



Knutteori

Jonespolynomet och Tait's förmodanden

Knot Theory

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet

Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers

Gustav Birath Blom

Jacob Burman

Pontus Elmrin

Hanna Nordin Axelsson

David Selin

Knutteori

Jonespolynomet och Tait's förmodanden

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet

Pontus Elmrin Hanna Nordin Axelsson

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk fysik vid Chalmers

David Selin

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik vid Chalmers

Gustav Birath Blom Jacob Burman

Handledare:
Martin Hallnäs

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2022

Förord

Denna kandidatrapport är skriven i syfte att introducera grundläggande kunskap och centrala problem inom knutteori. Under arbetets gång har det förts individuella loggböcker och en gemensam dagbok. Dessa loggböcker beskriver på ett övergripande sätt hur arbetet har utvecklats, vad som sagts på möten och även hur tiden har fördelats.

Här presenteras en lista över vem som haft främsta ansvaret över de olika delarna.

- **Gustav Birath Blom:** Definition av en knut, Ekvivalens av knutar, första halvan av Knutdiagram och alla figurer.
- **Jacob Burman:** Förord, Länkar och Reducerat diagram.
- **Pontus Elmrin:** Populärvetenskaplig presentation, Introduktion, Målet med uppsatsen, Ekvivalens av knutdiagram, Orientering av länkar, Exempel 3.3, Vridning (fram till Definition 4.4), Kauffmans polynom, Jonespolynomet och Taits förmodanden.
- **Hanna Nordin Axelsson:** Sammanfattning, Abstract, Invarianter, Vridning från och med Definition 4.4, Tillstånd av diagram, Exempel 5.5, Adekvata diagram, Sammanhängande diagram, Taits förmodanden och Appendix E.
- **David Selin:** Sats 2.4, andra halvan av Knutdiagram, Färgläggning mod p och Appendix A, B, C och D.
- Gruppen har gemensamt läst in sig på ämnet, löst problem och dragit slutsatser.

Vi vill också tacka vår underbara handledare Martin Hallnäs för ett kontinuerligt stöd och genuint intresse för ämnet.

Populärvetenskaplig presentation

Bland legenderna från antikens Grekland kan vi hitta den om den Gordiska knuten. Det var en knut så komplicerad att den som lyckades reda ut den förutspåddes bli härskare över Asien. Alexander den store använde enligt legenden sitt svärd för att skära upp knuten, och där igenom var hans öde beseglat.

Det skulle dröja många år, och antikens Grekland skulle sedan länge ha hunnit falla, innan det matematiska studiet av knutar som vi idag kallar knutteori inleddes. På 1860-talet presenterade fysikern Lord Kelvin en teori om att atomer egentligen var knutar av virvlar i en osynlig vätska som han trodde genomsvårade universum. Till följd av detta blev det därför intressant att skapa en förteckning över de olika knutarna som kunde bildas, och på så sätt få en förteckning över de olika atomerna de motsvarade. Speciellt var det fysikern P.G. Tait som försökte skapa en uttömmande förteckning över knutar baserat på hur många gånger de korsar sig själva. Efter att ha studerat knutar och arbetat med sin förteckning en längre period presenterade Tait ett antal förmodanden. Dessa förmodanden hade han inte själv verktygen att bevisa, och det visade sig att det skulle ta över 100 år innan de bevisades under 1980 och 1990-talet. För att förstå Taits förmodanden behöver vi först reda ut vad som avses med en knut.

En knut kan tänkas på som ett ihoptrasslat snöre där ändarna sedan limmats ihop. Till skillnad från Alexander den stores förfarande är det i knutteorin inte tillåtet att skära upp snöret eller på annat sätt klippa sönder det för att reda ut knuten. Givet två knutar som kan dras, vridas eller på annat sätt manipuleras, gäller att om den ena knuten kan formas till den andra så är dessa två knutar samma knut.

Vid en punkt kommer två till synes olika knutar bli för komplicerade för att med blotta ögat redogöra vad det är för knutar. De kanske ser helt olika ut, men går det verkligen att vara helt säker på att det inte finns ett sätt att göra om den ena till den andra?

För att lösa problematiken föreställer vi oss att det finns olika typer som kan tillskrivas olika knutar, till exempel typ A och typ B. Då går det med säkerhet att veta om två knutar, vars olika typer är typ A och typ B, inte är likadana knutar. Inom knutteorin kallas den här metoden för att särskilja knutar för invarianten. Sedan 1860-talet har knutteoretiker producerat invarianter som i olika situationer varit mer eller mindre effektiva i att särskilja knutar. En speciellt viktig invariant presenterades under 1980-talet av matematikern Vaughan Jones och den kallas för Jonespolynom. Varje knut har ett Jonespolynom, och om två knutar har olika Jonespolynom går det med säkerhet att säga att dessa inte är samma knut. Observera att detta inte innebär att två knutar med samma Jonespolynom är samma knut.

Det var just Jonespolynom som ledde till att det var möjligt att i slutet av 1980-talet bevisa Taits förmodanden: tre resultat som bland annat kan användas som invarianten. Trots att Jonespolynom är ett kraftfullt verktyg finns det ingen invariant som kan särskilja alla knutar; de är olika användbara i olika avseenden. Därför letar matematiker kontinuerligt efter nya invarianten att komplettera de befintliga med. Taits förmodanden berör så kallade alternerande knutar, en speciell typ av knutar som förekommer bland de enklare knutarna. Eftersom Tait inte hade tillgång till datorer var det just dessa som studerades främst. Efter att Taits förmodanden bevisades kunde matematiker framförallt förstå alternerande knutar bättre.

Vi återvänder till 1800-talet och Taits arbete med att skapa en förteckning över knutar. Det är oklart om Tait presenterade sina förmodanden för enbart alternerande knutar eller för knutar i allmänhet. Det är sannolikt att han trodde att det gällde för alla knutar, vilket är förståeligt eftersom de knutar han stötte på i sitt arbete med förteckningen alla var alternerande. Det visar sig nämligen att de allra flesta knutar med 10 eller färre korsningar, det vill säga hur många gånger snöret korsar sig självt, har egenskapen att de är alternerande. Taits arbete avslutades av matematikern C.N. Little i början av 1900-talet, och då hade de lyckats skapa en förteckning över alla knutar med 10 eller färre korsningar. Idag kan förteckningar över knutar skapas med hjälp av datorer, och forskningen inom knutteori fokuserar på andra områden och tillämpningar. Modern knutteori är ett levande forskningsområde med kopplingar till topologi, matematisk fysik, DNA och andra områden. Jonespolynom återfinns än idag i forskningen, och har utvecklats vidare tillsammans med andra polynom-baserade invarianten.

Sammanfattning

Detta arbete syftar till att ge läsaren en pedagogisk introduktion till knutteori och Tait's förmodanden. Vi inleder med att ge en rigorös grund till knutar och ekvivalens mellan knutar, och går sedan vidare till att betrakta knutdiagram och deras egenskaper. Att kunna skapa en fullständig förteckning av knutdiagram utan redundans är ett stort problem inom knutteorin, och Tait's förmodanden är ett viktigt verktyg för detta. Tait's första förmodan innebär att det för vissa typer av knutar finns en slags enklaste form, med ett minsta antal korsningar. Detta betyder att om det går att konstatera att en given knut har dessa egenskaper, då är den på sin enklaste form och kan den inte vara ekvivalent med knutar med färre korsningar. Vi presenterar bevis för dessa förmodanden med hjälp av knutinvarianten Jonespolynomet, som har önskvärda egenskaper för att studera alternerande knutdiagram.

Abstract

This essay presents a pedagogical introduction to knot theory and Tait's conjectures. We commence by building a rigorous theory of knots and equivalence between knots, and continue to examine knot diagrams and their properties. One of the great problems in knot theory is to create a complete table of knots, without any redundancy. Tait's conjectures are useful in this matter, as the first conjecture implies that knot diagrams with some conditions have the least number of crossings. This means that if we can verify these properties, we know that the knot at hand is inequivalent to all knot diagrams with less number of crossings. We present two of Tait's three conjectures and their proofs by introducing the Jones polynomial, a knot invariant with suitable properties for alternating diagrams.

Innehåll

1	Inledning	1
1.1	Taits förmodanden	1
1.2	Målet med uppsatsen	3
1.3	Framställning och källor	3
2	Definition av en knut	3
2.1	Ekvivalens av knutar	4
2.2	Knutdiagram	5
2.3	Ekvivalens av knutdiagram	5
2.4	Länkar	6
2.5	Orientering av länkar	7
2.6	Reducerade diagram	7
3	Invarianter	8
3.1	Färgläggning mod p	8
4	Mot Jonespolynomet	9
4.1	Vridning	9
4.2	Tillstånd av diagram	11
4.3	Kauffmans polynom	12
5	Jonespolynomet	14
6	Adekvata diagram	17
7	Taits förmodanden	18

Referenser

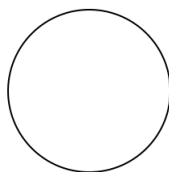
Appendix

- A Förflyttning av hörn i knut
- B Existens av reguljär projektion
- C Elementära knutdeformationer motsvarar Reidemeisterdrag
- D Färgläggning
- E Ett länkdiagram kan målas schackrutigt

1 Inledning

I slutet av 1860-talet presenterade den brittiske matematikern och fysikern Lord Kelvin en teori om atomer som idag kallas för "Vortex Theory of the Atom". Det var en teori för att förklara atomer som baserades på den klassiska teorin om en friktionslös vätska som genomsyrar universum, den så kallade etern. Enligt Kelvins teori var atomer små virvlar i etern. För att förklara varför det finns flera typer av element föreställde man sig att virvlar kunde flätas samman och på så sätt bilda olika element. Exakt hur virvlarna kunde sammanflätas var en frågeställning som ledde till vad vi idag kallar knutteori. Enligt denna teori motsvarade varje kemiskt element en unik knut av virvlar. Följaktligen växte ett intresse bland matematiker och fysiker att skapa en fullständig förteckning över olika knutar, och således även över de kemiska elementen [1].

En knut i vårt sammanhang kan med fördel tänkas på som ett snöre vars ändrar limmats ihop. Det faller sig naturligt att den enklaste knuten är den som illustreras i figur 1, den så kallade triviala knuten.



Figur 1: Den triviala knuten.

Intuitivt säger vi att två knutar är ekvivalenta om den ena kan manipuleras för att erhålla den andra, exempelvis genom att dra i snöret eller vrida på det. Däremot är det inte tillåtet att klippa i knutens snöre.

En knut är ett tredimensionellt objekt, och för att lättare illustrera den använder vi en projektion $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Speciellt för den här projektionen är att vi först manipulerar knuten en aning så att högst två delar av snöret korsar över/under varandra i en given punkt i projektionen. Vi erhåller då en projektion som i figur 2, där vi dessutom indikerat vilken del av snöret som går över och vilken som går under i varje korsning genom att sudda ut en bit av den underpasserande delen. Den här typen av projektion där högst två delar av knuten korsar varandra i en given punkt, och där vi markerat vilken del av knuten som går över respektive under den andra, kallar vi för ett *knutdiagram*. När vi diskuterar knutdiagram kommer vi hänvisa till de linjer som motsvarar snöret som knutens *bågar*.



Figur 2: Vänster: ett knutdiagram av treklöverknuten. Höger: en båge rödmarkerad.

Om vi tänker oss att vi börjar någonstans på diagrammet i figur 2 och sedan färdas i en riktning längs bågar i diagrammet, kommer vi att passera varje korsning på ett växelvis sätt. Om vi passerade en korsning längs den båge som går under korsningen, kommer vi i nästa korsning passera längs den båge som går över. Vi kallar ett diagram med denna egenskapen för ett *alternerande* diagram.

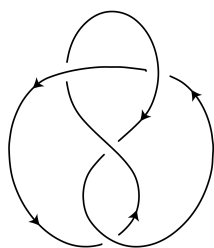
1.1 Taits förmodanden

Den brittiske fysikern P.G. Tait inledde under andra halvan av 1800-talet arbetet med att skapa en förteckning över knutar, och för att representera varje knut använde han just knutdiagram [2]. En naturlig fråga som uppkommer vid arbete med diagram är om två tillsynes olika diagram egentligen

representerar samma knut. Om en knut manipuleras genom vridningar och enkla förflyttningar av knutens snöre kan dess projektioner komma att skilja sig från varandra. För att förhindra att samma knut förekom flera gånger i sin förteckning av knutar, behövde Tait verktyg för att visa att två knutar inte är ekvivalenta.

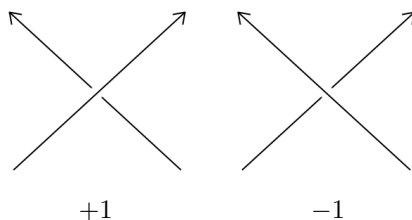
I detta arbete kommer vi se att om en knut har ett alternerande diagram, och om vi inför ytterligare några tekniska villkor för knuten, har diagrammet ett minimalt antal korsningar. Detta resultat formulerades som ett förmodande av P.G. Tait i slutet av 1800-talet. Tillsammans med ytterligare två förmodanden utgör de Tait's förmodanden. Dessa ger framförallt verktyg för att visa att två diagram inte representerar samma knut, givet att knutarna är alternerande samt uppfyller några tekniska villkor. Kravet att knutarna ska vara alternerande innebar ingen stor inskränkning för Tait's uppräknig av knutar, eftersom de flesta knutar med 10 eller färre korsningar är alternerande, och Tait's arbete slutade vid 7 korsningar [2].

Om vi nu tänker oss att vi färdas i en riktning längs en given knut, noterar vi enkelt att vi kan välja en av två riktningar att färdas i. En sådan riktning kallar vi för en orientering, och för att illustrera den givna orienteringen använder vi pilar som i figur 3.



Figur 3: Ett orienterat diagram av "åttan".

När en knut har tilldelats en orientering kan vi klassificera korsningarna i dess diagram baserat på vilken båge som korsar över respektive under den andra. Om vi betraktar korsningarna i figur 3 ser vi att två typer uppkommer: en där vänster båge sträcker sig över höger båge, och en där höger båge sträcker sig över vänster. Dessa ges värden $+1$ respektive -1 av konvention, se figur 4.



Figur 4: Vänster: En positiv korsning. Höger: en negativ korsning.

Vi tänker oss nu att vi deformerar vår knut på ett sådant sätt att vi erhåller ett annat diagram och så att även detta diagram är alternerande. Om diagrammet dessutom uppfyller de tekniska villkoren som gällde för Tait's första förmodande, så kommer differensen mellan antalet positiva och negativa korsningar att vara samma för de två diagrammen. Det här är Tait's andra förmodande, som säger att om en knut är orienterad samt uppfyller samma villkor som i det första förmodandet, kommer differensen mellan antalet positiva och negativa korsningar vara samma för alla dess diagram.

Tait's tredje och sista förmodande säger att två alternerande diagram av en given knut är relaterade via en serie "vikningar" (*flypes* på engelska) på diagrammen. Intuitivt innebär detta att det alltid är möjligt att manipulera det ena diagrammet till det andra genom en enkel operation. Det tredje förmodandet bevisades senare än de första två, och beviset nyttjar andra verktyg än de vi kommer fokusera på i den här framställningen. Vi nöjer oss därför med att lyfta fram dess existens här i inledningen.

1.2 Målet med uppsatsen

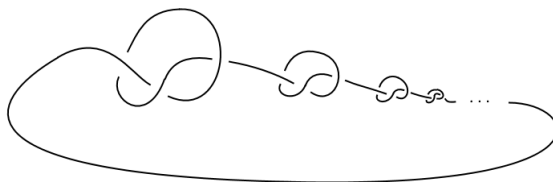
Idag sträcker sig knutteorin långt bortom förteckningar av knutar, och Lord Kelvins teori har sedan länge övergivits. Trots detta är problematiken kring när två knutar *inte* är ekvivalenta ett av knutteorins mest centrala områden även i modern tid. Taits förmodanden förblev obevisade fram till 1980-talet, då ett antal matematiker inledningsvis bevisade de första två av förmodandena, och kort därefter det tredje. Nyckeln till att bevisa de första två var upptäckten av det så kallade Jonespolynomet, som har kopplingar till matematisk fysik [3] och som framförallt används för att visa att två knutar inte är ekvivalenta. Målet med uppsatsen är att redogöra för beviset av Taits första två förmodanden med hjälp av Jonespolynomet. Vi ska börja med att definiera vad en knut är rent matematiskt, för att sedan beskriva några viktiga egenskaper och relationer hos knutar. Därefter kommer vi att behandla ekvivalens mellan knutar och färgläggning av knutar, ett resultat som kan visa att två knutar inte är ekvivalenta. Detta motiverar oss att införa Jonespolynomet som har visat sig speciellt effektivt i att visa att två knutar inte är ekvivalenta. Jonespolynomet används slutligen i beviset av Taits två första förmodanden.

1.3 Framställning och källor

De första tre kapitlen i uppsatsen samt appendix C utgår främst från [4] och [5]. Från och med kapitel 4 följer innehållet främst det i [6], men framställning och upplägg skiljer sig i hur teorin kring Kauffmans polynom presenteras. Viss inspiration har även hämtats från [7]. Bevisen för Taits förmodanden är givna i [6] men omarbetade i vår framställning. Jonespolynomet upptäcktes av Jones [8]. Taits första två förmodanden bevisades av Kauffman [9], Thistlethwaite [10] samt Murasugi [11] [12]. Taits tredje förmodande bevisades av Menasco och Thistlethwaite [13].

2 Definition av en knut

Konkret kan vi föreställa oss en knut som ett rep vars ändrar vi limmat ihop. Det mest naturliga blir då att tänka sig en definition av en knut som en sluten parametriserad kurva $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3, t \in [0, 1]$ med $\gamma(0) = \gamma(1)$. Kurvan får inte heller skära sig själv eller, mer matematiskt, för $t_1 \neq t_2$ har vi $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ enbart då $t_1 = t_2 = 0$ eller $t_1 = t_2 = 1$. Problemet med en sådan definition är att den tillåter så kallade vilda knutar.



Figur 5: Exempel på en vild knut med fraktalliknande beteende.

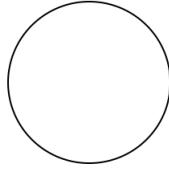
Vilda knutar kan, till skillnad från tama knutar, ha ett fraktalliknande beteende, se figur 5. Denna typen av besvärliga knutar vill vi undvika då de inte stämmer överens med den intuitiva bilden av ett rep med slutna ändrar. Detta motiverar införandet av en till synes mindre intuitiv definition som undviker problemet med vilda knutar, där knutar representeras av slutna polygonkurvor i \mathbb{R}^3 .

Låt p, q vara punkter i \mathbb{R}^3 och $[p, q]$ beteckna linjesegmentet mellan dem. Vi låter $(p_1, \dots, p_n), n \in \mathbb{N}$ vara en ordnad mängd punkter i \mathbb{R}^3 . Unionen av linjesegmenten $[p_1, p_2], \dots, [p_{n-1}, p_n], [p_n, p_1]$ kallas för en sluten polygonkurva. Vi säger att kurvan är enkel om varje linjesegment skär exakt två andra linjesegment, ett i varje ändpunkt.

Definition 2.1. En *knut* är en enkel sluten polygonkurva i \mathbb{R}^3 .

Notera att denna definition av knutar inte överensstämmer med de flesta av figurerna i texten. I annan litteratur definieras knutar ofta som differentierbara slutna kurvor i rummet, vilket är

ekvivalent med definitionen ovan, se [14]. Detta motiverar den fortsatta användningen av “mjuka” figurer i uppsatsen. Det blir då naturligt att den enklaste knuten, som inte har knutits, att kallas för den triviala knuten, se figur 6.



Figur 6: Den triviala knuten.

Vi behöver ett sätt att beskriva att knutar är lika varandra, det vill säga att den ena knuten kan manipuleras till den andra genom att “dra i snöret”. Vi inför därför begreppet elementär deformation av en knut.

Definition 2.2. Knuten J är en *elementär deformation* av knuten K om den ena knuten är given av (p_1, \dots, p_n) och den andra av (p_0, p_1, \dots, p_n) , punkterna p_0, p_1, p_n inte ligger på samma linje och triangeln som innesluts av $[p_0, p_1], [p_1, p_n], [p_n, p_0]$ enbart skär knuten given av (p_1, \dots, p_n) i punkter på $[p_1, p_n]$.

Vi noterar att det följer från definitionen att om en knut J är en elementär deformation av en annan knut K , gäller det även att K är en elementär deformation av J .

2.1 Ekvivalens av knutar

I inledningen såg vi att två knutar är ekvivalenta om den ena knuten kunde manipuleras, exempelvis genom att dra i den, för att erhålla den andra. Vi inför nu en formell definition av ekvivalens mellan knutar.

Definition 2.3. Knutarna J och K är *ekvivalenta* om det existerar en följd knutar

$$J = K_1, K_2, \dots, K_n = K$$

där K_{i+1} är en elementär deformation av K_i , $i = 1, \dots, n - 1$.

Hädanefter kommer ekvivalens mellan två knutar J och K betecknas $J \simeq K$. Följande sats visar att om vi flyttar hörnen i en knut K tillräckligt kort sträcka, är den resulterande knuten ekvivalent med K .

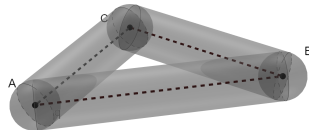
Sats 2.4. Låt K vara en knut med hörn (p_1, p_2, \dots, p_n) . Då finns det ett tal $z > 0$ sådant att om punkterna q_1, q_2, \dots, q_n uppfyller att

$$|p_i - q_i| < z, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

är (q_1, q_2, \dots, q_n) en knut som är ekvivalent med K .

Denna sats stämmer väl överens med vår intuition: deformerar en knut en aning, är det fortfarande samma knut. För att motivera detta resonemang kan vi tänka oss att vi placerar små cylindrar kring linjesegmenten i knuten och små sfärer kring varje hörn, såsom visas i figur 7. Denna väljs på ett sådant vis att cylindern kring ett linjesegment $[p_i, p_{i+1}]$ endast skär de “angräsande” cylindrarna, det vill säga de kring $[p_{i-1}, p_i]$ och $[p_{i+1}, p_{i+2}]$. Dessutom skall radien r vara tillräckligt liten för att sfärerna inte skall skära varandra. Genom att inspektera figur 7 inser vi att knutens hörn kan flyttas innanför sfärerna utan att linjesegment lämnar de omgivande cylindrarna. Vid en sådan förflyttning kommer därmed inte olika linjesegment, som ligger i olika cylindrar, att skära varandra.

Ett bevis av sats 2.4 ges i appendix A. Notera att vi kan translatera och rotera en knut i rummet genom att upprepade gånger förflytta dess hörn.



Figur 7: Tre linjesegment i en knut som omges av cylindrar med radie r . Runt linjesegmentens hörn ligger även sfärer med radie r .

2.2 Knutdiagram

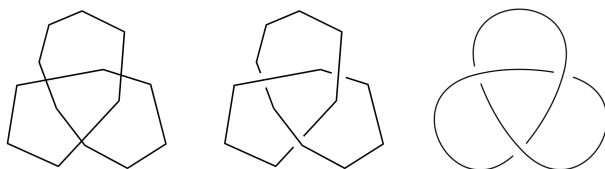
För att kunna definiera knutdiagram behövs ett nytt begrepp, nämligen projektionen av en knut. Vi låter $p : (x, y, z) \mapsto (x, y)$ vara den funktion som avbildar en punkt i \mathbb{R}^3 på dess projektion i \mathbb{R}^2 . Har vi otur kan det i en projektion exempelvis hända att två linjesegment i knuten projiceras på samma linjesegment i planet. Om detta sker förloras väsentlig information om knuten i projektionen. För att undvika detta kan vi ställa kravet på knuten att dess projektion skall vara reguljär.

Definition 2.5. En projektion av en knut är *reguljär* om det inte finns tre punkter på knuten som projiceras på samma punkt och om det inte finns ett hörn som projiceras på samma punkt som någon annan punkt på knuten.

Följande sats visar att alla knutar har en reguljär projektion.

Sats 2.6. Låt K vara en knut given av (p_1, \dots, p_n) . För varje $t > 0$ finns det en knut $K' \simeq K$ med reguljär projektion vars hörn (q_1, \dots, q_n) uppfyller att $|p_i - q_i| < t$.

Beviset för denna sats bygger på sats 2.4 och innebär att förflytta knutens hörn på ett sådant vis att villkoren för reguljär projektion blir uppfyllda. Ett fullständigt bevis återfinns i appendix B. En viktig egenskap hos knutar med reguljär projektion är att de kan representeras med *knutdiagram*. Ett knutdiagram är väsentligen en knuts reguljära projektion. I korsningarna tas dock en del av linjesegmentet som går under i \mathbb{R}^3 bort. Detta gör att vi i en korsning kan säga vilket linjesegment som går över och vilket som går under, något som inte är möjligt enbart med projektionen. Figur 8 illustrerar skillnaden mellan projektion av en knut och knutdiagram. Av estetiska skäl brukar knutdiagram ritas med mjuka kurvor, som till höger i figuren.

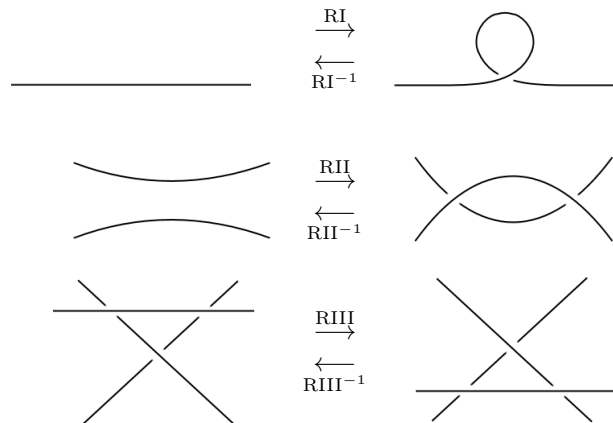


Figur 8: Till vänster i figuren visas projektionen av en treklöverknut. Från denna projektion kan knutdiagrammen i mitten och till höger skapats.

2.3 Ekvivalens av knutdiagram

På samma sätt som vi var intresserade av ekvivalens mellan två knutar kan vi fundera över ekvivalens mellan två knutdiagram. Hur vet vi att två knutdiagram inte representerar samma knut? Vi introducerar därför en tvådimensionell motsvarighet till elementära knutändringar för knutdiagram. Detta innebär att vi kan använda knutdiagram för att avgöra ekvivalens mellan två knutar.

Definition 2.7. Vi definierar operationerna *Reidemeisterdrag* så som beskrivs i figur 9. Vi benämner i fortsättningen dessa operationer RI, RII och RIII.



Figur 9: Reidemeisterdrag RI-RIII och deras inverser.

Sats 2.8. *Två knutar K_1, K_2 med diagram D_1, D_2 är ekvivalenta om och endast om vi kan utföra en ändlig serie Reidemeisterdrag på det ena diagrammet för att erhålla det andra.*

För att bevisa satsen i “endast om”-riktningen räcker det att studera hur en knuts diagram förändras när en elementär deformation görs på den. Att visa att Reidemeisterdrag motsvarar elementära deformationer är den svårare implikationen att visa. Det fullständiga beviset ges i appendix C. Hädanefter kommer diagram att vara vårt huvudsakliga verktyg för att studera knutar och deras generalisering länkar.

2.4 Länkar

Hittills har endast enskilda knutar studerats, men det kan generaliseras till den större teorin där vi tillåter flera knutar i samma rum.

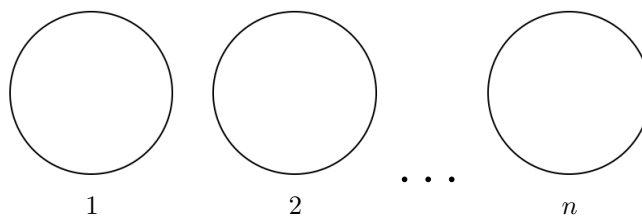
Definition 2.9. En *länk* är ett ändligt antal ordnade knutar som ej skär varandra. Vi definierar länkar genom en lista av knutar, $L = (K_1, K_2, \dots, K_n)$.

Definition 2.10. Två länkar $L = (K_1, K_2, \dots, K_n)$ och $L' = (K'_1, K'_2, \dots, K'_m)$ sägs vara *ekvivalenta* om de två följande villkoren är uppfyllda:

- (i) $n = m$, det vill säga att L och L' har samma antal komponenter.
- (ii) Vi kan med elementära deformationer i \mathbb{R}^3 eller Reidemeisterdrag i respektive diagram transformera L till L' . Det vill säga att vi transformerar K_1 till K'_1 , K_2 till K'_2 , \dots , K_n till K'_m .

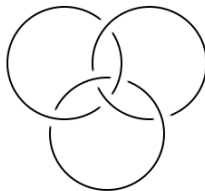
Viktigt att notera i denna definition är att den måste tillåta oss att bestämma ordningen på länkens komponenter. I fortsättningen kommer vi, precis som med knutar, beteckna ekvivalens mellan två länkar L, L' med $L \simeq L'$.

Exempel 2.11. Det finns en trivial länk L men n stycken komponenter där alla är disjunkta triviala knutar, se figur 10.



Figur 10: Triviala länken med n komponenter.

Exempel 2.12. Det finns en länk med tre triviala knutar som kallas för de Borromeiska ringarna. Denna länk har egenskapen att om en av komponenterna klipps upp och förs bort kan de andra två separeras utan att klippas upp. Ringarna kan ses i figur 11 och det är den enda mängd komponenter som besitter denna egenskap.



Figur 11: De Borromeiska ringarna är tre triviala knutar där inga två är sammankopplade.

Definition 2.13. Låt D_1, D_2 vara två diagram, och låt D'_2 vara D_2 translaterad i planet så att $D_1 \cap D'_2 = \emptyset$. Vi definierar den *disjunkta unionen* mellan D_1 och D_2 som $D_1 \cup D'_2$. Vi skriver i fortsättningen detta som $D_1 \cup D_2$ eller $\bigcup_{i=1}^n D_i$ för union mellan fler än 2 diagram.

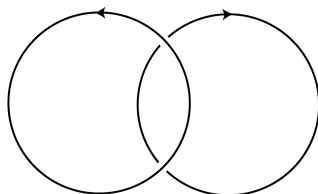
Som nämdes i inledningen är ett knutdiagram alternerande om vi passerar över och under varje på varandra efterföljande korsning växelvis då vi vandrar längs diagrammet i en given riktning. Vi sa vidare att en knut är alternerande om det existerar ett alternerande diagram som hör till knuten. Vi förlänger nu definitionen till länkar.

Definition 2.14. Ett länkdiagram är *alternerande* om vi för varje komponent färdas växelvis över/under i diagrammets korsningar när vi vandrar i en riktning längs diagrammets bågar. En länk är alternerande om den har något länkdiagram som är alternerande.

2.5 Orientering av länkar

I inledningen presenterades en orienterad knut som en knut där vi valt en riktning att cirkulera den i. Den här definitionen kan förlängas till länkar:

Definition 2.15. En *orienterad länk* är en länk för vilken samtliga komponenter är orienterade.



Figur 12: Ett orienterat länkdiagram.

Det går att utvidga definitionerna av länk- och diagraemekvivalens till att även omfatta orienterade länkar genom att visa att elementära knutdeformationer bevarar orientering. Detta är intuitivt rimligt om vi tänker på en elementär knutdeformation som att vi ”drar i knuten”, vilket inte påverkar dess riktning.

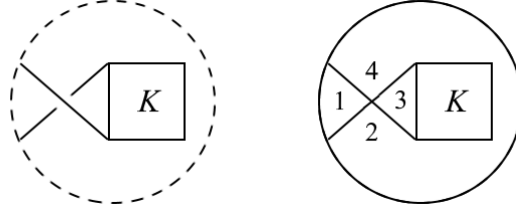
Även sats 2.8 gäller för orienterade knutar (och länkar), men beviset omfattas då av fler fall, ett för varje diagrams orientering.

2.6 Reducerade diagram

Vi väljer nu att betrakta projektionen istället för diagrammet då vi vill fokusera på komplementet till länken. Eftersom det alltid är två delar av länken som korsar varandra kommer det alltid finnas fyra komplementerande områden i varje korsning. Planet som omger länken hör också till komplementet.

Definition 2.16. Ett diagram är *reducerat* om de fyra områdena ur komplementet kring varje korsning är unika.

Vi ser i figur 13 att område två och fyra är samma område. Detta innebär att vi kan eliminera korsningen genom att plocka upp K och vrida upp knuten så att ett och tre blir samma område.



Figur 13: Vänster: En del av en knut. Höger: Komplementets områden numrerade. Eftersom område 2 och 4 är samma är knuten inte reducerad.

3 Invarianter

I praktiken är det svårt att avgöra om två knutar är ekvivalenta eller inte. Detta motiverar införandet av invarianter. En invariant är en egenskap som kan tillskrivas varje knut sådan att två ekvivalenta knutar har samma egenskap. Formellt är en knutvariant en funktion $\chi : K \rightarrow M$ där χ är sådan att $K_1 \simeq K_2$ medför att $\chi(K_1) = \chi(K_2)$, där K är mängden knutar i \mathbb{R}^3 och M är någon mängd, exempelvis \mathbb{R} , $\{0, 1\}$, eller en mängd av polynom. Ett enkelt exempel på en knutinvariant är egenskapen att kunna färglägga knutens diagram mod p (engelska: Fox- n -coloring). Denna invariant upptäcktes år 1956 av Ralph Fox [14]. Vi väljer här att gå igenom färgläggning (mod p) då det ger en lättbegriplig illustration av begreppet knutinvariant.

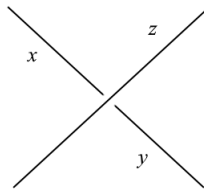
3.1 Färgläggning mod p

Givet ett diagram D och ett primtal $p > 2$, kan vi till en båge i D associera ett heltal $n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Detta tal kallar vi för bågens färg. Ges varje båge i D en färg, sägs diagrammet vara färglagt. En korsning i ett färglagt diagram illustreras i figur 14. I denna korsning har de två undre bågarna färgerna x och y och den övre har färgen z . Vi är nu redo att definiera begreppet färgläggningsbarhet (mod p).

Definition 3.1. Låt D vara ett diagram och $p > 2$ vara ett primtal. Färglägg D och betrakta korsningen i figur 14. Diagrammet D sägs vara *färgläggningsbart* (mod p) om det gäller att:

$$2z = x + y \pmod{p} \tag{1}$$

för alla korsningar i D och om minst två bågar i D har olika färger.



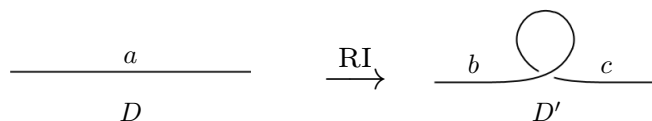
Figur 14: Figuren visar en korsning i diagrammet D . De undre bågarna har färgerna x och y och den övre har färgen z .

Följande sats visar att om ett diagram av en knut är färgläggningsbart (mod p), är alla diagram av knuten det. Färgläggningsbarhet (mod p) kan därför ses som en knutinvariant, från mängden knutar till mängden $\{\text{sant, falskt}\}$.

Sats 3.2. Färgläggningsbarhet (mod p) hos ett diagram är invariant under Reidemeisterdragen.

Vi visar satsen för Reidemeisterdrag RI. Bevisen för invarians under de andra Reidemeisterdragen återfinns i appendix D.

Bevis. Antag att diagrammet D i figur 15 är färgläggningsbart (mod p). En av dess bågar har färgen a . Eftersom D är färgläggningsbart finns det en båge i D med en färg $f \neq a$. Utförs Reidemeisterdrag RI på D fås diagrammet D' . Bågen med färg a i D har i D' delats upp i två bågar med färger b respektive c . Låter vi $b = c = a$, är villkor (1) uppfyllt i korsningen mellan bågar. Färgas sedan resterande del av diagrammet D' som D , inses lätt att (1) gäller för alla korsningar. Eftersom det finns minst två bågar med olika färger i D' , nämligen a och f , följer det nu att D' är färgläggningsbart (mod p).



Figur 15: Figuren visar ett färgläggningsbart diagram D . När Reidemeisterdrag RI utförs på D fås diagrammet D' .

□

Det går att visa att treklöverknuten är färgläggningsbar (mod 3), medans åttan i figur 3 inte är det. Dessa två knutar är därmed inte ekvivalenta.

Exempel 3.3 (När invarianter inte duger). Ibland kan en invariant inte särskilja två knutar. Ett exempel på när färgläggning inte är tillräckligt kraftfullt illustreras med treklöverknuten. Det är den enklaste kirala knuten, det vill säga en knut som inte är ekvivalent med sin spegelbild [15]. Vi vet alltså att diagrammen i figur 16 inte representerar samma knut. Trots detta ser vi att båda är färgläggningsbara mod 3, vilket visar att invarianter ibland inte är kraftfulla nog. Värt att notera är att det inte finns någon känd invariant som kan skilja på alla knutar.



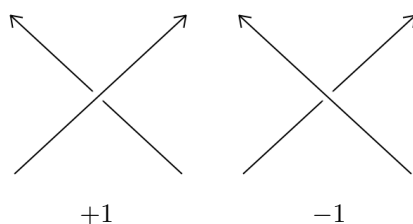
Figur 16: Färgläggning på höger- respektive vänsterhänta treklöverknuten. Färgen blå motsvarar värdet 0, röd motsvarar värdet 1 och grön motsvarar värdet 2.

4 Mot Jonespolynomet

Vi ställer oss frågan om det finns kraftfullare invarianter än färgläggning. Detta är vad som för oss mot Jonespolynomet, en speciellt kraftfull invariant som bland annat kan särskilja kirala knutars spegelbilder [4].

4.1 Vridning

I inledningen introducerades negativa och positiva korsningar. Vi ska nu använda begreppen negativa och positiva korsningar för att introducera ett länkdiagramms vridning. För ett orienterat



Figur 17: Högerhänt respektive vänsterhänt korsning och de tecken som de tilldelas.

länkdiagram D med n korsningar, definierar vi $\text{sign}(i) : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{-1, +1\}$ för varje korsning i i D . Funktionen $\text{sign}(i)$ tilldelar ett värde ± 1 enligt figur 17 till var och en av D 's korsningar. Om vi tilldelar varje korsning ett värde erhåller vi länkdiagrammets vridning.

Definition 4.1. Vridningen $w(D)$ av ett orienterat länkdiagram D med n korsningar är summan av tecknen i diagrammets korsningar:

$$w(D) = \sum_{i=1}^n \text{sign}(i).$$

Lemma 4.2. $w(D)$ är invariant under RII-RIII.

Bevis. Vi betraktar figur 18. I A finns det ingen korsning. Vi utför RII på A och erhåller B . Vi noterar att de nya korsningarna har motsatt tecken. Alltså gäller att $w(B) = w(A) + 1 - 1 = w(A)$.



Figur 18: Vridningens förändring under RII och RIII.

Nu betraktar vi R . Vi ser direkt att RIII endast flyttar två korsningar i diagrammet, och att deras värde är bevarat, alltså följer det att vridningen är densamma i R och T .

För att slutföra beviset i sin helhet upprepas ovanstående förfarande för övriga fall. □

Lemma 4.3. $w(D)$ ändras med ± 1 under RI.

Bevis. Resultatet följer omedelbart från figur 19.



Figur 19: Vridningens förändring under RI.

□

Vi inför nu ett begrepp för att kvantifiera hur sammanlänkande två komponenter i en länk är.

Definition 4.4. *Länktalet* $lk(K_1, K_2)$ mellan två orienterade komponenter K_1, K_2 i ett länkdiagram ges av

$$lk(K_1, K_2) = \frac{1}{2} \sum_{i \in K_1 \cap K_2} \text{sign}(i)$$

där korsningarna i är sådana att en båge från K_1 korsar över en båge från K_2 eller vice versa. Funktionen sign är sådan som i definitionen för vridning.

Observera att definitionen av länktalet påminner mycket om vridningen av ett knutdiagram. Vi kan nu skriva om $w(D)$ i termer av länktalet:

$$w(D) = \left(\sum_{K_i \in D} \sum_{j \in K_i} \text{sign}(j) \right) - \sum_{k \neq l} lk(K_k, K_l),$$

där $j \in K_i$ är korsningar i K_i .

Proposition 4.5. *Länktalet mellan två komponenter är invariant under Reidemeisterdrag.*

Bevis. Länktalet är en summa över tecken i de korsningar där de två komponenterna möts. Reidemeisterdrag RI påverkar endast en komponent, och därför har det inte heller någon verkan på länktalet. I fallet med Reidemeisterdrag RII och RIII kan vi återanvända argumentet från beviset av att $w(D)$ är invariant under dessa, se 4.2. \square

Detta innebär att länktalet är oberoende av val av diagram.

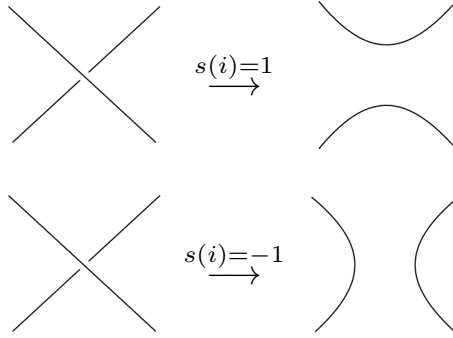
4.2 Tillstånd av diagram

Vi introducerar nu begreppet tillstånd, som ger ett sätt att bryta upp ett länkar till triviala länkdiagram.

Definition 4.6. Ett *tillstånd* för ett länkdiagram D med $n > 0$ korsningar är en funktion $s : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{-1, 1\}$. För ett diagram med $n = 0$ korsningar definierar vi ett enda triviellt tillstånd $s_\emptyset : \emptyset \rightarrow \{-1, 1\}$.

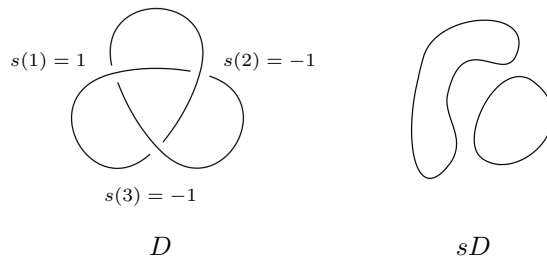
Ett tillstånd tilldelar alltså värdet ± 1 till varje korsning i ett diagram. Alltså följer att det totala antalet möjliga tillstånd är 2^n för ett diagram med $n \geq 0$ korsningar. Vi låter s_+ beteckna tillståndet som tilldelar värdet 1 till varje korsning och motsvarande låter vi s_- beteckna tillståndet som tilldelar värdet -1 till varje korsning.

Vi låter sD beteckna diagrammet där alla korsningar $i = 1, 2, \dots, n$ i D blivit utbytta enligt figur 20. Korsningarna i D kan alltid roteras till att likna korsningen i figuren nedan, och därefter bytas beroende på tillståndets värde.



Figur 20: Hur tillståndet s ändrar korsningen i i sD .

Vi noterar att diagrammet sD , oberoende av tillstånd s och diagram D , både saknar korsningar och enbart består av disjunkta triviala knutar, se figur 21.



Figur 21: Korsningarna i diagrammet D byts ut enligt ett tillstånd s och diagrammet sD erhålls.

Vi låter $|sD|$ beteckna antalet triviala knutar i sD . Som exempel har vi i figur 21 att $|sD| = 2$.

4.3 Kauffmans polynom

Med hjälp av tillstånd kan vi nu introducera Kauffmans polynom, en av de centrala byggstenarna för Jonespolynomet. Kauffmans polynom är definierat i termer av formella variabler A . Dessa är symboler som behandlas som variabler, men som inte står för något annat än sig själva. Vi kommer främst använda dessa som tillfälliga variabler som vi senare kan substituera mot variabler.

Definition 4.7. *Kauffmans polynom* $\langle D \rangle$ för ett länkdiagram D med n korsningar ges av

$$\langle D \rangle = \sum_{s \in S} A^{\sum_{i=1}^n s(i)} (-A^{-2} - A^2)^{|sD|-1}$$

där S är mängden möjliga tillstånd för D , och A är en formell variabel.

I fortsättningen kommer vi beskriva hur Kauffmans polynom fungerar på en ett lokalt område av diagrammet, ofta en korsning, genom notationen $\langle \times \rangle$, $\langle \times \rangle$ och så vidare. Dessa representerar Kauffmans polynom för ett godtyckligt länkdiagram som endast skiljer sig i en viss korsning på sättet som illustreras. Med andra ord är $\langle \times \rangle, \langle \times \rangle$ två länkdiagram som är identiska utanför den indikerade korsningen.

Sats 4.8. *Kauffmans polynom uppfyller att*

(i) $\langle U \rangle = 1$, där U är den triviala knuten,

(ii) $\langle \times \rangle = A \langle \times \rangle + A^{-1} \langle \circ \rangle$,

(iii) $\langle D \cup U \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle D \rangle$

där D är ett godtyckligt länkdiagram och A är en formell variabel.

Bevis. Vi visar först (i). Då U saknar korsningar följer det direkt att $\langle U \rangle = A^0(-A^{-2} - A^2)^0 = 1$.

För att visa (ii), låter vi S vara mängden tillstånd för diagrammet \times . Antag att \times är den n :te korsningen i D . Antingen kan korsningen tilldelas värdet 1, dvs \times , eller -1 , dvs \circ . Vi delar upp S i S_p och S_n , där S_p är mängden tillstånd där korsningen tilldelades värdet 1, och S_n där den tilldelades -1 . Vi har alltså $S = S_p \cup S_n$. Detta ger

$$\langle \times \rangle = \underbrace{\sum_{s \in S_p} A^{\sum_{i=1}^n s(i)} (-A^2 - A^{-2})^{|sD|-1}}_I + \underbrace{\sum_{s \in S_n} A^{\sum_{i=1}^n s(i)} (-A^2 - A^{-2})^{|sD|-1}}_{II}.$$

Vi vänder oss nu till \circ . Vi noterar att \circ har $n-1$ korsningar. Vidare gäller det, eftersom \times och \circ är lika utanför korsningen, att mängden tillstånd för \circ motsvarar S_p . Vi har då att

$$\langle \circ \rangle = \sum_{s \in S_p} A^{\sum_{i=1}^{n-1} s(i)} (-A^2 - A^{-2})^{|sD|-1}.$$

Samma resonemang ger att

$$\langle \circ \rangle = \sum_{s \in S_n} A^{\sum_{i=1}^{n-1} s(i)} (-A^2 - A^{-2})^{|sD|-1}.$$

Vi noterar nu att $I = \langle \times \rangle A$ och $II = \langle \circ \rangle A^{-1}$. Alltså får vi att

$$\langle \times \rangle = I + II = A \langle \times \rangle + A^{-1} \langle \circ \rangle.$$

Slutligen visar vi (iii). Låt $(D \cup U) = D'$ och $S_D, S_{D'}$ vara mängden tillstånd för respektive diagram. Vi har att $S_D = S_{D'}$, eftersom D och D' har samma antal korsningar då den triviala knuten saknar korsningar. Slutligen har vi att $|sD'| = |sD| + 1$ för varje tillstånd s . Sammantaget ger detta att

$$\begin{aligned} \langle D \cup U \rangle &= \sum_{s \in S_{D'}} A^{\sum_{i=1}^n s(i)} (-A^{-2} - A^2)^{|sD'|-1} = \sum_{s \in S_D} A^{\sum_{i=1}^n s(i)} (-A^{-2} - A^2)^{|sD|-1+1} \\ &= (-A^{-2} - A^2) \sum_{s \in S_D} A^{\sum_{i=1}^n s(i)} (-A^{-2} - A^2)^{|sD|-1} = (-A^{-2} - A^2) \langle D \rangle. \end{aligned}$$

□

Följande lemmen visar att Kauffmans polynom är invariant under RII-RIII men inte RI.

Lemma 4.9. *Kauffmans polynom är invariant under RII och RIII.*

Bevis. Vi börjar med att visa RII:

$$\begin{aligned} \langle \circ \circ \rangle &= A \langle \circ \circ \rangle + A^{-1} \langle \circ \circ \rangle = A(A \langle \circ \rangle + A^{-1} \langle \circ \rangle) + A^{-1}(A \langle \times \rangle + A^{-1} \langle \circ \rangle) \\ &= A^2 \langle \circ \rangle + \langle \circ \rangle + \langle \times \rangle + A^{-2} \langle \circ \rangle \\ &= A^2 \langle \circ \rangle + \langle \circ \rangle (-A^2 - A^{-2}) + \langle \times \rangle + A^{-2} \langle \circ \rangle = \langle \times \rangle. \end{aligned}$$

För RIII har vi att:

$$\langle \times \times \rangle = A \langle \times \times \rangle + A^{-1} \langle \times \times \rangle = A \langle \times \rangle + A^{-1} \langle \times \rangle$$

där andra likheten följer från resultatet i RII. Med samma steg kan vi visa att

$$\langle \text{X} \rangle = A \langle \text{Y} \rangle + A^{-1} \langle \text{Z} \rangle$$

varför $\langle \text{X} \rangle = \langle \text{X} \rangle$. □

Lemma 4.10. *Om man utför RI på ett diagram D ändras Kauffmans polynom för D enligt*

$$(i) \langle \text{X} \rangle = -A^{-3} \langle \text{Y} \rangle, \quad (ii) \langle \text{X} \rangle = -A^3 \langle \text{Y} \rangle.$$

Bevis.

$$(i) \langle \text{X} \rangle = A \langle \text{Y} \rangle + A^{-1} \langle \text{O} \rangle = A \langle \text{Y} \rangle + A^{-1}(-A^{-2} - A^2) \langle \text{Y} \rangle = -A^{-3} \langle \text{Y} \rangle.$$

Den första likheten följer från egenskap 2 i sats 4.8, den andra likheten från egenskap 3. (ii) följer på precis samma sätt. □

Vi ser att (i) och (ii) i lemma 4.10 är lika upp till ett plus eller minus-tecken. Detta indikerar att vi behöver komplettera Kauffmans polynom med mer information för att erhålla en invariant under samtliga Reidemeisterdrag. Vi undersöker detta i nästa delkapitel.

5 Jonespolynomet

Utrustade med resultat från föregående delkapitel är vi redo att formulera följande sats.

Sats 5.1. *Polynomet*

$$P_D(A) = (-A^{-3})^{w(D)} \langle D \rangle$$

är invariant under RI-RIII, där D är något länkdiagram hörande till den orienterade länken L .

Bevis. Vi börjar med att undersöka förändringen av RI. Vi utför RI på D och erhåller D' . Enligt lemma 4.10 har vi $\langle D \rangle = -A^{\pm 3} \langle D' \rangle$. Vidare har vi $w(D) = w(D') \mp 1$. Sammantaget får vi att

$$P_D(A) = (-A^{-3})^{w(D)} \langle D \rangle = (-A)^{\pm 3} (-A^{-3})^{w(D') \mp 1} \langle D' \rangle = (-A^{-3})^{w(D')} \langle D' \rangle = P_{D'}(A).$$

Vi undersöker nu förändringen av RII-RIII. Vi vet från lemma 4.9 och lemma 4.2 att både $\langle D \rangle$ och $w(D)$ förblir oförändrade efter RII och RIII. Således förblir även $P_D(A)$ oförändrat. □

Givet att vi nu vet att $P_D(A)$ är invariant under RI-RIII kan vi definiera Jonespolynomet. Vi erhåller Jonespolynomet genom att först beräkna $P_D(A)$ för något länkdiagram till den orienterade länken L och sedan göra ett variabelbyte.

Definition 5.2. *Jonespolynomet $V_L(t)$ för en orienterad länk L definieras som*

$$V_L(t) = P_D(A) \Big|_{A^{-2}=t^{1/2}}$$

där D är något diagram hörande till L .

Jonespolynomet för en knut är oberoende av vilken orientering knuten givits, eftersom ett byte av orientering bevarar varje korsnings tecken. Vi noterar att detta i allmänhet inte stämmer för en länk med fler än en komponent.

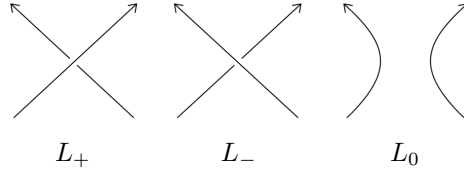
När vi har definierat Jonespolynomet kan vi formulera sats 5.3 som beskriver några viktiga egenskaper för Jonespolynomet.

Sats 5.3. *Jonespolynomet $V_L(t)$ uppfyller*

(i) $V_U(t) = 1$, där U är den triviala knuten.

(ii) Om L_+, L_-, L_0 är tre orienterade länkar som endast skiljer sig i omgivningen till korsningarna som visas i figur 22, så gäller att

$$t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V_{L_0}(t) = 0.$$



Figur 22: Orienterade korsningar.

I beviset som följer vill vi använda egenskap (ii) från sats 4.8:

$$\langle \times \rangle = A \langle \times \rangle + A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle.$$

Vi börjar med att notera att L_+, L_- är orienterade motsvarigheter av \times, \times , och L_0 är en orienterad motsvarighet av $\rangle \langle$, men vi saknar en motsvarighet till \times i figuren. Vi skriver därför om \times i termer av \times och $\rangle \langle$ via Kauffmans polynom. Vi har alltså att

$$\langle \times \rangle = A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle + A \langle \times \rangle.$$

På samma sätt kan vi skriva

$$\langle \rangle \langle \rangle = A^{-1} \langle \times \rangle + A \langle \rangle \langle \rangle.$$

Vi multiplicerar den första ekvationen med A^{-1} och den andra med A och sedan subtraherar den första från den andra, och får relationen

$$A \langle \rangle \langle \rangle - A^{-1} \langle \times \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle \rangle \langle \rangle.$$

Vi noterar att detta är ekvivalent med

$$A \langle L_+ \rangle - A^{-1} \langle L_- \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle L_0 \rangle \tag{2}$$

eftersom orientering inte påverkar $\langle D \rangle$. Med ekvation (2) är vi nu redo att bevisa satsen.

Bevis. Vi börjar med att visa (i). Först noterar vi att $w(U) = 0$ då den triviala knuten inte har några korsningar. Vidare vet vi att $\langle U \rangle = 1$. Det följer direkt att $V_U(t) = 1$.

Slutligen visar vi (ii). Vi börjar med att notera att

$$w(L_+) - 1 = w(L_0) = w(L_-) + 1.$$

Vidare skriver vi om $\langle D \rangle$ med hjälp av definitionen av $P_D(A)$:

$$\langle D \rangle = P_D(A)(-A^3)^{w(D)}.$$

Vi kan nu skriva om ekvation (2) som

$$A(-A^3)^{w(L_0)+1}P_{L_+}(A) - A^{-1}(-A^3)^{w(L_0)-1}P_{L_-}(A) = (A^2 - A^{-2})(P_{L_0}(A))(-A^3)^{w(L_0)},$$

vilket efter omskrivning ger

$$-A^4P_{L_+}(A) + A^{-4}P_{L_-}(A) = (A^2 - A^{-2})P_{L_0}(A).$$

Om vi slutligen låter $t^{1/2} = A^{-2}$ får vi den önskade relationen. \square

Vi återkommer nu till treklöverknuten och dess spegelbild, som vi tog upp i exempel 3.1. Följande sats visar att Jonespolynomet kan särskilja på två kirala knutar. Låt D vara ett länkdiagram och låt D' vara dess spegelbild som erhålls genom att byta alla över-korsningar i D till under-korsningar och vice versa.

Sats 5.4. Med D, D' som ovan gäller det att

$$P_{D'}(A) = P_D(A^{-1}).$$

Bevis. Vi börjar med att notera att D, D' har samma mängd tillstånd, eftersom de har samma antal korsningar. Vi kallar denna mängd S . För varje $s \in S$ existerar $s' \in S$, med $s(i) = -s'(i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. För dessa gäller $sD \simeq s'D'$ och $|sD| = |s'D'|$, eftersom D' är spegelbilden av D , och s' är det "spegelvända tillståndet".

Via definitionen av $\langle D \rangle$ får vi nu

$$\begin{aligned} \langle D \rangle &= \sum_{s \in S} A^{\sum_{i=1}^n s(i)} (-A^{-2} - A^2)^{|sD|-1} \\ &= \sum_{s \in S} (A^{-1})^{\sum_{i=1}^n s'(i)} (-A^{-2} - A^2)^{|s'D'|-1}. \end{aligned}$$

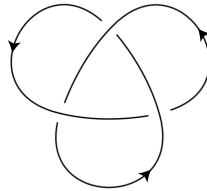
Vi har också att $w(D) = -w(D')$. Detta ger

$$\begin{aligned} P_D(A) &= (-A^{-3})^{w(D)} \langle D \rangle \\ &= (-A^{-1})^{-3w(D')} \sum_{s \in S} (A^{-1})^{\sum_{i=1}^n s'(i)} (-A^{-1})^{-2} - (A^{-1})^2)^{|s'D'|-1} \\ &= P_{D'}(A^{-1}). \end{aligned}$$

□

Exempel 5.5. Vi skall nu med hjälp av Jonespolynomet visa att treklöverknuten inte är ekvivalent med sin spegelbild. Vi såg tidigare i exempel 3.1 att invarianten färgläggning (mod 3) inte var kraftfull nog för att särskilja dessa knutar. Treklöverknuten har $2^3 = 8$ möjliga tillstånd: s_+ , 3 olika tillstånd som endast skiljer sig i en korsning från s_+ , s_- och 3 olika tillstånd som endast skiljer sig från s_- i en korsning. Vi låter s_{-++} vara det tillstånd som avbildar korsning $1 \mapsto -1$ men i övrigt är samma som s_+ , och s_{+--} vara det tillstånd som avbildar korsning $1 \mapsto +1$ men i övrigt är samma som s_- . Låt K vara den vänsterhänta treklöverknuten, och D ett diagram för K . Vi beräknar Kauffmans polynom

$$\begin{aligned} \langle D \rangle &= \sum_{s \in S} A^{\sum_{i=1}^n s(i)} (-A^{-2} - A^2)^{|sD|-1} \\ &= A^3(-A^{-2} - A^2)^{|s_+D|-1} + 3(A(-A^{-2} - A^2))^{|s_{-++}| - 1} \\ &\quad + 3(A^{-1}(-A^{-2} - A^2))^{|s_{+--}| - 1} + A^{-3}(-A^{-2} - A^2)^{|s_-D|-1} \\ &= A^3(-A^{-2} - A^2)^2 + 3A(-A^{-2} - A^2) + 3A^{-1}(-A^{-2} - A^2)^0 + A^{-3}(-A^{-2} - A^2) \\ &= 3A^{-1} + (-A^{-2} - A^2)(3A + A^{-3} + A^3(-A^{-2} - A^2)) = -A^3 - A^{-5} + A^7. \end{aligned}$$



Figur 23: Vänsterhänt treklöverknut med motsols orientering.

Nu återstår endast att beräkna vridningen $w(D)$ för D , och då behöver vi också en orientering. Sätt orienteringen i positiv riktning, alltså motsols, se figur 23. Vi har då att varje korsning är av negativt slag, se figur 17, och därför har vi $w(D) = -3$. Följdaktligen blir $P_D(A) = (-A^{-3})^{-3} \cdot (-A^3 - A^{-5} + A^7) = A^{12} + A^4 - A^{16}$. Genom att substituera $t = A^{-4}$ erhåller vi Jonespolynomet $V_K(t) = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}$.

Vi betraktar nu den högerhänta treklöverknuten, och kallar denna K' och dess diagram för D' . Från sats 5.4 får vi att $P_{D'}(A) = A^{-12} + A^{-4} - A^{-16}$, vilket ger $V_{K'}(t) = t + t^3 - t^4$. Eftersom $V_K(t) \neq V_{K'}(t)$ kan vi konstatera att $K \not\cong K'$, det vill säga att treklöverknuten inte är ekvivalent med sin spegelbild.

6 Adekvata diagram

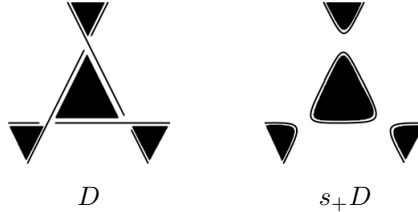
Vi ska nu introducera en speciell typ av diagram som kallas adekvata.

Definition 6.1. Ett diagram D kallas *plusadekvat* om $|s_+D| > |sD|$ för alla tillstånd s med $\sum_{i=1}^n s(i) = n - 2$ och *minusadekvat* om $|s_-D| > |sD|$ för alla tillstånd s med $\sum_{i=1}^n s(i) = 2 - n$. Om båda olikheter gäller så kallas D *adekvat*.

Eftersom s_+ är det enda tillståndet med $\sum_{i=1}^n s(i) = n$ och s_- är det enda tillståndet med $\sum_{i=1}^n s(i) = -n$, så motsvarar $\sum_{i=1}^n s(i) = n - 2$ ett tillstånd som endast skiljer sig från s_+ med värdet i en korsning, där $+1$ har blivit utbytt mot -1 . Motsvarande likhet gäller tillstånd för vilka $\sum_{i=1}^n s(i) = 2 - n$, som bara skiljer sig från s_- med värdet i en korsning, där -1 har bytts mot $+1$. Ett adekvat diagram maximerar alltså antalet komponenter i sina två extrema tillstånd s_+ och s_- .

Proposition 6.2. *Ett reducerat alternerande länkdiagram är adekvat.*

Bevis. Låt D vara ett länkdiagram. Detta kan färgläggas schackrutigt, se appendix E. Eftersom D är alternerande är varje schackrutas omgivande korsningar av samma slag, se figur 24. Detta innebär att transformationen $D \mapsto s_+D$ kommer att bevara alla vita områden, och låta de svarta smälta ihop till ett, eller tvärtom. Samma gäller för s_- . Har vi att D inte är reducerat så innebär det att det finns en korsning i så att det hade kunnat skapas en till komponent i antingen s_+D eller s_-D , om vi hade bytt tecken i denna korsning. D är alltså inte både plus- och minusadekvat, och därför inte adekvat. Har vi istället att D är reducerat så finns det inget tillstånd som skiljer sig endast i en korsning från s_+ eller s_- , som hade skapat fler komponenter i sD än s_+ respektive s_- . Alltså är D adekvat. □



Figur 24: Om diagrammet D målas schackrutigt, kommer de triviala knutarna i s_+D innesluta alla "schackrutor" av en färg.

Lemma 6.3. *Låt D vara ett länkdiagram med n korsningar, och låt $M\langle D \rangle$ och $m\langle D \rangle$ vara maximum respektive minimum av exponenterna av A i Kauffmans polynom av D . Då gäller*

- (i) $M\langle D \rangle \leq n + 2|s_+D| - 2$, med likhet om D är plusadekvat,
- (ii) $m\langle D \rangle \geq -n - 2|s_-D| + 2$, med likhet om D är minusadekvat.

Bevis. Låt

$$\langle D|s \rangle = A^{\sum_{i=1}^n s(i)} (-A^{-2} - A^2)^{|sD|-1}, \quad (3)$$

så att $\langle D \rangle = \sum_s \langle D|s \rangle$. Vi har att $\langle D|s_+ \rangle = A^n (-A^{-2} - A^2)^{|s_+D|-1}$ vilket medför att $M\langle D|s_+ \rangle = n + 2|s_+D| - 2$. Varje tillstånd skiljer sig från s_+ genom ett ändligt antal byten av $+1$ till -1 i olika korsningar. Alltså existerar det en följd av tillstånd $s_0, s_1, s_2, \dots, s_k$ så att $s_0 = s_+, s_k = s$ och $s_{r-1}(i) = s_r(i)$ för alla korsningar $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ förutom exakt en, i_r , för vilket $s_{r-1} = +1$ och $s_r = -1$. Då är $\sum_{i=1}^n s_r(i) = n - 2r$, och $|s_rD| = |s_{r-1}D| \pm 1$. Alltså får vi

$$M\langle D|s_{r-1}\rangle = M\left(A^{n-2(r-1)}(-A^{-2} - A^2)^{|s_{r-1}D|-1}\right),$$

$$M\langle D|s_r\rangle = M\left(A^{n-2r}(-A^{-2} - A^2)^{|s_{r-1}D|\pm 1-1}\right).$$

Detta medför att $M\langle D|s_{r-1}\rangle - M\langle D|s_r\rangle = 2 \pm 2$ och $M\langle D|s_{r-1}\rangle \geq M\langle D|s_r\rangle$. Genom att upprepa argumentet får vi $M\langle D|s\rangle \leq M\langle D|s_{k-1}\rangle \leq \dots \leq M\langle D|s_1\rangle \leq M\langle D|s_+\rangle = n + 2|s_+D| - 2$. Eftersom $\langle D\rangle = \sum_s \langle D|s\rangle$ alltså får vi då att $M\langle D\rangle \leq n + 2|s_+D| - 2$.

Om D' är plusadekvat så gäller $|s_+D'| > |sD'|$ för alla tillstånd s som skiljer sig från s_+ i en korsning. Detta ger oss $|s_1D'| + 1 = |s_+D'|$, vilket insatt i (3) ger $M\langle D'|s_1\rangle = n + 2|s_+D'| - 6$. Alltså blir $M\langle D'|s_+\rangle - M\langle D'|s_1\rangle = 4$ och $\langle D'|s\rangle \leq \langle D'|s_{k-1}\rangle \leq \dots \leq \langle D'|s_1\rangle < \langle D'|s_+\rangle$.

På grund av den strikta olikheten $\langle D'|s_1\rangle < \langle D'|s_+\rangle$ i det plus-adekvata fallet kan inte någon annan term eliminera den högsta exponenten i $\langle D'|s_+\rangle$, och då följer $M\langle D\rangle = M\langle D|s_+\rangle = n + 2|s_+D| - 2$. Del (ii) av lemmat följer på samma sätt som del (i). \square

En omedelbar konsekvens av detta lemma är att $M\langle D\rangle - m\langle D\rangle \leq 2n + 2|s_+D| + 2|s_-D| - 4$, med likhet om D är adekvat.

I följande proposition och i nästa kapitel ställs villkoret att länkdiagram skall vara sammanhängande. Med detta menar vi ett länkdiagram som inte kan skrivas som den disjunkta unionen $D_1 \cup D_2$ för några andra länkdiagram D_1 och D_2 . Vi noterar speciellt att ett knutdiagram per definition alltid är sammanhängande, eftersom den endast består av en komponent.

Proposition 6.4. *Låt D vara ett sammanhängande länkdiagram med n korsningar. Då gäller $|s_+D| + |s_-D| \leq n + 2$, med likhet om och endast om D är alternerande.*

Bevis. Låt f beteckna antalet inre områden i planet som D avgränsar. Eftersom 4 kanter möts i varje korsning får vi att antalet kanter är $2n$. Vi använder nu Eulers formel som anger samband mellan kanter, noder och sidor i tvådimensionella grafer [16], och får

$$v - e + f = 2 \Big|_{v=n, e=2n}$$

vilket ger att antalet områden som avgränsas är $f = n + 2$. Dessa kan målas på ett schackrutigt vis (se appendix E). Om D är alternerande gäller $f = |s_+D| + |s_-D|$ eftersom s_+ bevarar den ena färgens områden, och s_- bevarar de andra. I fallet då D inte är alternerande gäller att $|s_+D| + |s_-D| < f$ eftersom vissa av områdena av samma färg kommer "flyta ihop" under s_+ och s_- . Alltså gäller då $|s_+D| + |s_-D| < n + 2$. \square

7 Taits förmodanden

Utrustade med teorin om tillstånd och med Jonespolynomet är vi nu redo att komma till bevisen, och precisa formuleringar, för Taits förmodanden.

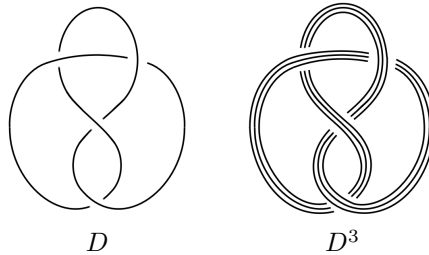
Sats 7.1 (Taits Första Förmodande). *Antag att D är ett alternerande, sammanhängande samt reducerat länkdiagram med n korsningar för en länk L . Då gäller att D har ett minimalt antal korsningar.*

Bevis. Låt $B_x(P)$ av ett polynom $P(x)$ beteckna på skillnaden mellan högsta och lägsta exponenten av x . Eftersom Jonespolynomet ges av $(-A^{-3})^{w(D)}\langle D\rangle$ med substitutionen $t = A^{-4}$, följer det att $B_A\langle D\rangle = 4B_t(V_L)$. Men från lemma 6.3 har vi att $B_A\langle D\rangle \leq 2n + 2|s_+D| + 2|s_-D| - 4$. Vi har också från lemma 6.4 att $|s_+D| + |s_-D| \leq n + 2$, alltså följer $4B_t(V_L) \leq 4n$. Eftersom V_L är oberoende av diagram så följer därför att antalet korsningar n alltid är större eller lika med $B_t(V_L)$. I både lemma 6.3 och lemma 6.4 gäller dock likhet om D är alternerande och reducerat, och då följer $n = B_t(V_L)$. Alltså har ett alternerande, sammanhängande samt reducerat länkdiagram ett minimalt antal korsningar. \square

Vi vet nu att alternerande, sammanhängande och reducerade länkdiagram är speciella på det viset att länken inte kan representeras med färre korsningar. Diagramrepresentationen av länken

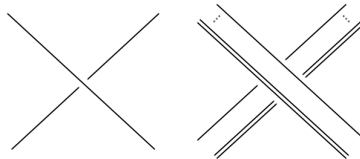
är alltså så enkel som möjligt. Nu fortsätter vi att presentera egenskaper för denna typ av diagram, och riktar fokus mot dess vridning $w(D)$. Innan vi kan presentera Taits andra förmodande inför vi en teknisk definition.

Definition 7.2. r -parallellen D^r till ett länkdiagram D är det diagram där varje komponent har bytts ut till r stycken kopior, som löper parallellt med de ursprungliga och beter sig på samma vis vid länkens korsningar, se figur 25.



Figur 25: En knut och dess r -parallell, där diagrammet D är "åttan" och $r = 3$.

Om antalet korsningar i det ursprungliga diagrammet D är n , så följer det direkt att antalet korsningar i D^r blir nr^2 , efter som varje korsning i D svarar mot r^2 korsningar i D^r , se figur 26. Vidare följer det att D^r är adekvat om D är adekvat, genom att studera beteendet av s_+ och s_- i en korsning i D och dess motsvarande r^2 korsningar i D^r . Då följer också att $s_+(D^r) \simeq \bigcup_{i=1}^r s_+D$.



Figur 26: En korsning i D och dess motsvarande r^2 korsningar i D^r .

Lemma 7.3. Låt D och E vara diagram av samma orienterade länk L , med n_D och n_E korsningar. Om D är plusadekvat gäller

$$n_D - w(D) \leq n_E - w(E).$$

Bevis. Låt de olika komponenterna i en orienterad länk L benämnas L_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Antag att D och E är diagram av denna länk, med D plus-adekvat. Låt vidare D_i och E_i beteckna den delmängd av respektive diagram som endast visar komponent i . Vi kan hitta heltal μ_i och ν_i så att det för varje i gäller att $w(D_i) + \mu_i = w(E_i) + \nu_i$. Vi transformerar nu D till D_* och E till E_* genom att utföra Reidemeisterdrag RI i positiv riktning μ_i respektive ν_i antal gånger på respektive deldiagram D_i och E_i , vi skriver detta som $D_i \mapsto D_{*i}, E_i \mapsto E_{*i}$. Vi har att D_* fortfarande är plus-adekvat, eftersom det endast har lagts till positiva vridningar. Det får att $w(D_{*i}) = w(E_{*i})$. Vridningen för hela länken beror på vridningen i varje enskild komponent men också hur sammanlänkade komponenterna är. Vi påminner oss om definitionen av länktalet och att detta är invariant under Reidemeisterdragen enligt proposition 4.5, vilket ger $w(D_*) = w(E_*)$.

Betrakta nu D_*^r och E_*^r . Eftersom de representerar samma länk har de samma Jonespolynom $V_{D_*^r}(t) = V_{E_*^r}(t)$. Eftersom vi har $w(D_*^r) = w(E_*^r) = r^2 w(D_*)$, ger därför definitionen av Jonespolynomet att diagrammens Kauffmann polynom också är lika, $\langle D_*^r \rangle = \langle E_*^r \rangle$. Från lemma 6.3 har vi nu att

$$\begin{aligned} M\langle E_*^r \rangle &\leq (n_E + \sum_i \nu_i)r^2 + 2(|s_+E| + \sum_i \nu_i)r - 2, \\ M\langle D_*^r \rangle &= (n_D + \sum_i \mu_i)r^2 + 2(|s_+D| + \sum_i \mu_i)r - 2 \end{aligned}$$

vilket ger oss

$$(n_D + \sum_i \mu_i)r^2 + 2(|s_+D| + \sum_i \mu_i) \leq (n_E + \sum_i \nu_i)r^2 + 2(|s_+E| + \sum_i \nu_i).$$

Eftersom detta skall hålla för alla r kan vi jämföra koefficienter av r^2 , vilket ger oss

$$\begin{aligned} n_D + \sum_i \mu_i &\leq n_E + \sum_i \nu_i \\ \iff n_D + \sum_i \mu_i - (w(D_i) + \mu_i) &\leq n_E + \sum_i \nu_i - (w(E_i) + \nu_i) \\ \iff n_D - \sum_i w(D_i) &\leq n_E - \sum_i w(E_i) \\ \iff n_D - \sum_{i \neq j} lk(D_i, D_j) - w(D) &\leq n_E - \sum_{i \neq j} lk(E_i, E_j) - w(E), \end{aligned}$$

där den sista ekvivalensen följer av definitionen av $w(L)$. Eftersom E och D representerar samma länk, och länketallet är oberoende av diagram, får vi att

$$n_D - w(D) \leq n_E - w(E).$$

□

Med ovanstående resultat har vi alla verktyg vi behöver för att visa Taits andra förmodande.

Sats 7.4 (Taits Andra Förmodande). *Antag att D, E är två alternerande, sammanhängande samt reducerade länkdiagram för en orienterad länk L . Då gäller det att $w(D) = w(E)$.*

Bevis. Enligt Proposition 6.2 är D, E adekvata och speciellt plus-adekvata. Vidare gäller det från Sats 7.1 att ett diagram som är reducerat och alternerande har ett minimalt antal korsningar. Det följer att eftersom D, E båda är alternerande och reducerade är $n_D = n_E$. Från Lemma 7.3 får vi då att $w(D) \geq w(E)$ eftersom D är plus-adekvat. Men det gäller även att $w(E) \geq w(D)$ enligt samma lemma, ty även E är plus-adekvat. Alltså är $w(D) = w(E)$ vilket visar satsen. □

Om vi återvänder till Taits arbete med att skapa en fullständig knutförteckning, har vi nu visat att Taits intuition kring alternerande knutar var korrekt. Givet en knut med egenskaper så som i sats 7.1 och sats 7.4, kan vi alltså dra slutsatsen att den är inekvivalent med alla andra knutar som har diagram med färre korsningar. Detta är ett kraftfullt resultat som förenklar arbetet med att skapa förteckningar över knutar. Den observanta läsaren kan notera att det resultat vi har presenterat är av en starkare form än de förmodanden som Tait ursprungligen presenterade, eftersom dessa resultat inte bara gäller knutar, utan också länkar.

Referenser

- [1] Helge Kragh. The vortex atom: A victorian theory of everything. *Centaurus*, 44:32–114, 2002.
- [2] A. Stoimenow. Tait’s conjectures and odd crossing number amphicheiral knots. 2007.
- [3] Edward Witten. Quantum field theory and the jones polynomial. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, 121:351 – 399, 11 1989.
- [4] Kunio Murasugi. *Knot Theory and Its Applications*. Birkhäuser, Boston, MA, 1993.
- [5] Charles Livingston. *Knot Theory*. The Mathematical Association of America, 1993.
- [6] W.B. Raymond Lickorish. *An Introduction to Knot Theory*. Springer, New York, NY, 1997.
- [7] Louis H Kauffman. *Knots and Physics*. WORLD SCIENTIFIC, 3rd edition, 2001.
- [8] Vaughan F. R. Jones. A polynomial invariant for knots via von neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 12:103–111, 1985.
- [9] H. Kauffman Louis. State models and the jones polynomial. *Topology*, 26(3):395–407, 1987.
- [10] Thistlethwaite Morwen B. A spanning tree expansion of the jones polynomial. *Topology*, 26(3):297–309, 1987.
- [11] Murasugi Kunio. Jones polynomials and classical conjectures in knot theory. *Topology*, 26(2):187–194, 1987.
- [12] Murasugi Kunio. Jones polynomials and classical conjectures in knot theory. ii. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 102:317 – 318, 09 1987.
- [13] William Menasco and Morwen Thistlethwaite. The tait flyping conjecture. *Bulletin of The American Mathematical Society - BULL AMER MATH SOC*, 25, 04 1991.
- [14] Richard H. Crowell and Ralph H. Fox. *Introduction to Knot Theory*. Springer New York, NY, 1 edition, 1963.
- [15] Wen-Ye Deng and Wen-Yuan Qiu. Helical chirality in model mirror-imaged carbyne trefoil knots. *Journal of Molecular Structure*, 875(1):515–519, 2008.
- [16] Richard J Trudeau. *Introduction to graph theory*. Courier Corporation, 2013.

Appendix

A Förflyttning av hörn i knut

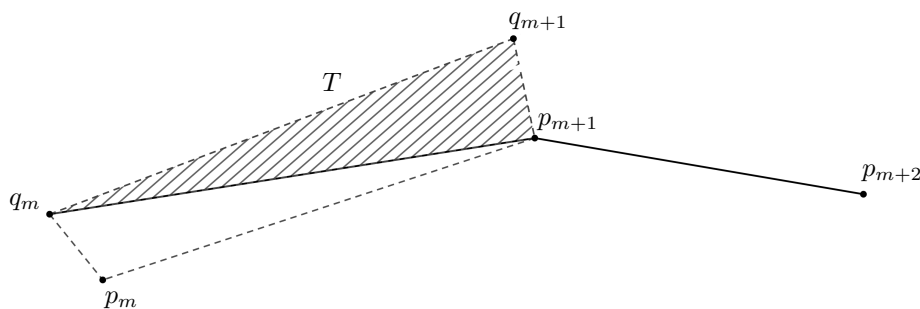
Här bevisas sats 2.4, som lyder:

Sats. Låt K vara en knut med hörn (p_1, p_2, \dots, p_n) . Då finns det ett tal $z > 0$ sådant att om punkterna q_1, q_2, \dots, q_n uppfyller att

$$|p_i - q_i| < z, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

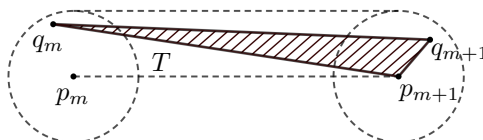
är (q_1, q_2, \dots, q_n) en knut som är ekvivalent med K .

Bevis. Antag först att $n > 3$. Knuten K består av linjesegmenten $l_1 = [p_1, p_2]$, $l_2 = [p_2, p_3]$, \dots , $l_{n-1} = [p_{n-1}, p_n]$ och $l_n = [p_n, p_1]$. Låt $d_{a,b}$ beteckna det minsta avståndet mellan två linjesegment l_a och l_b som inte skär varandra. Detta avstånd ges av $d_{a,b} = \min \{|x - y| : x \in l_a, y \in l_b\}$. Det minsta av alla sådana $d_{a,b}$ betecknar vi d . Välj nu z till $z = \frac{d}{2}$. Vi vill härnäst visa att K via elementära knutdeformationer kan göras om till en godtycklig knut K' med hörn i (q_1, q_2, \dots, q_n) , där $|p_i - q_i| < z$ för $i = 1, 2, \dots, n$. Vi skapar därför en sekvens av knutar K_0, K_1, \dots, K_n med $K_0 = K$ och $K_n = K'$. I denna sekvens ges K_m av $(q_1, \dots, q_{m-1}, q_m, p_{m+1}, \dots, p_n)$, så att hörnet p_{m+1} ändras till q_{m+1} när vi går från K_m till K_{m+1} . Om vi visar att K_{m+1} kan fås ur K_m med elementära knutdeformationer är beviset klart. För enkelhetens skull betraktar vi enbart fallet då $1 \leq m \leq n - 2$. Fallen $m = 0$ och $m = n - 1$ visas med liknande resonemang. För att ändra K_m till K_{m+1} görs först en elementär knutdeformation i vilken segmentet $[q_m, p_{m+1}]$ byts ut mot $[q_m, q_{m+1}] \cup [q_{m+1}, p_{m+1}]$. Detta illustreras i figur 27. För att den elementära knutdeformationen skall vara tillåten behöver vi



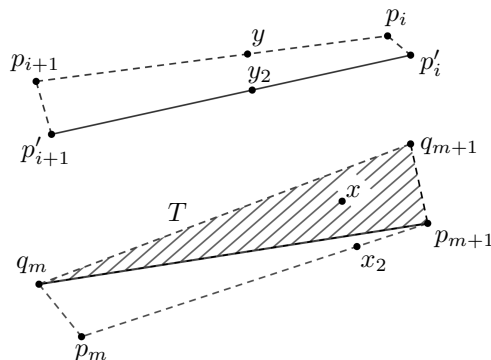
Figur 27: Figuren visar en elementär knutdeformation på knuten K_m . I knutdeformationen byts linjesegmentet $[q_m, p_{m+1}]$ ut mot $[q_m, q_{m+1}] \cup [q_{m+1}, p_{m+1}]$.

visa att insidan av triangeln $T = \Delta q_m q_{m+1} p_{m+1}$ inte skär K_m , förutom i $[q_m, p_{m+1}]$. Vi visar först att T inte skär linjesegment som ej angränsar till $[q_m, p_{m+1}]$, det vill säga linjesegment som varken är $[q_{m-1}, q_m]$ eller $[p_{m+1}, p_{m+2}]$. Tag därför en punkt $x \in T$. Denna befinner sig på högst avståndet z från linjesegmentet $[p_m, p_{m+1}]$, vilket inses genom att inspektera figur 28. Detta innebär att det



Figur 28: I figuren har cirklar (egentligen sfärer) med radie z placerats kring p_m och p_{m+1} .

finns ett $x_2 \in [p_m, p_{m+1}]$ sådant att $|x - x_2| < z$. Låt sedan y vara en punkt på ett linjesegment $[p'_i, p'_{i+1}]$ i K_m som inte angränsar till $[q_m, p_{m+1}]$. Här är antingen $p'_i = p_i$ eller $p'_i = q_i$ beroende på om $i > m$ eller $i < m$ och motsvarande gäller för p'_{i+1} . Avståndet mellan $y \in [p'_i, p'_{i+1}]$ och linjesegmentet $[p'_i, p'_{i+1}]$ är högst z , vilket gör att det finns ett $y_2 \in [p_i, p_{i+1}]$ sådant att $|y - y_2| < z$ (jämför med figur 28). Visar vi att $y \neq x$, så skär inte T linjesegmenten som inte angränsar till $[q_m, p_{m+1}]$. Hur punkterna x , x_2 , y och y_2 ligger i förhållande till varandra visas i figur 29. Eftersom y_2 och x_2



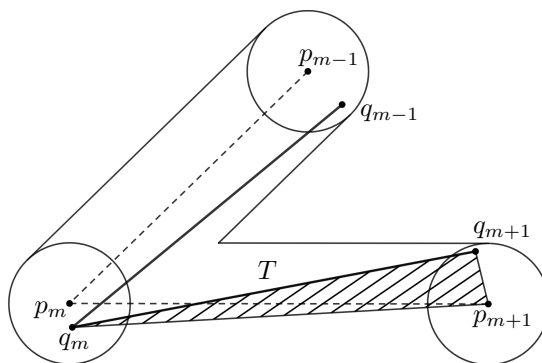
Figur 29: Figuren visar linjesegmenten $[q_m, p_{m+1}]$ och $[p'_i, p'_{i+1}]$ i K_m .

befinner sig på linjesegment som inte skär varandra, är $|x_2 - y_2| \geq d$. Från triangelolikheten följer det nu att

$$|x - x_2| + |y - x| + |y_2 - y| \geq |x - x_2 + y - x + y_2 - y| = |y_2 - x_2| \geq d.$$

Vidare är $|x - x_2| < z$ och $|y_2 - y| < z$, vilket gör att $|y - x| + 2z > d$ och därmed att $|y - x| > d - 2z = 0$. Alltså skär ej en punkt $x \in T$ någon punkt y på ett linjesegment som **inte** angränsar till $[q_m, p_{m+1}]$.

Det återstår att visa att T inte skär någon av linjesegmenten som angränsar till $[q_m, p_{m+1}]$, vilka är $[q_{m-1}, q_m]$ och $[p_{m+1}, p_{m+2}]$. Vi ger inget formellt bevis för detta. För att förstå varför $[q_{m-1}, q_m]$ inte skär T hänvisar vi istället till figur 30. I denna är sfärer med radie z utritade med centrum i p_{m-1}, p_m och p_{m+1} . Sfärerna i p_{m-1} och p_{m+1} kan inte skära varandra, då avståndet mellan p_{m-1} och p_m är större än eller lika med d . Detta är på grund av att $p_{m-1} \in [p_{m-1}, p_m]$ och $p_{m+1} \in [p_{m+1}, p_{m+2}]$ ligger på linjesegment som ej skär varandra. Det bör då framgå ur figuren att T och $[p_{m-1}, p_m]$ inte skär varandra. Slutligen behöver vi också göra om linjesegmenten $[q_{m+1}, p_{m+1}] \cup$



Figur 30: Cirkelarna (egentligen sfärer) i figuren har radie z och punkterna q_{m-1}, q_m och q_{m+1} ligger innanför dessa.

$[p_{m+1}, p_{m+2}]$ till $[q_{m+1}, p_{m+2}]$ via en elementär knutdeformation (detta ser vi ur figur 27). Att denna knutdeformation är tillåten visas med resonemang motsvarande de som redan har förts. Det återstår även att betrakta fallet $n = 3$. När $n = 3$ sätter vi $z = \frac{1}{2} \min \{|p_1 - p_2|, |p_2 - p_3|, |p_3 - p_1|\}$ och överlämnar resten av beviset åt läsaren. \square

B Existens av reguljär projektion

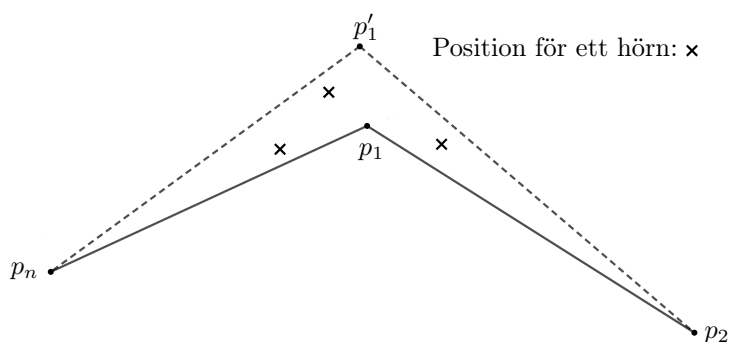
Bevis av sats 2.6, som berör existensen av reguljär projektion hos knutar.

Sats. Låt K vara en knut given av (p_1, \dots, p_n) . För varje $t > 0$ finns det en knut $K' \simeq K$ med reguljär projektion vars hörn (q_1, \dots, q_n) uppfyller att $|p_i - q_i| < t$.

Bevis. Vi observerar först att eftersom en knut K består av ett ändligt antal linjesegment i \mathbb{R}^3 , så består dess projektion $p(K)$ av ett ändligt antal linjesegment i \mathbb{R}^2 . Detta gör att det för varje punkt $x \in p(K)$ finns en punkt i $\mathbb{R}^2 \setminus p(K)$ som ligger godtyckligt nära x . Ytterligare en observation är att om ingen av hörnen (p_1, p_2, \dots, p_n) har samma projektion som en annan punkt i K , så gäller följande:

1. Alla punkter på ett linjesegment $[p_i, p_{i+1}]$ projiceras ned på olika punkter i planet. Detta följer av att $p([p_i, p_{i+1}])$ är ett linjesegment och att $p(p_i) \neq p(p_{i+1})$, då de två hörnen p_i och p_{i+1} enligt antagande inte kan ha samma projektion.
2. Projektionen av två olika linjesegment skär varandra i högst en punkt. Anledningen till detta är följande: Om projektionen $p(l_a)$ och $p(l_b)$ av två olika linjesegment l_a och l_b skär varandra i minst två punkter, måste $p(l_a)$ och $p(l_b)$ ligga längs med samma linje i planet. Vi kan parametrisera punkterna längs denna linje (på ett uppenbart vis). Linjesegmenten $p(l_a)$ och $p(l_b)$ motsvarar i denna parametrisering intervallen $[a_1, a_2] \subset \mathbb{R}$ respektive $[b_1, b_2] \subset \mathbb{R}$. Ur det faktum att $[a_1, a_2] \cap [b_1, b_2]$ innehåller minst två olika punkter, går det att resonera sig fram till att (minst) ett hörn i l_a eller l_b har samma projektion som en punkt i det andra linjesegmentet. Detta motsäger antagandet att ett hörn inte har samma projektion som någon annan punkt i K .

Om (1) och (2) är uppfyllda kan endast skärningspunkter i projektionen uppstå i korsningar mellan olika linjesegment. Antalet skärningspunkter måste också vara ändligt, då projektionen av två linjesegment skär varandra i högst en punkt. Efter dessa observationer är vi redo att visa att vi kan flytta hörnen p_1, p_2, \dots, p_n i en knut K för att få en reguljär projektion. Betrakta först p_1 . Om p_1 inte projiceras ned på en annan punkt flyttar vi ej detta hörn och sätter $p'_1 = p_1$. Om p_1 projiceras ned på en annan punkt finns det punkter i $\mathbb{R}^2 \setminus p(K)$ som ligger godtyckligt nära $p(p_1)$. Flytta p_1 till en punkt p'_1 som uppfyller att $p(p'_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus p(K)$. Välj också p'_1 på ett sådant vis att $p([p_n, p'_1])$ och $p([p'_1, p_2])$ inte skär projektionen av något hörn (det finns ett ändligt antal hörn). Notera att p'_1 kan ligga godtyckligt nära p_1 . En illustration av vad som sker då p_1 ändras till p'_1 visas i figur 31. Upprepa sedan denna procedur för hörnen p_2, p_3, \dots, p_n . Vi får då knuten



Figur 31: I figuren visas hur hörnet p_1 flyttas p'_1 . Punkten p'_1 väljs på ett sådant vis att $p([p_n, p'_1])$ och $p([p'_1, p_2])$ inte skär ett hörn i projektionen. Kryssen i figuren motsvarar hörn i knuten.

Notera att figuren visar projektionen av K och inte K själv.

K' med hörn i $(p'_1, p'_2, \dots, p'_n)$. I K' projiceras inte någon av p'_1, p'_2, \dots, p'_n ned på en annan del av knuten. Därmed har $p(K')$ högst ett ändligt antal korsningar enligt (1) och (2). Det enda möjliga problemet med $p(K')$ är att det kan finnas korsningar som mer än två punkter projiceras ned på. För att åtgärda detta betraktar vi först p'_1 . Vi låter M_1 beteckna mängden av alla korsningar i $p(K')$ och M_2 beteckna mängden av korsningar som fler än två punkter i K' projiceras ned

på. Låt även H vara mängden av hörn $p(p'_1), \dots, p(p'_n)$ i $p(K')$. Om ingen punkt i M_2 ligger på $p([p'_n, p'_1])$ eller $p([p'_1, p'_2])$ flyttar vi ej p'_1 och sätter $p''_1 = p'_1$. Om någon punkt i M_2 ligger på $p([p'_n, p'_1]) \cup p([p'_1, p'_2])$ flyttar vi p'_1 till en närbelägen punkt p''_1 sådan att $p(p''_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus p(K')$. Eftersom $M_1 \cup H$ är ändlig går det att välja p''_1 på ett sådant vis att ingen punkt i $M_1 \cup H$ ligger på projektionen $p([p'_n, p''_1]) \cup p([p''_1, p'_2])$ (undantaget $p(p'_n)$ och $p(p'_2)$). Detta kan jämföras med förflyttningen av p_1 till p'_1 . Figur 31 kan också tänkas visa förflyttningen av p'_1 till p''_1 om kryssen i figuren motsvarar punkter i $M_1 \cup H$. Efter denna förflyttning finns det inga korsningar på $p([p'_n, p''_1]) \cup p([p''_1, p'_2])$ som fler än två punkter projiceras ned på. Gör sedan på motsvarande vis om p'_2, p'_3, \dots, p'_n till $p''_2, p''_3, \dots, p''_n$. En viktig detalj här är att M_1, M_2 och H behöver "uppdateras" i varje steg. Knuten K'' med hörn (p''_1, \dots, p''_n) har då en reguljär projektion och är ekvivalent med K . Vi har också kunnat välja punkterna p'_i så att de ligger godtyckligt nära p_i , och p''_i har även kunnat ligga godtyckligt nära p'_i . För varje $t > 0$ finns det därför en knut K'' som har en reguljär projektion, är ekvivalent med K och vars hörn (p''_1, \dots, p''_n) uppfyller att $|p''_i - p_i| < t$. Notera att det är sats 2.4 som gör det möjligt i detta bevis att flytta knutens hörn.

□

C Elementära knutdeformationer motsvarar Reidemeisterdrag

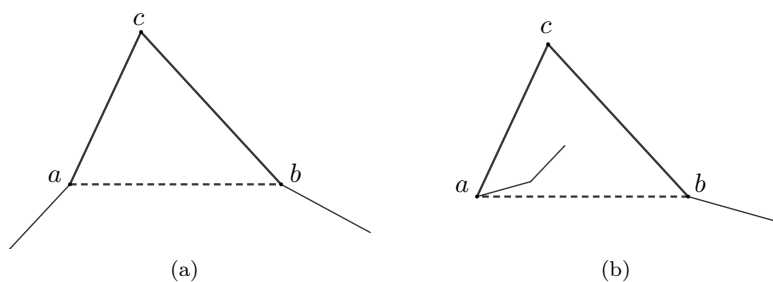
Här ges beviset för sats 2.8, som lyder:

Sats. *Två knutar K_1, K_2 med diagram D_1, D_2 är ekvivalenta om och endast om vi kan utföra en serie Reidemeisterdrag på det ena för att erhålla det andra.*

I beviset av denna sats frångår vi den tidigare konventionen med att beteckna linjesegment som $[p_i, p_{i+1}]$. Ett linjesegment mellan två punkter A och B i en knut betecknar vi istället AB och projektionen av AB skriver vi som $ab = p(AB)$. Detta är linje med notationen i [4], som en stor del av beviset bygger på.

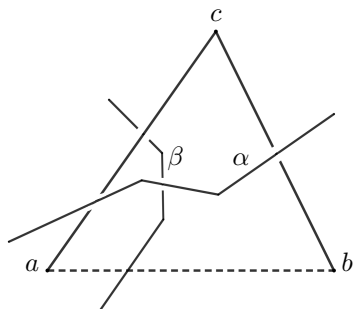
Bevis. Vi väljer här enbart att bevisa “endast om”-delen av satsen, det vill säga att om två knutar är ekvivalenta kan deras diagram fås ur varandra via Reidemeisterdrag. För att visa satsen i andra riktningen behövs bland annat en rigorösare definition av Reidemeisterdragen än vad som har givits här.

Vi visar nu att om två knutar K_A och K_B med diagram D_A och D_B är ekvivalenta, kan D_B fås ur D_A genom en serie Reidemeisterdrag. Att K_A och K_B är ekvivalenta innebär att det finns en följd av knutar K_0, K_1, \dots, K_n sådan att $K_0 = K_A, K_n = K_B$ och där K_{i+1} kan fås ur K_i via en elementär knutdeformation. Det räcker därmed att visa att $K' = K_{i+1}$:s diagram D' kan fås ur $K = K_i$:s diagram D via ett antal Reidemeisterdrag. Ett viktigt tillägg här är att K och K' behöver ha reguljära projektioner. Har de inte det, kan vi rotera alla K_0, K_1, \dots, K_n (godtyckligt) lite så att knutar K'_0, K'_1, \dots, K'_n uppkommer, alla med reguljära projektioner. Eftersom rotationen är godtyckligt liten, har K_0 och K_n väsentligen samma diagram som K'_0 respektive K'_n . Vi går inte närmare på detaljerna kring detta. I den elementära deformation som ändrar K till K' byts antingen ett linjesegment AB i K ut mot två linjesegment AC och BC i K' , eller byts linjesegment AC och BC i K ut mot AB i K' . Bevisen i dessa två fall är analoga, så vi betraktar enbart fallet då AC och BC byts ut mot AB . Projektionen av triangeln ΔABC är en triangel $\Delta abc = p(\Delta ABC)$ i planet. I denna triangel ligger $ac \cup bc$ i D medans ab ligger i D' . Det är enbart detta som skiljer D och D' åt. Vi behöver därför hitta en följd av Reidemeisterdrag som transformerar $ac \cup bc$ i D till ab . Båda diagrammen D och D' innehåller $D_0 = D \setminus ab = D' \setminus (ac \cup bc)$ utöver ab, bc och ac . Beroende på hur D_0 ligger i förhållande till Δabc behöver två fall (a) och (b) betraktas. I fall (a)



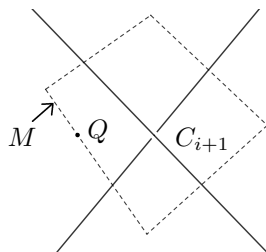
Figur 32: I figuren visas de två sätten som kurvan D_0 kan ligga i förhållande till triangeln Δabc .

ligger ingen av de två bågar som angränsar till $ac \cup bc$ innanför Δabc , medans i fall (b) ligger minst en av bågarne innanför Δabc . Detta visas i figur 32. För att konstruera en serie Reidemeisterdrag i fall (a) konstaterar vi att den del av D_0 som ligger i Δabc består av ett antal “sammanhängande bågar”, där varje sådant bågsegment korsar kanten hos Δabc i exakt två punkter som i figur 33. Ett sådant bågsegment kommer antingen att korsa över Δabc i båda punkterna eller så korsar det under Δabc i båda punkterna. Vi benämner dessa två sorters bågsegment α respektive β , vilket också illustreras i figur 33. Anledning till att ett bågsegment Γ ej kan gå över Δabc i en korsning och under i den andra, är att linjesegmenten i K som motsvarar Γ antingen ligger helt över eller helt under ΔABC . Detta är en följd av att den elementära knutförändring som sammanbinder K och K' enbart får utföras om triangeln ΔABC inte skär K förutom i AC och BC . Därmed ligger linjesegment som motsvarar Γ antingen ovanför eller under ΔABC . För att ändra $ac \cup bc$ till ab görs induktion på de m korsningar C_1, C_2, \dots, C_m i D_0 som ligger innanför Δabc . Kurvan $ac \cup bc$



Figur 33: Figuren visar två bågsegment av typ α och β i triangeln Δabc .

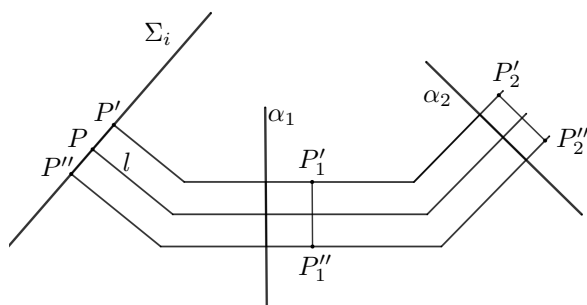
ändras successivt till kurvor $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_m$ i varje induktionssteg (med $ac \cup bc = \Sigma_0$). Varje Σ_i har sina ändpunkter i a och b och $\Sigma_i \cup ab$ avgränsar $m - i$ av korsningarna i D_0 . Dessutom är alla bågsegment i $\Sigma_i \cup ab$ av typ α eller β . För att nu transformera Σ_i till Σ_{i+1} omsluter vi den $i+1$: e korsningspunkten C_{i+1} i D_0 med en polygonkurva M som i figur 34. Välj sedan två punkter,



Figur 34: I figuren visas hur en polygonkurva M (streckad linje) omsluter korsningen C_{i+1} .

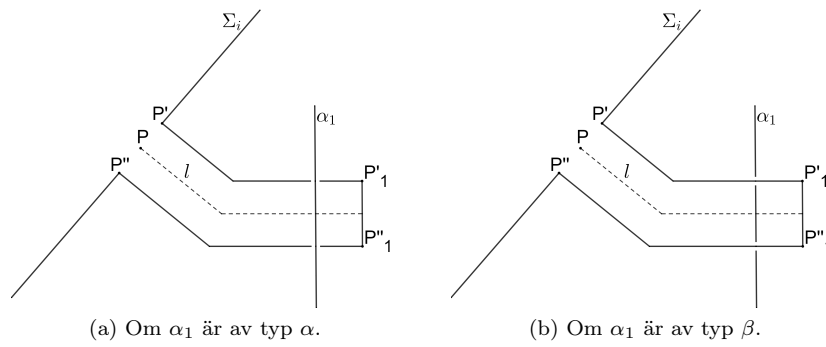
$P \in \Sigma_i$ och $Q \in M$, som inte ligger på några hörn. Förbind dessa med en enkel polygonkurva l som endast skär M och Σ_i i P respektive Q , och som inte skär några korsningar eller hörn i $\Sigma_i \cup ab$. Polygonkurvan skall även skära alla bågar den korsar i D_0 under rät vinkel. Detta villkor gör att l skär D_0 i ett ändligt antal punkter.

Placera sedan punkter P' och P'' längs Σ_i på vardera sida om P . Placera även punkter Q' och Q'' på M på vardera sida om Q . Förbind P' med P'' via en polygonkurva som löper "parallellt" med l , som i figur 35, och förbind på samma vis Q' med Q'' . Vi vill nu via Reidemeisterdrag

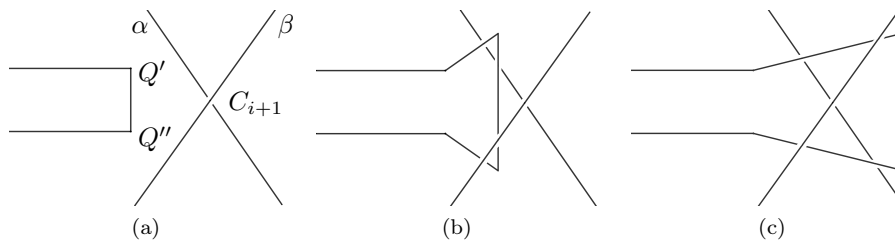


Figur 35: Linjen l som förbinder Σ_i med M .

transformera linjen $P'P''$ till $P'Q'Q''P''$. Låt α_1 beteckna den första bågen som l skär om vi rör oss från P till Q längs l . Placera vid α_1 en punkt P'_1 på $P'Q'$ och en punkt P''_1 på $P''Q''$. Ändra nu $P'P''$ till $P'P'_1P''_1P''$ via Reidemeisterdrag RII. Beroende på om α_1 är av typ α eller β låter vi antingen $P'P'_1P''_1P''$ ligga under l_1 eller över l_1 , som i figur 36. Utför sedan samma procedur vid nästa båge α_2 och ändra $P'P'_1P''_1P''$ till $P'P'_2P''_2P''$ och fortsätt på detta vis. Till slut har $P'P''$ via Reidemeisterdrag RII ändrats till $P'P'_jP''_jP''$, där j är antalet korsningar mellan l och D_0 . Därefter kan $P'P'_jP''_jP''$ göras om till $P'Q'Q''P''$. Vi kan sedan, via Reidemeisterdrag RII och RIII, föra $P'P'_jP''_jP''$ "över" korsningen C_{i+1} på sättet som visas i figur 37.

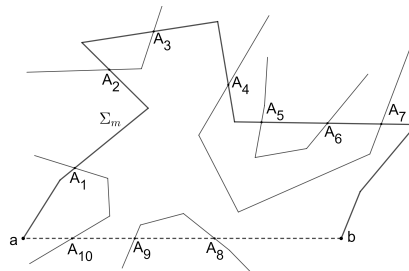


Figur 36: Beroende på om α_1 är av typ α eller β lägger hamnar $P'P'_1P'_1P''$ antingen över eller under α_1 .



Figur 37: Genom att utföra Reidemeisterdrag RII två gånger på (a) fås diagrammet (b). Därefter används Reidemeisterdrag RIII för att få (c). I figuren ligger C_{i+1} i korsningen mellan ett bågsegment av typ α och ett bågsegment av typ β .

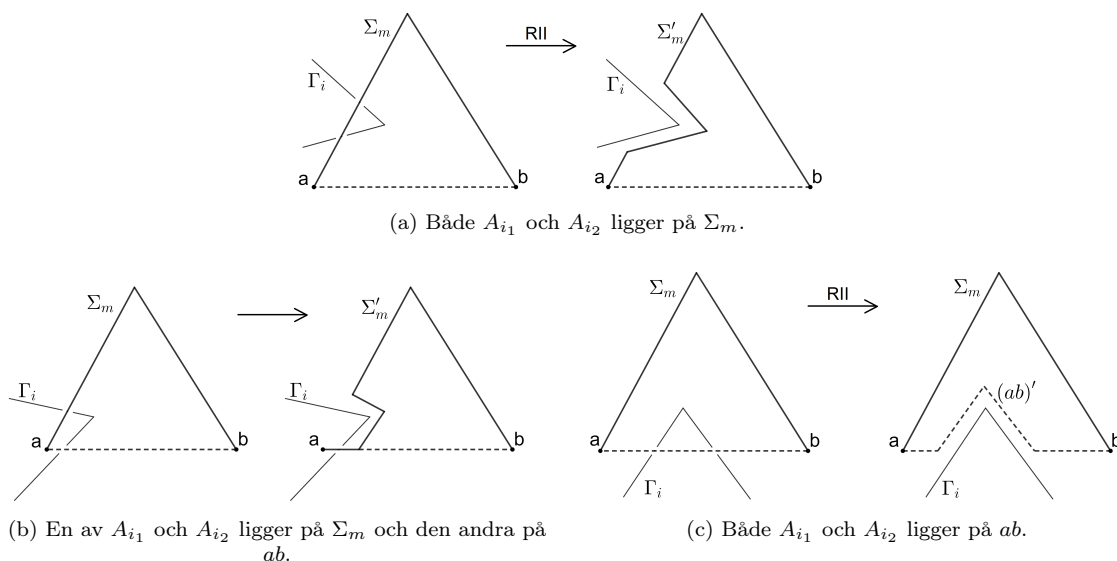
Den kurva som Σ_i nu har gjorts om till är Σ_{i+1} . Eftersom att alla bågar i $\Sigma_i \cup ab$ är av typ α eller β , garanterar ändringarna i figur 36 och 37 att bågarna i $\Sigma_{i+1} \cup ab$ också är av typ α eller β . Vi konstaterar även att det finns en färre korsning i $\Sigma_{i+1} \cup ab$ än $\Sigma_i \cup ab$ eftersom C_{i+1} ligger inuti $\Sigma_i \cup ab$ men ej inuti $\Sigma_{i+1} \cup ab$. Upprepas proceduren ovan fås slutligen Σ_m . I $\Sigma_m \cup ab$ finns inga korsningar och vi har därmed situationen i figur 38. Vi behöver nu göra om



Figur 38: Figuren visar Σ_m och ab och de bågsegment i D_0 som ligger innanför $\Sigma_m \cup ab$. Punkterna A_1, A_2, \dots, A_{10} markerar korsningar mellan $\Sigma_m \cup ab$ och D_0 .

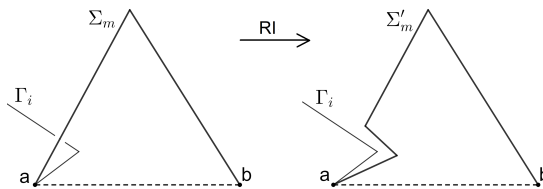
Σ_m till ab via Reidemeisterdrag. Genomlöps kurvan $\Sigma_m \cup ab$ i en given riktning finner vi ett jämnt antal korsningar A_1, A_2, \dots, A_{2l} mellan D_0 och $\Sigma_m \cup ab$. Dessa korsningar ligger på bågsegmenten $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_l$ inuti $\Sigma_m \cup ab$. Till varje bågsegment hör alltså två korsningar. Genom att inspektera figur 38 inser vi att det måste finnas en båge Γ_i med korsningar A_{i_1} och A_{i_2} som ligger "bredvid varandra" på $\Sigma_m \cup ab$, det vill säga att $i_1 = i_2 \pm 1$ (alternativt att $i_1 = 1, i_2 = 2l$ eller $i_1 = n, i_2 = 1$). Ett mer fullständigt resonemang för att det finns en sådan båge ges i slutet av beviset. Tag nu en båge Γ_i vars korsningar A_{i_1} och A_{i_2} ligger bredvid varandra. Om $A_{i_1}, A_{i_2} \in \Sigma_m$ utför vi Reidemeisterdrag RII som i figur 39a och gör om Σ_m till Σ'_m . Om $A_{i_1} \in \Sigma_m$ och $A_{i_2} \in ab$, gör vi ändringen i figur 39b. Ligger A_{i_1} och A_{i_2} båda på ab gör vi istället om ab till $(ab)'$ via

Reidemeisterdrag RII, se figur 39c. Eftersom bågsegmentet ab inte finns i knutdiagrammet, är det egentligen felaktigt att göra om ab till $(ab)'$. Om vi dock lyckas ändra Σ_m till $(ab)'$ kan sedan $(ab)'$ göras om till ab via Reidemeisterdrag RII.



Figur 39: Figureorna visar vilka ändringar som behöver utföras på Σ_m och ab beroende på hur Γ_i ligger. För att göra figureorna överskådliga har $\Sigma_m \cup ab$ antagits vara en triangel och det enda bågsegment som ritats ut är Γ_i .

Sammanfattningsvis har $\Sigma_m \cup ab$ gjorts om till en kurva $\Sigma'_m \cup ab$ eller $\Sigma_m \cup (ab)'$ som innehåller $l-1$ bågsegment. Upprepas denna procedur ytterligare $l-1$ gånger fås en kurva $\Sigma_m^{(l_1)} \cup (ab)^{(l_2)}$ med $l_1 + l_2 = l$, vars insida inte innehåller några bågsegment. Kurvan $\Sigma_m^{(l_1)}$ kan sedan enkelt ändras till $(ab)^{l_2}$. Via Reidemeisterdrag ändras alltså Σ_m först till $\Sigma_m^{(l_1)}$, sedan $(ab)^{l_2}$ och slutligen ab . Detta slutför beviset i fall (a). I fall (b) (figur 32b) kan vi på samma sätt som i fall (a) göra om $\Sigma_0 = ac \cup bc$ till Σ_m . Det vi behöver vara uppmärksamma på är att ett (eller två) bågsegment α_i inuti triangeln Δabc är "anslutet" till punkt a eller b , såsom i figur 32b. Bågsegmentet α_i korsar alltså inte Δabc i a (eller b). Det är ändå meningsfullt att säga att bågsegmentet α_i är av typ α eller β , beroende på om de linjesegment i K som projiceras ned på α_i ligger över (α) eller under (β) triangeln ΔABC . Ger vi α_i en typ α eller β kan nu Σ_0 göras om till Σ_m på samma vis som i fall (a). När vi sedan skall ändra Σ_m till ab kan alla fallen i figur 39 uppkomma. Det är även möjligt att bågsegmentet Γ_i är "anslutet" till Σ_m i a eller b . Vi kan då ändra Σ_m till Σ'_m via Reidemeisterdrag RI såsom visas i figur 40.



Figur 40: I fall (b) kan ett bågsegment Γ_i vara "anslutet" till punkterna a eller b .

Förutom att situationen i figur 40 uppstår, är tillvägagångssättet för att ändra Σ_m till ab det samma i fall (b) som i fall (a). Detta slutför beviset i fall (b).

Vi avslutar detta appendix med att ge ett bevis för att det finns ett bågsegment i $\Sigma_m \cup ab$ vars hörn ligger bredvid varandra. Tag ett bågsegment Γ_i bland $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_l$. Om Γ_i :s korsningar A_{i_1} och A_{i_2} ligger bredvid varandra är vi klara. Annars, om A_{i_1} och A_{i_2} ej ligger bredvid varandra,

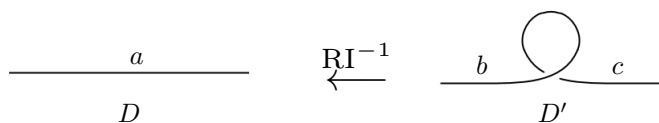
använder vi att Γ_i delar upp insidan av $\Sigma_m \cup ab$ i två (disjunkta) områden. I det ena området ligger enbart korsningarna $A_{i_1+1}, A_{i_1+2} \dots A_{i_2-1}$ (vi kan utan inskränkning antaga att $i_1 < i_2$). Låt $A_{i'_1} \in \{A_{i_1+1}, A_{i_1+2} \dots A_{i_2-1}\}$ vara en av dessa. Korsningen $A_{i'_1}$ ligger på ett bågsegment $\Gamma_{i'}$ som har ytterligare en korsning $A_{i'_2}$. Eftersom $\Gamma_{i'}$ ej skär Γ_i måste $A_{i'_2} \in \{A_{i_1+1}, A_{i_1+2} \dots A_{i_2-1}\}$. Om nu $A_{i'_1}$ och $A_{i'_2}$ ligger bredvid varandra är vi klara. Annars upprepar vi samma resonemang som tidigare: bågsegmentet $\Gamma_{i'}$ delar upp insidan av $\Sigma_m \cup ab$ i två områden, varav det ena innehåller korsningarna $A_{i'_1+1}, A_{i'_1+2} \dots A_{i'_2-1}$ (om $i'_1 < i'_2$). Notera att $i_1 < i'_1 < i'_2 < i_2$. Fortsätter vi på detta vis finner vi till slut en båge vars korsningar ligger bredvid varandra.

□

D Färgläggning

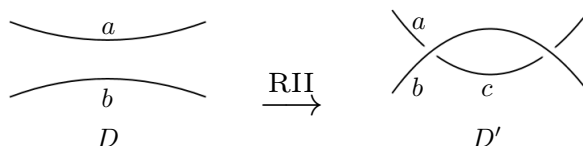
I kapitel 3.1 visades att färgläggning (mod p) hos ett diagram är invariant under Reidemeisterdrag RI. Här visas att färgläggning är invariant även under de andra Reidemeisterdragen. Då bevisen för de olika Reidemeisterdragen är snarlika, är det tillräckligt att studera beviset för Reidemeisterdrag RIII på nästa sida. Resonemangen som används i detta fall förekommer även i bevisen för de andra Reidemeisterdragen.

Bevis. Reidemeisterdrag RI^{-1} : Antag att diagrammet D' i figur 41 är färgläggningsbart. Enligt villkoret (1) gäller det då att $2b = b + c \pmod{p}$, vilket medför att $b = c$. Diagrammet D' måste också innehålla två olika färger, så det finns ytterligare en färg $f \neq b$ i D' . Utförs Reidemeisterdrag RI^{-1} på D' , så att diagrammet D erhålls, byts bågarne med färgerna b och c ut mot en båge med färg a . Vi är fria att sätta $a = b$ och att för övrigt färglägga D som D' . Vi inser att villkor (1) i sådana fall är uppfyllt för D och att två olika färger, f och b , finns i D . Diagrammet D är därmed färgläggningsbart (mod p).



Figur 41: Figuren visar ett färgläggningsbart diagram D' . När Reidemeisterdrag RI^{-1} utförs på D' erhålls diagrammet D .

Reidemeisterdrag RII: Betrakta det färgläggningsbara diagrammet D i figur 42. Vi vill visa att diagrammet D' , som fås ur D via Reidemeisterdrag RII, är färgläggningsbart. Färglägg D' som D överallt förutom i den "nya" bågen med färg c som uppstår vid Reidemeisterdrag RII. För att villkor (1) skall vara uppfyllt för D' måste $2b = a + c \pmod{p}$. Sätt därför $c = 2b - a \pmod{p}$. Alla korsningar i D' uppfyller då (1), eftersom alla korsningar D gör det. Eftersom D är färgläggningsbart finns det två olika färger i D . Dessa måste även finnas i D' , då det enda som sker i Reidemeisterdrag RII är en båge med färg c läggs till. Sammantaget gör detta att D' är färgläggningsbart (mod p).

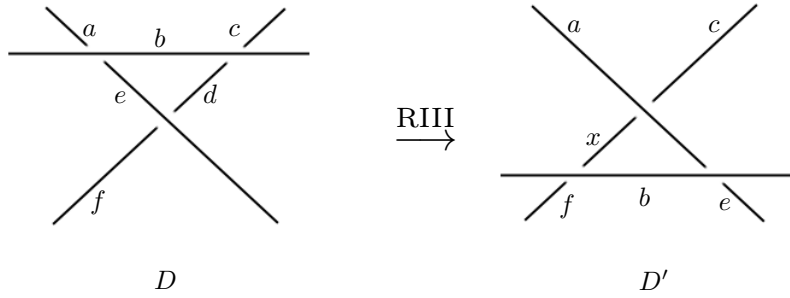


Figur 42: Figuren visar ett färgläggningsbart diagram D . När Reidemeisterdrag RII utförs på D erhålls diagrammet D' .

Reidemeisterdrag RII^{-1} : Vi avstår från att ge beviset i detta fall.

Reidemeisterdrag RIII: Diagrammet D i figur 43 är färgläggningsbart (mod p). Enligt villkor (1) gäller det därför för korsningarna i figuren att

$$\begin{cases} a + e = 2b & \pmod{p} \\ c + d = 2b & \pmod{p} \\ d + f = 2e & \pmod{p}. \end{cases} \quad (4)$$



Figur 43: Figuren visar ett färgläggningbart diagram D . När Reidemeisterdrag RIII utförs på D erhålls diagrammet D' .

När Reidemeisterdrag RIII utförs på D erhålls diagrammet D' . Ge den nya bågen i diagrammet färgen x och färglägg övriga delar av D' som D . Eftersom D är färgläggningssbar, kommer villkor (1) att vara uppfyllt för korsningarna i D' som inte syns i figur 43. För att villkor (1) skall gälla för korsningarna i figuren måste följande ekvationer vara uppfyllda:

$$\begin{cases} x + c = 2a & (\text{mod } p) \\ x + f = 2b & (\text{mod } p) \\ a + e = 2b & (\text{mod } p). \end{cases} \quad (5)$$

Den sista av ekvationerna ovan är trivialt sann enligt (4). För att den första ekvationen i (5) skall gälla kan x sättas till $x = 2a - c \pmod{p}$. Det återstår att kontrollera att mittersta ekvationen i ekvationssystem (5) är uppfylld. Vi har att

$$x + f = 2a - c + f = 2(a + e) - 2e - (c + d) + (d + f) \pmod{p}.$$

Använder vi ekvationerna i (4) fås sedan

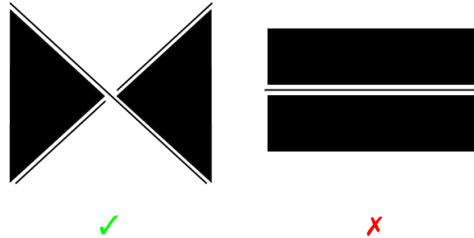
$$x + f = 2(a + e) - 2e - (c + d) + (d + f) = 2 \cdot 2b - 2e - 2b + 2e = 2b \pmod{p}.$$

Villkoret (1) är därför uppfyllt för D' . Det återstår att visa att det finns minst två olika färger i D' . Vi antar först att $a = b = c = d = e = f$. Då finns det ytterligare en färg $F \neq a$ i D , som också måste finnas i D' . Därmed finns två olika färger i D' . Om det inte gäller att $a = b = c = d = e = f$, är minst två av färgerna a, b, c, d, e, f olika. För att D' ej skulle vara färgläggningssbar måste alla färgerna i D' som syns i 43 vara lika, det vill säga att $a = b = c = e = f = x$. Färgen d måste dock skilja sig från alla dessa, ty minst två av färgerna a, b, c, d, e, f var olika. Den sista av ekvationerna i 5 ger nu att $d = 2e - f = 2a - a = a \pmod{p}$, vilket motsäger att $a \neq d$. Alltså är D' färgläggningssbar \pmod{p} .

Reidemeisterdrag RIII^{-1} : Beviset är analogt med det för Reidemeisterdrag RIII. □

E Ett länkdiagram kan målas schackrutigt

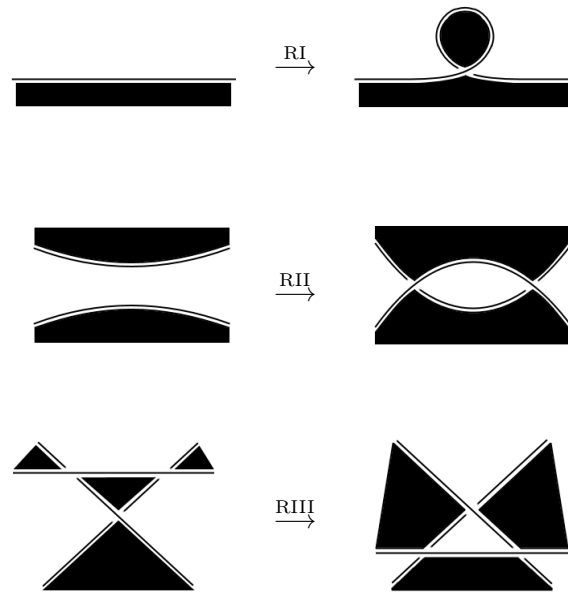
Definition. Låt D vara ett diagram där varje korsning avgränsar fyra områden i planet. Detta diagram kan *målas schackrutigt*, om det finns en färgläggning sådan att de diagonalt motstående sidorna i varje korsning har samma färg, och två områden som endast skiljs åt med en linje aldrig har samma färg.



Figur 44: Tillåten och otillåten färgläggning av delar i ett diagram.

Lemma. *Egenskapen att kunna målas schackrutigt är invariant under Reidemeisterdrag.*

Bevis. Bevis genom illustration:



Figur 45: Att kunna målas schackrutigt är invariant under samtliga Reidemeisterdrag.

□

Sats. *Ett länkdiagram kan målas schackrutigt.*

Bevis. Givet ett länkdiagram D med n komponenter, kan vi skapa ett besläktat länkdiagram L' som avgränsar samma ytor, men där “över” och “under” är utbytta i vissa korsningar. På varje komponent $K \in D$ kan korsningar bytas ut så att knuten K är ekvivalent till den triviala knuten, samtidigt som den avgränsar samma områden som den ursprungliga. Detta kan t.ex. göras genom

att välja en punkt på knuten som startpunkt, ta ett snöre och “ringla” det över det ursprungliga knutdiagrammet, längs knutens väg. Om vi nu ritar diagrammet till den nya knuten, får vi diagrammet till en trivial knut som avgränsar samma områden i planet. Genom att “stapla” dessa komponenter på varandra så som i det ursprungliga diagrammet D får vi diagrammet D' som avgränsar samma områden i planet som D .

Vi har att

D kan målas schackrutigt $\iff D'$ kan målas schackrutigt

och, $L' \simeq \bigcup_{i=1}^n U$, som kan målas schackrutigt. Eftersom schackrutighet är invariant under Reidemeisterdrag, så följer det nu att D' kan målas schackrutigt, och därmed kan också D målas schackrutigt. \square