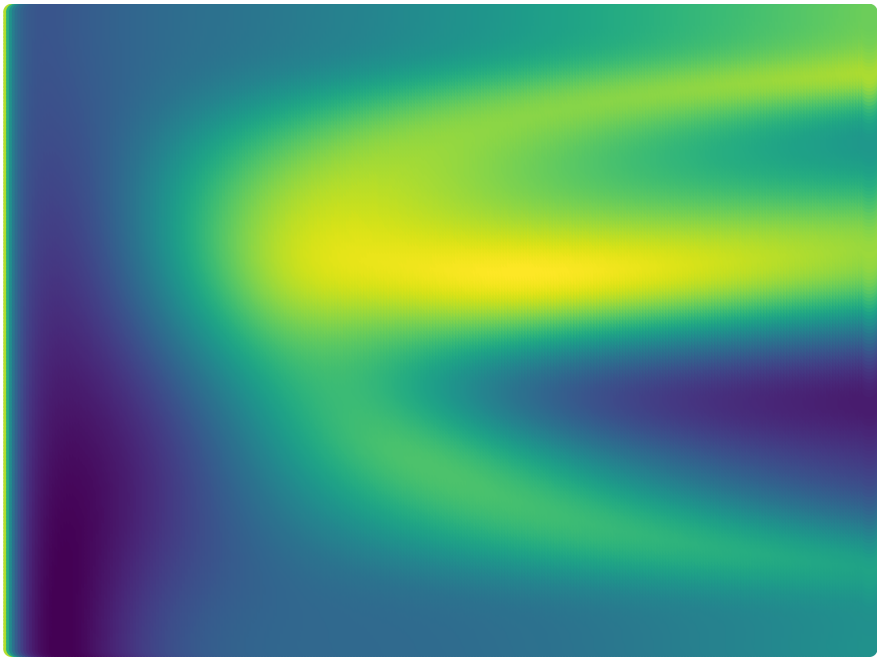
CHALMERS



Kvantmekanisk sammanflätning i nukleon-nukleonspridning

Kandidatarbete inom Fysik

TIFX11-VT23-03:
LUCAS ABRAHAMSSON, ALMA CAVALLIN,
LISE HANEBRING, HAMPUS HANSEN,
ERIK KARLSSON ÖHMAN & LEO WESTIN

INSTITUTIONEN FÖR FYSIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg, Sverige 2023
www.chalmers.se

Kandidatarbete 2023

Kvantmekanisk sammanflätning i nukleon-nukleonspridning

LUCAS ABRAHAMSSON
ALMA CAVALLIN
LISE HANEBRING
HAMPUS HANSEN
ERIK KARLSSON ÖHMAN
LEO WESTIN

CHALMERS

Institutionen för Fysik
Avdelningen för Subatomär, högenergi- och plasmafysik
TIFX11-VT23-03
Chalmers Tekniska Högskola
Göteborg, Sverige 2023

Kvantmekanisk sammanflätning i nukleon-nukleonspridning
LUCAS ABRAHAMSSON, ALMA CAVALLIN, LISE HANEBRING,
HAMPUS HANSEN, ERIK KARLSSON ÖHMAN & LEO WESTIN

© LUCAS ABRAHAMSSON, ALMA CAVALLIN, LISE HANEBRING,
HAMPUS HANSEN, ERIK KARLSSON ÖHMAN & LEO WESTIN, 2023.

Handledare: Christian Forssén och Oliver Thim
Examinator: Jan Swenson

Kandidatarbete 2023
Institutionen för Fysik
Avdelningen för Subatomär, högenergi- och plasmafysik
TIFX11-VT23-03
Chalmers Tekniska Högskola
SE-412 96 Göteborg
Telefon +46 31 772 1000

Omslag: Bilden visar sammanflätningsstyrka som funktion av rörelseenergi och spridningsvinkel för neutron-protonspridning, resultatet presenteras i avsnitt 6.2.2.

Typsatt i LaTeX
Tryckt av Chalmers Reproservice
Göteborg, Sverige 2023

Kvantmekanisk sammanflätning i nukleon-nukleonspridning
LUCAS ABRAHAMSSON, ALMA CAVALLIN, LISE HANEBRING,
HAMPUS HANSEN, ERIK KARLSSON ÖHMAN & LEO WESTIN
Institutionen för Fysik
Chalmers Tekniska Högskola

Sammandrag

I följande rapport studeras det kvantmekaniska sammanflätningsfenomenet analytiskt och numeriskt. Specifikt undersöks i vilken utsträckning spridningsoperatorerna S och M sammanflätar en neutron och en proton med avseende på spinn i en spridningsprocess. M-matrisen beräknas numeriskt och även analytiskt utgående från en härledning av S. Den analytiska härledningen använder sig av lågenergiapproximationen att endast betrakta s-vågor.

Studien skiljer sig från tidigare forskning genom att behandla sammanflätning med utgångspunkt i M-operatorn istället för S-operatorn. Tidigare har också s-vågsapproximationen varit utgångspunkten i studier där sammanflätning i nukleon-nukleonspridning undersöks. En generalisering till en mer realistisk modell görs i detta arbete, vilket möjliggör analys vid högre energier samt av det spridningsvinkelberoendet som uppstår.

De numeriska beräkningarna genomförs med en tillhandahållen kod och konvergensen för beräkningarna med avseende på partialvågor och samplingspunkter analyseras. Givet M-matrisen beräknas olika mått på sammanflätning med numeriska metoder, bland annat Monte Carlo-integration, som implementeras i Python. Två sammanflätningsmått presenteras och efter jämförelse används sammanflätningsstyrka för att studera fenomenet vid nukleon-nukleonspridning. Studien slår fast att det inte finns någon rörelseenergi och spridningsvinkel i en nukleon-nukleonspridningsprocess som ger ett fullt sammanflätat uttillstånd i spinnrummet för alla möjliga initialtillstånd. På samma sätt finns det ingen kombination av rörelseenergi och spridningsvinkel som ger ett icke sammanflätat uttillstånd för alla möjliga initialtillstånd.

Sammanflätningsstyrkan för de analytiska S- och M-operatorerna undersöks. Skillnaden mellan deras sammanflätningsstyrka är att den för M konvergerar mot ett nollskilt värde i lågenergigränsen. Detta beteende observeras även i de numeriska resultaten. Sammanflätningsstyrkan för den analytiskt härledda M-matrisen jämförs med den numeriskt beräknade och överensstämmer relativt väl för energier upp till några få MeV. Från det analytiska uttrycket på M konstateras att om nukleonerna initialt har parallella spinn så uppstår ingen sammanflätning i interaktionen vid mycket låga energier. Detta verifieras även i jämförelsen med den numeriska undersökningen för specifika initialtillstånd.

Nyckelord: sammanflätning, spridning, nukleon, stark växelverkan, Nijmegenpotential, partialvågor, tvånukleonsystem, sammanflätningsstyrka

Quantum entanglement in nucleon-nucleon scattering
LUCAS ABRAHAMSSON, ALMA CAVALLIN, LISE HANEBRING,
HAMPUS HANSEN, ERIK KARLSSON ÖHMAN & LEO WESTIN
Department of Physics
Chalmers University of Technology

Abstract

The following report studies the quantum entanglement phenomenon analytically and numerically. Specifically, the degree to which the scattering operators S and M entangle a neutron and a proton with respect to spin during a scattering process is investigated. The M matrix is computed analytically, using a low-energy approximation considering only s-waves, as well as numerically.

This study differentiates itself from prior research by investigating entanglement based on the M operator instead of the S operator. The numerical calculation of M is possible without making the s-wave approximation, thus resulting in a more realistic model where it is possible to analyze higher energies and the scattering angle dependence.

Numerical calculations are performed using provided code, and the convergence of the calculations with respect to partial waves and sampling points is analyzed. Entanglement measures are calculated numerically using various methods, including Monte Carlo integration, which is implemented in Python. Two entanglement measures are presented and compared, and the entanglement power is then used to investigate entanglement in nucleon-nucleon scattering. The study establishes that there is no combination of kinetic energy and scattering angle that yields a fully entangled final state in spin space for all possible initial states. Similarly, there is no combination of kinetic energy and scattering angle that yields a non-entangled final state for all possible initial states.

The entanglement power of the analytic S and M operators is investigated. It is found that the entanglement power for M converges to a non-zero value in the low-energy limit, which is also observed in the numerical results. The entanglement power of the analytically derived M matrix is compared with the numerically calculated one and shows good agreement for energies up to a few MeV. The analytical expression of M establishes that no entanglement occurs in the interaction at very low energies if the nucleons initially have parallel spins. This is also verified in the numerical results for specific initial states.

Keywords: entanglement, scattering, nucleon, strong force, Nijmegen potential, partial waves, two-nucleon system, entanglement power

Tillkännagivanden

Koden skriven av Oliver Thim har lagt grund till det numeriska arbetet som presenteras i denna rapport. Alla simuleringar har utförts utifrån data som har beräknats med denna kod och är anledningen till att kandidatarbetet har kunnat genomföras. Vi skulle vilja tacka båda våra handledare Christian Forssén och Oliver Thim som har givit oss goda råd och navigerat oss under arbetets gång med deras erfarenhet. Slutligen vill vi tacka avdelningen för Subatomär, högenergi- och plasmafysik för att ha fått tillgång till deras lokaler.

Lucas Abrahamsson, Alma Cavallin, Lise Hanebring, Hampus Hansen,
Erik Karlsson Öhman & Leo Westin, Göteborg, Maj 2023

Innehållsförteckning

1 Inledning **1**

I Teori **3**

2 Tvånivåsystem och sammanflätning **5**
2.1 Partiklar med spinn 1/2 . . . 5
2.2 Densitetsoperatorn . . . 6
2.3 Sammanflätning . . . 7
2.3.1 Sammanflätningsmått för tillstånd . . . 7
2.3.2 Sammanflätningsmått för operatorer . . . 8

3 Tvånukleonsystem **11**

4 Spridningsteori **13**
4.1 Partialvågor och fasskift . . . 14
4.2 Spridning för partiklar med spinn . . . 15

II Implementering och resultat **17**

5 Implementering **19**
5.1 Beräkningsprocedur . . . 19
5.2 Monte Carlo-integration över Blochsfären . . . 20
5.3 Konvergensanalys . . . 20

6 Resultat och diskussion **23**
6.1 Analytisk studie av lågenergispridning . . . 23
6.1.1 Härledning av S . . . 23
6.1.2 Sammanflätningsstyrka för S . . . 24
6.1.3 Sammanflätningsstyrka för M . . . 26
6.2 Numerisk studie . . . 28
6.2.1 Lågenergianalys och verifiering . . . 28
6.2.2 Jämförelse av sammanflätningsmått . . . 29
6.2.3 Partialvågsberoende för sammanflätningsstyrka . . . 30
6.2.4 Maximal och minimal sammanflätningsstyrka . . . 31

7 Sammanfattning **33**
7.1 Slutsatser . . . 33
7.2 Vidare studier . . . 34

Referenser **35**

A Extramaterial till härledning av S och sammanflätningsstyrka för S **A-1**
A.1 S-operatorn . . . A-1
A.2 Sammanflätningsstyrka för S . . . A-4

1

Inledning

Sammanflätning är ett av kvantmekanikens mest fundamentala koncept. I korthet innebär det att två eller fler kvantmekaniska tillstånd inte kan beskrivas oberoende av varandra. Fenomenet, vilket saknar klassisk motsvarighet, har fortsatt att fascinera forskare ända sedan Albert Einstein, Boris Podolsky och Nathan Rosen först introducerade konceptet år 1935 [1]. De konstaterade att kvantmekaniken implicerar att partiklar ögonblickligen kan påverka varandra oberoende av avståndet mellan dem. Einstein kallade vad som senare skulle bli känt som sammanflätning för ”spöklik fjärrverkan”, för att belysa orimligheten i att två partiklar till synes kunde utbyta information med varandra snabbare än ljusets hastighet. Einstein, Podolsky och Rosen argumenterade istället för att den kvantmekaniska teorin var ofullständig och att det skenbara informationsutbytet istället beror på icke observerbara egenskaper hos det fysikaliska systemet som bestämmer partiklarnas interaktion, så kallade *dolda variabler* [2].

På 1960-talet ställde John Bell upp en olikhet som gav ett mått på hur korrelerade två partiklar kunde vara, givet att de styrdes av dolda variabler [3]. Från 1970-talet och framåt utfördes flera oberoende experiment som visade på att *Bells olikhet* inte höll. Resultatet av experimenten innebar i praktiken att teorier som byggde på dolda variabler blev motbevisade och att kvantmekaniken kom att betraktas som en fullständig teori. Detta gav i sin tur legitimitet till sammanflätningsfenomenet som Einstein, Podolsky och Rosen så starkt motsatt sig [4]. För sina experiment som motbevisade Bells olikhet kom Alain Aspect [5], John F. Clauser [6] och Anton Zeilinger [7] att belönas med Nobelpriset i fysik 2022 [8].

Idag ligger sammanflätning grund för forskningsfält som kvantinformation — teorin bakom dagens och framtidens kvantdatorer som kan komma att revolutionera många beräkningskrävande områden. Medan klassiska datorer lagrar information med hjälp av bitar, bestående av ettor och nollor, använder sig en kvantdator av *kvantbitar* som befinner sig i en superposition mellan ett och noll. En kvantbit är således ett tvånivåsystem, som har två distinkta tillstånd.

Ett fundamentalt exempel på ett tvånivåsystem är en spinn-$^1/_2$-partikel, som har tillstånden spinn upp och ned. Dessa inbegrips av partikelklassen fermioner, som är ett samlingsnamn för alla partiklar med halvtaligt spinn. Fermioner omfattas av Paulis uteslutningsprincip, som innebär att samma kvanttillstånd inte kan ockuperas av fler än en fermion. Till fermioner hör nukleonerna — protonen och neutronen. Problemet som betraktas i denna rapport är kollisionen mellan en neutron och en proton, vilken kan beskrivas teoretiskt med kvantmekanisk spridningsteori. Tillstånden för neutronen och protonen kommer att betraktas som ett tvånukleontillstånd i masscentrums referenssystem. Centralt i detta projekt är hur spinndelen av detta tvånukleontillstånd förändras i spridningsprocessen, vilket beskrivs med operatorn M.

Tidigare har sammanflätning vid nukleon-nukleonspridning främst studerats med utgångspunkt i spridningsoperatorn S. Genomgående använder sig dessa studier av en mycket förenklad lågenergi-approximation i vilken endast s-vågor (orbitalt rörelsemängdsmoment $L = 0$) utan spridningsvinkelberoende betraktas [9]–[11]. Således är det högst intressant att betrakta sammanflätning utifrån spridningsoperatorn M. Vidare generaliseras resultat från tidigare studier genom att frångå s-vågsapproximationen och betrakta högre orbitala rörelsemängdsmoment $L \geq 0$ som medför ett spridningsvinkelberoende.

Syftet med denna rapport är att studera i vilken grad M-matrisen i en nukleon-nukleonspridningsprocess sammanflätar de inblandade nukleonerna med avseende på spinn. Problemet behandlas både numeriskt och analytiskt. Den analytiska beskrivningen av spridningen använder sig av s-vågsapproximationen och ger en förenklad modell som enbart är relevant för låga energier. Den numeriska metoden utgör i jämförelse en mer realistisk modell där spridningen beräknas för alla relevanta partialvågor ($L \geq 0$) och således kan tillämpas för ett större energiintervall och för att undersöka spridningsvinkelberoendet.

Analytiska uttryck för spridningsoperatorerna S och M bestäms i fallet med s-vågor och ett mått på sammanflätning, *sammanflätningsstyrka*, för operatorn S härleds analytiskt. Detta används för att verifiera resultat som presenteras i artiklarna [9] och [10], samt för att undersöka sammanflätningsstyrkans energiberoende i neutron-protonspridning. Sammanflätningsstyrkan för M studeras även för att sedan jämföras med de numeriska resultaten.

De numeriska beräkningarna bygger på ett program som simulerar nukleon-nukleonspridning. Det tillhandahållna programmet löser Lippmann-Schwingerekvationen samt beräknar matrisrepresentationen av M. Detta program är en stor tillgång, men avgränsar möjliga analyser till dem programmets ramverk tillåter. Utifrån numeriskt beräknade M-matriser utformas nya funktioner som beräknar olika sammanflätningsmått som funktioner av spridningsvinkel och rörelseenergi, medelvärdesbildade över olika initialtillstånd. Även sammanflätningen för specifika initialtillstånd analyseras. Dessa funktioner implementeras i programmeringsspråket Python.

Projektet avgränsas till att endast beakta nukleonernas spinntillstånd. Vidare betraktas endast rörelseenergier under 300 MeV. Således behandlas problemet icke-relativistiskt. Undersökningen begränsas även till Nijmegen I-potentialen för att modellera den starka växelverkan mellan neutronen och protonen [12].

Rapporten presenterar en realistisk vidareutveckling av s-vågsmodellen för spinnsammanflätning i nukleon-nukleonspridning. Detta öppnar upp för framtida forskning inom området, exempelvis att studera sammanflätningens uppkomst ur den starka kraften.

Del I

Teori

2

Tvånivåsystem och sammanflätning

Kvantfysikens mest grundläggande dynamiska system är tvånivåsystemet – ett system som vid mätning endast kan anta ett av två oberoende bastillstånd. Beskrivningen av tvånivåsystem är generell och kan appliceras på mängder av olika system, där kvantbitar och partiklar med spinn 1/2 är vanliga exempel. Den enklaste formen av kvantmekanisk sammanflätning är den mellan två kopplade tvånivåsystem. För att studera spinnsammanflätningen av två partiklar med spinn 1/2 behövs matematiska representationer av partiklarnas enskilda och gemensamma tillstånd, samt metoder för kvantifiering av graden sammanflätning hos systemet.

2.1 Partiklar med spinn 1/2

Spinnbasen för en partikel med spinn 1/2 kan väljas som egentillstånden till spinnprojektionen i z-riktningen enligt egenvärdesekvationen $s_z |m_s\rangle = m_s |m_s\rangle$, där

$$s_z = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Detta resulterar i egenvärdena $m_s = \pm 1/2$ och tillhörande bastillstånd [13]

$$|\uparrow\rangle \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ och } |\downarrow\rangle \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

”spinn upp” respektive ”spinn ner”, som här även har representerats som vektorer. Ett generellt spinntillstånd är därmed en superposition $|\chi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$, där villkoret $|a|^2 + |b|^2 = 1$ införs för att normera tillståndet. En alternativ parametrisering av ett generellt tillstånd kan göras med hjälp av punkter på Blochsfären, som bestäms av vinklarna $\theta \in [0, \pi]$ och $\varphi \in [0, 2\pi]$, se figur 2.1. Det normerade tillståndet skrivs i termer av dessa vinklar som [14]

$$|\chi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle. \tag{2.3}$$

System av två partiklar A och B med spinn 1/2 har ett gemensamt spinnrum $\mathscr{H}_{\text{spinn}} = \mathscr{H}_{\text{spinn},A} \otimes \mathscr{H}_{\text{spinn},B}$ [15]. En gemensam spinnbas, som kallas för den okopplade basen, är då [1]

$$\{|m_A m_B\rangle\} = \{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}. \tag{2.4}$$

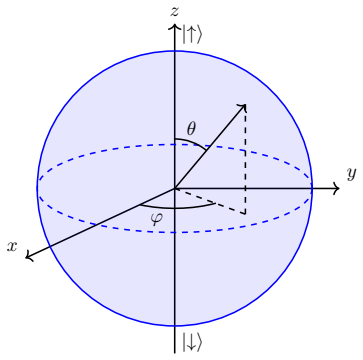
Ett annat val av bas är den kopplade spinnbasen $|S, M_S\rangle$, där S är det totala spinnet och M_S är projektionen av denna[2]. Bastillstånden blir i detta fall [15]

$$\begin{aligned} &|S=0, M_S=0\rangle, && \text{singlett} \\ &|S=1, M_S=0,\pm 1\rangle, && \text{triplett.} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Den okopplade samt den kopplade basen, se ekvation (2.4) respektive (2.5), relateras genom Clebsch-

[1] Notationen $|m_A m_B\rangle \equiv |m_A\rangle \otimes |m_B\rangle$, t.ex. $|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$

[2] $S \in \{|s_A - s_B|, \ldots, |s_A + s_B|\}$ i heltaliga steg och $M_S \in \{-S, \ldots, S\}$ i heltaliga steg.



Figur 2.1: Blochsfärsrepresentation av tillstånd för en partikel med spinn 1/2, där $\theta = 0$ motsvarar $|\uparrow\rangle$ och $\theta = \pi$ motsvarar $|\downarrow\rangle$. Vinkeln φ utgör fasskillnaden mellan $|\uparrow\rangle$ och $|\downarrow\rangle$ i det generella spinntillståndet i ekvation (2.3).

Gordankoefficienter vilket ger förhållandet mellan de olika baserna [13]:

$$\begin{aligned} |00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle), \\ |1\,{-1}\rangle &= |\downarrow\downarrow\rangle\,, \\ |10\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), \\ |11\rangle &= |\uparrow\uparrow\rangle\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

För ett sammansatt system av två partiklar med väldefinierade och oberoende spinntillstånd kan det totala spinntillståndet skrivas som tensorprodukten $|\chi\rangle = |\chi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B$. Däremot kan inte alla tillstånd i det sammansatta spinnrummet $\mathscr{H}_{spinn}$ skrivas som en sådan tensorprodukt, och tillstånden för vilka detta inte är möjligt kallas *sammanflätade* [14]. Trots att sammanflätade totala tillstånd $|\chi\rangle$ är väldefinierade så är motsvarande enpartikeltillstånd beroende av varandra, och således inte väldefinierade. I det fallet fås en sannolikhetsfördelning av tillstånd som respektive partikel kan ha, ett så kallat *blandat tillstånd* [14]. Till skillnad från väldefinierade, *rena*, tillstånd som naturligt beskrivs med tillståndsvektorer så behandlas blandade tillstånd enklast med hjälp av densitetsoperatorer.

2.2 Densitetsoperatorn

En *densitetsoperator* är ett matematiskt ekvivalent sätt att beskriva samma fysik som med tillståndsvektorer. Densitetsoperatorn för blandade tillstånd definieras

$$\rho \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i \,|\psi_i\rangle \,\langle\psi_i|\,, \tag{2.7}$$

där $\{|\psi_i\rangle\}_i$ är systemets möjliga tillstånd och p_i är sannolikheten att systemet befinner sig i tillstånd $|\psi_i\rangle$ [14]. För ett rent tillstånd är densitetsoperatorn den yttre produkten av tillståndsvektorn, $\rho = |\psi\rangle\,\langle\psi|$. Spåret av ρ är summan av densitetsoperatorns egenvärden. Dessa summerar till ett,

$$\mathrm{tr}(\rho) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \tag{2.8}$$

under antagandet att tillstånden är normerade. Ett tillstånd kan karakteriseras genom att undersöka spåret av den kvadrerade densitetsoperatorn, då det för rena tillstånd gäller att $\rho^2 = \rho$ och därmed $\mathrm{tr}(\rho^2) = 1$ medan $\mathrm{tr}(\rho^2) < 1$ för blandade tillstånd [16]. Om en operator K verkar på en densitetsoperator ρ blir det normerade uttillståndet

$$\rho' = \frac{K\rho K^\dagger}{\mathrm{tr}(K\rho K^\dagger)}, \tag{2.9}$$

där $\mathrm{tr}(K\rho K^\dagger) = 1$ om K är unitär [14].

För ett sammansatt system med densitetsoperator ρ_{AB} och delsystem A och B, är det möjligt att reducera denna till hilbertrummen för A respektive B. På så sätt går det att beskriva tillstånden för de två delsystemen. Den *reducerade densitetsoperatorn* för system A definieras $\rho_A \equiv \mathrm{tr}_B(\rho_{AB})$ där tr_B är det partiella spåret över delsystem B. Operatorn kan beräknas enligt

$$\rho_A \equiv \mathrm{tr}_B(\rho_{AB}) = \sum_i (\mathbb{1}_A \otimes \langle i|_B)\rho_{AB}(\mathbb{1}_A \otimes |i\rangle_B), \tag{2.10}$$

där $\mathbb{1}_A$ är identitetsmatrisen för delsystem A och $|i\rangle_B$ är en ortonormal bas för delsystem B [16]. Den reducerade densitetsoperatorn ger en komplett beskrivning av delsystemet, det vill säga en beskrivning där alla utsagor och egenskaper av alla mätningar finns beaktade [17].

2.3 Sammanflätning

Sammanflätning för två initialt oberoende partiklar med spinn 1/2 fås då deras gemensamma tillstånd i $\mathscr{H}_{\text{spinn}}$ förändras på ett sådant sätt att det inte längre kan skrivas som en tensorprodukt av rena enpartikeltillstånd. Detta kan ske då en operator verkar på det gemensamma spinntillståndet. Blir det slutliga gemensamma tillståndet ej sammanflätat är det garanterat att ett delsystem hittas i ett specifikt rent tillstånd. Om sammanflätning däremot uppstår blir respektive partikels tillstånd blandat. Maximal osäkerhet i vilket tillstånd som en partikel har fås då varje möjlighet $i = 1, 2, ..., n$ i det blandade tillståndets sannolikhetsfördelning har sannolikhet $p_i = 1/n$. För tvånivåsystem är detta fallet för Belltillstånden,

$$|\phi^{\pm}\rangle = \frac{|\uparrow\uparrow\rangle \pm |\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \text{ och } |\psi^{\pm}\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle \pm |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}, \tag{2.11}$$

som är kända exempel på fullt sammanflätade gemensamma tillstånd [14]. Dessa har sannolikhet 1/2 för respektive partikel att befinna sig i antingen $|\uparrow\rangle$ eller $|\downarrow\rangle$ [14].

För att studera graden av sammanflätning för ett system med det gemensamma spinntillståndet $|\chi\rangle$, och motsvarande densitetsoperatorn $\rho_{AB} = |\chi\rangle\langle\chi|$, för två partiklar med spinn 1/2 behövs metoder för att kvantifiera sammanflätningen. Detta görs med sammanflätningsmått, som avgör hur väldefinierade delsystemens tillstånd är. Det är nödvändigt för sammanflätningsmått att vara invarianta under unitära transformationer som endast verkar på ett av delsystemen, samt att minimum fås för direkta tensorprodukter av enpartikeltillstånd medan maximum fås för Belltillstånden [9].

2.3.1 Sammanflätningsmått för tillstånd

Det mest grundläggande måttet som uppfyller villkoren på sammanflätningsmått kallas *samstämmighet*[3] och betecknas Δ. Samstämmighet definieras som $\Delta(|\chi\rangle) \equiv |\langle\chi|\sigma_y \otimes \sigma_y|\chi^*\rangle|$ [9], där

$$\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

är den tvådimensionella Paulimatrisen med avseende på y. Skrivs tillståndet i den okopplade basen enligt $|\chi\rangle = \alpha|\uparrow\uparrow\rangle + \beta|\uparrow\downarrow\rangle + \gamma|\downarrow\uparrow\rangle + \delta|\downarrow\downarrow\rangle$ fås att samstämmigheten kan beräknas som

$$\Delta(|\chi\rangle) = |\langle\chi|\sigma_y \otimes \sigma_y|\chi^*\rangle| = 2|\alpha\delta - \beta\gamma|, \tag{2.13}$$

se appendix A.2. Detta ger det maximala värdet 1 för Belltillstånden i ekvation (2.11) och det minimala värdet 0 för rena tensorprodukter av enpartikeltillstånd.

Ett annat möjligt mått är *tvåentropin* $\mathcal{E}_2$, som definieras enligt

$$\mathcal{E}_2(|\chi\rangle) \equiv 1 - \mathrm{tr}(\rho_A^2) = \frac{1}{2}\Delta^2(|\chi\rangle), \tag{2.14}$$

där ρ_A är den reducerade densitetsoperatorn för ett av delsystemen [9]. En omskrivning har här även gjorts till tvåentropin som funktion av samstämmigheten Δ. Tvåentropins maximala värde blir 0,5 för Belltillstånden.

[3]Från engelskans ”concurrence”.

Sammanflätningsentropin[4], för systemet bestående av två enpartikelsystem, definieras som *Von Neumann-entropin* för den reducerade densitetsoperatorn ρ_A för ett av delsystemen [9]

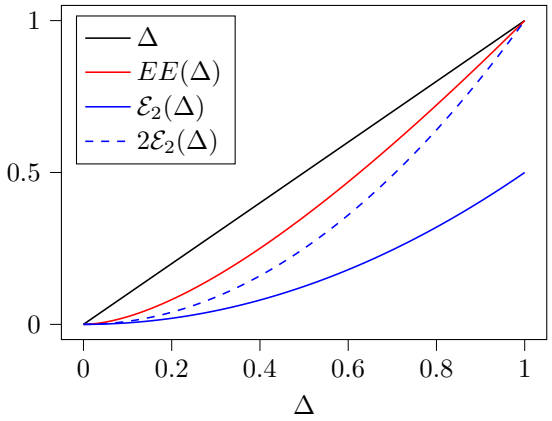
$$EE(|\chi\rangle) \equiv -\mathrm{tr}(\rho_A \log_2(\rho_A)). \tag{2.15}$$

Eftersom ρ_{AB} beskriver ett rent spinntillstånd gäller speciellt att $EE(\rho_A) = EE(\rho_B)$ [18]. Ekvivalent kan ekvation (2.15) skrivas som

$$EE(|\chi\rangle) = -\sum_{i=\pm} \lambda_i \log_2(\lambda_i), \tag{2.16}$$

där λ_i är egenvärdena till den reducerade densitetsoperatorn [14]. Dessa kan skrivas i termer av samstämmighet som $\lambda_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - \Delta^2(|\chi\rangle)})$ [9], vilket tillsammans med ekvation (2.16) ger ett uttryck för sammanflätningsentropi som funktion av Δ. Det maximala värdet på sammanflätningsentropin är 1.

Figur 2.2 visar en jämförelse av de olika sammanflätningsmått som har introducerats, där dessa illustreras som funktioner av värdet på samstämmigheten $\Delta(|\chi\rangle)$. Dessutom illustreras skillnaderna mellan måtten då tvåentropin skalas om så att dess maximala värde blir 1.



Figur 2.2: En jämförelse av sammanflätningsmått för tillstånd. Måtten samstämmighet Δ, sammanflätningsentropi EE och tvåentropi $\mathcal{E}_2$ illustreras som funktioner av värdet på samstämmigheten. Den streckade linjen betecknar en omskalad tvåentropi sådan att maximum sammanfaller med övriga mått.

2.3.2 Sammanflätningsmått för operatorer

Det är av speciellt intresse att studera förändringen av graden av sammanflätning för spinnsystemet, bestående av två partiklar med spinn 1/2, då detta påverkas av en operator K i det gemensamma spinnrummet enligt

$$|\chi_{\mathrm{ut}}\rangle = \frac{K\,|\chi_{\mathrm{in}}\rangle}{\sqrt{\langle\chi_{\mathrm{in}}|K^\dagger K|\chi_{\mathrm{in}}\rangle}}, \tag{2.17}$$

där uttillståndet har normaliserats. Motsvarande densitetsoperator för uttillståndet är $\rho_{AB} = |\chi_{\mathrm{ut}}\rangle\langle\chi_{\mathrm{ut}}|$. Partiklarnas spinn antas initialt vara oberoende av varandra, så att det gemensamma initialtillståndet kan skrivas som $|\chi_{\mathrm{in}}\rangle = |\chi_{\mathrm{in}}\rangle_A \otimes |\chi_{\mathrm{in}}\rangle_B$. Graden av sammanflätning hos $|\chi_{\mathrm{ut}}\rangle$ är beroende av $|\chi_{\mathrm{in}}\rangle$, vilket innebär att det krävs en medelvärdesbildning över initialtillstånd, det vill säga alla direkta tensorprodukter, för att definiera ett sammanflätningsmått för en operator. Då Blochsfärsrepresentation enligt ekvation (2.3) av de initiala enpartikeltillstånden används, kan medelvärdesbildningen göras genom att integrera ett tillståndssammanflätningsmått över alla vinklar θ_A, φ_A, θ_B och φ_B.

Då denna typ av medelvärdesbildning över initialtillstånd görs för tvåentropin kallas måttet för *sammanflätningsstyrka*, och definieras enligt [9]

$$\mathcal{E}(K) \equiv \overline{\mathcal{E}_2(|\chi_{\mathrm{ut}}\rangle)} = 1 - \int \mathrm{tr}[(\rho_A)^2]\frac{d\Omega_A}{4\pi}\frac{d\Omega_B}{4\pi} = \int \frac{1}{2}\Delta^2(|\chi_{\mathrm{ut}}\rangle)\frac{d\Omega_A}{4\pi}\frac{d\Omega_B}{4\pi}, \tag{2.18}$$

där Ω_A och Ω_B representerar vinklarna i Blochsfärsrepresentationen av initialtillståndet. Sammanflätningsstyrkan är alltså ett mått på hur mycket operatorn K i genomsnitt sammanflätar initialtillstånd

[4]Betecknas EE från engelskans ”entanglement entropy”.

bestående av rena tensorprodukter. Det motsvarande måttet för sammanflätningsentropi, istället för tvåentropi, definieras

$$\langle EE\rangle(K) \equiv \overline{EE(|\chi_{\text{ut}}\rangle)} = -\int \text{tr}(\rho_A \log_2(\rho_A))\frac{d\Omega_A}{4\pi}\frac{d\Omega_B}{4\pi}, \tag{2.19}$$

där ρ_A är en reducerad densitetsoperator för uttillståndet.

3

Tvånukleonsystem

Sammanflätningen som kan uppstå då en neutron och en proton kolliderar är beroende av deras gemensamma tillstånd. I detta projekt undersöks endast sammanflätning med avseende på spinn, men för att beskriva spridningsprocessen behöver även nukleonernas övriga frihetsgrader beaktas.

Växelverkan mellan en neutron och en proton domineras av den starka kraften för vilken de två partiklarna i stort sett kan betraktas som identiska. Massorna är approximativt lika stora och de elektromagnetiska egenskaperna som annars särskiljer dem från varandra är inte relevanta i en sådan interaktion. Neutronen och protonen kan därför ses som två olika tillstånd av en nukleon. För att särskilja mellan de två tillstånden kan konceptet isospinn användas. En nukleon har isospinn $t = 1/2$ och isospinnprojektion $t_z = \pm 1/2$, vilket karakteriserar om nukleonen är en neutron eller proton. För interaktioner som domineras av den starka kraften bevaras det totala isospinnet T [19].

Ett tvånukleonsystem kan alltså betraktas som en tensorprodukt av tvånivåsystem i isospinnrummet $\mathscr{H}_{\text{isospinn}}$. Den kopplade basen för detta rum fås på samma sätt som för spinn, se ekvation (2.5). För systemet av en proton och en neutron kommer dock $\mathscr{H}_{\text{isospinn}}$ vara tvådimensionellt, till skillnad från det fyrdimensionella $\mathscr{H}_{\text{spinn}}$, eftersom nukleonerna har fixa värden på t_z. Den totala isospinnprojektionen T_z kommer av den anledningen alltid vara noll, vilket resulterar i de två kvarvarande bastillstånden $|00\rangle$ och $|10\rangle$ för neutron-protonsystemet.

Förutom frihetsgraderna i $\mathscr{H}_{\text{isospinn}}$ har ett tvånukleonsystem rumsliga och spinnfrihetsgrader. Det gemensamma hilbertrummet $\mathscr{H}_{AB}$ för två nukleoner kan alltså skrivas som

$$\mathscr{H}_{AB} = \mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B = \mathscr{H}_{\text{rum}} \otimes \mathscr{H}_{\text{spinn}} \otimes \mathscr{H}_{\text{isospinn}}, \tag{3.1}$$

där $\mathscr{H}_A$ och $\mathscr{H}_B$ är hilbertrummen för de enskilda partiklarna. Motsvarande tvånukleontillstånd blir

$$|\psi\rangle = |\psi\rangle_{\text{rum}} \otimes |\chi\rangle_{\text{spinn}} \otimes |\chi\rangle_{\text{isospinn}}\,. \tag{3.2}$$

Det går även att faktorisera $\mathscr{H}_{\text{rum}}$ genom att dela upp den i det gemensamma masscentrums rörelse och den relativa rörelsen av nukleonerna. $\mathscr{H}_{AB}$ blir i detta fall

$$\mathscr{H}_{AB} = \mathscr{H}_{\text{CM}} \otimes \mathscr{H}_{\text{rel}} \otimes \mathscr{H}_{\text{spinn}} \otimes \mathscr{H}_{\text{isospinn}}. \tag{3.3}$$

Då används koordinater för masscentrums rörelse samt den relativa rörelsen, som definieras enligt [15]

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{x}} &= \frac{m_A \boldsymbol{x}_A + m_B \boldsymbol{x}_B}{m_A + m_B}, & \boldsymbol{x}_{\text{rel}} &= \boldsymbol{x}_A - \boldsymbol{x}_B, \\ \bar{\boldsymbol{p}} &= \boldsymbol{p}_A + \boldsymbol{p}_B, & \boldsymbol{p}_{\text{rel}} &= \frac{m_B \boldsymbol{p}_A - m_A \boldsymbol{p}_B}{m_A + m_B}, \\ M &= m_A + m_B, & \mu &= \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

där $\boldsymbol{x}_A$, $\boldsymbol{x}_B$, m_A, m_B, $\boldsymbol{p}_A$, $\boldsymbol{p}_B$ är koordinater, massor och rörelsemängder för de enskilda partiklarna A respektive B [15]. Med relativistiska korrektioner är storleken på den relativa rörelsemängden p_{rel}

$$p_{\text{rel}}^2 = \frac{T_{\text{lab}} m_A^2 (T_{\text{lab}} + 2m_B)}{(m_A + m_B)^2 + 2m_A T_{\text{lab}}}, \tag{3.5}$$

vilket reduceras till det icke-relativistiska fallet för låga energier [20]. T_{lab} är den kinetiska energin i laboratoriets referenssystem, det vill säga det referenssystem där en av nukleonerna är i vila. Fördelen med

omskrivningen till relativa koordinater är att rörelsen då kan betraktas i masscentrums referenssystem, där per definition $\bar{\boldsymbol{p}} = 0$. Bland annat behöver endast den relativa verkan av en operator på ett tillstånd betraktas om denna kan faktoriseras som $K = \mathbb{1}_{\mathrm{CM}} \otimes K_{\mathrm{rel}}$ [15].

Neutron-protoninteraktionen bevarar kvanttalen isospinn T, spinn S och totalt rörelsemängdsmoment J men ej nödvändigtvis det orbitala rörelsemängdsmomentet L [15]. För givna värden på J och S ges möjliga värden på L av

$$|J - S| \leq L \leq |J + S|, \quad S = 0, 1 \tag{3.6}$$

i heltaliga steg. Vidare är nukleoner fermioner, vars totala vågfunktioner enligt Pauliprincipen är antisymmetriska under utbyte av partiklar [13]. Om permutationsoperatorn P definieras som den operator vilken byter plats på partikel A och B fås följande egenvärdesproblem

$$P\,|\psi\rangle = p\,|\psi\rangle\,, \tag{3.7}$$

vilket alltså för ett tvånukleontillstånd måste ha egenvärdet $p = -1$. För tvånukleontillståndet enligt ekvation (3.2) fås $p = (-1)^{S+L+T}$ vilket leder till att $S+L+T = 2m+1$, där m är ett heltal. Detta villkor i kombination med ekvation (3.6) resulterar i att kvanttalen för tvånukleontillståndet innan interaktionen S, L, T, J samt efter interaktionen S', L', T', J' måste uppfylla

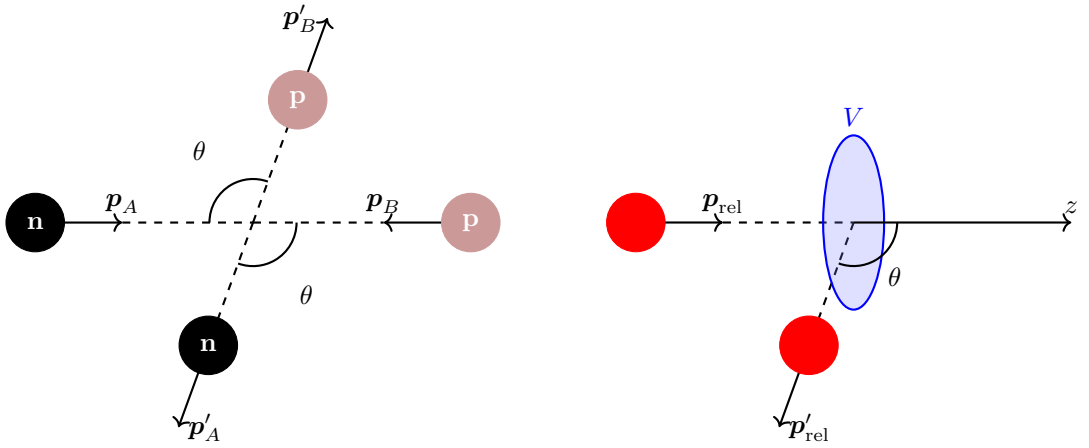
$$\begin{aligned} S &= S' \\ T &= T' \\ L &= L' + 2m, \quad m = 0, \pm 1 \\ J &= J'. \end{aligned} \tag{3.8}$$

En uppsättning kvanttal S, L, J kan representeras av en spektroskopisk term ${}^{2S+1}L_J$, en så kallad *kanal*. Koppling mellan olika kanaler kan ske då villkoren i ekvation (3.8) är uppfyllda. Exempelvis kopplar kanalerna ${}^3S_1$ och ${}^3D_1$.

4

Spridningsteori

För att beskriva kollisionen mellan en neutron och en proton används det gemensamma tvånukleontillståndet $|\psi\rangle$ enligt ekvation (3.2). Den rumsliga delen av tillståndet, $|\psi\rangle_{\text{rum}}$, betraktas i masscentrums referenssystem med koordinater enligt ekvation (3.4). Kollisionen antas vara elastisk. Detta visar sig få som följd att tvåpartikelproblemet blir analogt med situationen där en partikel med den reducerade massan μ och inkommande rörelsemängd $\boldsymbol{p}_{\text{rel}}$ sprids mot en interaktionspotential V och får utgående rörelsemängd $\boldsymbol{p}'_{\text{rel}}$ [21], se figur 4.1. För att beskriva hur det totala tillståndet $|\psi\rangle$ förändras från kollisionen används spridningsteori. De operatorer och funktioner som används i formuleringen av spridningen kommer generellt att bero på θ, spridningsvinkeln i masscentrums referenssystem, och T_{lab}, den kinetiska energin för den inkommande partikeln i laboratoriets referenssystem. Problemet är rotationssymmetriskt kring z-axeln vilket medför att den azimutala vinkeln φ kan sättas till 0. T_{lab} och θ är ekvivalent information som att veta den inkommande respektive utgående relativa rörelsemängden $\boldsymbol{p}_{\text{rel}}$, $\boldsymbol{p'}_{\text{rel}}$ för $|\psi\rangle$. Spridningsteorin formuleras först för partiklar utan spinn, för att sedan utvidgas till de ytterligare frihetsgrader som partiklar med spinn tillför.



(a) (b)

Figur 4.1: (a) Schematisk bild av elastisk neutron-protonspridning i masscentrums referenssystem. $\boldsymbol{p}_A$, $\boldsymbol{p}_B$ är inkommande rörelsemängd och $\boldsymbol{p}'_A$, $\boldsymbol{p}'_B$ är utgående rörelsemängd. θ är spridningsvinkeln. (b) Schematisk bild av det analoga enpartikelproblemet där en partikel med inkommande rörelsemängd $\boldsymbol{p}_{\text{rel}}$ och utgående rörelsemängd $\boldsymbol{p}'_{\text{rel}}$ sprids mot en potential V med samma spridningsvinkel θ.

Då två nukleoner interagerar är ett grundläggande antagande för att beskriva spridningen att partiklarna blir rumsligt separerade och slutar interagera långt innan och långt efter kollisionen. Detta innebär att interaktionspotentialen är av kort räckvidd [15]. Tvånukleontillståndet kan således betraktas som ett fripartikeltillstånd då $t \to \pm\infty$, där $t = 0$ är tiden då kollisionen äger rum. Hamiltonianen för systemet i masscentrums referenssystem, där det används att $\bar{\boldsymbol{p}} = 0$, blir [15]

$$H = \frac{\bar{\boldsymbol{p}}^2}{2M} + \frac{\boldsymbol{p}_{\text{rel}}^2}{2\mu} + V = \frac{\boldsymbol{p}_{\text{rel}}^2}{2\mu} + V = H_0 + V \tag{4.1}$$

uttryckt i de relativa koordinaterna, se ekvation (3.4). H_0 är Hamiltonianen för ett fripartikeltillstånd

och V är interaktionspotentialen[1]. Hamiltonianen, och således tidsutvecklingen av systemet, beror endast på den relativa rörelsen. Uttrycket för H är således analogt med det för en ensam partikel som påverkas av en fix potential, vilket förenklar den matematiska beskrivningen av situationen [15].

På stora avstånd från interaktionspotentialen har den spridda vågfunktionen, $\psi_{\text{rum}}(r,\theta) = \langle \boldsymbol{x}_{\text{rel}}|\psi\rangle_{\text{rum}}$, den asymptotiska formen

$$\psi_{\text{rum}}(r,\theta) = A\left(e^{ikz} + f(T_{\text{lab}},\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\right), \tag{4.2}$$

där A är en normeringskonstant. Detta är en summa av den inkommande plana vågen e^{ikz} och en spridd sfärisk våg e^{ikr}/r med amplitud $f(T_{\text{lab}},\theta)$. Denna amplitud kallas för *spridningsamplituden* och beskriver sannolikheten att en partikel sprids i en viss vinkel θ från z-axeln [13] vid en viss energi T_{lab}. $f(T_{\text{lab}},\theta)$ är relaterad till observabeln differentiellt tvärsnitt $d\sigma$, vilken definieras enligt [15]

$$d\sigma = \frac{\text{Antal partiklar som sprids in i rymdvinkel } d\Omega \text{ per enhetstid}}{\text{Inkommande flödet av partiklar}}, \quad [d\sigma] = L^2. \tag{4.3}$$

Relationen mellan spridningsamplituden och det differentiella tvärsnittet är [15]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(T_{\text{lab}},\theta) = |f(T_{\text{lab}},\theta)|^2. \tag{4.4}$$

I en spridningsprocess är operatorn S den grundläggande operator som relaterar ett initialtillstånd $|\psi_{\text{in}}\rangle = \lim_{t\to-\infty}|\psi(t)\rangle$ med ett uttillstånd $|\psi_{\text{ut}}\rangle = \lim_{t\to\infty}|\psi(t)\rangle$ via

$$|\psi_{\text{ut}}\rangle = S\,|\psi_{\text{in}}\rangle\,. \tag{4.5}$$

S bevarar energi då spridningen är elastisk och definieras genom att studera den asymptotiska evolutionen av tillståndet $|\psi(t)\rangle$ [15]. Spridningsoperatorn S kan skrivas som [15]

$$S = \mathbb{1}_{\text{CM}} \otimes S_{\text{rel}}, \tag{4.6}$$

vilket innebär att delen av tillståndet som beskriver rörelsen av masscentrum inte påverkas av spridningen, eftersom

$$S\,|\psi\rangle = (\mathbb{1}_{\text{CM}} \otimes S_{\text{rel}})(|\psi\rangle_{\text{CM}} \otimes |\psi\rangle_{\text{rel}}) = \mathbb{1}_{\text{CM}}\,|\psi\rangle_{\text{CM}} \otimes S_{\text{rel}}\,|\psi\rangle_{\text{rel}}\,, \tag{4.7}$$

där $|\psi\rangle_{\text{rel}}$ inkluderar både den relativa rörelsen och spinn [15]. Det är alltså endast S_{rel} som kommer vara av intresse att studera. Hädanefter används beteckningen $S = S_{\text{rel}}$, $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_{\text{rel}}$ och $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{\text{rel}}$ för att förenkla notationen. Konventionen $\hbar = 1$ används även, vilket innebär att $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}$.

4.1 Partialvågor och fasskift

Den rumsliga delen av ett tvånukleontillstånd kan betraktas som ett fripartikeltillstånd, ekvivalent med ett planvågstillstånd, långt innan och långt efter spridningen. För en fri partikel kommuterar Hamiltonianen H_0 som bekant med rörelsemängd, så planvågstillstånd $|\boldsymbol{k}\rangle$ i rörelsemängdsbasen är egentillstånd till H_0. För partiklar utan spinn kommuterar även fripartikelhamiltonianen med totalt orbitalt rörelsemängdsmoment L^2 och dess projektion i z-led L_z. Därmed är en alternativ bas för ett fripartikeltillstånd $|E,L,M_L\rangle$, som brukar kallas för den sfäriska vågbasen eller *partialvågsbasen* [22].

Relationen mellan rörelsemängdsbasen och partialvågsbasen beskrivs av uttrycket

$$\langle \boldsymbol{k}|E,L,M_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu k}}\delta\left(\frac{k^2}{2\mu} - E\right)Y_L^{M_L}(\hat{\boldsymbol{k}}) \tag{4.8}$$

där $k = |\boldsymbol{k}|$, $Y_L^{M_L}(\hat{\boldsymbol{k}})$ är klotytefunktionerna som beror av vågens propagationsriktning $\hat{\boldsymbol{k}}$, och $\delta(...)$ är Diracs deltafunktion. En plan våg $|\boldsymbol{k}\rangle$ kan därmed skrivas som en summa av partialvågor [22]. Från detta kan spridningsamplituden $f(T_{\text{lab}},\theta)$ skrivas i termer av *fasskift* δ_L, vilket blir

$$f(T_{\text{lab}},\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{L=0}^{\infty}(2L+1)[e^{i2\delta_L} - 1]P_L(\cos\theta), \tag{4.9}$$

[1]Ett exempel på en sådan interaktionspotential är Nijmegenpotentialen [12], vilken modellerar interaktionen mellan partiklarna i nukleon-nukleonspridning.

där $P_L(\cos\theta)$ är Legendrepolynom [21]. Koefficienterna $\frac{1}{2ik}(e^{i2\delta_L}-1)$ kallas för de partiella spridningsamplituderna f_L [21]. En användbar omskrivning av f_L, för att studera spridning vid låga energier är

$$\begin{aligned} f_L &= \frac{1}{2ik}(e^{i2\delta_L}-1) = \frac{1}{k}e^{i\delta_L}\frac{e^{i\delta_L}-e^{-i\delta_L}}{2i} = \frac{1}{k}e^{i\delta_L}\sin(\delta_L) = \\ &= \frac{1}{k}\sin(\delta_L)(\cos(\delta_L)+i\sin(\delta_L)) = \frac{1}{k}\frac{\sin(\delta_L)(\cos(\delta_L)+i\sin(\delta_L))}{(\cos(\delta_L)-i\sin(\delta_L))(\cos(\delta_L)+i\sin(\delta_L))} = \\ &= \frac{1}{k}\frac{\sin(\delta_L)}{\cos(\delta_L)-i\sin(\delta_L)} = \frac{1}{k(\cot(\delta_L)-i)}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Expansionen av $k^{2L+1}\cot(\delta_L)$ vid låga energier, *effektiv räckviddexpansionen*, är

$$k^{2L+1}\cot(\delta_L) = -\frac{1}{a} + r_0k^2/2 + \mathcal{O}(k^4), \tag{4.11}$$

där a kallas för spridningslängden, som kan anta både positiva och negativa värden, och r_0 är den effektiva räckvidden[2] [21]. Vid låga energier, små k, fås att $f_L \sim k^{2L}$, vilket implicerar att endast partialvågen $L=0$ bidrar betydligt [21]. Partialvågor med $L=0$ kallas för *s-vågor*. Dessa kan användas som en lågenergiapproximation för spridningen, vilket kommer göras i detta projekt för att behandla spridningsproblemet analytiskt. Spridningsamplituden för s-vågor kan alltså skrivas som

$$f(T_{\text{lab}},\theta) = f_{L=0} = \frac{1}{-\frac{1}{a}+\frac{r_0k^2}{2}+\mathcal{O}(k^4)-ik} \tag{4.12}$$

vid låga energier.

4.2 Spridning för partiklar med spinn

För partiklar med spinn kan initialtillståndet $|\psi_{\text{in}}\rangle$ skrivas som en tensorprodukt av ett fripartikeltillstånd och ett spinntillstånd $|\psi_{\text{in}}\rangle = |\boldsymbol{k}\rangle \otimes |\chi\rangle \equiv |\boldsymbol{k},\chi\rangle$ och på samma sätt för uttillståndet $|\psi_{\text{ut}}\rangle = |\boldsymbol{k'}\rangle \otimes |\chi'\rangle \equiv |\boldsymbol{k'},\chi'\rangle$. Låt $\{|\xi\rangle\}$ beteckna en godtycklig spinnbas, exempelvis den okopplade enligt ekvation (2.4) eller den kopplade enligt ekvation (2.5). I avsnittet nedan kommer det till en början att antas att spinntillstånden är i något av bastillstånden.

S-operatorn bevarar energi vid elastisk spridning. För godtyckliga spinnbastillstånd och för inkommande respektive utgående rörelsemängd kan då S delas upp enligt [15]

$$\langle \boldsymbol{k'},\xi'|S|\boldsymbol{k},\xi\rangle = \delta_3(\boldsymbol{k'}-\boldsymbol{k})\delta_{\xi'\xi} - 2\pi i\delta(E_{k'}-E_k)\langle \boldsymbol{k'},\xi'|T|\boldsymbol{k},\xi\rangle, \tag{4.13}$$

där den första termen beskriver de triviala delarna av spridningen, det vill säga de fall där initialtillståndet inte ändras. Den andra termen bevarar den totala energin och beskriver de icketriviala delarna av spridningsprocessen. T-operatorn har även introducerats, vilken uppfyller Lippmann-Schwingerekvationen [21]

$$T = V + V\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}T, \tag{4.14}$$

där $i\epsilon$ är en komplex energi som adderas till E för att undvika singulariteter[3] [22]. Lippmann-Schwingerekvationen är det grundläggande samband som beskriver kvantmekanisk spridning. Det går alltså att hitta T för en given energi E och potential V genom att lösa ekvation (4.14). T-operatorn relaterar även till spridningsamplituden enligt [15]

$$f_{|\xi\rangle\to|\xi'\rangle}(T_{\text{lab}},\theta) = -(2\pi)^2\mu\langle \boldsymbol{k'},\xi'|T|\boldsymbol{k},\xi\rangle. \tag{4.15}$$

Detta uttryck för $f(T_{\text{lab}},\theta)$ är en generalisering av ekvation 4.9 för partiklar med spinn, och innehåller på samma sätt en summa av Legendrepolynom. Vidare är spridningsamplituden, precis som tidigare, relaterad till det differentiella tvärsnittet [15]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{|\xi\rangle\to|\xi'\rangle}(T_{\text{lab}},\theta) = \left|f_{|\xi\rangle\to|\xi'\rangle}(T_{\text{lab}},\theta)\right|^2. \tag{4.16}$$

[2]Från engelskans ”effective range”.
[3]Där $\epsilon \to 0_+$.

Generellt är inte spinntillstånden i något av spinnbastillstånden utan i en superposition av dessa, vilket kan skrivas som

$$|\chi\rangle = \sum_{\xi} \chi_\xi \, |\xi\rangle \, . \tag{4.17}$$

Sättes detta uttryck in i ekvation (4.16) får man istället för en skalär spridningsamplitud $f_{|\xi\rangle\to|\xi'\rangle}(T_{\text{lab}},\theta)$ en amplitudmatris $M(T_{\text{lab}},\theta)$ som innehåller spridningsamplituden för varje möjlig kombination av initial- och utspinnbastillstånd enligt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{|\chi\rangle\to|\chi'\rangle}(T_{\text{lab}},\theta) = \left| \sum_{\xi',\,\xi} \chi^*_{\xi'} f_{|\xi\rangle\to|\xi'\rangle}(T_{\text{lab}},\theta)\chi_\xi \right|^2 \equiv \left| \, \langle\chi'|M(T_{\text{lab}},\theta)|\chi\rangle \, \right|^2 . \tag{4.18}$$

Matrisen M i den okopplade spinnbasen, som betecknas $M_{\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow}$, kan alltså representeras som

$$M_{\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow}(T_{\text{lab}},\theta) = \begin{bmatrix} f_{|\uparrow\uparrow\rangle\to|\uparrow\uparrow\rangle} & f_{|\uparrow\downarrow\rangle\to|\uparrow\uparrow\rangle} & f_{|\downarrow\uparrow\rangle\to|\uparrow\uparrow\rangle} & f_{|\downarrow\downarrow\rangle\to|\uparrow\uparrow\rangle} \\ f_{|\uparrow\uparrow\rangle\to|\uparrow\downarrow\rangle} & f_{|\uparrow\downarrow\rangle\to|\uparrow\downarrow\rangle} & f_{|\downarrow\uparrow\rangle\to|\uparrow\downarrow\rangle} & f_{|\downarrow\downarrow\rangle\to|\uparrow\downarrow\rangle} \\ f_{|\uparrow\uparrow\rangle\to|\downarrow\uparrow\rangle} & f_{|\uparrow\downarrow\rangle\to|\downarrow\uparrow\rangle} & f_{|\downarrow\uparrow\rangle\to|\downarrow\uparrow\rangle} & f_{|\downarrow\downarrow\rangle\to|\downarrow\uparrow\rangle} \\ f_{|\uparrow\uparrow\rangle\to|\downarrow\downarrow\rangle} & f_{|\uparrow\downarrow\rangle\to|\downarrow\downarrow\rangle} & f_{|\downarrow\uparrow\rangle\to|\downarrow\downarrow\rangle} & f_{|\downarrow\downarrow\rangle\to|\downarrow\downarrow\rangle} \end{bmatrix} . \tag{4.19}$$

Initialtillståndet relateras via M-operatorn till den spridda delen av uttillståndet i spinnrummet genom

$$|\chi_{\text{ut}}\rangle = \frac{M\,|\chi_{\text{in}}\rangle}{\sqrt{\langle\chi_{\text{in}}|M^\dagger M|\chi_{\text{in}}\rangle}}, \tag{4.20}$$

där M innehåller all dynamisk information om spridningsprocessen [15]. Till skillnad från S så är M inte unitär, vilket gör att uttillståndet i ekvation (4.20) måste normeras. Ett uttillstånd som bildats enligt ekvation (4.20) är således inte ekvivalent med ett uttillstånd som fås då spinndelen av S-operatorn verkar på ett initialtillstånd, enligt motsvarigheten till ekvation (4.5) i spinnrummet. Det uttillstånd som fås med S innehåller även de triviala delarna av spridningen, inklusive initialtillståndet. I specialfallet med s-vågor, $L = 0$, är relationen mellan S och M i den rumsliga partialvågsbasen samt den okopplade spinnbasen [23]

$$M^{L=0}_{\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow} = \frac{S^{L=0}_{\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow} - \mathbb{1}}{2ik}. \tag{4.21}$$

Sammanfattningsvis är det möjligt att studera sammanflätningen av två nukleoners spinntillstånd efter spridning. Givet ett initialtillstånd $|\chi_{\text{in}}\rangle$, en interaktionspotential V, rörelseenergi T_{lab}, och spridningsvinkel θ kan Lippmann-Schwingerekvationen lösas för att få ut T och därmed M. Alternativt kan ett uttryck för M hittas analytiskt för s-vågor, givet ett uttryck för $S^{L=0}$, med ekvation (4.21). Om sedan uttillståndet beräknas kan graden av sammanflätning mätas med exempelvis tvåentropin eller sammanflätningsentropin. Genom att medelvärdesbilda över samtliga initialtillstånd kan mängden sammanflätning som operatorn M ger upphov till bestämmas.

Del II

Implementering och resultat

5

Implementering

I detta kapitel beskrivs beräkningsproceduren samt implementeringen av de funktioner som används för att numeriskt beräkna sammanflätningsstyrka och sammanflätningsentropi. Som tidigare nämnts kontrasteras det numeriska tillvägagångssättet från det analytiska genom att s-vågsapproximationen ej behövs. Detta möjliggör en analys av sammanflätning i realistisk nukleon-nukleonspridning, det vill säga då fler partialvågor med $L > 0$ inkluderas. Vidare möjliggör detta analyser av spridningsvinkelberoende och beroendet av högre energier.

Ett program har tillhandahållits av Oliver Thim för att lösa Lippmann-Schwingerekvationen (4.14), samt producera M-matrisen för en given potential [24]. Konvergensen av relevanta parametrar analyseras i avsnitt 5.3 för att försäkra att den beräknade M-matrisen är numeriskt konvergent.

5.1 Beräkningsprocedur

Det tillhandahållna programmet är skrivet i C++ och kompilerades som ett importerbart paket i Python. Programmet användes för att beräkna Lippmann-Schwingerekvationen i en partialvågsbas med hjälp av matrisinversion [25]. För att lösa ekvationen behöver användaren sätta ett antal parametrar. Antalet olika partialvågor, ${}^{2S+1}L_J$, som uppkommer i basen och inkluderas i lösningen begränsas av den numeriska trunkeringsparametern $J_{\max}$. Parametern definieras som

$$|J - S| \leq L \leq |J + S|, \quad J \leq J_{\max}, \quad S = 0, 1, \tag{5.1}$$

och begränsar därmed de möjliga värdena på det orbitala rörelsemängdsmomentet L. För exempelvis $J_{\max} = 1$ erhålls partialvågorna ${}^1S_0$, ${}^3S_1$, ${}^1P_1$, ${}^3P_0$, ${}^3P_1$ och ${}^3D_1$. Vid låga energier dominerar partialvågor med ett lågt L-kvanttal och således är ett lågt värde på $J_{\max}$ en god approximation. I takt med att energin ökar så försämras approximationen och då behöver fler partialvågor beaktas. Detta kräver ett högre $J_{\max}$ som i sin tur medför att det tar längre tid att lösa Lippmann-Schwingerekvationen. Ytterligare en relevant parameter är antal gaussiska kvadraturpunkter, N_{p}, som diskretiserar Lippmann-Schwingerekvationen på integralform till en linjär matrisekvation [21]. Beräkningstiden ökar även med denna parameter.

De erhållna resultaten har främst åskådliggjorts som en funktion av spridningsvinkel och energi, där konvergerande värden på resterande parametrar har blivit ansatta (se avsnitt 5.3). Vad gäller modellering av den starka växelverkan mellan neutronen och protonen beaktas endast Nijmegen I-potentialen i denna studie. Denna potential är endast definierad för $J \leq 9$ [12]. Från programmet erhålls slutligen M-matrisen i den kopplade spinnbasen, bestående av spridningsamplituder relaterade till T-operatorn enligt ekvation (4.15). De sammanflätningsmått som har använts är definierade för den okopplade spinnbasen, se ekvation (2.4). Eftersom M-matrisen beräknas i den kopplade spinnbasen, enligt ekvation (2.5), behöver den transformeras till den okopplade basen enligt

$$M_{\updownarrow\updownarrow} = A^{-1} M_{\mathrm{SM}} A, \tag{5.2}$$

där A är den transformationsmatris som relaterar baserna genom Clebsch-Gordankoefficienter, se ekvation (2.6).

Vidare används en Blochsfärsparametrisering för att uttrycka de båda initialtillstånden, $|\psi_A\rangle$ och $|\psi_B\rangle$, som i ekvation (2.3). Det gemensamma initialtillståndet för nukleonerna, $|\psi_{\mathrm{in}}\rangle$, fås som tensorprodukten

av deras tillstånd enligt

$$|\psi_{\text{in}}\rangle = \begin{bmatrix} \psi_{\text{in},\,1} \\ \psi_{\text{in},\,2} \\ \psi_{\text{in},\,3} \\ \psi_{\text{in},\,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta_A}{2} \cdot \cos\frac{\theta_B}{2} \\ \cos\frac{\theta_A}{2} \cdot \sin\frac{\theta_B}{2} e^{i\varphi_B} \\ \sin\frac{\theta_A}{2} e^{i\varphi_A} \cdot \cos\frac{\theta_B}{2} \\ \sin\frac{\theta_A}{2} e^{i\varphi_A} \cdot \sin\frac{\theta_B}{2} e^{i\varphi_B} \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

Då både sammanflätningsstyrka och sammanflätningsentropi är funktioner av densitetsoperatorn måste initialtillståndet uttryckas i densitetsoperatorformalism. Eftersom initialtillstånden är rena förenklas ekvation (2.7) till $\rho_{\text{in}} = |\psi_{\text{in}}\rangle \langle\psi_{\text{in}}|$ och blir då en 4x4-matris enligt

$$\rho_{\text{in}} = \begin{bmatrix} |\psi_{\text{in},\,1}|^2 & \psi_{\text{in},\,1}\psi^*_{\text{in},\,2} & \cdots & \psi_{\text{in},\,1}\psi^*_{\text{in},\,4} \\ \psi_{\text{in},\,2}\psi^*_{\text{in},\,1} & |\psi_{\text{in},\,2}|^2 & \cdots & \psi_{\text{in},\,2}\psi^*_{\text{in},\,4} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{\text{in},\,4}\psi^*_{\text{in},\,1} & \psi_{\text{in},\,4}\psi^*_{\text{in},\,2} & \cdots & |\psi_{\text{in},\,4}|^2 \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Därpå fås uttillståndet, ρ_{AB}, genom att utföra matrisalgebran i ekvation (2.9), med M-operatorn i den okopplade basen. Slutligen erhålls den reducerade densitetsoperatorn ρ_A enligt ekvation (2.10).

5.2 Monte Carlo-integration över Blochsfären

För att beräkna medelvärdet av sammanflätningsentropin för alla möjliga initialtillstånd utförs en integrering över de två Blochsfärernas vinklar, θ_A och θ_B, samt φ_A och φ_B. Sammanflätningsstyrkan är per definition en medelvärdesbildning genom integrering över Blochsfärerna. Alltså behöver en integral över samma domän lösas för att beräkna de två sammanflätningsmåtten. För att beräkna integralerna numeriskt har Monte Carlo-integration [26] tillämpats:

$$I = \int_V f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \approx \frac{|V|}{N} \sum_i^N f(\boldsymbol{x}_i). \tag{5.5}$$

Summan beräknas genom att slumpmässigt välja N stycken punkter $\boldsymbol{x}_i = (\theta_A, \varphi_A, \theta_B, \varphi_B)$ uniformt från integrationsvolymen V. Då nukleonernas Blochsfärer uttrycks i sfäriska koordinater fås $d\boldsymbol{x} = d\Omega_A d\Omega_B = (\sin(\theta_A)\, d\theta_A\, d\varphi_A)(\sin(\theta_B)\, d\theta_B\, d\varphi_B)$. Här slumpas φ uniformt inom intervallet $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Då θ slumpas utnyttjas att $\frac{d\cos(\theta)}{d\theta} = \sin(\theta) \Leftrightarrow \sin\theta\, d\theta = d\cos(\theta)$, så att differentialen kan skrivas som

$$d\Omega_A d\Omega_B = (\, d\cos(\theta_A)\, d\varphi_A)(\, d\cos(\theta_B)\, d\varphi_B). \tag{5.6}$$

Definitionsmängden för θ är $0 \leq \theta \leq \pi$, och således fås definitionsmängden

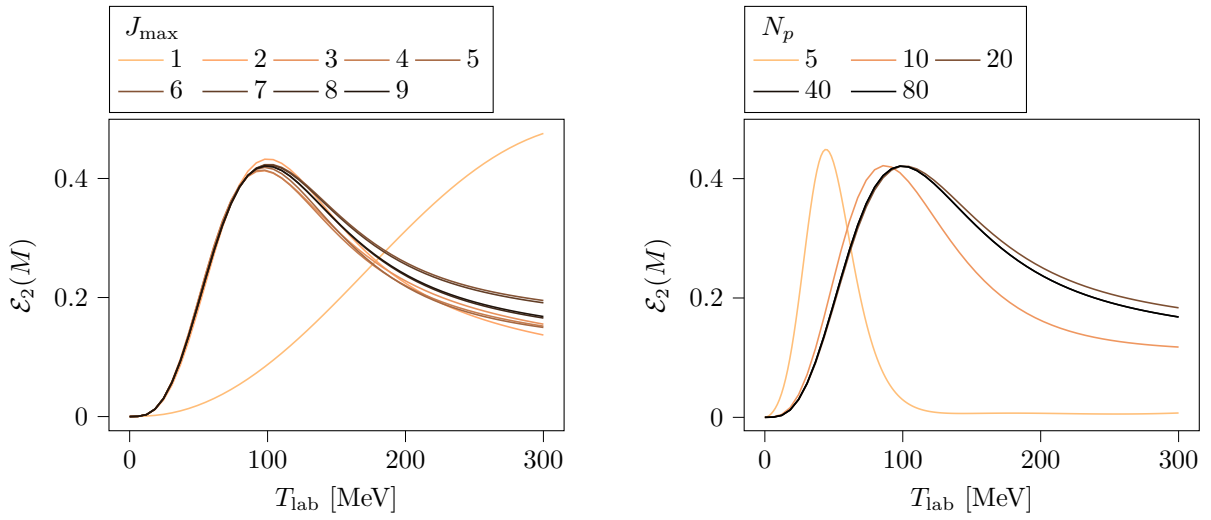
$$\cos(\pi) \leq \cos(\theta) \leq \cos(0) \Leftrightarrow -1 \leq \cos(\theta) \leq 1, \tag{5.7}$$

för $\cos(\theta)$. För att få en uniform fördelning på Blochsfären väljs $z = \cos(\theta)$ uniformt mellan -1 och 1 och värdet på θ fås genom $\theta = \arccos z$.

5.3 Konvergensanalys

Samtliga beräkningsmetoder måste vara numeriskt stabila för att ge tillförlitliga resultat. Därför görs tre konvergensanalyser, två för parametrarna $J_{\max}$ och N_{p} till programmet som löser Lippmann-Schwingerekvationen, samt en för integrationen över Blochsfären.

Programmet som löser Lippmann-Schwingerekvationen ger den numeriskt beräknade M-matrisen, vilken alla numeriska resultat bygger på. För att hålla nere beräkningstiden och samtidigt försäkra att resultaten är konvergenta för de av användaren ansatta värden på $J_{\max}$ och N_{p} görs analysen i 5.1. Utifrån figur 5.1a framgår det att högre $J_{\max}$ ger ett resultat som börjar avvika från $\mathcal{E}_{2,\,J_{\max}=9}$ först vid högre energier. Det är först vid $J_{\max} = 8$ som tvåentropin konvergerar genom hela energiintervallet. Om inget annat nämns så är kommande resultat genererat med $J_{\max} = 9$. I figur 5.1b presenteras hur tvåentropin konvergerar för N_{p}, och det framstår att konvergens är uppnått vid $N_{\text{p}} = 40$. I studien har genomgående $N_{\text{p}} = 120$, vilket är ett konservativt val och tilläts av programmets effektivitet. För att spara beräkningstid hade denna parameter kunnat minskas utan att tappa numerisk stabilitet.



(a) Konvergensanalys av tvåentropin $\mathcal{E}_2$ för ökande $J_{\max}$.

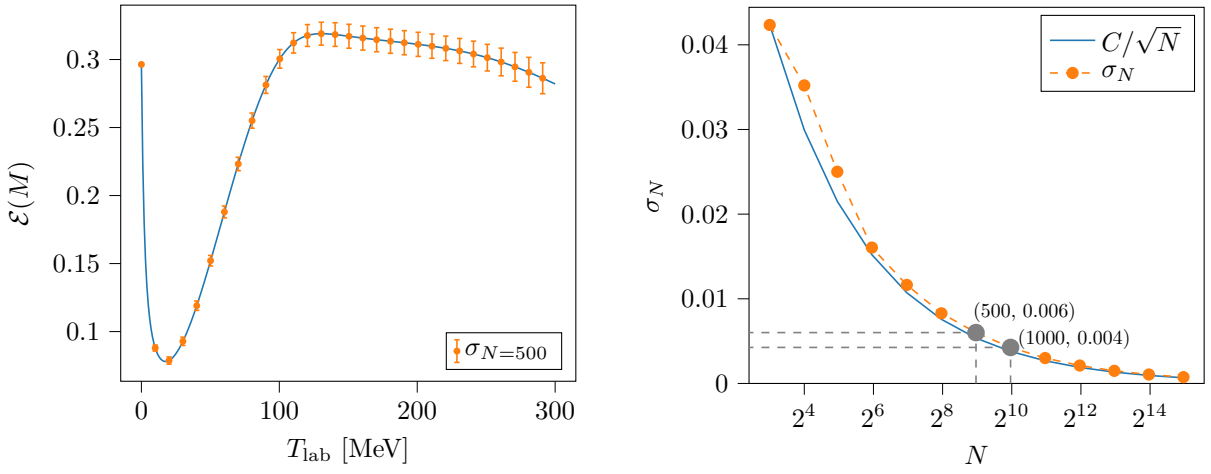
(b) Konvergensanalys av tvåentropin $\mathcal{E}_2$ för ökande N_{p}.

Figur 5.1: Konvergensanalys av tvåentropin $\mathcal{E}_2$ för parametrarna $J_{\max}$ och N_{p}. Spridningsvinkeln är fixerad vid $\theta = 112°$.

Då beräkningen av den genomsnittliga sammanflätningen använder sig av medelvärdesbildning över ett begränsat antal slumpgenererade tillstånd är det centralt att undersöka hur resultatet konvergerar som en funktion av antalet tillstånd. Standardavvikelsen vid Monte Carlo-integreringen ger ett mått på precisionen för approximationen i ekvation (5.5), och ges av [26]

$$\sigma = |V| \sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{N}}, \tag{5.8}$$

där $\langle f \rangle$ är det aritmetiska medelvärdet över antal samplade punkter, N, och V är integrationsregionen. Notera särskilt att standardavvikelsen är proportionell mot $1/\sqrt{N}$ och att den numeriska integrationen därmed konvergerar med ökande antal stickprov.



(a) Sammanflätningsstyrka medelvärdesbildad över 500 tillstånd vid $\theta = 112°$ och T_{lab} upp till 300 MeV. Standardavvikelsen ökar med T_{lab} för $\theta = 112°$.

(b) Standardavvikelsen som en funktion av N. Funktionen är uppritad mot $C/\sqrt{N}$, där C är en konstant som har anpassats mot data. Vid $N = 500$ är $\sigma_{N=500} = 0{,}006$. Vid $N = 1000$ är $\sigma_{N=1000} = 0{,}004$.

Figur 5.2: Standardavvikelsen, σ_N, av sammanflätningsstyrkan för olika energier, T_{lab}, och varierande antal medelvärdesbildade initialtillstånd, N.

För att få en feluppskattning på medelvärdesbildningen av sammanflätningsstyrkan har standardavvikelsen, ekvation (5.8), beräknats för fixerade värden på energi och spridningsvinkel, $T_{\text{lab}} = 300$ MeV samt

$\theta = 112°$. Då standardavvikelsen ökar med T_{lab} för $\theta = 112°$ (se figur 5.2a) ger ett högt värde på energin ett konservativt estimat på standardavvikelsen.

Figur 5.2b visar hur standardavvikelsen av sammanflätningsstyrkan minskar med N. Det noteras att standardavvikelsen minskar proportionellt med $1/\sqrt{N}$, vilket överensstämmer med ekvation (5.8). Båda värdena som motsvaras av $N = 500$ och $N = 1000$ har markerats. Standardavvikelserna på $\sigma = 0{,}006$ respektive $\sigma = 0{,}004$ är de felmarginaler som använts för samtliga numeriska resultat i rapporten. 1000 medelvärdesbildningar ger en aning lägre standardavvikelse, men är betydligt mer kostsamt att beräkna. Därför har medelvärdesbildningar av 1000 tillstånd endast beräknats då spridningsvinkeln varit fixerad, se figur 6.5. Vid beräkningar över hela vinkel- och energiintervallet har istället N valts till 500 tillstånd.

För att erhålla ett resultat som uppvisar kvalitativa likheter med ett konvergerat värde har en standardavvikelse betraktats som en godtagbar felmarginal. Detta ger ingen absolut undre eller övre gräns för sammanflätningsstyrkan, snarare ett troligt intervall som sammanflätningsstyrkan bör ligga inom. Utifrån det faktum att standardavvikelsen går mot noll för ökande N går det att dra slutsatsen att den numeriska Monte Carlo-integreringen är en konvergerande metod. Vad gäller konvergensen av den numeriska trunkeringsparametern $J_{\max}$ är det ej möjligt att avgöra hur väl konvergerat resultatet är för Nijmegen I-potentialen, då denna potential endast är definierad för $J_{\max} \leq 9$. Figur 5.1a antyder dock att felet har storleksordning på någon procent och ses därmed som ett litet numeriskt fel. Då $N_{\text{p}} \geq 40$ ger ett konvergerat resultat kan slutsatsen dras att de numeriska metoderna konvergerar väl för ändamålet i fråga.

6

Resultat och diskussion

Inledningsvis presenteras i detta kapitel den analytiska undersökningen av lågenergispridningen i avsnitt 6.1. S-matrisen samt det analytiska uttrycket för $\mathcal{E}(S)$ för s-vågor härleds med utgångspunkt i artiklarna [9] och [10]. Därefter studeras även sammanflätningsstyrkan för $M^{L=0}$, speciellt används effektiv räckviddexpansionen i gränsen $T_{\text{lab}} \to 0$. I avsnitt 6.2 följer resultatet av den numeriska undersökningen av sammanflätning i spridningsprocessen. En jämförelse mellan det analytiska och numeriska resultatet görs även här, där sammanflätningsstyrkan för den numeriskt beräknade M och den analytiska $M^{L=0}$ jämförs för energier $T_{\text{lab}} < 6\,\text{MeV}$.

6.1 Analytisk studie av lågenergispridning

Spinndelen av spridningsmatrisen S och sammanflätningsstyrkan $\mathcal{E}(S)$ för tvånukleonsystemet är möjliga att härleda analytiskt för s-vågor i termer av fasskift. De resulterande uttrycken presenteras i referens [9] samt [10]. I detta avsnitt följer en härledning av dessa uttryck, dels för att verifiera resultaten men även för att fylla i de utelämnade mellanstegen. För s-vågor är det till spridningsamplituden associerade Legendrepolynomet $P_{L=0}(\cos\theta)$ en konstant och därmed fås inget vinkelberoende. Ekvation (4.21) relaterar $S^{L=0}$ och $M^{L=0}$. Det analytiska uttrycket för $\mathcal{E}(M^{L=0})$ presenteras i form av en analytiskt svårlöst integral vilken beräknas numeriskt med Monte Carlo-integration. $M^{L=0}$ parametriseras i termer av spridningslängd och effektiv räckvidd för att korrigera numeriska osäkerheter i fasskift från NN-online [27] i gränsen $k \to 0$. $S^{L=0}$-matrisen betecknar i detta avsnitt spridningsmatrisen för s-vågor reducerad till spinnrummet.

6.1.1 Härledning av $\boldsymbol{S}$

Fullständiga beräkningar för härledningen av $S^{L=0}$ finns i appendix A.1.

S bevarar det totala spinnet [15], vilket medför att den kan delas upp i en singlettdel S_0 och en triplettdel S_1 enligt $S = S_0 + S_1$. Den bevarar även det totala rörelsemängdsmomentet $\boldsymbol{J}$ [15], vilket innebär att $[\boldsymbol{J}, S] = [\boldsymbol{J}, S_j] = 0\ \forall j \implies [J^2, S_j] = 0\ \forall j$, med $j \in \{0, 1\}$. Implikationen följer från motsvarigheten till produktregeln för kommutation.

Det totala rörelsemängdsmomentet givet $L = 0$ blir $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{s}_A + \boldsymbol{s}_B$, där $\boldsymbol{s}_A = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbb{1}_B$ och $\boldsymbol{s}_B = \mathbb{1}_A \otimes \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ betecknar spinnoperatorn för respektive nukleon i det gemensamma spinnrummet och $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x\hat{x} + \sigma_y\hat{y} + \sigma_z\hat{z}$ är vektorn av Paulimatriserna. Då blir J^2:

$$J^2 = (\boldsymbol{s}_A + \boldsymbol{s}_B)^2 = \alpha \cdot \mathbb{1} + \beta \cdot \sum_{k=1}^{3} \sigma_k \otimes \sigma_k, \tag{6.1}$$

där α, β är konstanter och $\mathbb{1}$ är den fyrdimensionella identitetsmatrisen.

S_j kan skrivas som en linjärkombination av J^2 och $\mathbb{1}$ [9], vilket är ekvivalent med att skriva det som en linjärkombination av $\mathbb{1}$ och $\sum_{k=1}^{3} \sigma_k \otimes \sigma_k$ enligt ekvation (6.1). Det fås alltså att

$$S_j = e^{i2\delta_j} \left(a_j \cdot \mathbb{1} + b_j \cdot \sum_{k=1}^{3} \sigma_k \otimes \sigma_k \right), \tag{6.2}$$

för konstanter a_j, b_j och en fas δ_j, där δ_j kan bero på T_{lab} [9]. Konstanterna a_0, b_0, a_1 och b_1 uppfyller att $a_1 = 3b_1$ och $a_0 = -b_0$ på grund av att S_0 och S_1 måste projicera på singlettillstånd respektive

triplettillstånd. Slutligen normaliseras $S^{L=0}$ genom att använda att S är unitär, $S^\dagger S = \mathbb{1}$ vilket ger $a_0 = 1/4$ och $a_1 = 3/4$. Uttrycket för S-matrisen för s-vågor blir alltså

$$S^{L=0}_{\updownarrow\updownarrow} = S_0 + S_1 = e^{i2\delta_0}\left(\frac{1}{4}\mathbb{1} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{3}\sigma_k \otimes \sigma_k\right) + e^{i2\delta_1}\left(\frac{3}{4}\mathbb{1} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{3}\sigma_k \otimes \sigma_k\right), \tag{6.3}$$

vilket kan skrivas på matrisform som

$$S^{L=0}_{\updownarrow\updownarrow} = \begin{bmatrix} e^{i2\delta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(e^{i2\delta_0} + e^{i2\delta_1}) & \frac{1}{2}(e^{i2\delta_1} - e^{i2\delta_0}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(e^{i2\delta_1} - e^{i2\delta_0}) & \frac{1}{2}(e^{i2\delta_0} + e^{i2\delta_1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i2\delta_1} \end{bmatrix}. \tag{6.4}$$

Den blockdiagonala formen på $S^{L=0}_{\updownarrow\updownarrow}$ uppkommer som en konsekvens av att det endast är s-vågor som studeras. Detta innebär nämligen att det totala rörelsemängdsmomentet är lika med det totala spinnet. Ovan visades att detta fick som konsekvens att S kan skrivas som en linjärkombination av $\mathbb{1}$ och $\sum_{k=1}^{3}\sigma_k \otimes \sigma_k$, som båda är blockdiagonala. Spinnbevaringsregler, det vill säga att singletten projicerar på singlett och tripletten på triplett, medför även att $S_{22} = S_{33}$ samt $S_{23} = S_{32}$, där S_{ij} är matriselement på rad i kolonn j.

6.1.2 Sammanflätningsstyrka för S

Fullständiga beräkningar för härledningen av sammanflätningsstyrkan för $S^{L=0}$ finns i appendix A.2.

Ett godtyckligt ickesammanflätat initialt spinntillstånd skrivs här, i den okopplade basen, som en direkt tensorprodukt

$$|\chi_{\text{in}}\rangle = (a\,|\uparrow\rangle + b\,|\downarrow\rangle) \otimes (c\,|\uparrow\rangle + d\,|\downarrow\rangle) = ac\,|\uparrow\uparrow\rangle + ad\,|\uparrow\downarrow\rangle + bc\,|\downarrow\uparrow\rangle + bd\,|\downarrow\downarrow\rangle, \tag{6.5}$$

medan ett godtyckligt spinnuttillstånd som kan vara sammanflätat skrivs i samma bas som

$$|\chi_{\text{ut}}\rangle = S\,|\chi_{\text{in}}\rangle = \alpha\,|\uparrow\uparrow\rangle + \beta\,|\uparrow\downarrow\rangle + \gamma\,|\downarrow\uparrow\rangle + \delta\,|\downarrow\downarrow\rangle. \tag{6.6}$$

Eftersom S är unitär bevaras tillståndets norm, så att uttillståndet blir normaliserat då initialtillståndet är det. Sammanflätningsstyrkan $\mathcal{E}(S)$ är en medelvärdesbildning av tvåentropin för en operator, i detta fall S, över alla direkta tensorprodukter, $|\chi_{\text{in}}\rangle$, [9] och kan därför skrivas som

$$\mathcal{E}(S) = \frac{1}{2}\overline{\Delta^2(S\,|\chi_{\text{in}}\rangle)} = 2\overline{|\alpha\delta - \beta\gamma|^2} = 2\int |\alpha\beta - \gamma\delta|^2 \frac{d\Omega_A}{4\pi}\frac{d\Omega_B}{4\pi}, \tag{6.7}$$

där det har använts att $\Delta(|\chi_{\text{ut}}\rangle) = 2|\alpha\delta - \beta\gamma|$.

Lokala unitära transformationer, det vill säga en unitär operator som endast verkar på ett av delsystemen, påverkar inte sammanflätningen vilket nämndes i avsnitt 2.3. Detta får till följd att de unitära operatorer U_d som orsakar sammanflätning kan parametriseras med endast tre parametrar α_x, α_y, α_z enligt [9]

$$U_d = e^{i\alpha_k \sigma^k \otimes \sigma^k}, \quad k = x, y, z. \tag{6.8}$$

Egentillstånden för en operator U_d är Belltillstånden $|\phi^+\rangle$, $|\phi^-\rangle$, $|\psi^+\rangle$ och $|\psi^-\rangle$ definierade i ekvation (2.11) [9]. S är en unitär operator som ger upphov till sammanflätning och blir uttryckt i Bellbasen

$$S^{L=0}_{\text{Bell}} = \begin{bmatrix} e^{i2\delta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i2\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i2\delta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i2\delta_0} \end{bmatrix}. \tag{6.9}$$

Om det rena initialtillståndet, enligt ekvation (6.5), samt uttillståndet i ekvation (6.6) transformeras till Bellbasen kan koefficienterna α, β, γ, δ skrivas i termer av $S^{L=0}_{\text{Bell}}$-matrisens egenvärden och koefficienterna för initialtillståndet a, b, c, d genom att beräkna $S^{L=0}_{\text{Bell}}\,|\chi_{\text{in}}\rangle_{\text{Bell}} = |\chi_{\text{ut}}\rangle_{\text{Bell}}$. Resultatet blir

$$\begin{cases} \alpha = e^{i2\delta_1} ac \\ \beta = \frac{1}{2}(e^{i2\delta_1}(ad + bc) + e^{i2\delta_0}(ad - bc)) \\ \gamma = \frac{1}{2}(e^{i2\delta_1}(ad + bc) + e^{i2\delta_0}(bc - ad)) \\ \delta = e^{i2\delta_1} bd. \end{cases} \tag{6.10}$$

Från ekvation (6.10) kan $|\alpha\delta - \beta\gamma|^2$ beräknas, vilket ger

$$|\alpha\delta - \beta\gamma|^2 = \frac{1}{8}|ad - bc|^4(1 - \cos(4(\delta_1 - \delta_0))). \tag{6.11}$$

För att medelvärdesbilda över samtliga initialtillstånd parametriseras dessa av θ_A, θ_B, φ_A, φ_B på Blochsfären enligt

$$a = \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right), \quad b = \sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)e^{i\varphi_A}, \quad c = \cos\left(\frac{\theta_B}{2}\right), \quad d = \sin\left(\frac{\theta_B}{2}\right)e^{i\varphi_B}, \tag{6.12}$$

och sätts därefter in i ekvation (6.11). Eftersom $\frac{1}{8}(1-\cos(4(\delta_1-\delta_0)))$ är konstant räcker det att integrera $|ad - bc|^4$ i ekvation (6.7), vilket i Blochsfärskoordinater blir en summa

$$\begin{aligned}|ad - bc|^4 = {} & \frac{1}{8}\sin^2(\theta_A)\sin^2(\theta_B)\cos(2(\varphi_B - \varphi_A)) + \\ & - \cos(\varphi_B - \varphi_A)\sin(\theta_A)\sin(\theta_B)\left[\cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\right] + \\ & + \cos^4\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\sin^4\left(\frac{\theta_B}{2}\right) + \cos^4\left(\frac{\theta_B}{2}\right)\sin^4\left(\frac{\theta_A}{2}\right) + \frac{1}{4}\sin^2(\theta_A)\sin^2(\theta_B).\end{aligned} \tag{6.13}$$

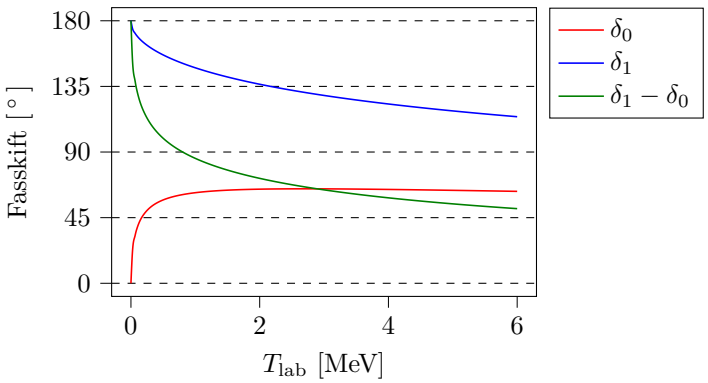
Integration av $|ad-bc|^4$ förenklas av att termerna i summan är separabla, vilket medför att varje parameter kan integreras separat. De termer i $|ad - bc|^4$ med φ-beroende försvinner eftersom var och en av dessa termers φ-beroende kan skrivas på formen $e^{im\varphi}$ för heltal m, vilket ger noll då φ integreras från 0 till 2π. Resten av termerna från uttryck (6.13) integreras alla till $1/9$. Detta ger:

$$\int \frac{d\Omega_A}{4\pi}\frac{d\Omega_B}{4\pi}|ad - bc|^4 = \frac{1}{3}. \tag{6.14}$$

Slutligen fås

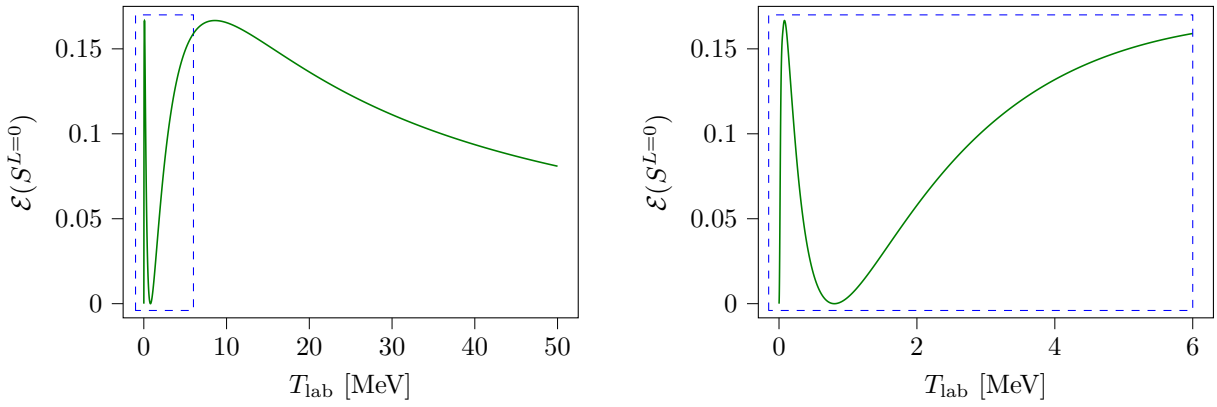
$$\mathcal{E}(S^{L=0}) = 2\overline{|\alpha\delta - \beta\gamma|^2} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}(1 - \cos(4(\delta_1 - \delta_0))) = \frac{\sin^2(2(\delta_1 - \delta_0))}{6}, \tag{6.15}$$

vilket överensstämmer med uttrycket för sammanflätningsstyrkan för S-matrisen och s-vågor i referens [9] samt [10].



Figur 6.1: Fasskift för singletten ${}^1S_0$ och tripletten ${}^3S_1$, samt skillnaden mellan dessa, som funktioner av T_{lab} för energier upp till 6 MeV.

För att beräkna sammanflätningsstyrkan behövs värden på fasskift för singletten ${}^1S_0$ och tripletten ${}^3S_1$. Dessa hämtas från databasen NN-online [27], och illustreras som funktioner av T_{lab} i figur 6.1. Sammanflätningsstyrkan beror enligt ekvation (6.15) på skillnaden mellan dessa, $\delta_1 - \delta_0$, som också visas i figuren. Villkoret för att sammanflätningsstyrkan ska bli noll enligt ekvation 6.15 är $\delta_1 - \delta_0 = n\pi/2$ för heltal n. I figur 6.1 observeras detta villkor vara uppfyllt vid 0 MeV och omkring 1 MeV. Från ekvation (6.15) är det tydligt att sammanflätningsstyrkan för $S^{L=0}$ inte kan anta högre värden än $1/6$, och detta sker då $\delta_1 - \delta_0 = \pi/4 + n\pi/2$ för heltal n.



(a) (b)

Figur 6.2: Sammanflätningsstyrkan för $S^{L=0}$-operatorn enligt ekvation (6.15) med fasskift från NN-online [27]: (a) upp till $T_{\text{lab}} = 50\,\text{MeV}$ och (b) upp till $T_{\text{lab}} = 6\,\text{MeV}$. Den streckade rutan markerar det område som har förstorats i (b).

I figur 6.2 visas $\mathcal{E}(S^{L=0})$ enligt ekvation (6.15) för Nijmegen I-potentialen, med fasskift från NN-online [27]. Det noteras att gränsvärdet för $\mathcal{E}(S^{L=0})$ går mot noll när T_{lab}, eller ekvivalent k, går mot noll. Detta beror på att matrisuttrycket för $S^{L=0}_{\updownarrow\updownarrow}$ enligt ekvation (6.4) reduceras till identitetsmatrisen, som ej ger upphov till sammanflätning, för mycket låga energier. Detta kan ses i ekvation (6.3) där fasskift $\delta_0 \to 0$ och $\delta_1 \to \pi$ då $k \to 0$ enligt figur 6.1. Vid $T_{\text{lab}} \sim 1$ MeV observeras i figur 6.2 även det andra nollstället som förutsades från figur 6.1. $\mathcal{E}(S^{L=0})$ ses anta det maximala värdet $1/6$ i två punkter, för $T_{\text{lab}} \sim 10$ MeV samt i en skarp topp vid en mycket låg energi. Dessa värden på T_{lab} motsvaras av $\delta_1 - \delta_0 = \pi/4$ respektive $3\pi/4$.

6.1.3 Sammanflätningsstyrka för M

Relationen mellan S- och M-operatorn är enligt ekvation (4.21) för specialfallet s-vågor. Detta ger matrisuttrycket för M i den kopplade spinnbasen och rumsliga partialvågsbasen

$$M^{L=0}_{\updownarrow\updownarrow} = \frac{1}{2ik}\begin{bmatrix} e^{i2\delta_1}-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(e^{i2\delta_0}+e^{i2\delta_1}-2) & \frac{1}{2}(e^{i2\delta_1}-e^{i2\delta_0}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(e^{i2\delta_1}-e^{i2\delta_0}) & \frac{1}{2}(e^{i2\delta_0}+e^{i2\delta_1}-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i2\delta_1}-1 \end{bmatrix}. \tag{6.16}$$

En följd av att $M^{L=0}_{\updownarrow\updownarrow}$ har denna form, där ett stort antal spridningsamplituder är 0, är att ett parallellt initialtillstånd inte kan byta spinn. Detta följer av att $f_{|\uparrow\uparrow\rangle\to|\uparrow\downarrow\rangle} = f_{|\uparrow\uparrow\rangle\to|\downarrow\uparrow\rangle} = f_{|\uparrow\uparrow\rangle\to|\downarrow\downarrow\rangle} = 0$, och helt analogt för $f_{|\downarrow\downarrow\rangle\to|\uparrow\downarrow,\downarrow\uparrow,\uparrow\uparrow\rangle}$. Om spinntillstånden inte ändras skapas ingen sammanflätning, så de parallella initialtillstånden bör vid låga energier inte bli sammanflätade. Ett antiparallellt initialtillstånd kan dock ge ett sammanflätat uttillstånd eftersom spridningsamplituderna $f_{|\uparrow\downarrow\rangle\to|\downarrow\uparrow\rangle} = f_{|\downarrow\uparrow\rangle\to|\uparrow\downarrow\rangle} \neq 0$ i s-vågsapproximationen.

Eftersom M inte är unitär måste uttillståndet normeras innan sammanflätningsstyrkan kan beräknas. Integration över Blochsfären är inte lika trivialt som i det föregående avsnittet där $\mathcal{E}(S^{L=0})$ beräknades. Formen på integralen för $\mathcal{E}(M^{L=0})$ blir

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(M^{L=0}) &= \frac{C}{(4\pi)^2}\cdot\int d\Omega_A d\Omega_B \frac{|ad+bc|^4}{(C_1+|ad-bc|^2C_2)^2}, \\ C &= \frac{(e^{i4\delta_1}-2e^{i2\delta_1}-e^{i4\delta_0}+2e^{i2\delta_0})^2}{8}, \\ C_1 &= 2(1-\cos(2\delta_1)), \\ C_2 &= (\cos(2\delta_1)-\cos(2\delta_0)), \end{aligned} \tag{6.17}$$

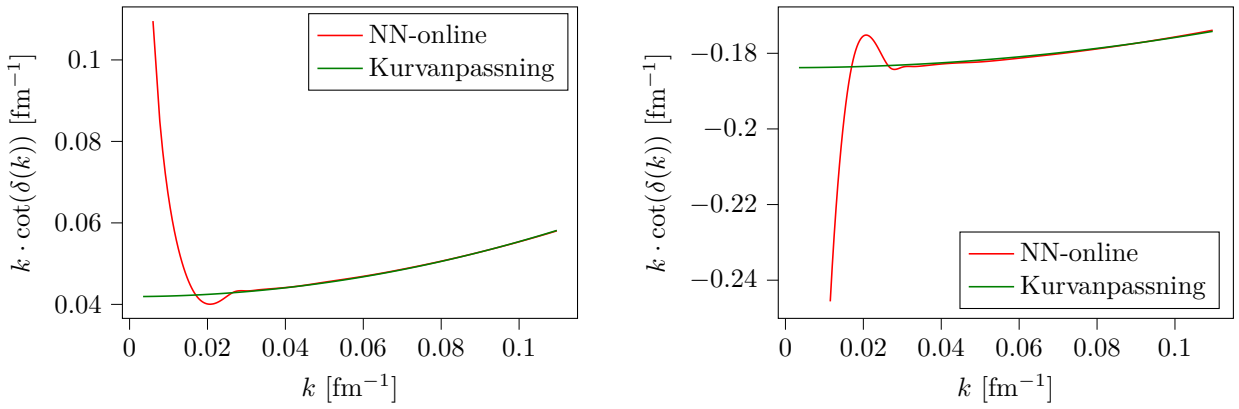
där a, b, c, d är definierade i ekvation (6.12). På grund av det rationella uttryck som ska integreras är denna uträkning svår att genomföra analytiskt. Utifrån det analytiska uttrycket för $M^{L=0}_{\updownarrow\updownarrow}$ i ekvation

(6.16) beräknades sammanflätningsstyrkan istället numeriskt med Monte Carlo-integration enligt avsnitt 5.2. Värden på fasskift hämtades från NN-online [27].

För låga energier, där expansionen enligt ekvation (4.11) är giltig och spridningsamplituder kan approximeras enligt ekvation (4.12), blir ett approximativt uttryck på $M_{\updownarrow\updownarrow}^{L=0}$ i termer av spridningslängd och effektiv räckvidd

$$M_{\updownarrow\updownarrow}^{L=0} \approx \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(F_1+F_0) & \frac{1}{2}(F_1-F_0) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(F_1-F_0) & \frac{1}{2}(F_1+F_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_1 \end{bmatrix}, \qquad F_j = \frac{1}{-\frac{1}{a_j} + \frac{r_{0,j}}{2}k^2 - ik}, \quad j = 0, 1, \tag{6.18}$$

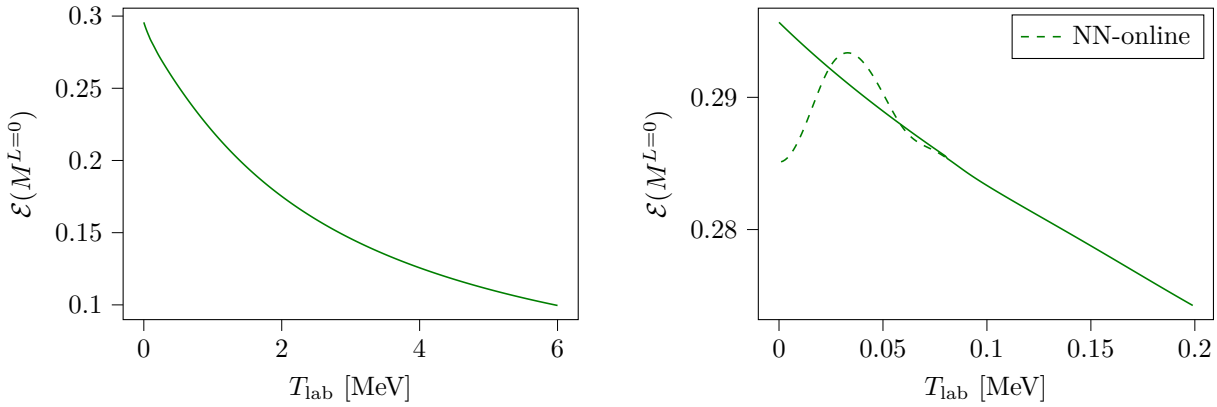
där $j = 0$ tillhör singletten och $j = 1$ tripletten. Spridningslängderna a_0, a_1 samt de effektiva räckvidderna $r_{0,0}$, $r_{0,1}$ för singletten respektive tripletten beräknades genom att anpassa ett polynom med en kvadratisk och en konstant term till kurvan $k\cot(\delta)$, med data från NN-online [27]. Det noterades att gränsvärdet $\lim_{k\to 0} k\cot(\delta)$ divergerar för $k \lesssim 0{,}02\,\mathrm{fm}^{-1}$ för både singletten och tripletten, antagligen beroende på begränsad numerisk precision hos NN-online. Av den anledningen gjordes kurvanpassningen endast med värden på fasskift för $k > 0{,}02\,\mathrm{fm}^{-1}$. Resultatet av detta samt värdena på spridningslängderna och de effektiva räckvidderna presenteras i figur 6.3. I artikeln [28] presenteras spridningslängder och effektiva räckvidder för ${}^1S_0$ och ${}^3S_1$. Där anges värdena $a_0 = -23{,}735\,\mathrm{fm}$, $r_{0,0} = 2{,}673\,\mathrm{fm}$, $a_1 = 5{,}435\,\mathrm{fm}$ och $r_{0,1} = 1{,}852\,\mathrm{fm}$ [28] på dessa parametrar, vilka stämmer relativt väl överens med de värden som hittades här. De erhållna värdena på a_0, $r_{0,0}$, a_1, $r_{0,1}$ från kurvanpassningen i figur 6.3 används vid beräkning av $M^{L=0}$ enligt ekvation (6.18).



(a) Singlett ${}^1\mathrm{S}_0$ (b) Triplett ${}^3\mathrm{S}_1$

Figur 6.3: Kurvanpassning av $k\cot(\delta)$ som funktion av k, med data från NN-online. Kurvanpassningen är gjord med värden på k mellan 0,02-0,11 fm^{-1}. Spridningslängd och effektiv räckvidd för singletten respektive tripletten fås till (a) $a_0 = -23{,}86\,\mathrm{fm}$, $r_{0,0} = 2{,}70\,\mathrm{fm}$ och (b) $a_1 = 5{,}44\,\mathrm{fm}$, $r_{0,1} = 1{,}60\,\mathrm{fm}$.

I figur 6.4a presenteras sammanflätningsstyrkan för $M^{L=0}$ där lågenergiapproximationen enligt ekvation (6.18) används för energier upp till $T_{\mathrm{lab}} = 0{,}08\,\mathrm{MeV}$ och uttrycket för $M^{L=0}$ enligt ekvation (6.16) används för $T_{\mathrm{lab}} > 0{,}08\,\mathrm{MeV}$. Skillnaden mellan sammanflätningsstyrkan beräknad med de två uttrycken visas även i figur 6.4b för energier $T_{\mathrm{lab}} < 0{,}08\,\mathrm{MeV}$. Denna figur demonstrerar den begränsade numeriska precisionen i fasskift från NN-online vid mycket låga energier. Detta är även tydligt från figur 6.3 där $\lim_{k\to 0} k\cot(\delta(k))$ inte existerar. I figur 6.4a observeras att sammanflätningsstyrkan för $M^{L=0}$ konvergerar mot ett nollskilt värde då $T_{\mathrm{lab}} \to 0$, till skillnad från $\mathcal{E}(S^{L=0})$.



(a) (b)

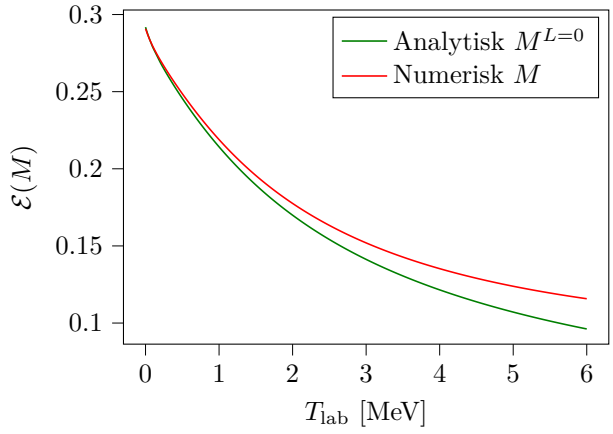
Figur 6.4: Sammanflätningsstyrka för $M^{L=0}$-operatorn vid små energier. (a) $M^{L=0}$ konstruerades enligt ekvation (6.18) för energier upp till $T_{\text{lab}} = 0{,}08\,\text{MeV}$, och för övriga energier enligt ekvation (6.16) med fasskift från NN-online. (b) Illustrerar hur fasskift från NN-online gör att sammanflätningsstyrkan avviker från de förväntade värdena, som fås med $M^{L=0}$-operatorn enligt effektiv räckviddexpansionen, för energier under $T_{\text{lab}} = 0{,}08\,\text{MeV}$.

6.2 Numerisk studie

Genom att numeriskt beräkna M-matrisen kan nu sammanflätningen analyseras i den realistiska spridningsprocessen, där fler partialvågor inkluderas. Detta tillåter analys av högre energier och introducerar samtidigt ett spridningsvinkelberoende. Analysen görs för energier upp till $T_{\text{lab}} = 300\,\text{MeV}$, samt för spridningsvinkelintervallet $0° \leq \theta \leq 180°$. Sammanflätningsstyrkan beräknades genom att medelvärdesbilda över ett givet antal tillstånd och det konstaterades att sammanflätningsstyrkan konvergerar mot ett fixt mönster över dessa intervall då antalet partialvågor ökar.

6.2.1 Lågenergianalys och verifiering

I avsnitt 6.1.3 härleddes $M^{L=0}$-matrisen analytiskt och dess sammanflätningsstyrka presenterades i figur 6.4a. Därmed kan validiteten hos den numeriskt erhållna M-matrisen verifieras i följande figur 6.5.



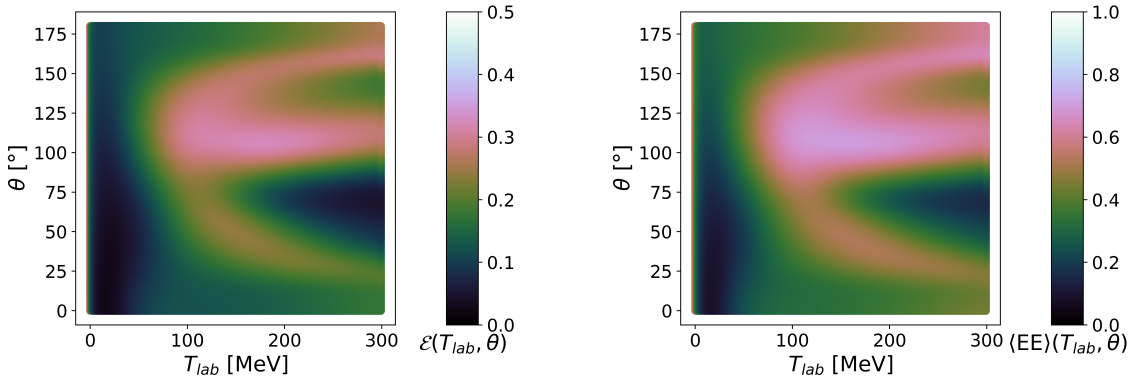
Figur 6.5: Analytisk och numerisk sammanflätningsstyrka för låga energier. Sammanflätningsstyrkan är medelvärdesbildad över 1000 slumpgenererade tillstånd. Den numeriska beräkningen har $J_{\text{max}} = 9$ och standardavvikelsen $\sigma = 0{,}004$, se figur 5.2b.

För låga energier är matriserna nästan identiska. Då energin ökar börjar de partialvågor med $L > 0$ verka, vilka ej ingår i den analytiska modellen. Detta extra bidrag till sammanflätningsstyrkan syns i figuren då den numeriska kurvan börjar avvika från den analytiska med växande energier. Den analytiska modellen

är därmed endast realistisk för energier runt några MeV. För större energier krävs fler partialvågsbidrag, vilka gör en analytisk lösning nästintill omöjlig. Därmed används den numeriska metoden i den kommande analysen av sammanflätningsstyrkan för högre energier samt dess spridningsvinkelberoende.

6.2.2 Jämförelse av sammanflätningsmått

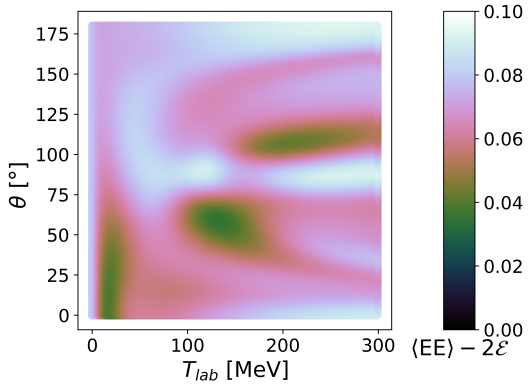
Nedan jämförs måtten sammanflätningsentropi och sammanflätningsstyrka, då $J_{\max} = 9$. Sammanflätningsentropi är definierad så att $EE = 1$ för ett fullt sammanflätat tillstånd. Däremot är tvåentropi definierad så att $\mathcal{E}_2 = 0{,}5$ för ett fullt sammanflätat tillstånd. Då sammanflätningsstyrka är en medelvärdesbildning av tvåentropi kommer sammanflätningsstyrkan genomgående vara mindre än sammanflätningsentropin.



(a) (b)

Figur 6.6: Jämförelse av två sammanflätningsmått. Notera att färgskalan i figur (a) reflekterar att $\mathcal{E}_{2\max} = 0{,}5$. Figur (b) är sammanflätningsentropi där $EE_{\max} = 1$. Båda figurerna är genererade med Monte Carlo-integrering, $N = 500$.

För att ytterligare studera skillnaden mellan måtten åskådliggörs $\langle EE \rangle - 2\mathcal{E}$, skillnaden mellan sammanflätningsentropi och en omskalad sammanflätningsstyrka i figur 6.7. Sammanflätningsstyrkan skalas om med en faktor 2 så att dess maximum sammanfaller med det hos sammanflätningsentropin.

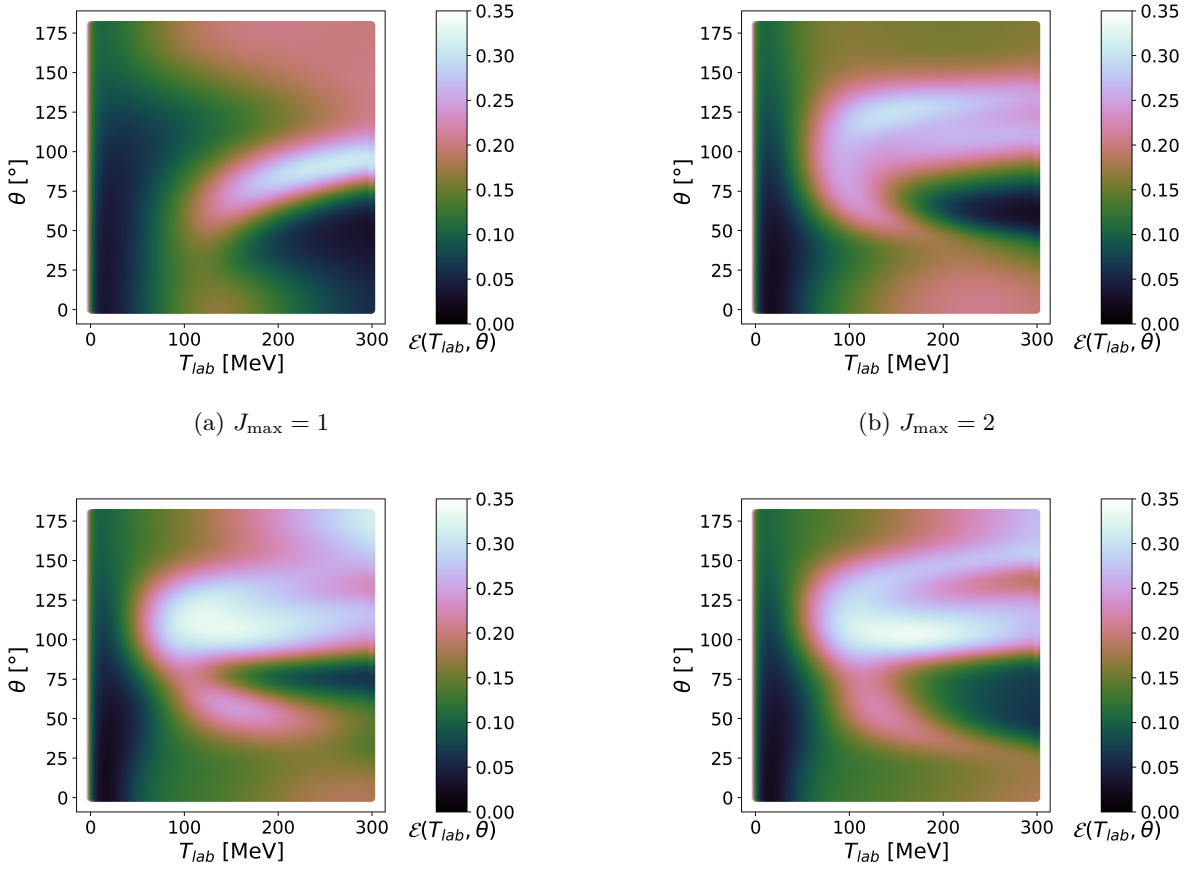


Figur 6.7: Skillnaden mellan $\langle EE \rangle$ och $2\mathcal{E}$ för $J_{\max} = 9$. Notera att 0,10 ger ett maximum på färgskalan.

Av figuren framgår det än mer att den medelvärdesbildade sammanflätningsentropin alltid är strikt större än sammanflätningsstyrkan, i enlighet med de analytiska beräkningarna i figur 2.2. Ur figuren går även att se hur skillnaden utgör mellan $6 - 14\,\%$ av $\langle EE \rangle$. Givet detta kan måtten betraktas som relativt utbytbara och beskrivande av samma fysik. Därmed kommer endast sammanflätningsstyrkan beaktas framöver.

6.2.3 Partialvågsberoende för sammanflätningsstyrka

Det är värdefullt att diskutera framväxten av mönstret i figur 6.6a med avseende på $J_{\max}$, eftersom det är en av parametrarna som påverkar den numeriskt erhållna M-matrisen, samt för att det ger insikter i sammanflätningsstyrkans beroende av energi och spridningsvinkel. Detta beroende framkommer i samband med att antalet partialvågor ökar, alltså för ett högre värde på $J_{\max}$ i enlighet med ekvation (5.1).



(a) $J_{\max} = 1$

(b) $J_{\max} = 2$

(c) $J_{\max} = 3$

(d) $J_{\max} = 4$

Figur 6.8: Sammanflätningsentropin, $\mathcal{E}$, som funktion av rörelseenergi, T_{lab}, och spridningsvinkel, θ, för ökande $J_{\max}$. Figurerna genererades med Monte Carlo-integrering över 500 slumpgenererade initialtillstånd. Observera att $\mathcal{E} = 0{,}35$ ger ett maximum på färgskalan.

Figur 6.8 demonstrerar hur sammanflätningsstyrkan konvergerar till det mönster som ses i figur 6.6a då $J_{\max}$ ökar. Orsaken till att sammanflätningsstyrkan är så pass tydligt $J_{\max}$-beroende är direkt kopplat till spridningsamplitudens beroende av Legendrepolynomen, se ekvation (4.9). Tre observationer kan göras från figur 6.8:

(I) Då sammanflätningsstyrkan i någon mån redan konvergerat då $J_{\max} = 4$ kan slutsatsen dras att det går att erhålla en god approximation av sammanflätningsstyrkan för låga $J_{\max}$. Det betyder att det går att summera över relativt få L-kvanttal vid representation av planvågstillståndet med partialvågsbasen (4.8).

(II) $J_{\max} = 1$ uppvisar ett mindre påtagligt vinkelberoende i förhållande till figurerna där $J_{\max} > 1$. Alltså trunkerar $J_{\max} = 1$ de tillåtna kvanttalen för tidigt, vilket resulterar i att för få partialvågor är inkluderade i M-matrisen. Med andra ord så ger de Legendrepolynom som medföljer $J_{\max} = 1$ ett svagt vinkelberoende, vilket endast resulterar i en central mod.

(III) Vid låga energier är sammanflätningsstyrkan i princip helt vinkeloberoende. Då endast s-vågorna är vinkeloberoende kan det konkluderas att dessa vågor faktiskt dominerar vid låga energier, vilket stämmer överens med teorin [21]. Då $J_{\max}$ ökar växer bidraget från bland annat partialvågor med låga $L \neq 0$. Dessa partialvågors tillhörande Legendrepolynom inducerar ett större vinkelberoende

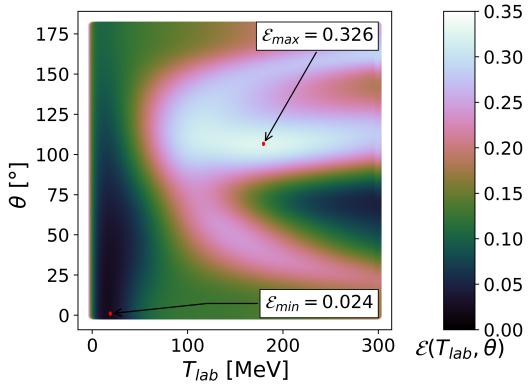
som även är påtagligt vid något lägre energier. Detta åskådliggörs i figuren genom att vinkelberoendet börjar tidigare då beräkningarna har utförts med högre $J_{\max}$.

6.2.4 Maximal och minimal sammanflätningsstyrka

Från den beräknade sammanflätningsstyrkan över hela energi- och vinkelintervallet kan ett maximalt och minimalt värde fastställas. Figur 6.9 visar att sammanflätningsstyrkan antar liknande värden i större områden kring respektive extrempunkter. Således fås

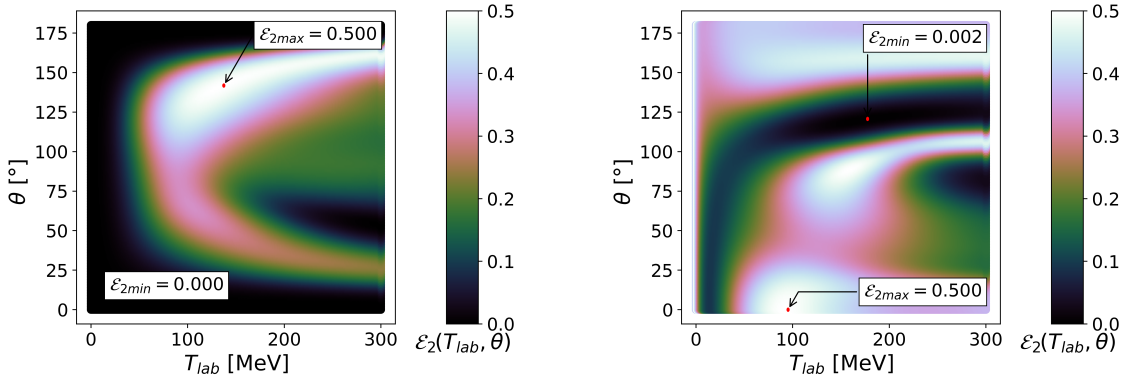
$$\mathcal{E}_{\max} = 0{,}330 \pm 0{,}006, \quad \mathcal{E}_{\min} = 0{,}024 \pm 0{,}006, \tag{6.19}$$

där felmarginalen betecknar en standardavvikelse. Att $\mathcal{E}_{\max} < 0{,}5$, det vill säga att den erhållna maximala sammanflätningsstyrkan är mindre än det teoretiska maxvärdet, innebär att det inte finns någon kombination av spridningsvinkel och rörelseenergi så att alla möjliga initialtillstånd ger ett fullt sammanflätat uttillstånd. Helt analogt innebär $\mathcal{E}_{\min} > 0$ att det inte finns någon spridningsvinkel och rörelseenergi där alla initialtillstånd skapar ett icke sammanflätat uttillstånd. För samma rörelsenergi och spridningsvinkel som ger ett minimum i figur 6.9, fås exempelvis i figur 6.10b ett nollskilt bidrag till sammanflätningsstyrkan. Felmarginalen är så pass liten i förhållande till $\mathcal{E}_{\min}$ att slutsatsen i någon mån är statistiskt säkerställd. Att notera är dock att $\mathcal{E}_{\min}$ ändå är förhållandevis nära noll vilket tyder på att de flesta tillstånd är icke sammanflätade eller väldigt lite sammanflätade i detta område.



Figur 6.9: Sammanflätningsstyrka för $J_{\max} = 9$, genererad med Monte Carlo-integrering över 500 slumpgenererade initialtillstånd. Sammanflätningens maximum och minimum erhölls då $T_{\text{lab}} = 179{,}6\,\text{MeV}$, $\theta = 106{,}6°$, respektive $T_{\text{lab}} = 19{,}1\,\text{MeV}$, $\theta = 1{,}0°$.

Nedan visas tvåentropin, ekvation (2.14), för ett parallellt initialtillstånd samt ett antiparallellt initialtillstånd.



(a) Parallellt initialtillstånd, $|\chi\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$.

(b) Antiparallellt initialtillstånd, $|\chi\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle$.

Figur 6.10: Tvåentropins energi- och vinkelberoende, där markeringarna refererar till det maximala värdet. Parallella initialtillstånd $|\uparrow\uparrow\rangle$ och $|\downarrow\downarrow\rangle$ ger samma figur och helt analogt för antiparallella initialtillstånd $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$.

Från definitionen av tvåentropin enligt ekvation (2.14) är det möjligt att härleda vilket förhållande som måste gälla mellan spridningsamplituderna i M-matrisen, se ekvation (4.19), för att få ett icke sammanflätat uttillstånd, det vill säga $\mathrm{tr}(\rho_A^2) = 1$. För ett parallellt initialtillstånd $|\uparrow\uparrow\rangle$ (helt analogt för $|\downarrow\downarrow\rangle$) är villkoret

$$|f_{|\uparrow\uparrow\rangle\to|\uparrow\downarrow\rangle} f_{|\uparrow\uparrow\rangle\to|\downarrow\uparrow\rangle} - f_{|\uparrow\uparrow\rangle\to|\uparrow\uparrow\rangle} f_{|\uparrow\uparrow\rangle\to|\downarrow\downarrow\rangle}| = 0. \tag{6.20}$$

På samma sätt fås för ett antiparallellt initialtillstånd $|\uparrow\downarrow\rangle$ (analogt för $|\downarrow\uparrow\rangle$) villkoret

$$|f_{|\uparrow\downarrow\rangle\to|\uparrow\uparrow\rangle} f_{|\uparrow\downarrow\rangle\to|\downarrow\downarrow\rangle} - f_{|\uparrow\downarrow\rangle\to|\uparrow\downarrow\rangle} f_{|\uparrow\downarrow\rangle\to|\downarrow\uparrow\rangle}| = 0. \tag{6.21}$$

Det ses i figur 6.10 att tvåentropin för initialtillståndet $|\uparrow\uparrow\rangle$ är noll medan den är nollskild för initialtillståndet $|\uparrow\downarrow\rangle$, för låga energier. Detta bekräftar analysen av parallella jämfört med antiparallella initialtillstånd som gjordes i avsnitt 6.1.3, utgående från formen på M för s-vågor. Uttrycket för $M^{L=0}$ i ekvation (4.21) ger att $f_{|\uparrow\uparrow\rangle\to|\uparrow\downarrow,\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow\rangle} = 0$, vilket innebär att villkoret i ekvation (6.20) är uppfyllt för s-vågor. Detta förklarar varför parallella initialtillstånd inte ger upphov till sammanflätning vid låga energier där s-vågsapproximationen gäller. För antiparallella tillstånd gäller enligt uttrycket för $M^{L=0}$ att $f_{|\uparrow\downarrow\rangle\to|\uparrow\uparrow,\downarrow\downarrow\rangle} = 0$ men $f_{|\uparrow\downarrow\rangle\to|\downarrow\uparrow,\uparrow\downarrow\rangle} \neq 0$. Villkoret i ekvation (6.21) är således inte uppfyllt, vilket möjliggör sammanflätning för antiparallella initialtillstånd även vid låga energier.

7

Sammanfattning

I denna rapport har det studerats i vilken grad M-matrisen för en nukleon-nukleonspridningsprocess sammanflätar de ingående nukleonernas spinntillstånd. M-matrisen har beräknats analytiskt för s-vågor och numeriskt för $L \geq 0$. Sammanflätningsstyrkan studerades också för de analytiska uttrycken på $S^{L=0}$ och $M^{L=0}$. Speciellt undersöktes gränsen $T_{\text{lab}} \to 0$ för $M^{L=0}$ i termer av effektiv räckvidd och spridningslängd. En jämförelse gjordes mellan den numeriskt beräknade M-matrisen och $M^{L=0}$ i lågenergigränsen. Sammanflätningsentropi har endast studerats numeriskt för att åskådliggöra korrelationen mellan måtten. Vidare har sammanflätningsstyrkans energi- och vinkelberoende studerats för den realistiska spridningen. Detta beroende konvergerar mot ett mönster för ett ökat värde på $J_{\max}$. Slutligen har det maximala och minimala värdet på sammanflätning identifierats både för specifika initialtillstånd, i termer av tvåentropi, samt för medelvärdesbildning av initialtillstånd, i termer av sammanflätningsstyrka.

7.1 Slutsatser

De slutsatser som kan dras från arbetet presenteras nedan och kan delas upp i tre kategorier: **(I)**-**(V)** tillhör de analytiska resultaten i avsnitt 6.1. **(VI)** och **(VII)** berör de jämförelser som görs mellan de analytiska och numeriska resultaten, samt de slutsatser som är gemensamma, presenterade i kapitel 6. Slutligen tillhör **(VIII)**-**(X)** de numeriska resultaten i avsnitt 6.2. Ordningen speglar inte slutsatsernas betydelse.

(I) Det var möjligt att härleda $S^{L=0}$-matrisen samt $\mathcal{E}(S^{L=0})$ för s-vågor analytiskt och därmed reproducera resultatet i [9] och [10].

(II) Sammanflätningsstyrkans maximala värde visades vara $1/6$ för $S^{L=0}$, vilket fås då skillnaden i fasskift mellan tripletten och singletten är $\pi/4 + n\pi/2$, för heltal n. Maxvärdet antas vid $T_{\text{lab}} \sim 10$ MeV samt i en skarp topp vid en mycket låg energi i figur 6.2. Villkoret för att sammanflätningsstyrkan ska bli noll är istället att skillnaden i fasskift är $n\pi/2$. Nollställen för $\mathcal{E}(S^{L=0})$ observerades vid $T_{\text{lab}} = 0$ MeV och ~ 1 MeV i figur 6.2.

(III) I uttrycken för $S^{L=0}$ och $M^{L=0}$ i den okopplade spinnbasen, se ekvation (6.4) och (6.16), är många matriselement noll. Den blockdiagonala formen uppkommer som en konsekvens av att endast s-vågor studeras. Detta implicerar i sin tur att vissa spridningsamplituder är noll. En följd av detta är att parallella initialtillstånd, $|\uparrow\uparrow\rangle$ eller $|\downarrow\downarrow\rangle$, inte kan byta spinn och således inte kan skapa sammanflätning vid låga energier. Ett antiparallellt tillstånd kan dock byta spinn enligt $|\uparrow\downarrow\rangle \to |\downarrow\uparrow\rangle$ och således bidra till sammanflätningen vid låga energier, vilket observerades i figur 6.10.

(IV) Utvecklingen av $M^{L=0}$ enligt ekvation (6.18), i termer av spridningslängd och effektiv räckvidd för låga energier, gjordes genom en kurvanpassning av $k\cot(\delta)$ enligt ekvation (4.11). Anpassningen visas i figur 6.3 och de resulterande värdena på spridningslängd och effektiv räckvidd blev $a_0 = -23{,}86\,\text{fm}$, $r_{0,0} = 2{,}70\,\text{fm}$, $a_1 = 5{,}44\,\text{fm}$ och $r_{0,1} = 1{,}60\,\text{fm}$. Dessa värden stämmer relativt väl överens med de resultat som presenteras i artikeln [28].

(V) Skillnaden mellan $\mathcal{E}(M^{L=0})$ beräknat med lågenergiapproximationen enligt ekvation (6.18) och $M^{L=0}$-matrisen enligt ekvation (6.16) med fasskift från NN-online visas i figur 6.4b. Det konstateras att fasskift från NN-online troligen är missvisande för riktigt låga energier. Argumentet för detta grundar sig i att gränsvärdet $\lim_{k\to 0} k\cot(\delta(k))$ divergerar, se figur 6.3, vilket inte stämmer överens med teorin, se till exempel ekvation (4.11). Orsaken till felaktiga fasskift är inte känd men på hemsidan utfärdas en varning att de inte kan garantera att all information är korrekt [27].

Således dras slutsatsen att den mer korrekta sammanflätningsstyrkan för M vid mycket låga energier, $T_{\text{lab}} < 0{,}08\,\text{MeV}$, beräknas med uttrycket på $M^{L=0}$ enligt ekvation (6.18) baserat på effektiv räckviddexpansion.

(VI) Till skillnad från $\mathcal{E}(S)$ så konvergerar $\mathcal{E}(M)$ mot ett nollskilt värde då $T_{\text{lab}} \to 0$. Detta innebär också att M-operatorn inte reduceras till identitetsoperatorn för låga energier.

(VII) I jämförelsen mellan den numeriska och analytiska beräkningen, se speciellt figur 6.5, är det tydligt att approximationen med s-vågor endast är giltig för energier mindre än några få MeV.

(VIII) Måtten sammanflätningsstyrka och medelvärdesbildad sammanflätningsentropi korrelerar i stor grad till varandra så att $\langle EE \rangle \approx 2\mathcal{E}$. Måtten har dock subtila skillnader, vars magnitud samt energi- och vinkelberoende kan ses i figur 6.7. Där framgår det att skillnaden mellan måtten motsvarar $6-14\%$ av $\langle EE \rangle$. Trots dessa skillnader är måtten i princip utbytbara och beskriver samma fysik. Därmed gäller de kommande slutsatserna även för sammanflätningsentropi.

(IX) För $J_{\max} \geq 4$ inkluderas ett tillräckligt stort antal partialvågor för att beskriva sammanflätningsstyrkans rörelseenergi- och spridningsvinkelberoende utan ett betydande trunkeringsfel. Detta kan fastslås då figur 6.8 når sitt konvergerade utseende i figur 6.8d där $J_{\max} = 4$. Om man önskar analysera sammanflätning vid höga energier med så stor noggrannhet som möjligt är det fördelaktigt att trunkera de tillåtna partialvågorna senare genom att öka $J_{\max}$, se figur 5.1a.

(X) Det erhållna maximala värdet på sammanflätningsstyrkan skiljer sig från det teoretiska maxvärdet, vilket leder till slutsatsen att det ej existerar några specifika rörelseenergier och spridningsvinklar som ger ett fullt sammanflätat uttillstånd för alla möjliga initialtillstånd. Den lägsta sammanflätningsstyrkan är liten och nollskild, se figur 6.9. I de regioner där sammanflätningsstyrkan är låg kan man dra slutsatsen att alla initialtillstånd antingen ger mycket svagt sammanflätade uttillstånd, alternativt att väldigt få starkare sammanflätade uttillstånd bildas.

7.2 Vidare studier

I framtida undersökningar bör fler potentialer än Nijmegen I beaktas. Det skulle då vara möjligt att undersöka sammanflätningens ursprung i den starka kraften. Förslagsvis kan det även undersökas om det finns specifika tillstånd som inte ger upphov till någon sammanflätning alls, och omvänt. Det hade även varit av intresse att studera fler sammanflätningsmått för att i större utsträckning se hur valet av mått påverkar graden av sammanflätning. En mer matematiskt inriktad fortsättning på detta arbete skulle kunna vara en djupare analys av vinkelberoende och Legendrepolynomens påverkan på det erhållna mönstret i figur 6.6. Detta skulle i sin tur kunna ge utökad förståelse i varför vissa spridningsvinklar och rörelseenergier leder till mer sammanflätning än andra. Det var inte möjligt att beräkna $\mathcal{E}(M^{L=0})$ analytiskt under den givna tidsramen. En lösning av integralen (6.17) skulle vara önskvärt för att hitta det analytiska uttrycket på $\mathcal{E}(M)$ för s-vågor.

Referenser

[1] A. Einstein, B. Podolsky och N. Rosen, ”Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?” *Phys. Rev.*, vol. 47, s. 777–780, 10 15 maj 1935. DOI: 10.1103/PhysRev.47.777. [Online]. Tillgänglig: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.47.777 (hämtad 2023-05-05).

[2] A. Muller. ”What is quantum entanglement? A physicist explains the science of Einstein’s ‘spooky action at a distance’.” (okt. 2022), [Online]. Tillgänglig: https://theconversation.com/what-is-quantum-entanglement-a-physicist-explains-the-science-of-einsteins-spooky-action-at-a-distance-191927 (hämtad 2023-03-08).

[3] J. S. Bell, ”On the Einstein Podolsky Rosen paradox,” *Physics Physique Fizika*, vol. 1, s. 195–200, 3 nov. 1964. DOI: 10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195. [Online]. Tillgänglig: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195 (hämtad 2023-05-05).

[4] B. Brubaker. ”How Bell’s Theorem Proved ‘Spooky Action at a Distance Is Real.” (juli 2021), [Online]. Tillgänglig: https://www.quantamagazine.org/how-bells-theorem-proved-spooky-action-at-a-distance-is-real-20210720/ (hämtad 2023-03-08).

[5] A. Aspect, J. Dalibard och G. Roger, ”Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time-Varying Analyzers,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 49, s. 1804–1807, 25 dec. 1982. DOI: 10.1103/PhysRevLett.49.1804. [Online]. Tillgänglig: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.1804 (hämtad 2023-05-07).

[6] S. J. Freedman och J. F. Clauser, ”Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 28, s. 938–941, 14 april 1972. DOI: 10.1103/PhysRevLett.28.938. [Online]. Tillgänglig: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.28.938 (hämtad 2023-05-07).

[7] G. Weihs, T. Jennewein, C. Simon, H. Weinfurter och A. Zeilinger, ”Violation of Bell’s Inequality under Strict Einstein Locality Conditions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, s. 5039–5043, 23 dec. 1998. DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.5039. [Online]. Tillgänglig: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.5039 (hämtad 2023-05-07).

[8] K. Vetenskapsakademien, ”Pressmeddelande: Nobelpriset i fysik 2022,” Stockholm, Sverige, 4 okt. 2022. [Online]. Tillgänglig: https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2022/193966-press-release-swedish/ (hämtad 2023-05-05).

[9] I. Low och T. Mehen, ”Symmetry from entanglement suppression,” *Phys. Rev. D*, vol. 104, s. 074 014, 7 14 okt. 2021. DOI: 10.1103/PhysRevD.104.074014. [Online]. Tillgänglig: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.074014 (hämtad 2023-03-08).

[10] S. R. Beane, D. B. Kaplan, N. Klco och M. J. Savage, ”Entanglement Suppression and Emergent Symmetries of Strong Interactions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 122, s. 102 001, 10 mars 2019. DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.102001. [Online]. Tillgänglig: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.122.102001 (hämtad 2023-03-08).

[11] D. Bai, ”Quantum information in nucleon-nucleon scattering,” *Phys. Rev. C*, vol. 107, s. 044 005, 4 april 2023. DOI: 10.1103/PhysRevC.107.044005. [Online]. Tillgänglig: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.107.044005 (hämtad 2023-05-08).

[12] J. J. de Swart, R. A. M. M. Klomp, M. C. M. Rentmeester och T. A. Rijken, ”The Nijmegen Potentials,” 1995. arXiv: nucl-th/9509024 [nucl-th].

[13] D. J. Griffiths och D. F. Schroeter, *Introduction to Quantum Mechanics*, 3. uppl. Cambrige: Cambridge University Press, 2018. DOI: 10.1017/9781316995433.

[14] M. A. Nielsen och I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, 10th Anniversary Edition. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2010, ISBN: 1-107-00217-6.

[15] J. R. Taylor, *Scattering theory: The Quantum Theory of Nonrelativistic Collisions*. Mineola, New York, USA: Dover Publications, 2006, ISBN: 0-486-45013-9.

[16] D. McMahon, "The Density Operator," i *Quantum Computing Explained*. 2008, s. 85–119. DOI: 10.1002/9780470181386.ch5.

[17] S. Kröll, "Chap. 2.4 – 2.6, Ensembles and density operators," Lunds Tekniska Högskola, Lund, Sverige, 17 april 2019. [Online]. Tillgänglig: http://www.matfys.lth.se/education/quantinfo/QIlect2.pdf (hämtad 2023-05-02).

[18] J. Gruska, *Quantum Computing* (Advanced Topics in computer science), V. J. Rayward Smith, Red. Berkshire, England: McGraw-Hill, 1999, ISBN: 0-077-09503-0.

[19] S. S. M. Wong, "Nucleon Structure," i *Introductory nuclear physics*, 2. uppl. New York City, New York, USA: John Wiley & Sons, 1998, kap. 2, s. 21–54, ISBN: 0471239739.

[20] O. Thim, "Renormalization of Chiral Effective Field Theory in the Nucleon-Nucleon Sector," MSc avhandling, Physics, Chalmers Tekniska Högskola, Göteborg, Sverige, 2021. [Online]. Tillgänglig: https://odr.chalmers.se/handle/20.500.12380/35 (hämtad 2023-01-31).

[21] R. H. Landau, *Quantum Mechanics II: A Second Course in Quantum Theory* (A Wiley-Interscience Publication), 2. uppl. New York City, New York, USA: John Wiley & Sons, 1996, ISBN: 0-471-11608-4.

[22] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Revised Edition, San Fu Tuan, Red. Reading, Massachusetts, USA: Addison-Wesley Publishing Company, 1994, ISBN: 0-201-53929-2.

[23] W. Glöckle, *The Quantum Mechanical Few-Body Problem*, 1. uppl. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1983. DOI: 10.1007/978-3-642-82081-6.

[24] O. Thim, privat kommunikation, 7 febr. 2023.

[25] R. H. Landau, M. J. Páez Mejía och C. C. Bordeianu, *Computational physics : problem solving with Python*. Tyskland, Weinheim: Wiley-VCH, 2015, ISBN: 9783527413157.

[26] W. T. V. William H. Press Saul A. Teukolsky och B. P. Flannery, "Simple Monte Carlo Integration," i *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, 3. uppl. New York City, New York, USA: Cambridge University Press, 1998, kap. 7.7, s. 397–398, ISBN: 0521880688.

[27] NN-online, "Nucleon-Nucleon phase shifts," [Online]. Tillgänglig: https://nn-online.org/NN/?page=nnphs2 (hämtad 2023-05-02).

[28] R. Navarro Pérez, J. E. Amaro och E. Ruiz Arriola, "The low-energy structure of the nucleon–nucleon interaction: statistical versus systematic uncertainties," *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, vol. 43, nr 11, s. 114 001, okt. 2016. DOI: 10.1088/0954-3899/43/11/114001. [Online]. Tillgänglig: https://dx.doi.org/10.1088/0954-3899/43/11/114001.

A

Extramaterial till härledning av S och sammanflätningsstyrka för S

I detta kapitel presenteras utelämnade detaljer som krävs för härledningen av $S^{L=0}$-matrisen och sammanflätningsstyrkan för denna, för s-vågor vid låga energier, som görs i avsnitt 6.1.

A.1 S-operatorn

Härledningen av $S^{L=0}$-matrisen i avsnitt 6.1.1 grundar sig på att $S^{L=0}$ kan skrivas som en linjärkombination av J^2 och $\mathbb{1}$. Detta följer från att båda termerna i $S^{L=0} = S_0 + S_1$ oberoende bevarar det totala rörelsemängdsmomentet $\boldsymbol{J}$ så att $[\boldsymbol{J},S_j] = 0$ för $j = 0,1$. För att visa att S_j för $j = 0,1$ och således även $S^{L=0}$ kan skrivas som en linjärkombination av $\mathbb{1}$ och J^2 krävs att $[J^2,S_j] = 0$ för $j = 0,1$. Det inses att $[\boldsymbol{J},S_j] = 0 \implies [J^2,S_j] = 0$ genom att använda motsvarigheten till produktregeln för kommutation:

$$[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B. \tag{A.1}$$

Denna bevisas enkelt genom utveckling av högerledet enligt

$$A[B,C] + [A,C]B = A(BC - CB) + (AC - CA)B = ABC - CAB = [AB,C].$$

I och med bevaring av $\boldsymbol{J}$ gäller för $j = 0,1$ ekvivalent uttryckt

$$[\boldsymbol{J},S_j] = 0 \iff [J_i,S_j] = 0 \quad \forall i \in \{1,2,3\}. \tag{A.2}$$

Utvecklas J^2 i uttrycket $[J^2,S_j]$ fås därmed

$$[J^2,S_j] = \left[\sum_{i=1}^{3} J_i^2, S_j\right] = \sum_{i=1}^{3}[J_i^2,S_j] = \sum_{i=1}^{3}(J_i[J_i,S_j] + [J_i,S_j]J_i) = 0, \tag{A.3}$$

där produktregeln för kommutation, ekvation (A.1), har använts i näst sista steget och bevaring av $\boldsymbol{J}$, ekvation (A.2), använts i sista steget. Detta bevisar att $[\boldsymbol{J},S_j] = 0 \implies [J^2,S_j] = 0$ för $j = 0,1$.

För s-vågor är alltid $L = 0$, vilket effektivt innebär att operatorn $\boldsymbol{L} = 0$, så att $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{s}_A + \boldsymbol{s}_B$ där $\boldsymbol{s}_A, \boldsymbol{s}_B$ är spinnoperatorerna för respektive partikel i det gemensamma spinnrummet. Dessa operatorer kan i den okopplade spinnbasen skrivas som $\boldsymbol{s}_A = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\otimes\mathbb{1}_B$ och $\boldsymbol{s}_B = \mathbb{1}_A\otimes\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ där $\mathbb{1}_i$ för $i = A,B$ är tvådimensionella identitetsmatriser, $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x\hat{x} + \sigma_y\hat{y} + \sigma_z\hat{z}$ och $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ är de tvådimensionella Paulimatriserna. Nu kan J^2 uttryckas i termer av Paulimatriserna (där x, y, z ersatts av $1, 2, 3$) enligt

$$\begin{aligned} J^2 &= (\boldsymbol{s}_A + \boldsymbol{s}_B)^2 = \frac{1}{4}(\boldsymbol{\sigma}\otimes\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\otimes\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\sigma}\otimes\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\otimes\boldsymbol{\sigma}) = \\ &= \frac{1}{4}((\boldsymbol{\sigma}\otimes\mathbb{1}_B)^2 + (\boldsymbol{\sigma}\otimes\mathbb{1}_B)(\mathbb{1}_A\otimes\boldsymbol{\sigma}) + (\mathbb{1}_A\otimes\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\sigma}\otimes\mathbb{1}_B) + (\mathbb{1}_A\otimes\boldsymbol{\sigma})^2) = \\ &= \frac{1}{4}\left(3\cdot\mathbb{1} + \sum_{k=1}^{3}\sigma_k\otimes\sigma_k + \sum_{k=1}^{3}\sigma_k\otimes\sigma_k + 3\cdot\mathbb{1}\right) = \frac{3}{2}\cdot\mathbb{1} + \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{3}\sigma_k\otimes\sigma_k, \end{aligned} \tag{A.4}$$

där $\mathbb{1}$ är den fyrdimensionella identitetsmatrisen. Därmed kan S_j, som kunde skrivas som en linjärkombination av J^2 och $\mathbb{1}$, även uttryckas som en linjärkombination av $\sum_{k=1}^{3}\sigma_k\otimes\sigma_k$ och $\mathbb{1}$.

För att bestämma koefficienterna i linjärkombinationerna för S_0 och S_1 används att dessa operatorer oberoende bevarar det totala spinnet, så att de två kanalerna med $S = 0$ (singlett) respektive 1 (triplett) inte är kopplade, samt att S-operatorn är unitär $S^\dagger S = \mathbb{1}$.

Projektion av singlett och triplett

De två kanalerna som finns för s-vågor är ${}^1\mathrm{S}_0$ och ${}^3\mathrm{S}_1$, som har olika värden på spinnet och således inte kopplar mellan varandra. Alltså måste ett initialtillstånd på singlettform, vilket motsvarar $S = 0$, ge ett uttillstånd på singlettform och motsvarande för triplett under verkan av $S^{L=0} = S_0 + S_1$. Då den kopplade basen är en komplett bas för $\mathscr{H}_{\text{spinn}}$ krävs därmed av S_0 att denna projicerar ett triplettillstånd på nollvektorn, och motsvarande för S_1 verkande på ett singlettillstånd. Därför studeras nedan projektion av singlett- och triplettillstånd på nollvektorn, under verkan av S_1 respektive S_0 i den okopplade spinnbasen.

Paulimatriserna definieras enligt

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma_2 = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma_3 = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{A.5}$$

vilket ger

$$\sigma_x \otimes \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma_y \otimes \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma_z \otimes \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{A.6}$$

För uttrycket som hittats för S_j i ekvation (6.2), $S_j = e^{i2\delta_j}(a_j \cdot \mathbb{1} + b_j \cdot \sum_{k=1}^{3} \sigma_k \otimes \sigma_k)$ i den okopplade spinnbasen, fås då följande matrisuttryck:

$$\begin{aligned} S_j &= e^{i2\delta_j} \left(a_j \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b_j \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= e^{i2\delta_j} \begin{bmatrix} a_j + b_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_j - b_j & 2b_j & 0 \\ 0 & 2b_j & a_j - b_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_j + b_j \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Ett generellt singlettillstånd i den okopplade basen kan skrivas som

$$|\chi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{A.8}$$

där tillståndets fas ϕ kan väljas godtyckligt. Om S_1 nu verkar på singletten och får följande vektorekvation på grund av att kanalerna inte är kopplade så att $S_1 |\chi_0\rangle = \mathbb{0}$:

$$\begin{aligned} S_1 |\chi_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} e^{i2\delta_1} \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 - b_1 & 2b_1 & 0 \\ 0 & 2b_1 & a_1 - b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 + b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} e^{i2\delta_1} \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 - 3b_1 \\ -a_1 + 3b_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \implies a_1 &= 3b_1. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Detta resulterar alltså i sambandet $a_1 = 3b_1$ för koefficienterna i S_1. På samma sätt fås om S_0 verkar på ett godtyckligt triplettillstånd (en generell normerad linjärkombination av de olika triplettillstånden) att $a_0 = -b_0$.

Det fås alltså, i den okopplade spinnbasen, att

$$\begin{aligned} S_0 &= e^{i2\delta_0}\left(a_0\mathbb{1} - a_0\sum_{k=1}^{3}\sigma_k\otimes\sigma_k\right) \\ S_1 &= e^{i2\delta_1}\left(a_1\mathbb{1} + \frac{1}{3}a_1\sum_{k=1}^{3}\sigma_k\otimes\sigma_k\right), \end{aligned} \tag{A.10}$$

så att $S^{L=0}$ på matrisform blir

$$\begin{aligned} S_{\updownarrow\updownarrow}^{L=0} = S_0 + S_1 &= e^{i2\delta_0}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_0 & -2a_0 & 0 \\ 0 & -2a_0 & 2a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{i2\delta_1}\begin{bmatrix} \frac{4}{3}a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}a_1 & \frac{2}{3}a_1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}a_1 & \frac{2}{3}a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3}a_1 \end{bmatrix} = \\ &= e^{i2\delta_0}A + e^{i2\delta_1}B, \end{aligned} \tag{A.11}$$

där matrisernas beteckningar A och B har införts för att förenkla notationen.

Normalisering av S

S är unitär vilket innebär att $S^\dagger S = \mathbb{1}$:

$$\begin{aligned} (S_{\updownarrow\updownarrow}^{L=0})^\dagger S_{\updownarrow\updownarrow}^{L=0} &= (e^{-i2\delta_0}A^\dagger + e^{-i2\delta_1}B^\dagger)(e^{i2\delta_0}A + e^{i2\delta_1}B) = \\ &= A^\dagger A + B^\dagger B + e^{i2(\delta_1-\delta_0)}A^\dagger B + e^{i2(\delta_0-\delta_1)}B^\dagger A = \mathbb{1}. \end{aligned} \tag{A.12}$$

För matriserna A och B fås följande relationer:

$$\begin{aligned} A^\dagger A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 8|a_0|^2 & -8|a_0|^2 & 0 \\ 0 & -8|a_0|^2 & 8|a_0|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B^\dagger B &= \begin{bmatrix} \frac{16}{9}|a_1|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{9}|a_1|^2 & \frac{8}{9}|a_1|^2 & 0 \\ 0 & \frac{8}{9}|a_1|^2 & \frac{8}{9}|a_1|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{9}|a_1|^2 \end{bmatrix} \\ A^\dagger B = B^\dagger A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{A.13}$$

vilket innebär att

$$(S_{\updownarrow\updownarrow}^{L=0})^\dagger S_{\updownarrow\updownarrow}^{L=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 8|a_0|^2 & -8|a_0|^2 & 0 \\ 0 & -8|a_0|^2 & 8|a_0|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{16}{9}|a_1|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{9}|a_1|^2 & \frac{8}{9}|a_1|^2 & 0 \\ 0 & \frac{8}{9}|a_1|^2 & \frac{8}{9}|a_1|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{9}|a_1|^2 \end{bmatrix} = \mathbb{1}. \tag{A.14}$$

Från detta fås ett ekvationssystem som kan lösas för att hitta koefficienterna enligt

$$\begin{cases} \frac{16}{9}|a_1|^2 = 1 \\ 8|a_0|^2 + \frac{8}{9}|a_1|^2 = 1 \\ -8|a_0|^2 + \frac{8}{9}|a_1|^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} |a_0| = \frac{1}{4} \\ |a_1| = \frac{3}{4}. \end{cases} \tag{A.15}$$

Då a_0 och a_1 väljs reella och positiva fås slutligen uttrycket på $S^{L=0}$-matrisen som

$$\begin{aligned} S_{\updownarrow\updownarrow}^{L=0} &= e^{i2\delta_0}\left(\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&2&0\\0&2&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\right) + \\ &+ e^{i2\delta_1}\left(\frac{3}{4}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&2&0\\0&2&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\right) = \\ &= \begin{bmatrix} e^{i2\delta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(e^{i2\delta_0}+e^{i2\delta_1}) & \frac{1}{2}(e^{i2\delta_1}-e^{i2\delta_0}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(e^{i2\delta_1}-e^{i2\delta_0}) & \frac{1}{2}(e^{i2\delta_0}+e^{i2\delta_1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i2\delta_1}\end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{A.16}$$

A.2 Sammanflätningsstyrka för S

Samstämmigheten $\Delta(|\chi\rangle)$ definieras som

$$\Delta(|\chi\rangle) = |\langle\chi|\sigma_y\otimes\sigma_y|\chi^*\rangle|. \tag{A.17}$$

För ett uttillstånd i den okopplade basen $|\chi_{\text{ut}}\rangle = \alpha|\uparrow\uparrow\rangle + \beta|\uparrow\downarrow\rangle + \gamma|\downarrow\uparrow\rangle + \delta|\downarrow\downarrow\rangle$, blir

$$\begin{aligned} \langle\chi_{\text{ut}}|\sigma_y\otimes\sigma_y|\chi_{\text{ut}}^*\rangle &= \begin{bmatrix}\alpha^* & \beta^* & \gamma^* & \delta^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha^*\\\beta^*\\\gamma^*\\\delta^*\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}\alpha^* & \beta^* & \gamma^* & \delta^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\delta^*\\\gamma^*\\\beta^*\\-\alpha^*\end{bmatrix} = -\alpha^*\delta^* + \beta^*\gamma^* + \beta^*\gamma^* - \alpha^*\delta^* \\ &= 2(\beta^*\gamma^* - \alpha^*\delta^*). \end{aligned} \tag{A.18}$$

Beloppet av detta blir, eftersom $|x^*| = |x|$:

$$|2(\beta^*\gamma^* - \alpha^*\delta^*)| = 2|(\beta\gamma - \alpha\delta)^*| = 2|\beta\gamma - \alpha\delta| = 2|\alpha\delta - \beta\gamma|. \tag{A.19}$$

Tvåentropin, vilken definieras enligt $\mathcal{E}_2(|\chi_{\text{ut}}\rangle) = \frac{1}{2}\Delta^2(|\chi_{\text{ut}}\rangle)$ blir då i termer av α, β, γ, δ:

$$\mathcal{E}_2(|\chi_{\text{ut}}\rangle) = 2|\alpha\delta - \beta\gamma|^2. \tag{A.20}$$

För att medelvärdesbilda över tvåentropin och därmed beräkna sammanflätningsstyrkan behöver ekvation (A.20) uttryckas i termer av a, b, c, d för att sedan integreras över Blochsfären. Relationen mellan α, β, γ, δ och a, b, c, d härleds enklast i Bellbasen, på grund av att detta är egenbasen för S. Transformationsmatrisen från den okopplade basen $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ till Bellbasen $\{|\phi^+\rangle, |\phi^-\rangle, |\psi^+\rangle, |\psi^-\rangle\}$ är

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&1&-1&0\end{bmatrix}. \tag{A.21}$$

$S^{L=0}$-matrisen blir då i Bellbasen, där $S^{L=0}$-matrisens element i den okopplade basen är definierade i ekvation (A.16),

$$\begin{aligned} S_{\text{Bell}}^{L=0} = TS_{\updownarrow\updownarrow}^{L=0}T^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_{11}&0&0&0\\0&S_{22}&S_{23}&0\\0&S_{23}&S_{22}&0\\0&0&0&S_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\1&-1&0&0\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}S_{11}&0&0&0\\0&S_{11}&0&0\\0&0&\frac{S_{22}+S_{23}}{2}&0\\0&0&0&\frac{S_{22}-S_{23}}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{i2\delta_1}&0&0&0\\0&e^{i2\delta_1}&0&0\\0&0&e^{i2\delta_1}&0\\0&0&0&e^{i2\delta_0}\end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{A.22}$$

Initialtillståndet $|\chi_{\text{in}}\rangle = (a\,|\uparrow\rangle + b\,|\downarrow\rangle) \otimes (c\,|\uparrow\rangle + d\,|\downarrow\rangle) = ac\,|\uparrow\uparrow\rangle + ad\,|\uparrow\downarrow\rangle + bc\,|\downarrow\uparrow\rangle + bd\,|\downarrow\downarrow\rangle$ blir i Bellbasen

$$|\chi_{\text{in}}\rangle_{\text{Bell}} = T\,|\chi_{\text{in}}\rangle_{\uparrow\downarrow} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}ac\\ ad\\ bc\\ bd\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}(ac+bd)\\ (ac-bd)\\ (ad+bc)\\ (ad-bc)\end{bmatrix}, \tag{A.23}$$

och uttillståndet $|\chi_{\text{ut}}\rangle = \alpha\,|\uparrow\uparrow\rangle + \beta\,|\uparrow\downarrow\rangle + \gamma\,|\downarrow\uparrow\rangle + \delta\,|\downarrow\downarrow\rangle$ blir

$$|\chi_{\text{ut}}\rangle_{\text{Bell}} = T\,|\chi_{\text{ut}}\rangle_{\uparrow\downarrow} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}(\alpha+\delta)\\ (\alpha-\delta)\\ (\beta+\gamma)\\ (\beta-\gamma)\end{bmatrix}. \tag{A.24}$$

Då fås

$$|\chi_{\text{ut}}\rangle_{\text{Bell}} = S^{L=0}_{\text{Bell}}\,|\chi_{\text{in}}\rangle_{\text{Bell}} = \begin{bmatrix}e^{i2\delta_1}\frac{1}{\sqrt{2}}(ac+bd)\\ e^{i2\delta_1}\frac{1}{\sqrt{2}}(ac-bd)\\ e^{i2\delta_1}\frac{1}{\sqrt{2}}(ad+bc)\\ e^{i2\delta_0}\frac{1}{\sqrt{2}}(ad-bc)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\delta)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha-\delta)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta+\gamma)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta-\gamma)\end{bmatrix}, \tag{A.25}$$

vilket ger en relation mellan $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ och a, b, c, d enligt

$$\begin{aligned}
\alpha &= e^{i2\delta_1}ac\\
\beta &= \frac{1}{2}(e^{i2\delta_1}(ad+bc) + e^{i2\delta_0}(ad-bc))\\
\gamma &= \frac{1}{2}(e^{i2\delta_1}(ad+bc) + e^{i2\delta_0}(bc-ad))\\
\delta &= e^{i2\delta_1}bd.
\end{aligned} \tag{A.26}$$

Från detta är det nu möjligt att beräkna $|\alpha\delta - \beta\gamma|^2$ vilket blir:

$$\begin{aligned}
|\alpha\delta - \beta\gamma|^2 &= \left|e^{i4\delta_1}abcd - \frac{1}{4}(e^{i4\delta_1}(ad+bc)^2 - e^{i4\delta_0}(ad-bc)^2)\right|^2 =\\
&= \left|\frac{1}{4}(e^{i4\delta_1}(ad-bc)^2 - e^{i4\delta_0}(ad-bc)^2)\right|^2 =\\
&= \left|\frac{1}{4}(ad-bc)^2(e^{i4\delta_1} - e^{i4\delta_0})\right|^2 =\\
&= \frac{1}{8}|(ad-bc)^2|^2(1-\cos(4(\delta_1-\delta_0))).
\end{aligned} \tag{A.27}$$

INSTITUTIONEN FÖR FYSIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg, Sverige
www.chalmers.se

CHALMERS