac{\varphi}{2}))^{-1}(\cosh(\frac{\varphi}{2}) + \sinh(\frac{\varphi}{2})xe_1)^{-1} \\
 &= (\cosh(\frac{\varphi}{2})x + \sinh(\frac{\varphi}{2})e_1)(\cosh(\frac{\varphi}{2}) + \sinh(\frac{\varphi}{2})xe_1)^{-1}
 \end{aligned} \tag{24}$$

Vi har nu ett förenklat uttryck för Lorentztransformationen och vi ser att det är en Möbiusavbildning. Den egenskapen gör att vi kan utföra sammansättningen  $y \rightarrow x \rightarrow y$  med hjälp av Vahlenmatriser eftersom vi nu har ett uttryck som finns i ett Euklidiskt rum och uppfyller övriga villkor. Vi omvandlar till Vahlenmatriser enligt ekvation 18 och finner respektive matrisrepresentation av transformationerna:

- Lorentztransformation  $\begin{bmatrix} \cosh(\frac{\varphi}{2}) & \sinh(\frac{\varphi}{2})e_1 \\ \sinh(\frac{\varphi}{2})e_1 & \cosh(\frac{\varphi}{2}) \end{bmatrix}$ .
- Stereografisk projektion  $\begin{bmatrix} e_1 & 1 \\ 1 & -e_1 \end{bmatrix}$ .

Sammansättning av dessa enligt ekvation 19 ger:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} e_1 & 1 \\ 1 & -e_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh(\frac{\varphi}{2}) & \sinh(\frac{\varphi}{2})e_1 \\ \sinh(\frac{\varphi}{2})e_1 & \cosh(\frac{\varphi}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & 1 \\ 1 & -e_1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} e_1 & 1 \\ 1 & -e_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\cosh(\frac{\varphi}{2}) + \sinh(\frac{\varphi}{2}))e_1 & \cosh(\frac{\varphi}{2}) - \sinh(\frac{\varphi}{2}) \\ \sinh(\frac{\varphi}{2}) + \cosh(\frac{\varphi}{2}) & (\sinh(\frac{\varphi}{2}) - \cosh(\frac{\varphi}{2}))e_1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2(\cosh(\frac{\varphi}{2}) + \sinh(\frac{\varphi}{2})) & 0 \\ 0 & 2(\cosh(\frac{\varphi}{2}) - \sinh(\frac{\varphi}{2})) \end{bmatrix} \tag{25} \\
 &\Rightarrow y' = (2(\cosh(\frac{\varphi}{2}) + \sinh(\frac{\varphi}{2}))y(2(\cosh(\frac{\varphi}{2}) - \sinh(\frac{\varphi}{2})))^{-1} \\
 &= \left(\frac{e^{\varphi/2} + e^{-\varphi/2}}{2} + \frac{e^{\varphi/2} - e^{-\varphi/2}}{2}\right)y\left(\frac{e^{\varphi/2} - e^{-\varphi/2}}{2} + \frac{e^{\varphi/2} - e^{-\varphi/2}}{2}\right) \\
 &= e^\varphi y.
 \end{aligned}$$

Vi får ett förvånansvärt enkelt uttryck för sammansättningen av transformationerna i  $Y$ -planet, vilket är en dilation, som väntat eftersom en sammansättning av Möbiusavbildningar blir en ny Möbiusavbildning [1].

## 7 Visualisering

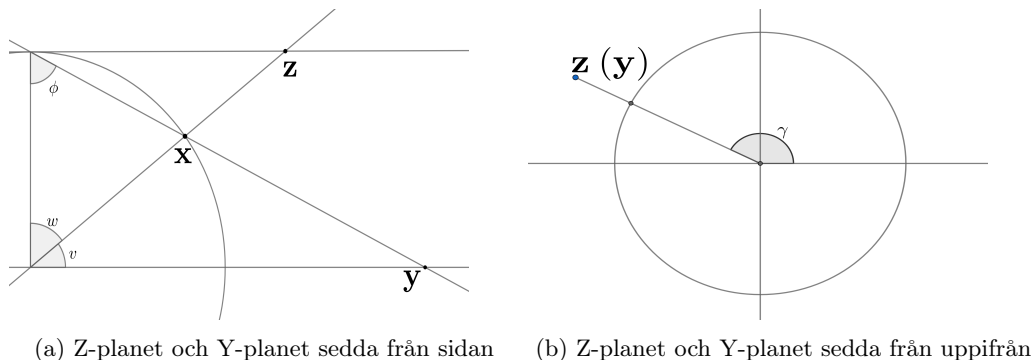
En sammanfattning av hela visualiseringsprocessen visas i tabell 1.

Rumsbeteckning	$Z$	$\rightarrow$	$Y$	$\rightarrow$	$X$	$\rightarrow$	$Y$	$\rightarrow$	$Z$
Enhetsvektorer Avbildning	$e_1 e_2$	Trig.	$e_1 e_2$	S.	$e_0 e_1 e_2 e_\infty$ L-transf. Proj. rum (ja)	S.	$e_1 e_2$	Trig.	$e_1 e_2$
Möbiusavbildning Intervall	$z_1 \in [0, \infty)$ $z_2 \in [0, 2\pi)$	nej	$y_1 \in (1, \infty)$ $y_2 \in [0, 2\pi)$	ja	$x_i \in (-1, 1)$	ja		nej	

Tabell 1: S.=Stereografisk projektion, Trig.= Trigonometrisk metod

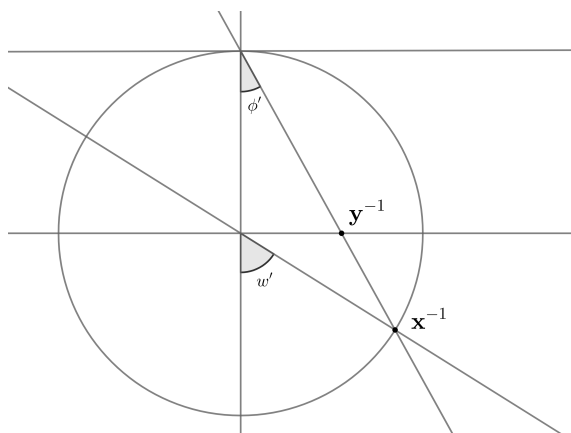
Vi ska nu visa hur vi får en avbildning av stjärnkoordinaterna på skärmen  $Z$  och sedan för över dem till  $Y$ -planet. Koordinaterna på stjärnhimlen ges av två vinklar:  $v$  och  $\gamma$ . För att avbilda dem på skärmen använder vi en enkel metod enligt figur 12.

Vi ser att vi kan använda standard-parametriseringen  $z = (r \cos \gamma, r \sin \gamma)$  och  $r = \frac{r}{1} = \tan w$  samt  $w = \frac{\pi}{2} - v$ . Vi ser också i figur 12 att om vi tänker oss att vi står i origo och blickar upp mot stjärnhimlen så är det en förminskad bild av  $Z$ -planet vi ser på skärmen och där man kan likna  $X$ -sfären med himlavalvet som man ser det i verkligheten. Vi ska nu hitta en avbildning mellan  $Z$  och  $Y$ . När vi betraktar 12 så ser vi att  $\gamma_y = \gamma_z$ . För en geometrisk motivering av sambandet mellan  $w$  och  $\theta$  betraktar vi figur 13.



(a) Z-planet och Y-planet sedda från sidan (b) Z-planet och Y-planet sedda från uppifrån

Figur 12: Avbildning på skärm



Figur 13:  $x$  speglad i Y-planet  
f

Med randvinkelsatsen ser vi att vinkeln  $w'$  är dubbelt så stor som vinkeln  $\phi'$ . Vi kan utläsa från figur 13 att  $y^{-1} = \tan w'/2 = \tan w/2$  och vi har hittat vår avbildning:  $y = \left(\frac{1}{\tan w/2} \cos \gamma, \frac{1}{\tan w/2} \sin \gamma\right)$ . Vi kan nu skriva radien i Z-planet,  $z_r$  i termer av radien i Y-planet,  $y_r$  genom att eliminera vinkeln  $w$ :  $z_r = \tan(2 \arctan(y_r^{-1})) \Leftrightarrow y_r = (\tan(\arctan(z_r/2)))^{-1}$  medan vinkeln  $\gamma$  är densamma i både Z och Y-planet. Notera att om  $w = \pi/4$  och  $\gamma \in (0, 2\pi)$  så motsvarar det enhetscirkeln i Z-planet och det som är innanför det är det som man ser framför sig, i vardaglig bemärkelse.

## 8 Diskussion

För att ta fram en karta över stjärnhimlen behöver man mäta eller ta fram vinkeln till en viss stjärna från himmelens ekvator och vinkeln från nollmeridianen. Från en sådan karta enligt det ekvatoriella koordinatsystemet kan vi föra över stjärnorna till Z-planet.

Vi tar en stjärnkarta i Z-planet och med hjälp av formeln i slutet av föregående avsnitt så kan vi föra över den till Y-planet. Vi har visat att en Lorentztransformation motsvarar en dilation med faktorn  $\exp(\varphi)$  där  $\varphi = \arctan(v/c)$ . Vi kan då enkelt räkna fram hur mycket dilation en viss hastighet ger upphov till. Därefter förs resultatet över till Z-planet igen via uttrycket för inversen. Den rörliga animationen visar stjärnbilderna listade i Appendix D. För en korrekt upplevelse bör filmen spelas i helskrämläge och ögat vara på avståndet av cirka en tredjedel av skärmens bredd från mitten av skärmen. I visualiseringen ser vi hur stjärnorna på södra himmelfären syns i bilden då hastigheten

Animationen går att se på följande länk: <https://youtu.be/E4CKfLV3NPI>



ökar. Vid 96% av ljusets hastighet kan vi se hur stjärnorna i södra korset kommer in i blickfånget. De kommer in nedifrån, ungefär mitt i bilden. Notera att värdet på 100% av ljusets hastighet är ett avrundat värde och skeppet kan aldrig nå ända upp till ljusets hastighet. Fenomenet relativistisk aberration leder således till att våra observatörer ombord på rymdskeppet inte får den dramatiska visualiseringen från Star Wars. Istället sker det omvända och stjärnorna konvergerar i färdriktningen tills allt ljus möter skeppet framifrån i en enda punkt.

Den relativistiska aberrationen är nära besläktad med ett annat relativistiskt fenomen, relativistisk strålning, även känd som strålkastareffekten. Det är egentligen samma fenomen, men istället för skeppets perspektiv har vi den stillastående observatörens perspektiv. Vi tänker oss att vi står på planeten och ser på när skeppet åker förbi uppe i himlen samtidigt som det sänder ut ljus med lampor. Då skeppet närmar sig ljusets hastighet konvergerar ljuset från dess lampor i färdriktningen och för en observatör på planeten ser det ut som skeppet bara skickar ljus framåt.

## 8.1 Sfärparadoxen

Vi kan läsa i [1] om den så kallade *Sfärparadoxen*, en av många paradoxer som egentligen helt enkelt är ickeintuitiva effekter av relativitetsteorin. Om vi har en observatör som rör sig i relativistiska hastigheter, jämfört med en stillastående observatör, kommer de mäta en sfär på olika sätt. Längdkontraktion innebär att objekt blir kortare i färdriktningen då vi har faktorn  $\gamma$  i uttrycket för Lorentztransformationen. Man kan räkna ut ett objekts längd i en referensram som rör sig snabbt relativt en annan med formeln  $L_0 = \frac{L-vt}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{L}{\sqrt{1-v^2}}$  då  $t = 0$ , där  $L_0$  är den nya kontraherade längden [3] (s. 23).

Sfären blir kortare i resans riktning för observatören i rörelse och borde alltså enligt denne se ut som en ellips. Men när vi gör beräkningarna så visar det sig att den hastigt färdandes observatören ändå kommer att se samma sfär som den stillastående observatören. Trots att sfären verkligen blir kortare för den som rör sig så uppväger den relativistiska aberrationen, på grund av ljusets ändliga hastighet, längdkontraktionen så att observatören ändå ser en perfekt cirkel som sfärens kontur. Den relativistiska aberrationen medför också att sfären kommer att upplevas som att den blir mindre och befinner sig mer rakt framför observatören samt att eventuella mönster på sfärens yta upplevs förvrängda.

Denna effekt uppstår bara för sfäriska objekt och paradoxen visualiseras i figur 14 samt figur 15. En perfekt cirkel har ritats upp i  $Y$ -planet men mönstret på den har applicerats efter att cirkeln har överförts till  $Z$ -planet. Detta i syfte att tydliggöra hur mönstret inuti cirkeln förvrängs allteftersom hastigheten ökar, medan själva formen på cirkeln förblir intakt. Vi kan konstatera att Lorentz-boosten sammansatt med en stereografisk projektion mellan  $X$  och  $Y$ -planet är en Möbiusavbildning, visat i ekvation 25. En Möbiusavbildning avbildar som bekant plan till plan eller sfärer och vice versa, så vi kan vara säkra på att sfärparadoxens slutssats verkligen stämmer.

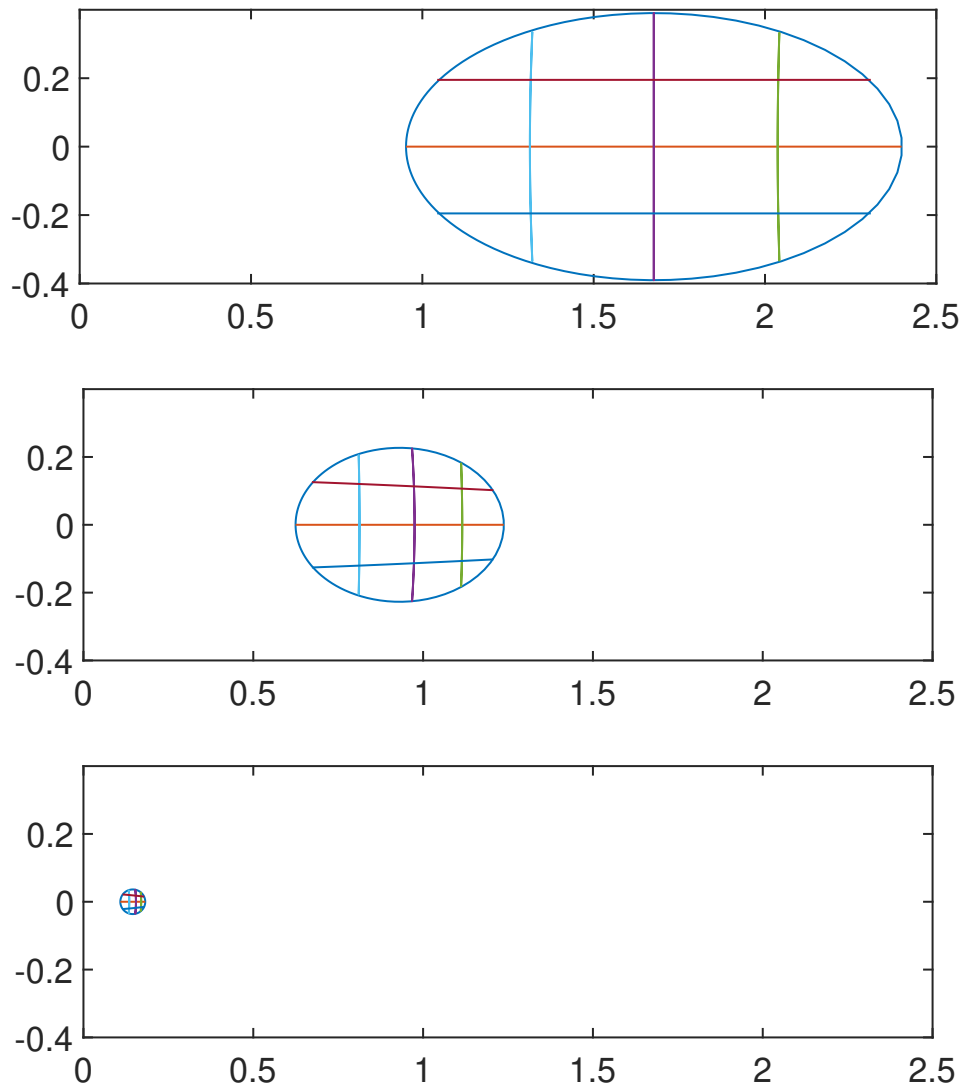
I visualiseringen av sfären så ser vi att mönstret på sfären förvrängs vid relativistiska hastigheter. Notera att rutmönstret på sfären avbildas på cirklar med mycket stora radier. Bilderna på animationen av sfären ligger i avsnittet *Figureer* som följer direkt efter det här avsnittet.

## Referenser

- [1] A. Rosén, *"Geometric Multivector Analysis"*, 1 uppl., Basel: Birkhäuser, 2019.
- [2] J. Minahan, *"Joe's Relatively Small Book of Special Relativity"*.
- [3] V. Faraoni, *"Special Relativity"*, Chapter 7: Relativistic Optics, Springer International Publishing Switzerland, 2013.
- [4] W. Clifford, *"Applications of Grassmann's Extensive Algebra"*, American Journal of Mathematics, Vol 1, No. 4, pp. 350-358, 1878.
- [5] Duffett-Smith P. Coordinate systems. *Practical Astronomy with your Calculator*. 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press; 1989. p. 25–82.
- [6] Encyclopaedia Britannica [Internet]. Chicago: Encyclopaedia Britannica Inc, "Space-time", 2018, hämtad från: <https://www.britannica.com/science/space-time#ref206206>
- [7] Yale univeristy. [2012]. Tillgänglig från: [https://oyc.yale.edu/sites/default/files/notes\\_relativity\\_6.pdf](https://oyc.yale.edu/sites/default/files/notes_relativity_6.pdf)
- [8] Wald, Robert M. AccessScience [Internet]. Chicago. Illinois. Department of Physics, University of Chicago. [2020]. Tillgänglig från: <https://www-accessscience-com.proxy.lib.chalmers.se/content/lorentz-transformations/389700>
- [9] Shapere, Dudley. AccessScience [Internet]. North Carolina. Wake Forest University, Winston-Salem. [2020]. Tillgänglig från: <https://www-accessscience-com.proxy.lib.chalmers.se/content/causality/114600>
- [10] K. Aainsqatsi. "World line". [2007]. Tillgänglig från: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:World\\_line.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:World_line.svg)
- [11] M. Tsamplaris, *"Special Relativity, an introduction with 200 problems and solutions"*, Springer Nature Switzerland AG, 2019.

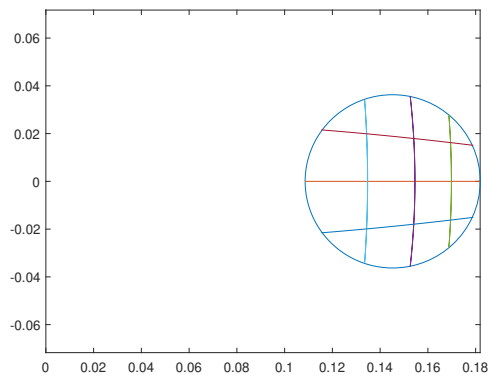
## Appendix

### Figurer

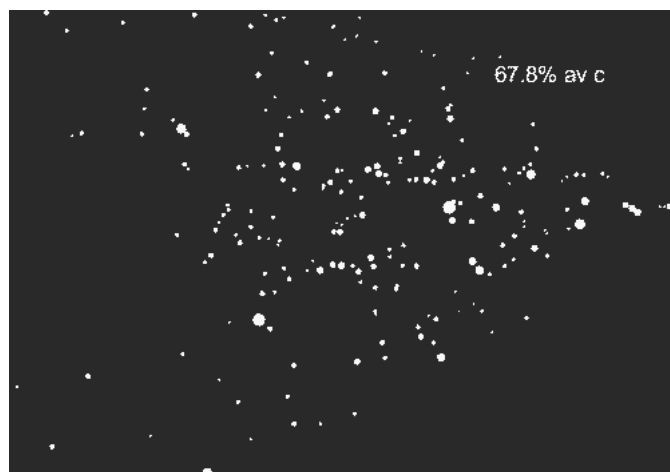


Figur 14: Glob sedd från sidan färdandes med  $v = 0$ ,  $v = 0.32c$  och  $v = 0.96c$ . För att se bilden i rätt perspektiv ska ögat befinna sig på avstånd 1 från skärmen eller pappret rakt över origo.

En metod för att hitta rätt avstånd är att mäta sträckan 0 till 1 i bilden med en penna och sedan placera huvudet på sned med vänster öga på det uppmätta avståndet från bilden och blunda med högra ögat. Om du nu riktar blicken mot ellipsen och gör rätt kommer du se en cirkel.



Figur 15: Glob sedd från sidan färdandes med  $v = 0.96c$ , närbild. Vi ser på bilden att rutnätet har förvrängts, trots att den yttre konturen bibehålls cirkulär. På grund av förstoringen kan bilden betraktas på normalt avstånd.





Figur 16: Tre filmrutor från visualiseringen

## A Bevis för Associativitet

När vi betraktar räknereglerna 3.2 så ser vi att tecknet för en multivektor beror på antalet gånger man måste byta plats på ett par av index för att få en önskad ordning. Det kan enkelt beskrivas på följande vis

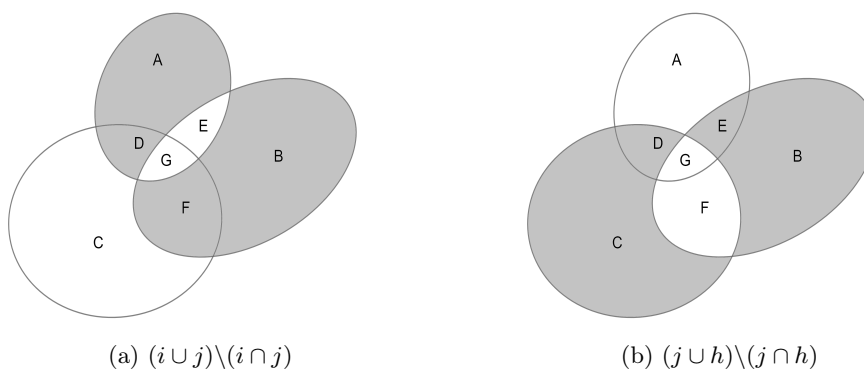
$$e_{i_0 \dots i_k} e_{j_0 \dots j_k} = (-1)^m e_{i \cup j},$$

där  $m$  är antalet gånger vi permuterar för att få önskad ordning. Sedan kan man förenkla uttrycket genom att använda  $e_i e_j = 1$  om  $i = j$ .

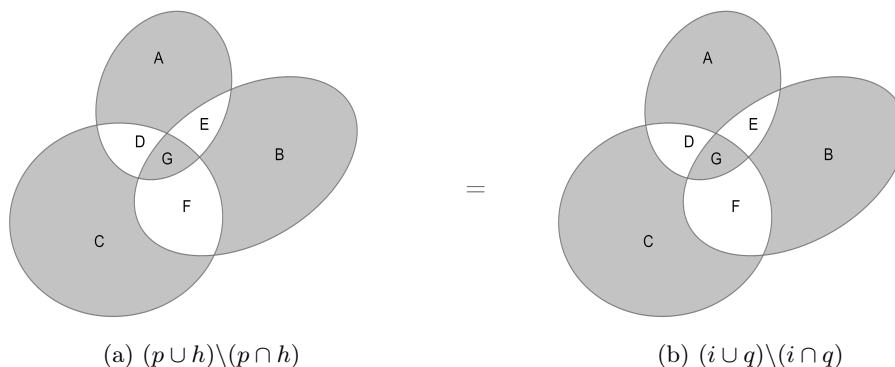
*Bevis.* Associativitet hos Cliffordprodukten. Vi vill visa att  $(ab)c = a(bc)$  om  $a, b, c$  är godtyckliga multivektorer. Vi har att  $abc = (a_0 + a_1 e_1 + \dots + a_{1 \dots n} e_{1 \dots n})b(c_0 + c_1 e_1 + \dots + c_{1 \dots n} e_{1 \dots n})$ . Då även  $b$  kan skrivas på utvecklad form räcker det att visa associativitet för varje tre-kombination av  $k$ -vektorer och i sådant fall följer associativitet för hela uttrycket. Betrakta en sådan term, de skalära konstanterna före  $k$ -vektorn associerar så problemet förenklas till  $e_{i_0 \dots i_k} e_{j_0 \dots j_k} e_{h_0 \dots h_k}$ . När vi beräknar produkten av de tre så överförs problemet till ett mängd-associativitetsproblem. Vi sätter:

$$\begin{aligned} (i \cup j) \setminus (i \cap j) &= p, \\ (j \cup h) \setminus (j \cap h) &= q, \\ (e_i e_j) e_h &\rightarrow (p \cup h) \setminus (p \cap h), \\ e_i (e_j e_h) &\rightarrow (i \cup q) \setminus (i \cap q). \end{aligned} \tag{26}$$

Vi visar nu med Venn-diagram att resultatet blir detsamma (se figur 17)



Figur 17: steg 1



Figur 18: steg 2

För att se att tecknet inte blir påverkat så betraktar vi  $e_{i_0 \dots i_k} e_{j_0 \dots j_k} e_{h_0 \dots h_k}$  men utför hela sammansättning av den nya vektorn på en gång så vi får  $(e_{i_0 \dots i_k} e_{j_0 \dots j_k}) e_{h_0 \dots h_k} = e_{i_0 \dots i_k, j_0 \dots j_k, h_0 \dots h_k}$  och  $e_{i_0 \dots i_k} (e_{j_0 \dots j_k} e_{h_0 \dots h_k}) = e_{i_0 \dots i_k, j_0 \dots j_k, h_0 \dots h_k}$  det vill säga samma resultat. Nu permuterar vi tills

vi fått alla index ordnade i stigande följd och får  $(-1)^m = \pm 1$  beroende på antalet. Nu kan vi ta bort par  $e_i e_j$ , ( $i = j$ ) för att få det slutliga resultatet. Vi ser att det inte spelar någon roll när i processen vi tar bort en dublett eftersom att flytta ett index förbi ett par av index inte ändrar tecknet. (Exempel:  $e_2 e_1 e_1 e_2 = -e_1 e_2 e_1 e_2 = e_1 e_1 e_2 e_2$ )  $\square$

## B MATLAB Lorentztransformation

```
1  %-----
2  %   Anpassad kod fran:
3  %   Titel: Fig13
4  %   F rfattare: Rosen, A
5  %   Datum: 2021
6  %-----
7  h=figure;
8  filename='starstest1a.gif';
9  mag= stars(:,5);                               %Fran Rosen, A...
10 mag= 400*10.^(-mag/3.5);                       %
11 v=90-(stars(:,1)+ stars(:,2)/60);              %
12 v=2*pi*v/360;                                  %
13 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;                  %
14 fi= 1.5-2*pi*fi/24;                           %
15 x1=tan(v/2);                                   %
16 A=ones(length(v),2)*2;                         %...till hit.
17 for b=0:0.025:1
18     clf
19     c=exp(b/3);
20     x1=tan(v/2)/c;                              %Fran Rosen, A...
21     v2=2*atan(x1);                              %
22     r2=tan(v2);                                %...till hit.
23     for i=1:length(v)                          %F r att d lja stjrnor bakom en
24         if v2(i,1)<pi*0.5
25             A(i,1)=r2(i,1);
26             A(i,2)=fi(i,1);
27         end
28
29     end
30     scatter(A(:,1).*cos(A(:,2)), A(:,1).*sin(A(:,2)), mag(:,1),'k.')
31     hold on
32     str=num2str(tanh(log(c))*100,3);             %ljusets hastighet till text
33     newstr=join([str '% av c']);
34     text(0.55,0.75,newstr)
35     axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
36     drawnow;
37     hold off
38     frame = getframe(h);
39     im = frame2im(frame);
40     [imind,cm] = rgb2ind(im,2);
41     cm2=[cm(2,:);cm(1,:)];
42     if b == 0
43         imwrite(imind(100:450,100:600),cm2,filename,'gif','Loopcount',inf);
44     else
45         imwrite(imind(100:450,100:600),cm2,filename,'gif','WriteMode','append');
46     end
47 end
```

## C MATLAB Globvisualisering

```
1
2 h=figure;
3 lt=100; %l ngd p vektorerna
4 theta=linspace(0,2*pi,lt);
5 t=linspace(0,1,lt);
6 lillar=0.5; %cirkelns radie
7 storar=2; %hur l ngt ut p kanten
8 r1=zeros(8,lt);
9 r2=zeros(8,lt);
10 fi=zeros(8,lt);
11 r3=zeros(8,lt);
12 r1(1,:)=storar+lillar*cos(theta); %ritar cirkeln i y-planet
13 r2(1,:)=2*acot(sqrt((r1(1,:).^2+(sin(theta)*lillar).^2));
14 fi(1,:)=atan((sin(theta)*lillar)./r1(1,:));
15
16 r2(2,:)=r2(1,1)+t*(abs(r2(1,1)-r2(1,lt/2)));
17 fi(2,:)=0;
18 r3=tan(r2);
19 X=r3(1,:).*cos(fi(1,:));
20 Y=r3(1,:).*sin(fi(1,:));
21 [Xmax,posmax]=max(X);
22 [Xmin,posmin]=min(X);
23 [Ymax,posmay]=max(Y);
24 [Ymin,posmiy]=min(Y);
25 aX=abs(Xmax-Xmin);
26 aY=abs(Ymax-Ymin);
27
28 r1(4,:)=Xmax-abs(Xmin-Xmax)/2;
29 r2(4,:)=atan(sqrt(r1(4,:).^2+(sin(theta)*(abs(Ymax-Ymin)/2)).^2));
30 fi(4,:)=atan((sin(theta)*(abs(Ymax-Ymin)/2))./r1(4,:));
31
32 r1(5,:)=Xmax-abs(Xmin-Xmax)/4;
33 r2(5,:)=atan(sqrt(r1(5,:).^2+(sin(theta)*(abs(Xmax-Xmin)/4)).^2));
34 fi(5,:)=0.92*atan((sin(theta)*abs((Xmin-Xmax)/4))./r1(5,:));
35
36 r1(6,:)=Xmax-abs(Xmin-Xmax)*3/4;
37 r2(6,:)=atan(sqrt(r1(6,:).^2+(sin(theta)*(abs(Xmin-Xmax)*1/4)).^2));
38 fi(6,:)=0.925*atan((sin(theta)*abs((Xmin-Xmax)/4))./r1(6,:));
39
40 r1(7,:)=Xmin+0.091+t.*aX*0.875;
41 r2(7,:)=atan(sqrt(r1(7,:).^2+(aY/4).^2));
42 fi(7,:)=atan(aY/4./r1(7,:));
43
44 r1(8,:)=Xmin+0.091+t.*aX*0.875;
45 r2(8,:)=atan(sqrt(r1(8,:).^2+(aY/4).^2));
46 fi(8,:)=atan(aY/4./r1(8,:));
47
48
49
50 v2=r2;
51 v=r2;
52
53 for b=0:0.025:0
54     clf
55     c=exp(b/3);
56     str=num2str(tanh(log(c))*100,5); %ljusts hastighet till text
57     newstr=join([str '% av c']); %texten till filmen
58     y1=cot(v./2).*c;
59     v2=2.*acot(y1);
60     r3=tan(v2);
61     plot(r3(1,:).*cos(fi(1,:)),r3(1,:).*sin(fi(1,:)))
62     hold on
63     plot(r3(2,:).*cos(fi(2,:)),r3(2,:).*sin(fi(2,:)))
64     plot(r3(3,:).*cos(fi(3,:)),r3(3,:).*sin(fi(3,:)))
65     plot(r3(4,:).*cos(fi(4,:)),r3(4,:).*sin(fi(4,:)))
66     plot(r3(5,:).*cos(fi(5,:)),r3(5,:).*sin(fi(5,:)))
```

```

67 plot(r3(6,:).*cos(fi(6,:)),r3(6,:).*sin(fi(6,:)))
68 plot(r3(7,:).*cos(fi(7,:)),r3(7,:).*sin(fi(7,:)))
69 plot(r3(8,:).*cos(fi(8,:)),r3(8,:).*sin(fi(8,:)))
70 axis equal
71 axis([0 2.5 -1.25 1.25])
72 text(0.75,1.25,newstr) %skriver text i figure
73 drawnow; %ritar upp (f r film)
74 filename='glob.gif';
75 hold off
76 frame = getframe(h);
77 im = frame2im(frame);
78 [imind,cm] = rgb2ind(im,2);
79 cm2=[cm(2,:);cm(1,:)];
80 if b == 0
81 imwrite(imind(100:450,100:600),cm2,filename,'gif','Loopcount',inf);
82 else
83 imwrite(imind(100:450,100:600),cm2,filename,'gif','WriteMode','append');
84 end
85 end

```

## D MATLAB Stjärnkoordinater

```
1 %-----
2 % Anpassad kod fran:
3 % Titel: Fig13
4 % Frfattare: Rosen, A
5 % Datum: 2021
6 %-----
7 % Each matrix represents a constellation, each row an individual star
8 % The column entries represent their properties, from left to right;
9 % Declination [Degrees], Declination [Arcminutes], Rectascension [h],
10 % Rectascension [min], Apparent Magnitude [No unit]
11
12 % Northern Hemisphere
13
14 cancer=[9 11 8 16 3.54;
15 18 9 8 44 3.94;
16 11 51 8 58 4.24;
17 21 28 8 43 4.652;
18 28 45 8 46 4.02;
19 22 2 9 9 5.15];
20
21 aries=[19 17 1 53 3.86;
22 20 48 1 54 2.655;
23 23 27 2 7 2;
24 27 15 2 49 3.63];
25
26 cass=[59 09 00 09 2;
27 56 32 0 40 2;
28 60 43 0 56 2;
29 60 14 1 25 3;
30 63 40 1 54 3.5];
31
32 lillbjo=[89 15 2 31 2;
33 86 35 17 32 4.3;
34 82 2 16 45 4;
35 77 47 15 44 4.3;
36 74 09 14 50 2.2;
37 71 50 15 20 3;
38 75 45 16 17 5];
39
40 stobjo=[49 18 13 47 1.8;
41 54 55 13 23 2.2;
42 55 57 12 54 1.8;
43 57 01 12 15 3.3;
44 61 45 11 03 2;
45 56 22 11 01 2.4;
46 53 41 11 53 2.4;
47 63 03 9 31 3.6;
48 60 43 8 30 3.4;
49 59 2 9 50 3.8;
50 51 40 9 32 3.2;
51 48 2 8 59 3.2;
52 47 9 9 3 3.5;
53 47 46 11 46 3.6;
54 44 29 11 09 3;
55 41 29 10 22 3.2;
56 42 54 10 17 3.5;
57 33 5 11 18 3.5;
58 31 31 11 18 4.4];
59
60 ceph=[77 37 23 39 3.3;
61 66 11 22 49 3.5;
62 70 33 21 28 3.2;
63 62 35 21 18 2.5;
64 61 50 20 45 3.5;
65 62 59 20 29 4.3;
66 58 12 22 10 3.5;
```

```

67 57 2 22 15 4.2;
68 58 24 22 29 4.2];
69
70 orion=[7 24 5 55 .7;
71 9 56 5 35 3.4;
72 6 20 5 25 1.5;
73 -8 -12 5 14 .3;
74 -9 -40 5 47 2;
75 0 -17 5 32 2.2;
76 -1 -12 5 36 1.7;
77 -1 -56 5 40 1.7;
78 -4 -50 5 35 4.5;
79 -5 -54 5 35 2.7;
80 -5 -23 5 35 5;
81 10 9 4 54 4.6;
82 8 54 4 50 4.3;
83 6 57 4 49 3.2;
84 5 36 4 51 3.6;
85 2 26 4 54 3.6;
86 1 42 4 58 4.5;
87 9 38 6 2 4.2;
88 14 12 6 11 4.3;
89 14 46 6 7 4.3;
90 20 8 6 3 4.6;
91 20 16 5 54 4.4];
92
93 perseus= [49 51 3 24 1.9;
94 47 47 3 42 3;
95 40 0 3 57 2.9;
96 35 47 3 58 4;
97 31 53 3 54 2.9;
98 44 51 3 9 3.8;
99 40 57 3 8 2.1;
100 38 50 3 5 3.5;
101 38 19 2 50 4.2;
102 53 30 3 4 3;
103 55 53 2 50 3.7;
104 50 41 1 43 4];
105
106 cygnus=[45 16 20 41 1.4;
107 45 7 19 44 2.9;
108 40 15 20 22 2.3;
109 33 58 20 46 2.5;
110 30 13 21 12 3.3;
111 51 43 19 29 3.7;
112 27 57 19 30 3.2;
113 35 4 19 56 3.9;
114 30 9 19 39 4.7];
115
116 leo=[11 58 10 8 1.36;
117 14 34 11 49 2.14;
118 19 50 10 19 2.37;
119 20 31 11 14 2.56;
120 23 46 9 45 2.97;
121 15 25 11 14 3.33;
122 23 25 10 16 3.43;
123 16 45 10 7 3.51;
124 26 0 9 52 4];
125
126 pegand=[29 5 0 8 2;
127 28 4 23 3 2.5;
128 15 12 23 4 2.5;
129 15 11 0 13 2.8;
130 10 49 22 41 3.4;
131 6 11 22 10 3.5;
132 9 52 21 44 2.4;
133 23 33 22 46 4;
134 17 20 21 44 4.3;
135 19 48 21 22 4;
136 30 13 22 43 3;

```

```
137 25 20 22 7 3.8;
138 25 38 21 44 4.1;
139 30 51 0 39 3.4;
140 35 37 1 9 2.2;
141 42 19 2 3 2.3;
142 33 43 0 36 4.2;
143 38 29 0 56 3.8;
144 48 37 1 37 3.5];
145
146 hercules=[36 48 17 15 3.2;
147 38 55 16 42 3.5;
148 31 36 16 41 2.9;
149 30 55 17 0 3.9;
150 37 15 17 56 3.8;
151 46 0 17 39 3.7;
152 42 26 16 34 4.2;
153 46 18 16 19 3.8;
154 44 56 16 8 4.2;
155 24 50 17 15 3.1;
156 26 6 17 30 4.2;
157 27 43 17 46 3.4;
158 29 14 17 57 3.7;
159 28 45 18 7 3.8;
160 21 29 16 30 2.8;
161 14 23 17 14 3.4;
162 19 9 16 21 3.7];
163
164 bootes=[19 11 14 15 0.2;
165 13 43 14 41 4.4;
166 18 23 13 54 2.7;
167 27 4 14 44 2.7;
168 30 22 14 31 3.5;
169 33 18 15 15 3.4;
170 40 23 15 1 3.5;
171 38 18 14 32 3;
172 46 5 14 16 4.1;
173 51 50 14 25 4.1];
174
175 auriga=[45 59 5 16 .08;
176 44 56 5 59 1.9;
177 37 12 5 59 2.6;
178 33 9 4 56 2.6;
179 41 14 5 6 3.1;
180 43 49 5 1 3.1];
181
182 taurus=[28 36 5 26 1.6;
183 22 57 4 42 4.2;
184 19 10 4 28 3.6;
185 17 32 4 22 3.8;
186 21 8 5 37 3;
187 16 30 4 35 1;
188 15 37 4 19 3.6;
189 12 29 4 0 3.4;
190 9 43 3 27 3.7];
191
192 gemini=[12 53 6 45 3.3;
193 16 23 6 37 1.9;
194 20 34 7 4 3.9;
195 21 58 7 20 3.5;
196 24 23 7 44 3.5;
197 28 1 7 45 1.2;
198 31 53 7 34 1.5;
199 25 7 6 43 2.9;
200 22 30 6 22 2.9;
201 22 30 4 14 3.3];
202
203 virgo=[-11 -9 13 25 1;
204 0 -35 13 34 3.3;
205 3 23 12 55 3.4;
206 -1 -26 12 41 2.7;
```

```

207 -5 -32 13 9 4.3;
208 -10 -16 14 12 4.1;
209 1 32 14 1 4.2;
210 1 53 14 46 3.7;
211 10 57 13 2 2.8;
212 0 -40 12 19 3.8;
213 1 45 11 50 3.5];
214
215 aquila=[8 52 19 50 0.9;
216 10 36 19 46 2.6;
217 6 24 19 55 3.7;
218 13 51 19 5 2.9;
219 15 4 18 59 4;
220 0 -49 20 11 3.2;
221 1 0 19 52 3.9;
222 3 6 19 25 3.3;
223 -4 -52 19 6 3.4;
224 -5 -44 19 1 4];
225
226 pisces=[2 45 2 2 4.1;
227 5 29 1 41 4.4;
228 7 53 1 2 4.2;
229 7 35 0 48 4.4;
230 6 51 23 59 4;
231 5 37 23 39 4.1;
232 6 22 23 27 4.2;
233 3 16 23 17 3.7;
234 1 46 23 42 4.4;
235 9 9 1 45 4.2;
236 15 20 1 31 3.6;
237 30 5 1 11 4.5];
238
239
240 % Southern Hemisphere
241
242 crux=[-63 -5 12 26 0.77;
243 -59 -41 12 47 3;
244 -58 -44 12 15 5.57;
245 -57 -6 12 31 2];
246
247 libra=[-16 -43 15 53 4.13;
248 -14 -47 15 35 4;
249 -25 -16 15 4 6.5;
250 -16 -2 14 50 2.75;
251 -9 -22 15 17 2.6];
252
253 grus=[-37 -21 21 53 3;
254 -39 -32 22 6 4.5;
255 -46 -57 22 8 1.7;
256 -43 -29 22 29 4;
257 -43 -31 23 6 4.3;
258 -45 -14 23 10 3.8;
259 -46 -53 22 42 4.1;
260 -51 -19 22 48 3.5;
261 -52 -45 23 0 4.1];
262
263 sculptor=[-37 -49 23 32 4.4;
264 -32 -31 23 18 4.4;
265 -29 -21 0 58 4.3];
266
267 piscisau=[-29 -37 22 57 1.17;
268 -27 -2 22 40 4.2;
269 -28 -27 22 0 5.43;
270 -30 -53 21 47 5;
271 -32 -32 22 10 5;
272 -32 -32 22 55 4.2];
273
274 capricorn=[-16 -7 21 47 2.85;
275 -16 -39 21 40 3.7;
276 -16 -50 21 22 4.3;

```

```

277 -22 -24 21 26 3.77;
278 -17 -13 21 5 4;
279 -26 -55 20 51 4.12;
280 -14 -46 20 21 3;
281 -12 -32 20 18 3.6;
282 -25 -16 20 46 4.1];
283
284 scorpius=[-37 -6 17 33 1.6;
285 -39 -1 17 42 2.4;
286 -40 -7 17 47 3;
287 -42 -59 17 37 1.9;
288 -43 -14 17 12 3.3;
289 -42 -21 16 54 3.6;
290 -38 -2 16 51 3;
291 -34 -17 16 50 2.3;
292 -28 -12 16 35 2.8;
293 -26 -25 16 29 1;
294 -19 -48 16 5 2.6;
295 -22 -37 16 0 2.3;
296 -26 -6 15 58 2.9];
297
298 coronaaus=[-42 -42 18 56 5.3;
299 -42 -5 19 3 4.7;
300 -40 -29 19 8 4.5;
301 -39 -20 19 10 4.1;
302 -37 -54 19 9 4.1;
303 -37 -3 19 6 4.3;
304 -37 -6 18 58 4.8;
305 -38 -19 18 43 5.1;
306 -39 -42 18 32 5.2];
307
308 lupus=[-49 -25 14 37 4;
309 -52 -5 15 12 3.4;
310 -47 -23 14 41 2.3;
311 -45 -22 14 26 4.3;
312 -43 -8 14 58 2.7;
313 -40 -38 15 21 3.2;
314 -36 -15 15 21 3.6;
315 -41 -10 15 35 2.8;
316 -42 -34 15 38 4.3;
317 -38 -23 16 0 3.4;
318 -36 -48 16 6 4.2;
319 -33 -37 15 50 4];
320
321 octans=[-83 -40 14 26 4.31;
322 -77 -23 21 41 3.73;
323 -77 -15 0 25 2.8];
324
325 carina=[-40 0 8 3 2.25;
326 -47 -20 8 9 1.83;
327 -59 -30 8 22 1.86;
328 -52 -41 6 23 -0.74;
329 -43 -11 6 37 3.173;
330 -59 -16 9 17 2.21;
331 -61 -19 10 17 3.34;
332 -58 -44 10 27 3.81;
333 -59 -13 8 31 8.06;
334 -60 -33 10 43 4.58;
335 -64 -23 10 42 2.76;
336 -70 -2 10 13 3.29;
337 -69 -43 9 13 1.69;
338 -58 -51 10 53 3.79;
339 -59 -45 8 40 4.31;
340 -58 -58 9 10 3.43] ;
341
342 sagittaurus=[-40 -36 19 23 3.97;
343 -41 -52 19 55 4.118;
344 -24 -53 19 36 4.59;
345 -27 -40 19 6 3.326;
346 -29, -52 19 2 2.59;

```

```

347 -26 -17 18 55 2.05;
348 -21 -6 18 57 3.51;
349 -21 -44 19 04 3.771;
350 -17 -50 19 21 3.93;
351 -26 -59 18 45 3.17;
352 -25 -25 18 27 2.82;
353 -29 -49 18 20 2.70;
354 -21 -3 18 13 3.85;
355 -34 -23 18 24 1.85;
356 -36 -45 18 17 3.11;
357 -27 -49 17 47 4.54;
358 -44 -28 19 22 4.01;
359 -44 -27 19 22 4.01;
360 -35 -16 19 59 4.37;
361 -30 -25 18 5 2.98;
362 -27 -42 20 2 4.54;
363 -18 -57 19 17 4.88];
364
365 centaurus=[-36 -42 13 20 2.73;
366 -39 -24 13 31 4.6;
367 -41 -41 13 49 3.41;
368 -36 -22 14 6 2.06;
369 -42 -28 13 49 3.42;
370 -42 -9 14 35 2.35;
371 -42 -6 14 59 3.14;
372 -44 -48 13 58 3.87;
373 -47 -17 13 55 2.55;
374 -53 -27 13 39 2.30;
375 -60 -22 14 3 0.61;
376 -60 -50 14 39 0.01;
377 -48 -57 12 41 2.17;
378 -50 -13 12 28 3.91;
379 -50 -43 12 8 2.57;
380 -63 -1 11 35 3.13;
381 -39 -30 14 23 4.41];
382
383 aquarius=[-20 -6 23 22 3.97;
384 -9 -5 23 15 4.248;
385 -7 -34 22 52 3.722;
386 0 -7 22 35 4.04;
387 0 -1 22 28 3.65;
388 -1 -23 22 21 3.849;
389 0 -19 22 5 2.942;
390 -9 -29 20 47 3.77;
391 -7 -46 22 16 4.175;
392 -13 -52 22 06 4.279;
393 -13 -35 22 49 4.042;
394 -21 -10 23 9 3.679;
395 -5 -34 21 31 2.87;
396 -10 -4 22 30 4.81;
397 -15 -49 22 54 3.28];
398
399
400 % Matrix of all Constellations
401
402 stars=[cancer;
403 aries;
404 cass;
405 lillbjo;
406 stobjo;
407 ceph;
408 orion;
409 perseus;
410 cygnus;
411 leo;
412 pegand;
413 hercules;
414 bootes;
415 auriga;
416 taurus;

```

```
417 gemini;  
418 virgo;  
419 aquila;  
420 pisces;  
421 crux;  
422 libra;  
423 grus;  
424 sculptor;  
425 piscisau;  
426 capricorn;  
427 scorpius;  
428 coronaaus;  
429 lupus;  
430 octans;  
431 carina;  
432 sagittaurus;  
433 centaurus;  
434 aquarius];
```