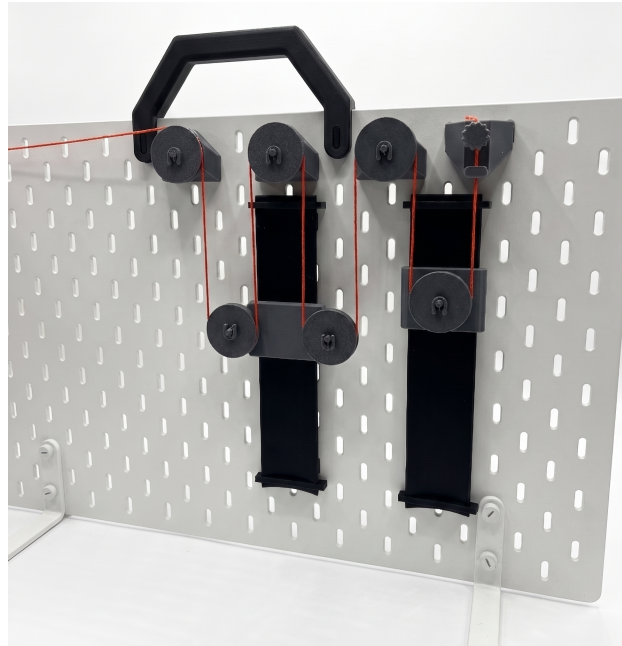




CHALMERS



Undervisningsmaterial i stelkroppsdynamik

För mekanikkurser på tekniska universitet

Kandidatarbete inom Mekanik och Maritima Vetenskaper

Alexandersson, Elvira

Dristig, Elin

Gibson, Linus

Palm, Tilda

Saxlöv, Gustav

INSTITUTIONEN FÖR MEKANIK OCH MARITIMA VETENSKAPER

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

Göteborg, Sverige 2026

www.chalmers.se

KANDIDATARBETE I MASKINTEKNIK

Undervisningsmaterial i stelkroppsdyamik

För mekanikkurser på tekniska universitet

Alexandersson Elvira
Dristig Elin
Gibson Linus
Palm Tilda
Saxlöv Gustav



CHALMERS

Institutionen för Mekanik och Maritima Vetenskaper
Avdelningen för dynamik
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg 2026

Undervisningsmaterial i stelkroppsdyamik
För mekanikkurser på tekniska universitet
Alexandersson Elvira
Dristig Elin
Gibson Linus
Palm Tilda
Saxlöv Gustav

© Alexandersson Elvira, Dristig Elin, Gibson Linus,
Palm Tilda, Saxlöv Gustav 2026.

Handledare: Dr Petri Piiroinen, Avd. för dynamik
Examinator: Dr Jim Brouzoulis, Avd. för dynamik

Kandidatarbete 2026
Institutionen för Mekanik och Maritima Vetenskaper
Chalmers Tekniska Högskola
SE-412 96 Göteborg
Telefon +46 31 772 1000

Omslagsbild: utbildningsmaterial för trissor skapat av projektgruppen.

Typsatt i L^AT_EX
Göteborg 2026

Undervisningsmaterial i stelkroppsdyamik
För mekanikjurser på tekniska universitet
Alexandersson Elvira, Dristig Elin, Gibson Linus,
Palm Tilda, Saxlöv Gustav
Institutionen för Mekanik och Maritima Vetenskaper
Avdelningen för Dynamik
Chalmers Tekniska Högskola

Sammanfattning

Detta projekt utforskar utvecklingen av pedagogiskt undervisningsmaterial inom ämnet stelkroppsdyamik genom användning av additiv tillverkning (3D-utskrift). Syftet med arbetet är tvåfaldigt: dels att erbjuda lärare konkret stöd i deras pedagogiska utformning, och dels underlätta studenternas inlärningsprocess genom att visualisera mekaniska förlopp. Genom att realisera teoretiska modeller till fysiska prototyper skapas förutsättningar för en djupare begreppsförståelse och en mer interaktiv utbildningsmiljö inom högre teknisk utbildning.

Nyckelord: dynamik, pedagogik, trissor, rörelsemängdsmoment, tröghetsmoment, pendelrörelse, cirkulär rörelse, svängningar, fjädrar.

Författarnas tack

Det finns många som har bidragit till att göra detta projekt genomförbart. Först och främst vill projektgruppen rikta ett varmt tack till vår handledare, Petri Piironen, för sitt ovärderliga stöd under arbetets gång. Hans engagemang, tillgänglighet och flexibilitet har varit avgörande för projektets framdrift.

Vi vill även tacka vår examinator, Jim Brouzoulis, för sin tillgänglighet och vilja att hjälpa oss att nå ett bra resultat. Ett stort tack riktas till de lärare som tagit sig tid att delta i intervjuer; deras insikter och idéer har varit värdefulla för utformningen av materialet. Vi tackar även de studenter som bidragit med värdefull återkoppling genom att besvara vår enkät.

Sist men inte minst vill vi tacka vår systergrupp för ett givande samarbete. Deras bidrag vid idégenereringen var avgörande för den produkt som framställdes i projektet i syfte att illustrera tröghetsmoment.

Elvira Alexandersson, Elin Dristig, Linus Gibson, Tilda Palm, Gustav Saxlöv,
Göteborg, Maj, 2026

Användning av AI-verktyg

Under projektets gång har generativa AI-verktyg, däribland ChatGPT, Gemini AI och Scopus AI, använts som komplement i arbetsprocessen. Dessa verktyg har främst nyttjats för att höja textens språkliga kvalitet genom förbättringar av formalia och meningsbyggnad utifrån befintliga utkast. AI har även använts för att retuschera egna fotografier och göra dem mer enhetliga genom att isolera mätverktyg och koncept mot en helt vit bakgrund. Vidare har AI-verktygen fungerat som stöd i sökandet efter relevanta vetenskapliga artiklar samt för felsökning och optimering av källkod i L^AT_EX. Det slutgiltiga innehållet och de vetenskapliga slutsatserna har i samtliga fall granskats och verifierats av författarna för att säkerställa arbetets korrekthet och integritet.

Akronymer

Nedan är listan över akronymer som har använts genom hela denna avhandling listade i alfabetisk ordning:

STEM	Science, Technology, Engineering, Mathematics
PETG	Polykolmodifierad polyetentereftalat
PLA	Polylaktid
TPU	Termoplastisk polyuretan
ABS	Akrylnitrilbutadienstyren
PM	Promemoria
AI	Artificiell Intelligens
3D	Tredimensionell
CAD	Computer-Aided Design
G-kod	Geometrisk kod
QR	Quick Response

Nomenklatur

Nedan är nomenklaturen för index, uppsättningar, parametrar och variabler som har använts genom hela denna avhandling.

Index och Symboler

1, 2, 3, 4, 5, 6	Betecknar specifika snittytor eller punkter
C, P	Betecknar värden tillhörande referenspunkt C respektive punkt P
d	Dämpad
$G, \bar{\square}$	Betecknar masscentrum (tyngdpunkten) respektive storhet vid masscentrum
i	Räknarindex för partiklar eller masselement
MC	Avser värden tillhörande momentacentrum
P/C	Relativ position (Punkt P relativt punkt C)
s	Syftar på snöre
O	Betecknar att storheten är beräknad kring en specifik axel eller punkt
x, y, z	Betecknar storhetens verkningsriktning
Σ	Summa-operator (t.ex. summan av alla krafter)
$\dot{\square}, \ddot{\square}$	Punkt(er) över en storhet betecknar första respektive andra tidsderivatan

Parametrar

c	Dämpningskoefficient [Ns/m]
d	Vinkelrätt avstånd mellan parallella axlar [m]
g	Tyngdacceleration [m/s ²]
I, \bar{I}	Masströghetsmoment respektive masströghetsmoment kring masscentrum [kgm ²]
k	Fjäderkonstant (styvhet) [N/m]

L	Pendellängd [m]
m	Massa (total massa eller för element i om m_i) [kg]
n	Totalt antal partiklar eller element i systemet
t	Tidsparameter som anger det aktuella tidstillståndet i systemet
ζ	Dämpningsgrad (dimensionslös dämpningskoefficient) [-]

Variabler

$\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}$	Accelerationvektor respektive masscentrums accelerationvektor [m/s ²]
E	Total mekanisk energi [J]
F, F_s	Kraft respektive linkraft [N]
L	Rörelsemängdsmoment [kgm ² /s]
M	Kraftmoment [Nm]
Q	Yttre lastfunktion (kraft eller normaliserad kraft)
\mathbf{r}	Positionsvektor [m]
T	Kinetisk energi [J] eller Period [s]
U	Potentiell energi (t.ex. fjäderenergi) [J]
$\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}$	Hastighet respektive masscentrums hastighet [m/s]
x, y, z	Position i rätvinkliga koordinater [m]
θ	Utslagsvinkel [rad]
ω, ω_d	Vinkelhastighet respektive dämpad Vinkelhastighet [rad/s]

Innehåll

Akronymer	xi
Nomenklatur	xiii
Figurer	xvii
Tabeller	xix
1 Inledning	1
1.1 Bakgrund	1
1.2 Syfte	2
1.3 Mål	3
1.4 Avgränsningar	3
2 Teori	5
2.1 Additiv tillverkning och plaster	5
2.1.1 PETG	6
2.1.2 PLA	6
2.1.3 TPU	6
2.2 Stela kroppars dynamik i planet	6
2.2.1 Kinematik vid plan rörelse	7
2.2.2 Rotationsdynamik och masströghetsmoment	10
2.2.3 Kinetik för stela kroppar	10
2.3 Trissor	11
2.4 Svängningar	12
2.4.1 Pendlar	13
2.4.2 Fjädrar	15
2.4.3 Dämpare	17
3 Metod	19
3.1 Behovsanalys och datainsamling	19
3.2 Idégenerering och litteraturstudier	19
3.3 Utformning av slutkoncept och tillverkning	21
3.4 Utformning av instruktionsmaterial	21
3.5 Verifiering	22
4 Resultat	23

4.1	Utfall av datainsamling och behovsanalys	23
4.2	Koncept: Rörelsemängdsmoment	25
4.3	Koncept: Tröghetsmoment	27
4.4	Koncept: Trissystem	28
4.5	Koncept: Momentancentrum	28
4.6	Koncept: Svängningsrörelse	29
4.6.1	Pendelsystem	29
4.6.2	Fjädersystem	31
5	Diskussion	35
5.1	Utvärdering av utbildningsmaterialet	35
5.1.1	Datainsamlingen	35
5.1.2	Rörelsemängdsmoment	36
5.1.3	Tröghetsmoment	36
5.1.4	Trissystemet	36
5.1.5	Momentancentrum	37
5.1.6	Svängningsrörelse	37
5.2	Metoddiskussion	37
5.3	Fördelning av resurser	38
5.4	Vidareutveckling	38
6	Slutsats	39
	Källförteckning	41
A	Kursstatistik för referenskurser	I
B	Formulär till studenter	III
C	Laborations-PM	V
C.1	Labb PM - Rörelsemängdsmoment	V
C.2	Labb PM - Trissystem	XI
C.3	Labb PM - Momentancentrum	XVI
C.4	Labb PM - Pendelsystem	XIX
C.5	Labb PM - Fjädersystem	XXII
C.6	Konceptskisser	XXIV

Figurer

2.1	Teoretisk illustration av momentancentrum och dess polkurva. Figuren visar hur momentancentrum kontinuerligt förflyttar sig längs en geometrisk bana (polbana) under rörelsens gång.	8
2.2	Kinematisk hastighetsfördelning för ett hjul som rullar utan glidning.	9
2.3	Kinematisk accelerationsfördelning för ett hjul som rullar utan glidning.	9
2.4	Visuell representation av de inre snittkrafter som friläggs vid ett godtyckligt snitt av en belastad lina.	12
2.5	Visuell representation av ett system med två sammankopplade trissor i ett block.	12
2.6	Friläggning av det intilliggande blocket. Här synliggörs de uppåtriktade dragkrafterna i linorna som bär upp systemet.	12
2.7	Grafisk representation av en odämpad harmonisk svängning för ett fjäder-massasystem. Figuren illustrerar massans position som funktion av tiden (t), där rörelsens amplitud (A) och periodtid (T) är utmärkta.	13
2.8	Visualisering av en matematisk pendel. Figuren definierar de centrala parametrarna för systemet: punktmassan (m), snörets längd (L) samt utslagsvinkeln (θ) mätt från det vertikala jämviktsläget.	14
2.9	Visuell representation av ett belastat fjädersystem. Bilden åskådliggör sambandet mellan förskjutningen (x) från jämviktsläget och den resulterande fjäderkraften (F), vilket utgör grunden för tillämpningen av Hookes lag.	16
2.10	Grafisk jämförelse mellan en odämpad harmonisk svängning (heldragen linje) och en dämpad svängning (streckad linje) för ett fjäder-massasystem.	17
3.1	Håltavla från IKEA för montering av de fysiska modellerna.	20
3.2	Roterande rigg bestående av en aluminiumprofil monterad på ett stativ. 20	
4.1	Resultat från enkätundersökningen. Sammanställningen visar vilka kursmoment inom dynamiken som de tillfrågade studenterna upplevde som mest utmanande.	23
4.2	Grunduppställning för visualisering av rörelsemängdsmoment.	25
4.3	Experimentella mätvärden vid laboration om rörelsemängdsmoment. Grafen visar hur systemets rotationshastighet varierar dynamiskt som ett resultat av förändringar i uppställningen under mätförloppet.	26
4.4	Den slutgiltiga fysiska modellen för demonstration av tröghetsmoment. 27	

4.5	Trissystemet monterat på håltavlan. Uppställningen visar trisshjul, glidskenor och viktslädar som tillsammans möjliggör demonstration av varierande snörkraftsförhållanden och kinematiska samband.	28
4.6	Modell för visualisering av momentancentrum monterad på håltavla. Skärningspunkten mellan de två indikatorstängerna lokaliserar momentancentrum för den rörliga huvudstången under hela rörelseförloppet.	29
4.7	Laborationsuppställning för pendelrörelse monterad på håltavla. Bilden visar pendelarmen med det integrerade fästet för accelerometer.	30
4.8	Uppmätt accelerationsresultant över tid för två olika pendelkonfigurationer. Grafen visar hur systemet förändras när mätningen utförs med (grön kurva) respektive utan (lila kurva) extra vikter monterad på pendelarmen.	31
4.9	Uppställning för fjädersystem monterad på håltavla med det 3D-utskrivna fästet, accelerometern samt upphängning av fjäder och massa	32
4.10	Experimentell mätdata från fjädersystemet. Grafen illustrerar det uppmätta svängningsförloppet över tid när systemet belastats med en testvikt på 100 gram.	32
B.1	Enkätformulär för utvärdering av studenternas upplevelse.	IV
C.1	Grunduppställningsskiss för visualisering av rörelsemängdsmoment, där viktsläden befinner sig i sitt yttre läge.	VIII
C.2	Systemet efter att släden dragits in mot centrum, vilket minskar radien och därmed ökar vinkelhastigheten.	VIII

Tabeller

2.1	Definitioner av centrala begrepp	7
4.1	Sammanställning av krav och önskemål på undervisningsmaterialet baserat på datainsamlingen.	25
4.2	Sammanställning av experimentella parametrar och beräknad avvikelser. Tabellen redovisar systemets tillstånd i två lägen, samt den procentuella förlusten av rörelsemängdsmoment jämfört med det teoretiska idealfallet ($L_1 = L_2$).	26
A.1	Sammanställning av genomströmning och snittbetyg för utvalda grundkurser i mekanik/dynamik.	I
C.1	Labbutrustning rörelsemängdsmoment	VI
C.2	Labbutrustning trissystem	XIII
C.3	Labbutrustning momentacentrum	XVII
C.4	Labbutrustning pendelsystem	XX
C.5	Labbutrustning fjädersystem	XXIII

1

Inledning

Detta kandidatarbete är utfört vid Chalmers Tekniska Högskola och undersöker hur moderna tillverkningsmetoder och fysiska modeller kan tillämpas som stöd för lärande. Detta inledande kapitel ger en övergripande förståelse för projektets relevans och kontext. Här presenteras arbetets bakgrund, syfte och specifika mål, följt av de ramar och avgränsningar som format projektets genomförande.

1.1 Bakgrund

Inom STEM-utbildningar har undervisningen länge präglats av stark betoning på fysikalisk teori och abstrakta ekvationer. En central utmaning inom dessa utbildningar är att minska gapet mellan teoretiska modeller och fysikalisk intuition. På tekniska utbildningar sker kunskapsinhämtningen ofta genom traditionell auditorieundervisning, vanligtvis i föreläsningssalar utan interaktiva inslag eller fysiska demonstrationer som kan konkretisera innehållet. Auditorieundervisning anses av pedagogen John Dewey vara otillräcklig för att främja den djupa förståelsen (Utbildningsradion (UR), 2007). Pedagogen Celestin Freinet trodde starkt på det trevande försöket, att man skulle testa och se resultatet; verkligheten är en bra lärobok (Freinetrörelsen i Sverige, u.å.). Det är ofta den djupare förståelsen som krävs för att självständigt kunna analysera och lösa komplexa ingenjörproblem. Användningen av verklighetstroga exempel i ingenjörutbildningar har visat sig vara ett effektivt sätt att begripliggöra fysikaliska teorier och abstrakta begrepp (Gero m. fl., 2017). Exempelvis har verkliga exempel hjälpt studenter att koppla samman teoretisk fakta från tidigare kurser för att sedan implementera i den aktuella kursen, vilket har ökat förståelsen.

Ett flertal studier visar på att visuella metoder ger bättre inläring jämfört med auditiva metoder (Khoueiry & Nabhan, 2024), (Pudlowski, 2024). Dessa artiklar stöttar dessutom John Deweys och Celestin Freinets teorier. Det har även visat sig att studenter ofta upplever svårigheter med att visualisera och tillgodogöra sig de abstrakta begrepp och fenomen som introduceras under föreläsningarna (Cooke, 2022). Samma studie menar också att det som hindrar föreläsare att använda sig av fysiska modeller under sin undervisning är tidsbrist och ekonomiska begränsningar. Enligt en metastudie av Freeman m. fl. (2014) presterar studenter inom STEM-ämnen betydligt bättre när undervisningen innehåller aktiva moment (Att en inte bara tar emot information, utan att en tvingas bearbeta, omformulera eller använda den). Studien visar att risken för att få underkänt ökar med 55% om kursen enbart bygger

på traditionella föreläsningar. För att kunna frånga traditionell katederundervisning krävs nya läromedel som är utformade för att främja ett mer aktivt lärande. Det behövs verktyg som kan illustrera abstrakta koncept och därmed göra det lättare för studenter att koppla samman matematiska modeller med den fysiska verkligheten.

Stelkroppsdyamik är ett vanligt förekommande ämne inom många ingenjörsutbildningar, där förståelsen för stela kroppars rörelse och krafter lägger grunden för att kunna möta framtida ingenjörsmässiga utmaningar. I dessa sammanhang betraktas stelkroppsdyamik som ett utmanande ämne, då det kopplar samman komplicerad algebra och abstrakt teori. Enligt statistik hämtad från Fysikteknologsektionen, Chalmers Studentkår (2026) är genomströmningsgraden i snitt för grundkurser i mekanik på Chalmers 56,5 % mellan hösten 2010 och våren 2026 (Appendix A). Genom att introducera fysiska modeller för området stelkroppsdyamik kan studenter på ett intuitivt sätt gå från matematiska samband, exempelvis sambandet mellan massa, dämpning och återställande kraft i en harmonisk oscillator, till konkreta upplevelser. Detta underlättar skapandet av en mental modell, där studenten kan koppla den teoretiska differentialekvationens lösning till systemets faktiska rörelse och energiförlust över tid. De modeller som utvecklas inom ramen för detta projekt ska visa klassiska dynamiska koncept och lagar på ett intuitivt sätt som tillför ett direkt akademiskt mervärde i undervisningen. De framställda fysiska modellerna i projektet berör områdena - tröghetsmoment, rörelsemängdsmoment, trissor och svängningar. För att realisera dessa intuitiva läromedel och uppnå den precision som krävs för dynamiska experiment, har modern produktionsteknik spelat en avgörande roll.

Under de senaste decennierna har additiv tillverkning genomgått en omfattande teknisk utveckling, från att primärt ha varit ett verktyg för visuell prototypframställning till att möjliggöra produktion av funktionella komponenter med hög precision (Thompson m. fl., 2016). Additiv tillverkning möjliggör en hög grad av geometrisk frihet, vilket förenklar framställningen av specifika mekaniska komponenter (Ngo m. fl., 2018).

Tidigare kandidatarbeten har utforskat 3D-utskrivningens potential som ett verktyg för att snabb prototypframställning (Al-Duski m. fl., 2025), men i detta arbete expanderas gränserna för statisk visualisering genom funktionell integration av sensorer och mätinstrument. Genom att designa modellerna så att trådlösa kraft- och accelerationssensorer kan integreras på ett smidigt sätt, skapas förutsättningar att kombinera fysiska modeller med realtidsdata. Därmed kan cirkeln mellan teori, praktik och analys slutas och en interaktiv läromiljö där studenter kan observera ett fysiskt förlopp, se mätvärdena i realtid och direkt koppla dessa till de underliggande ekvationerna.

1.2 Syfte

Projektet syftar till att utveckla och konstruera fysisk demonstrationsutrustning avsedd för undervisningen i stelkroppsdyamik vid tekniska högskolor. Undervisningsmaterialet skall underlätta för studenter att förstå kopplingen mellan teori och

praktik, och därmed främja en djupare intuitiv förståelse för ämnet. I huvudsak skall projektet tillämpa 3D-utskrivning som tillverkningsmetod.

1.3 Mål

Samtliga mål har syftet att öka studenternas förståelse för dynamiska system. Huvudmålet är att konstruera fysiska och pedagogiska system för dynamikundervisning klart för implementering innan sista maj 2026 (2026-05-30).

Ett delmål är att undervisningsmaterialet ska vara portabelt mellan föreläsningssalar. Detta innebär en kompakt design och en intuitiv monteringsprocess som inte kräver externa verktyg.

Ett annat delmål är integrera mätutrustning som möjliggör datainsamling av relevanta dynamiska storheter (såsom acceleration, kraft eller hastighet) för realtidspresentation under föreläsningmoment.

Det sista delmålet är att utforma utbildningsmaterialet med en modulär struktur som tillåter hög grad av flexibilitet. Utöver de fördefinierade instruktionerna ska komponenterna kunna kombineras fritt för att möjliggöra skräddarsydda demonstrationer utifrån föreläsarens egna behov.

1.4 Avgränsningar

Projektet avgränsades utifrån tillgänglig tid och resurser för att säkra kvaliteten på arbetet. Arbetet avgränsades primärt till området stelkroppsdynamik inom grundkurser för dynamik.

Gällande det specifika innehållet låg fokus på följande fenomen: tröghetsmoment, trissor, svängningar, momentacentrum och rörelsemängdsmoment. Målsättningen var att leverera ett antal välfungerande modeller snarare än att täcka hela kursinnehållet.

Framtagningen av modellerna avgränsades till additiv tillverkning (3D-utskrift) och därmed tillkom materiella begränsningar. Polymererna PETG och PLA användes på grund av deras lättillgänglighet, och TPU tack vare dess materiella egenskaper.

Slutligen var en avgränsning att inget undervisningsmaterial kommer att framställas för området stötar och impulser. Anledningen var att projektet primära fokus låg på 3D-printade komponenter. De materialegenskaper som dessa plaster besitter möjliggör inte tillräckligt ideala mekaniska förlopp för att uppnå önskad pedagogisk tydlighet inom området stötar.

2

Teori

I följande kapitel presenteras arbetets teoretiska utgångspunkter. Fokus ligger uteslutande på de principer och beräkningar som är avgörande för förståelsen av arbetets ämnen och efterföljande modellskapande. De områden som behandlas kan direkt kopplas till tillhörande laborationer som återfinns i Appendix C.

2.1 Additiv tillverkning och plaster

En form av additiv tillverkning är 3D-utskrift, en process som står i kontrast till traditionella subtraktiva metoder där material successivt avlägsnas från ett råämne. Vid additiv tillverkning byggs objektet istället upp stegvis, vanligtvis lager för lager, utifrån en digital modell (Wikipedia, u. å-a). I detta projekt tillämpas tekniken genom användning av en 3D-skrivare avsedd för termoplaster.

Processen inleds med en CAD-modell, vilken utgör en digital tredimensionell representation av den tänkta geometrin. Denna geometrin diskretiseras i höjdded (byggriktningen) av en mjukvara, en så kallad *slicer*, som översätter modellen till en serie tvådimensionella tvärsnitt (Wikipedia, u. å-a). Mjukvaran genererar sedan maskinspecifika styrinstruktioner (vanligtvis G-kod) för att kontrollera munstyckets positionering. Filament matas ner i ett munstycke som värms upp till materialets smältpunkt, vilket vanligtvis överstiger 200 °C. Det smälta materialet extruderas på en byggplatta och därefter ovanpå föregående materiallager tills hela geometrin är uppbyggd. En mindre lagertjocklek resulterar i en bättre ytfinhet, men medför samtidigt att det blir längre utskrifttid.

Metoden möjliggör snabb prototypframtagning (*Rapid Prototyping*). Ytterligare en fördel är den stora geometriska friheten; additiv tillverkning kan framställa komplexa strukturer som med konventionella metoder vore antingen för resurskrävande eller tekniskt omöjliga att framställa (Formlabs, u. å-b). Metoden är även kostnadseffektiv vid små tillverkningsserier, då investeringskostnaden för en enklare 3D-skrivare är avsevärt lägre än för exempelvis industriell gjututrustning.

Tekniken har dock vissa begränsningar gällande mekanisk hållfasthet (Wikipedia, u. å-a). Eftersom objektet byggs lager för lager uppstår en strukturell anisotropi, vilket innebär att komponenten blir påtagligt svagare i gränssnitten mellan de lagda skikten. Jämfört med formsprutade komponenter uppvisar 3D-utskrivna delar generellt även lägre måttoleranser och en grövre ytstruktur.

2.1.1 PETG

PETG (Polyetylentereftalat modifierat med glykol) är en amorf termoplast baserad på konventionell PET-plast (123-3D, u. å-a). En av de främsta fördelarna med att använda PETG vid 3D-utskrift är dess mekaniska egenskaper; materialet kombinerar hög draghållfasthet med god seghet, till skillnad från exempelvis PLA som tenderar att vara mer sprött. PETG erbjuder en slagseghet som är jämförbar med ABS-plast (en amorf, termoplastisk sampolymer), men utan många av de utskriftsproblem som associeras med ABS, så som kraftig krympning och utsläpp av skadliga ångor (RS Components, u. å). Vid höga temperaturer uppvisar materialet en låg viskositet, vilket möjliggör utskrifter i högre hastigheter utan att kompromissa med materialflödet.

2.1.2 PLA

PLA (Polyaktid) är en naturligt nedbrytbar termoplast som utvinns från förnybara resurser såsom majsstärkelse eller rörsocker (Wikipedia, u. å-b). Det utgör det absolut vanligaste materialet inom 3D-utskrivning, främst på grund av dess lättillgänglighet och den är kompatibel med nästan alla skrivare på marknaden enligt 123-3D (u. å-b). En nackdel jämfört med PETG är dock att PLA är betydligt sprödare och har sämre värmebeständighet.

2.1.3 TPU

TPU (Termoplastisk polyuretan) tillhör gruppen termoplastiska elastomerer och är ett material som är både slitstarkt och flexibelt (Formlabs, u. å-a). Materialet används ofta inom 3D-utskrivning eftersom det är en av de få termoplaster som besitter gummiliknande egenskaper, vilket gör det lämpat för komponenter som kräver rörlighet, vibrationsdämpning eller för att agera som tätningar i trånga utrymmen.

2.2 Stela kroppars dynamik i planet

Inom klassisk mekanik delas beskrivningen av kroppars rörelse in i de två huvudområdena *kinematik* och *kinetik* (Grahn m. fl., 2022). Kinematiken beskriver sambandet mellan position, hastighet och acceleration för både translation och rotation. Här betraktas objekt som rent geometriska kroppar, där massan och de verkande krafterna utesluts från analysen för att enbart fokusera på själva rörelseförloppet. Kinetiken förklarar däremot hur massan och krafterna som påverkar en kropp förändrar dess rörelse. Inom stelkroppsdynamik används ett antal fundamentala begrepp för att beskriva en kropps rörelse. Dessa begrepp listas i Tabell 2.1.

Tabell 2.1: Definitioner av centrala begrepp

Begrepp	Beskrivning
Partikel	En kropp som kan betraktas som en punktmassa och enbart beskrivs av sin massa och position, utan geometrisk utsträckning.
Stel kropp	En idealiserad kropp där deformationer försummas, vilket innebär att det inbördes avståndet mellan kroppens partiklar förblir konstant.
Plan rörelse	Rörelse där samtliga hastighetsvektorer är parallella med ett givet plan. Eventuell rotation sker kring en axel ortogonal mot detta plan (z -axeln).
Ren translation	Rörelseform där samtliga punkter i kroppen vid varje givet ögonblick har identiska hastighetsvektorer, vilket exkluderar rotation.
Masscentrum	Den punkt där hela kroppens massa kan anses vara koncentrerad.

2.2.1 Kinematik vid plan rörelse

Vid analys av stela kroppars kinematik är sambandet mellan translation och rotation fundamentalt. Allmän plan rörelse kan analyseras utifrån superpositionsprincipen, vilket innebär att en kropps rörelse beskrivs som en superposition av translationen för en godtycklig referenspunkt, C , och kroppens rotation kring en axel som går genom C (Grahm m. fl., 2022). För en godtycklig punkt P på en stel kropp kan hastigheten \mathbf{v}_P uttryckas:

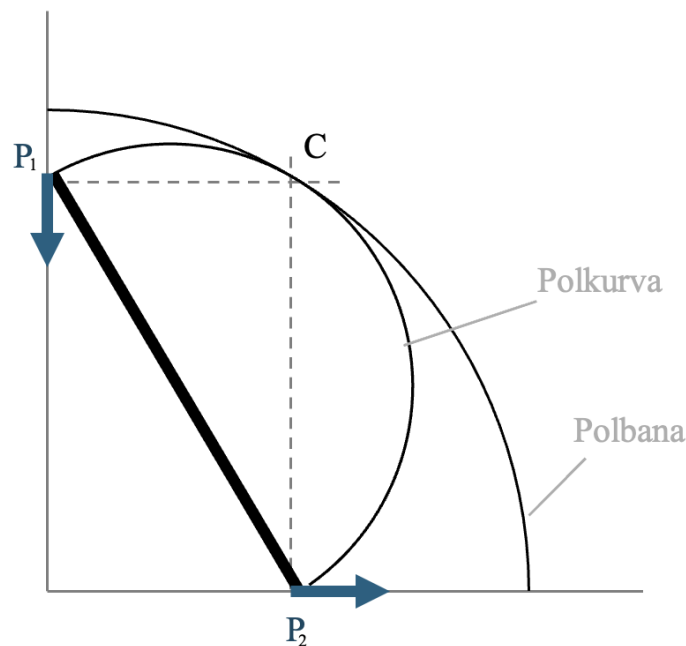
$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/C} \quad (2.1)$$

där $\boldsymbol{\omega}$ är kroppens vinkelhastighet och $\mathbf{r}_{P/C}$ är Ortsvektorn från C till P .

Ett sätt att förenkla den kinematiska analysen är att identifiera kroppens momentancentrum. Genom att i ett givet ögonblick välja en punkt C sådan att dess hastighet är noll ($\mathbf{v}_C = 0$), kan hela kroppens rörelse beskrivas som en ren rotation kring denna specifika punkt:

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/C} \quad (2.2)$$

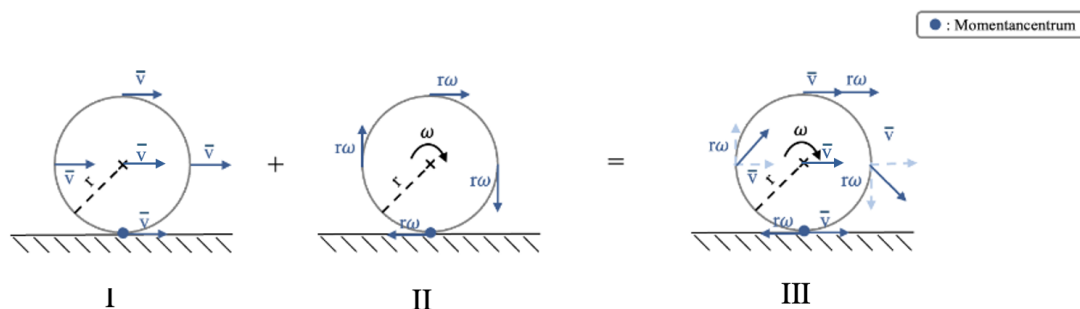
Det är värt att understryka att momentancentrum är en tidsberoende punkt som varken behöver vara fixerad i rummet eller ens ligga inom kroppens fysiska begränsningar. För att beskriva dess förflyttning över tid används begreppet polkurvor. Man skiljer här på den bana momentancentrum beskriver i ett fixerat referenssystem, kallad polbanan, och den bana som ses från ett koordinatsystem som följer kroppens rörelse, kallad polkurvan (se Figur 2.1). I varje givet ögonblick tangerar dessa två kurvor varandra i det aktuella momentancentrumet.



Figur 2.1: Teoretisk illustration av momentancentrum och dess polkurva. Figuren visar hur momentancentrum kontinuerligt förflyttar sig längs en geometrisk bana (polbana) under rörelsens gång.

Ett annat klassiskt exempel på fenomenet är ett hjul som rullar utan glidning mot ett underlag, där kontaktpunkten utgör hjulets momentancentrum. Om momentancentrum inte är känt men hastighetsvektorerna i två godtyckliga punkter är kända, kan man geometriskt bestämma punkten C för kroppens momentancentrum. Den kan förflytta sig över tid, men i varje givet ögonblick är dess hastighet noll ($\mathbf{v}_C = 0$). Om momentancentrumet är känt kan hastigheten \mathbf{v} beräknas i godtycklig punkt på kroppen.

I Figur 2.2 illustreras hur den resulterade hastigheten för ett hjul som rullar utan glidning uppstår genom superposition av translation- och rotationshastigheterna. Den vänstra delen av figuren, delfigur I, representerar den rena translationen där alla punkter på hjulet rör sig framåt med masscentrums hastighet, v . Delfigur II visar istället den rena rotationen kring masscentrum, där den tangentiella hastigheten vid hjulets yttre är $v = \omega r$. När dessa två rörelser adderas utvinns den resulterande hastighetsfördelningen (delfigur III).



Figur 2.2: Kinematisk hastighetsfördelning för ett hjul som rullar utan glidning.

I kontaktpunkten mot underlaget är translations- och rotationsrörelsen lika stora men motriktade, vilket ger hastigheten noll ($v - \omega r = 0$) och därmed momentancentrum. Den allmänna hastighetsekvationen för en stelkropp ges på vektorform av:

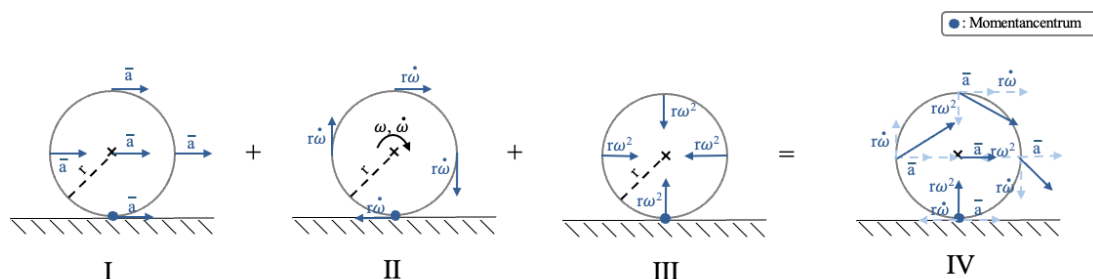
$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/C} \quad (2.3)$$

För den specifika plana rörelsen, där hastigheterna är parallella, kan sambandet reduceras till dess skalära form:

$$v_P = v_C + \omega r \quad (2.4)$$

Genom att dela upp vektorerna i x - och y -komponenter kan hastighetens belopp och riktning för en godtycklig punkt bestämmas med hjälp av Pythagoras sats och trigonometri.

Accelerationen i en godtycklig punkt P på hjulet beräknas på samma sätt som för hastigheten, med superposition av alla separata accelerationsvektorer, vilket illustreras i Figur 2.3. Dessa utgörs av masscentrums translatoriska acceleration, den tangentiella accelerationen till följd av kroppens vinkelacceleration, samt normalaccelerationen.



Figur 2.3: Kinematisk accelerationsfördelning för ett hjul som rullar utan glidning.

Det allmänna sambandet för accelerationen i en punkt P ges på vektorform av:

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_C + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{P/C} - \omega^2 \mathbf{r}_{P/C} \quad (2.5)$$

Vid rullning utan glidning appliceras detta samband på hjulets kontaktpunkt mot underlaget (momentancentrum). På samma sätt som för hastigheten tar masscentrums translatoriska acceleration och punktens tangentiella acceleration exakt ut varandra horisontellt. Däremot kvarstår normalaccelerationen vilket innebär, trots att hastigheten i momentancentrum momentant är noll har den en resulterande acceleration riktad mot hjulets centrum och beloppet $r\omega^2$.

2.2.2 Rotationsdynamik och masströghetsmoment

För att beskriva en stel kropps motstånd för rotationsacceleration används begreppet masströghetsmoment, I (Grahn m. fl., 2022). Detta är en skalär storhet som bestäms av kroppens massfördelning i förhållande till sin rotationsaxel. För en kropp med kontinuerlig massfördelning definieras tröghetsmomentet kring en axel O som:

$$I_O = \int_m r^2 dm, \quad (2.6)$$

där r är det vinkelräta avståndet från rotationsaxeln till masselementet dm . Om en ändrar axelriktningen och/eller förflyttar angreppspunkten kan en utvinna olika masströghetsmoment. Tröghetsmoment och tyngdpunkter för vanligt förekommande geometriska kroppar finns beräknade och tabellerade i *Mekanik* av Grahn m. fl. (2022). För beräkningar kring axlar som inte sammanfaller med masscentrum används *Steiners sats*, även känt som *parallellaxelteoremet*:

$$I_O = \bar{I} + md^2. \quad (2.7)$$

I Ekvation (2.7) ovan representeras tröghetsmomentet, \bar{I} , kring en parallell axel genom masscentrum, där m är kroppens totala massa och d är avståndet mellan axlarna.

2.2.3 Kinetik för stela kroppar

Sambandet mellan krafter, moment, acceleration och vinkelacceleration för en stel kropp i plan rörelse styrs av två grundläggande samband: *Newtons andra lag* för translation och *rörelsemängdsmomentlagen* för rotation (Grahn m. fl., 2022). För en kropp med masscentrum G som utför en plan rörelse kan rörelseekvationerna reduceras och ställas upp som:

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \quad (2.8)$$

$$\sum F_y = m\bar{a}_y \quad (2.9)$$

$$\sum M_G = \bar{I}\dot{\omega} \quad (2.10)$$

I Ekvationerna (2.8), (2.9) och (2.10) är $\sum F$ är resultanten av de yttre krafterna, där \bar{a}_x och \bar{a}_y är accelerationerna i x respektive y -led. $\sum M_G$ är summan av alla yttre moment med avseende på masscentrum och $\dot{\omega}$ betecknar kroppens vinkelacceleration.

För att förstå momentekvationens ursprung studerar vi kroppens rörelsemängdsmoment \mathbf{L} , vilket kan beskrivas som ett mått på kroppens rotationsmängd. För ett enskilt masselement m_i i en stel kropp som roterar kring en fix punkt O , definieras rörelsemängdsmomentet kring z -axeln som $L_{zi} = m_i r_i^2 \omega$. Genom att summera samtliga element erhålls kroppens totala rörelsemängdsmomentet:

$$L_z = \left(\int_m r^2 dm \right) \omega = I_O \omega \quad (2.11)$$

Enligt principen för partikelsystem motsvarar summan av de yttre momenten tidsderivatan av rörelsemängdsmomentet, $\sum M_O = \dot{L}_O$. För en stel kropp med konstant masströghetsmoment leder detta till sambandet:

$$\sum M_{Oz} = \dot{L}_z = I_O \dot{\omega} \quad (2.12)$$

Matematiskt utgör detta en andra ordningens ordinär differentialekvation för kroppens vinkelläge, vilken är central för att beskriva rotationsförlopp.

Ett vanligt specialfall är rotation kring en fix axel O . Vid analys av sådana system är det ofta fördelaktigt att ställa upp momentekvationen (2.12) direkt kring rotationsaxeln O . Den främsta fördelen med detta tillvägagångssätt är att de okända lagerkrafterna i punkten inte ger upphov till något moment kring axeln. Detta medför att vinkelaccelerationen kan bestämmas direkt, utan att lagerreaktionerna först behöver beräknas.

2.3 Trissor

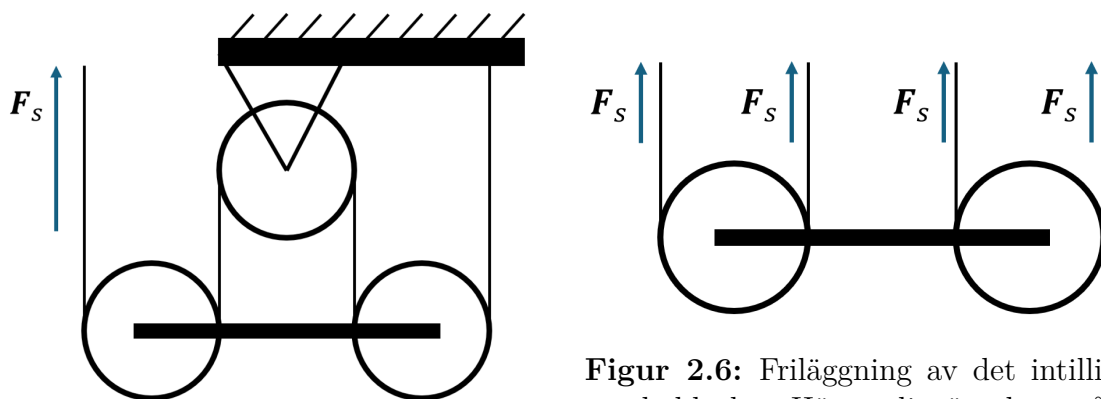
En trissa är en, kring sin mittpunkt vridbar, rund skiva med ett spår runt om för snöre, rep eller rem (Svenska Akademien, 2007). Typiska tillämpningar är hiss- och lyftanordningar samt kraftöverföring. Trissor används delvis för att rikta en dragkraft applicerad på en lina som löper över den, men kan även enligt Nationalencyklopedin (u.å.) kombineras i så kallade block för att åstadkomma en kraftförstärkning. Ett block är ett system av trissor bestående av ett blockhus som håller flertalet lagrade trissor, där en lina löper fram och tillbaka mellan två block.

De huvudsakliga grundprinciperna i trissystem är att linor alltid är spända och enbart överför en dragkraft samt att normalkraften i linan, även kallad linkraften, är konstant genom linans längd. Vidare hanteras typiskt enbart ideala linor i grundkurser i mekanik. Det vill säga masslösa linor med oändlig styvhet som därmed inte töjs under belastning. Detta tillsammans med att linkraften är konstant medför att den inte utför något arbete även om linan förflyttas. Genom att studera ett godtyckligt snitt i linan, illustrerat i Figur 2.4, ses att den resulterande kraften alltid är noll då \mathbf{F}_s^1 är lika stor som \mathbf{F}_s^2 men motriktad.



Figur 2.4: Visuell representation av de inre snittkrafter som friläggs vid ett godtyckligt snitt av en belastad lina.

Med den konstanta linkraften kan även kraftförstärkningen förklaras. Figur 2.5 visar en 2D-illustration av ett block med två trissor. Linan är fast i ena änden, löper över en fast trissa samt har en pålagd kraft, F_s , i den fria änden. Genom friläggning av blocket, som i Figur 2.6, fås att det lyfts med en kraft fyra gånger så stor som den pålagda kraften, den dubblas med varje trissa i blocket. Kraftförstärkningen i ett block är alltså proportionell mot antalet trissor i blocket med proportionalitetskonstant två.



Figur 2.5: Visuell representation av ett system med två sammankopplade trissor i ett block.

Figur 2.6: Friläggning av det intilliggande blocket. Här synliggörs de uppåtriktade dragkrafterna i linorna som bär upp systemet.

Uppgifter med trissproblem kan generellt delas in i två grupper där trissan antingen är masslös eller inte. Problem med masslösa trissor, det vill säga trissor utan tröghetsmoment, handlar ofta om kinematiska samband och kraftförstärkning. I dessa problem ses trissan även ofta som friktionsfri. Trissor med massa tillämpas oftast i problem med accelererande system, där trissans tröghetsmoment blir en bidragande faktor till systemets acceleration och kraftbalans.

2.4 Svängningar

Svängningar, även kallade oscillationer, utgör ett grundläggande fenomen inom dynamiken som beskriver en periodisk rörelse runt ett jämviktsläge (Wrathall, 2021). Ett jämviktsläge definieras som det tillstånd ett system befinner sig i när den resulterande kraften på systemet är noll. Under den periodiska rörelsen av en svängning sker en kontinuerlig växling mellan kinetisk och potentiell energi. En svängningsrörelse som sker utan energiförluster och därmed med konstant amplitud, kallas för

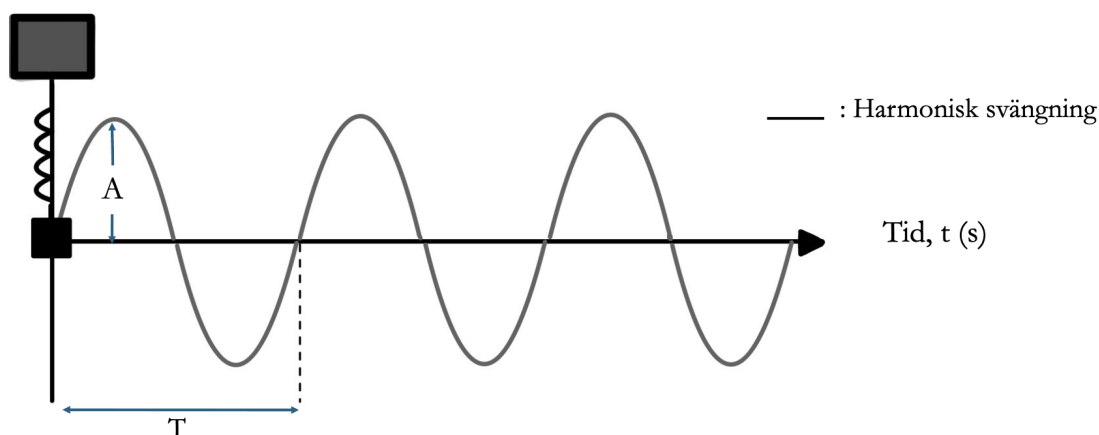
en harmonisk svängning. Grundekvationen för en allmän svängningsrörelse beskrivs av en andra ordningens differentialekvation (Japp, 2003):

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = Q(t) \quad (2.13)$$

där ω är den odämpade egenvinkelfrekvensen, ζ är dämpningskoefficienten och $Q(t)$ är den yttre kraften.

En svängning fungerar genom att ett system förskjuts från sitt jämviktsläge vilket i sin tur skapar en återställande kraft som verkar i riktning mot jämviktsläget. Den periodiska rörelsen innebär att systemet svänger fram och tillbaka runt jämviktspunkten. Vid vändlägena är hastigheten noll och den potentiella energin högst, medan i jämviktslägena är hastigheten som högst och den kinetiska energin maximal (Stork, 2014).

Vid analys av svängningar beskrivs lösningen ofta av en sinus- och/eller cosinusfunktion. Amplituden anger det maximala avståndet från jämviktsläget, medan perioden är den tid det tar för en fullständig svängning (Figur 2.7).



Figur 2.7: Grafisk representation av en odämpad harmonisk svängning för ett fjäder-massasystem. Figuren illustrerar massans position som funktion av tiden (t), där rörelsens amplitud (A) och periodtid (T) är utmärkta.

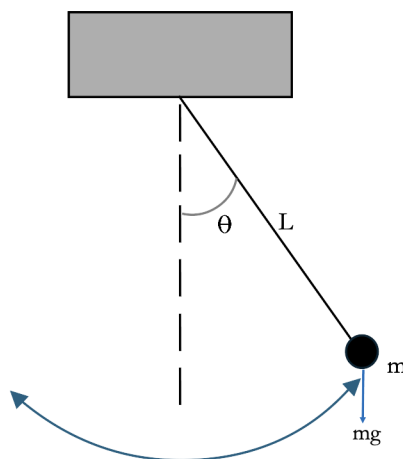
Eftersom svängningar är ett grundläggande fenomen inom dynamiken förekommer de inom många områden, exempelvis i system med pendlar och fjädrar, men även i dämpade system, vilket är vanligt i nästan alla verkliga svängningsförlopp. För att uppnå en fullständig förståelse av svängningsfenomen är det därför viktigt att beakta dessa olika typer av svängningar.

2.4.1 Pendlar

Inom dynamiken är en pendel en mekanism med en periodisk rörelse som tillämpas inom flera områden, såsom seismologi, urverk och energiutvinning (Avanço m. fl., 2025). Vid rörelse bevaras pendelns mekaniska energi och omvandlas kontinuerligt

mellan potentiell energi och rörelseenergi. En pendel är alltså en form av svängnings-system.

Pendeln består i sin enklaste form av en massa upphängd i ett snöre eller en stel stång som tillåts oscillera kring sitt jämviktsläge (Figur 2.8). Då pendeln dras från sitt jämviktsläge skapas en vinkel, θ , mellan pendeln och vertikalaxeln. När pendeln släpps genererar tyngdkraften ett vridmoment som strävar efter att återföra pendeln mot jämviktsläget. Under rörelsen mot jämviktsläget accelererar pendeln och passerar sedan detta läge på grund av sin tröghet. När pendeln har passerat jämviktsläget verkar vridmomentet i motsatt riktning, vilket bromsar pendeln tills den stannar och vänder. Denna rörelse upprepas kontinuerligt och ger upphov till en periodisk svängningsrörelse.



Figur 2.8: Visualisering av en matematisk pendel. Figuren definierar de centrala parametrarna för systemet: punktmassan (m), snörets längd (L) samt utslagsvinkeln (θ) mätt från det vertikala jämviktsläget.

Även om pendeln till synes har en enkel struktur, utgör den ett fundamentalt system för studier av dynamik. För att beskriva en enkel pendels rörelse, oavsett utslagsvinkel, krävs en icke-linjär differentialekvation:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0. \quad (2.14)$$

Lösningen till ekvationen (2.14) är betydligt mer komplex än för vanliga harmoniska svängningar eftersom att den kräver användning av elliptiska integraler, vilket innebär att pendelns period inte är konstant utan ökar med svängningens amplitud. Vid mindre utslagsvinklar kan dock systemet förenklas. När vinkeln θ är liten kan man använda Taylorutvecklingen för sinusfunktionen, $\sin(\theta) \approx \theta$ (där θ mäts i radianer), vilket gör att rörelsen kan approximeras med en linjär differentialekvation (Anakhaev, 2014):

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0. \quad (2.15)$$

Ekvation (2.15) beskriver en idealiserad harmonisk svängning. Denna linjärisering ger en konstant period, T , som endast beror på pendelns längd L och tyngdaccelerationen g :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (2.16)$$

Genom att jämföra dessa två svängningsfall blir det tydligt att den linjära approximationen är användbar för små rörelser, men att den icke-linjära ekvationen (2.14) krävs för en korrekt beskrivning så fort systemets utslag ökar.

2.4.2 Fjädrar

En fjäder kännetecknas av att vara ett elastiskt maskinelement som lagrar och frigör mekanisk energi. Under belastning deformeras fjädern elastiskt, vilket gör att den lagrar potentiell energi samt ger en motriktad, återställande, kraft. När belastningen minskar återgår fjädern till sin ursprungliga längd och den lagrade energin frigörs (Kumar & Meenu, 2022). Den vanligast förekommande typen av fjädrar är linjärelastiska. Det syftar på en fjäder vars utövade kraft är proportionell mot elongationen och kan beskrivas med Hookes lag ("Hookes lag", u.å.):

$$F = -kx \quad (2.17)$$

Där F är fjäderkraften, k fjäderkonstanten och x förskjutningen från fjäderns obelastade längd, det vill säga dess elongation. Den återställande kraften, fjäderkraften, är alltid motriktad elongationen, därav minustecknet.

Samtliga fjädrar har en fjäderkonstant som används vid beräkningar. Fjäderkonstanten, k , är ett mått på en fjäders styvhet och anger hur stor kraft som krävs för att sträcka eller trycka ihop fjädern en viss längd x . Fjäders fysiska egenskaper är det som bestämmer värdet på fjäderkonstanten.

Om en linjärelastisk fjäder antas vara ideal, inga energiförluster i form av exempelvis värmeutveckling, kan en ekvation för den lagrade energin i fjädern enkelt härledas med Hookes lag. Den pålagda kraften är lika stor men motriktad fjäderkraften. Arbetet fås genom integration av den pålagda kraften över sträckan den appliceras, det vill säga fjäderns elongation. Den potentiella energin i en ideal linjärelastisk fjäder kan därmed bestämmas enligt följande ekvation:

$$U = \int kx dx = \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.18)$$

När en massa kopplas till en fjäder bildas ett svängningssystem. Figur 2.9 visar ett system där en massa hänger lodrätt i en linjärelastisk fjäder och positiv x -riktning är definierad nedåt. Systemet kan analyseras med Newtons andra lag:

$$\Sigma F = m \cdot a \quad (2.19)$$

Vilket ger följande ekvation:

$$-F + mg = m\ddot{x} \quad (2.20)$$

Kraften F kan beskrivas med Hookes lag enligt Ekvation 2.17. Kraften F redan är definierad som motriktad elongationen i Figur 2.9, därmed sker ingen teckenändring. Ekvation 2.20 kan då skrivas om till:

$$-kx + mg = m\ddot{x} \quad (2.21)$$

Med en sista omskrivning fås differentialekvationen som beskriver rörelsen, där fjäderkraften utgör den återställande kraften:

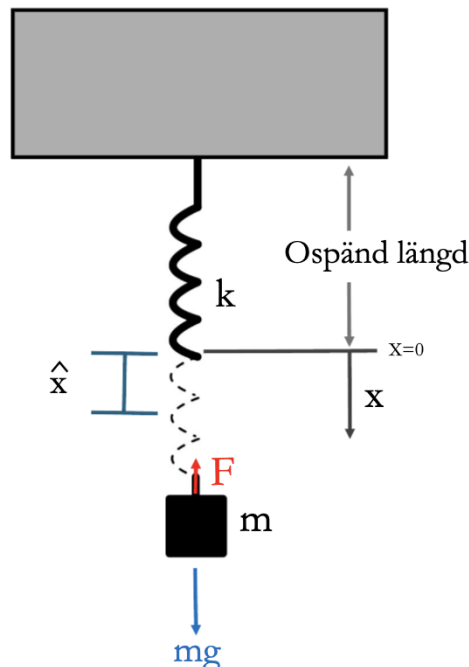
$$m\ddot{x} + kx - mg = 0 \quad (2.22)$$

Jämviktsläget i fjädersystem skiljer sig ofta från det läget där fjädern är obelastad på grund av yttre laster. I systemet i Figur 2.9 förekommer detta i form av gravitationskraften mg . Jämviktsläget hos en belastad fjäder är då accelerationen är noll, $\ddot{x} = 0$. Variabeln \hat{x} införs för att beskriva elongationen där systemet befinner sig i jämvikt. Ekvationen blir för jämviktsläget blir således:

$$k\hat{x} - mg = 0 \quad (2.23)$$

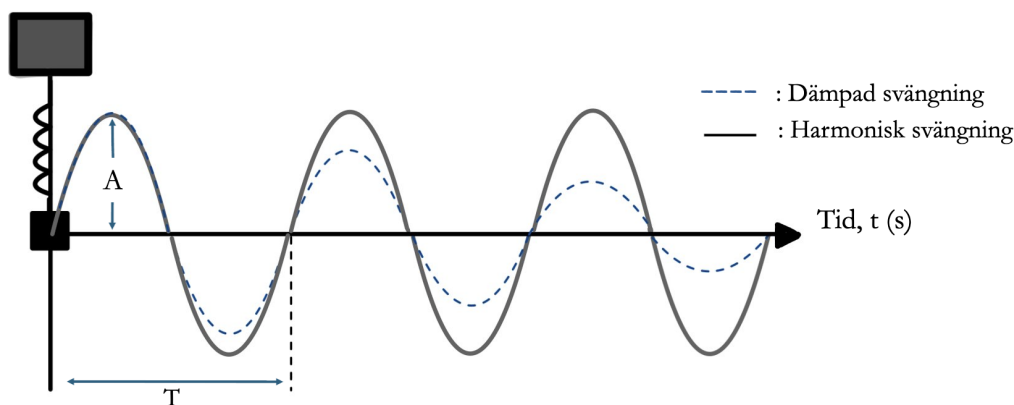
Om ekvationen löses med avseende på \hat{x} fås jämviktsläget för system med hängande massa:

$$\hat{x} = \frac{mg}{k} \quad (2.24)$$



Figur 2.9: Visuell representation av ett belastat fjädersystem. Bilden åskådliggör sambandet mellan förskjutningen (x) från jämviktsläget och den resulterande fjäderkraften (F), vilket utgör grunden för tillämpningen av Hookes lag.

I verkliga fjädersystem förekommer alltid dämpning eftersom ideella fjädrar inte existerar. Detta medför att amplituden minskar över tid på grund av energiförluster, se Figur 2.10. Dämpning introducerar en ny term till ekvationen, vilket beskrivs ytterligare i avsnitt 2.4.3.



Figur 2.10: Grafisk jämförelse mellan en odämpad harmonisk svängning (heldragen linje) och en dämpad svängning (streckad linje) för ett fjäder-massasystem.

2.4.3 Dämpare

Dämpare är ett dynamiskt element med syfte att avleda energi och dämpa vibrationer (Zach, 2019). Den allmänna rörelseekvationen för ett dämpat svängningssystem ges av:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = Q(t) \quad (2.25)$$

där termen $2\zeta\omega\dot{x}(t)$ representerar systemets dämpning. Parametern ζ kallas för det relativa dämpningstalet och är ett mått som karakteriserar hur systemet förlorar energi. Beroende på dämpningstalets storlek klassificeras systemets beteende vanligtvis i fyra huvudfall: odämpad svängning ($\zeta = 0$), svag dämpning ($0 < \zeta < 1$), kritisk dämpning ($\zeta = 1$) och stark dämpning ($\zeta > 1$).

Svag dämpning, $0 < \zeta < 1$, innebär att systemet inte påverkas avsevärt av dämpning utan systemet svänger fortfarande fram och tillbaka och amplituden avtar över tid. Rörelsen för svag dämpning kan beskrivas med:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega t}(C_1 \sin(\omega_d t) + C_2 \cos(\omega_d t)) \quad (2.26)$$

där ω_d är den dämpade vinkelfrekvensen och beräknas genom:

$$\omega_d = \omega\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2.27)$$

Termen $e^{-\zeta\omega t}$ beskriver energiförlusten. Fallet då $\zeta = 0$ beskriver en odämpad svängning, vilket innebär ingen energiförlust och därmed svänger systemet med en konstant amplitud. Odämpad svängning uppnås sällan i verkligheten då faktorer som

friktion, luftmotstånd och gravitation bidrar med dämpning. Rörelsen för kritisk dämpning då $\zeta = 1$ beskrivs med ekvationen:

$$x(t) = e^{-\omega t}(C_3t + C_4) \quad (2.28)$$

och innebär att systemet inte oscillerar utan går direkt tillbaka till jämvikt. Konstanterna $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ är integrationskonstanter som bestäms av systemets begynnelsevillkor. Dessa gör det möjligt att anpassa den generella lösningen till ett specifikt fysikaliskt fall.

Det sista fallet är stark dämpning och innebär att dämpningen är så pass stark att systemet inte svänger alls utan genom en långsam och trög rörelse rör sig tillbaka mot jämviktsläget. Stark dämpning $\zeta > 1$ beskrivs av ekvationen:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega t} \left(C_5 e^{\omega t \sqrt{\zeta^2 - 1}} + C_6 e^{-\omega t \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right) \quad (2.29)$$

3

Metod

För att kunna överföra de pedagogiska behoven till fysiskt fungerande läromedel, har arbetet följt en systematisk och iterativ produktutvecklingsprocess. Denna metodik möjliggjorde en kontinuerlig utvärdering, där tekniska och pedagogiska insikter löpande kunnat integrerats i designarbetet. Arbetet har delats upp i fem övergripande huvudfaser som bygger på varandra. I de följande avsnitten redogörs i detalj tillvägagångssättet i respektive fas.

3.1 Behovsanalys och datainsamling

För att säkerställa att det framtagna undervisningsmaterialet förankrats i faktiska student- och undervisningsbehov, inleddes arbetet med en behovsanalys. Denna fas syftade primärt till att kartlägga vilka teoretiska koncept inom stelkroppsdynamiken som ur ett pedagogiskt perspektiv utgör de största inlärningströsklarna.

Datainsamlingen delades upp i två delar för att belysa problemet från två olika perspektiv. Det genomfördes en kvalitativ intervjustudie med lärare för att fånga upp den pedagogiska erfarenheten av återkommande missuppfattningar och historiska fallgropar. Samtidigt utfördes en digital kvantitativ enkätundersökning riktad till studenter vid Chalmers Tekniska Högskola som läst minst en kurs i ämnet, för att fånga upp studenternas självupplevda svårigheter. Denna enkät skapades i Google Formulär och sattes upp med QR-koder runt om på campus Johanneberg och finns bifogad i Appendix B.

Huvudsyftet med denna kombination av metoder var att säkerställa hög validitet vid identifieringen av de mest utmanande kursmomenten, samt att undersöka studenternas inställning till fysiska modeller som inlärningsstöd. Insikterna från denna fas sammanställdes sedan för att utgöra grunden till den riktlinjerna som styrde idégenereringen och den fortsatta utvecklingen av prototyperna.

3.2 Idégenerering och litteraturstudier

Efter avklarat bakgrundsarbete genomfördes idégenereringen iterativt och löpte parallellt med litteraturstudien. Denna metodik valdes medvetet för att säkerställa en kontinuerlig återkoppling. På så sätt kunde teoretiska och pedagogiska insikter direkt styra designarbetet, vilket i sin tur minskade risken för framtida korrigeringar.

3. Metod

Litteraturstudien avgränsades till de problemområden som identifierats under dainsamlingen, samt till pedagogisk teori kring fysiska demonstrativa exempel och laborativt lärande. Studien baserades på en kombination av facklitteratur inom stelkroppsdyamik, vetenskapliga artiklar rörande pedagogik samt branschspecifika och webbaserade källor för att bland annat kartlägga materialegenskaper vid additiv tillverkning.

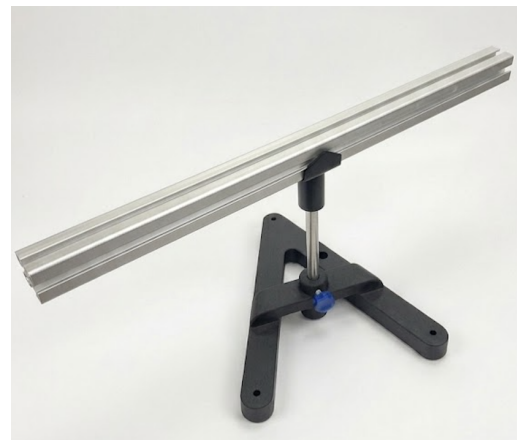
Den praktiska idégenereringen inleddes med *Brainstorming*. Utgångspunkten för brainstormingen var att integrera tillhandahållet material och mätutrustning från projektets uppdragsgivare med projektgruppens idéer. Inspiration togs även från övningsuppgifter ur kurslitteraturen (Grahn m. fl., 2022). Dessa tidiga koncept visualiserades initialt genom handskisser (se Appendix C.6) och enklare CAD-modeller. För att utvärdera de olika dellösningarna tillämpades *Rapid Prototyping* i form av 3D-utskrivna prototyper. Dessa fysiska utkast utgjorde sedan ett konkret underlag för gemensamma diskussioner och iterativ vidareutveckling inom projektgruppen.

Ett grundläggande krav vid konceptgenereringen var att de utformade modellerna skulle erhålla en låg vikt och en kompakt geometri i syfte att öka portabiliteten i undervisningsmiljön. Av denna anledning baserades stora delar av systemarkitekturen på att vara kompatibel med en håltavla från IKEA (modell Skådis), se Figur 3.1 (IKEA, u. å). Därtill ställdes en roterbar aluminiumprofil till förfogande, med syftet att möjliggöra utvecklingen av ett koncept för cirkulär rörelse (Figur 3.2).



Figur 3.1: Håltavla från IKEA för montering av de fysiska modellerna.

Notera. Bild hämtad från IKEA (2026).



Figur 3.2: Roterande rigg bestående av en aluminiumprofil monterad på ett stativ.

Vidare utgjorde integrationen av mätutrustning en huvudsaklig prioritering för flera av de framtagna koncepten, med kravet att varken mätnoggrannhet eller modellernas kinematiska rörelsefrihet fick inskränkas. Denna delprocess underlättades av att projektets uppdragsgivare tillhandahöll en specifik accelerometer som skulle integreras i systemet. Vid konceptutformningen riktades därför stort fokus mot att designa robusta mekaniska gränssnitt mellan de 3D-utskrivna modellerna och själva accelerometern. Genom en systematisk utvärdering av olika fästordningar valdes

slutligen den integrationslösning som bäst uppfyllde de uppsatta målen.

3.3 Utformning av slutkoncept och tillverkning

För framställning av de slutgiltiga komponenterna och modellerna användes additiv tillverkning i form av 3D-utskrift. Samtliga komponenter konstruerades i designmjukvaran Autodesk Inventor. Vid konstruktion av komponenter låg fokus vid att utforma komponenterna för att möjliggöra kompakt demontering och montering utan specialverktyg. För att minimera systematiska felkällor som glapp, deformationer och asymmetrier, avsatte projektet en betydande andel av tidsresurserna till en noggrant genomtänkt konstruktiv utformning. Särskild vikt lades vid precisa infästningar till håltavlan och kontrollerade toleranser för att säkerställa att systemet uppfyllde sin avsedda funktion. Genom att begränsa felkällorna minskade de systematiska felen. Det gör att demonstrationer på föreläsningar bättre stämmer överens med det teoretiska idealfallet. CAD-modellerna exporterades därefter i STL-format för utskrift till en *licer*.

Utskrifterna genomfördes på 3D-skrivare av modellerna Creality Ender 3 och Bambulabs P1S. Även Prusa i3 som fanns tillgänglig i skolan användes, men endast i begränsad utsträckning då dess resulterande kvalitet på utskriften bedömdes som låg. Materialen som huvudsakligen användes var PETG, PLA och TPU, vilka valdes på grund av deras tillgänglighet och höga kvalitet. TPU valdes till komponenter som behövde gummiliknande egenskaper.

För att optimera utskriftskvaliteten och säkerställa komponenternas funktion genomfördes en stegvis optimering av utskriftsparametrar. För snabba konceptutskrifter användes en lagerhöjd på 0,2 mm, medan de slutgiltiga modellerna skrevs ut med en finare lagerhöjd på 0,05 mm. Utöver detta finjusterades även parametrar för utfyllnadsgrad och stödstrukturer. Vid CAD-modellering tillämpades specifika toleranser, där statiska passningar användes en tolerans på 0,1 mm mellan kontaktytorna, medan ytor avsedda för glid rörelse gavs ett spel på 0,2 mm.

3.4 Utformning av instruktionsmaterial

Syftet med denna del var att framställa vägledande instruktioner som säkerställde att utbildningsmaterialet tillämpas på ett korrekt och pedagogiskt effektivt sätt. För att minimera förberedelsetiden för undervisande lärare strukturerades materialet utifrån en modulanpassad princip. Detta innebär att varje enskild modell kompletteras med av en specifik beskrivning som redogör montering och förslag på genomförande av demonstrationen. Instruktionerna utformades för att fungera som ett ramverk, samtidigt som de ger användaren frihet att anpassa och expandera laborationsmomenten efter eget undervisningsbehov.

3.5 Verifiering

Verifiering av det framställda utbildningsmaterialet och att dess delkomponenter fungerade var nödvändigt för projektets framgång. Detta är särskilt viktigt då materialet innehåller mekaniska delar och komponenter med snäva passformskrav som riskerar att låsa sig under rörelse.

Verifieringen genomfördes kontinuerligt under hela projektets gång genom iterativa funktionstester av de fysiska modellerna. Passformer och toleranser utvärderades genom fysisk montering och praktiska tester för att säkerställa systemens funktion. Därtill testades integrationen av mätutrustningen genom att fästa accelerometern på de kompletta systemen. Den insamlade mätdatan jämfördes därefter med en teoretisk beräkning av det ideala fallet för att fastställa systemets felmarginalen.

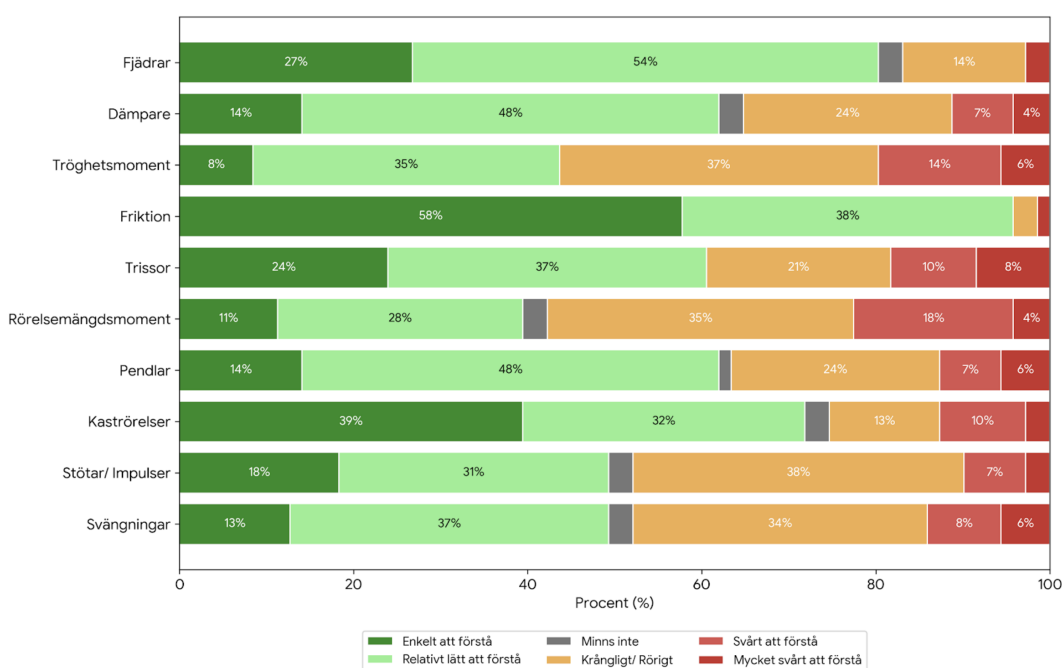
4

Resultat

I detta kapitel presenteras utfallet av produktutvecklingsprocessen, från behovsanalysen till de färdiga modellerna. Resultatet omfattar svaren från datainsamlingen, de slutgiltiga CAD-konstruktionerna och deras 3D-utskrivna motsvarigheter.

4.1 Utfall av datainsamling och behovsanalys

Den genomförda datainsamlingen och den tillhörande behovsanalysen utgjorde grunden för det framtagna undervisningsmaterialet. Utfallet av den kvantitativa studentundersökningen, som besvarades av totalt 84 studenter, presenteras i Figur 4.1.



Figur 4.1: Resultat från enkätundersökningen. Sammanställningen visar vilka kursmoment inom dynamiken som de tillfrågade studenterna upplevde som mest utmanande.

Utifrån statistiken i Figur 4.1 framgår att de deltagande studenterna framför allt identifierade tröghetsmoment och rörelsemängdsmoment som svårbegripliga. Hela 57 % respektive 55 % av respondenterna angav dessa moment som krångliga eller mycket svåra att förstå. Även svängningar (vilket innefattar fjädrar, pendlar och

dämpare) samt stötar och impulser ansågs vara komplicerade områden, vilka 48 % av de deltagande studenterna upplevde utmanande.

I den kvalitativa undersökningen intervjuades sju lärare verksamma vid olika program för Civil- och högskoleingenjörer på Chalmers, varav tre examinatorer och fyra undervisande lärare. Svaren från dessa intervjuer bekräftade den bild som framkommit i studentenkäten utan att vara beroende av varandra, där i synnerhet rörelsemängdsmoment och tröghetsmoment beskrevs som återkommande problemområden. Även svängningsrörelser bekräftades som utmanande; en av lärarna observerade att många studenter saknar fysisk intuition för vad fenomenet dämpning faktiskt innebär.

Utöver specifika delmoment påtalade flera lärare att övergripande metodik- och förkunskapsbrister är en av orsakerna till studenternas utmaningar. Exempelvis är det ett mycket vanligt fel vid friläggning av dynamiska system att studenter applicerar ett statik-tänk, genom att felaktigt sätta kraftsumman lika med noll på accelererande system. Ett relaterat problem är sammanblandningen av friläggningsdiagram och massaccelerationsdiagram, vilket oundvikligen leder till felaktiga rörelseekvationer. Lärarna poängterade även bristande matematiska grundkunskaper, specifikt inom trigonometri och integration, vilket utgör en barriär för den fysiska förståelsen.

Under intervjuerna kom det även fram krav och önskemål som betonade behovet av visualisering och flexibilitet. Ett centralt önskemål var modularitet, vilket skulle göra det möjligt att ändra parametrar och utformning under pågående föreläsning. Vidare betonades de praktiska kraven på att undervisningsmaterialet måste vara portabelt och tillåta smidig montering och demontering.

Sammanfattningsvis utgjorde resultaten från datainsamlingen och intervjuerna det underlag som styrde valet av koncept samt de krav och önskemål som formulerades inför det fortsatta designarbetet. Det slutgiltiga utbildningsmaterialet avgränsades till att omfatta områdena rörelsemängdsmoment, tröghetsmoment, trissor, momentcentrum och svängningsrörelse. Även om stötar och impulser lyftes fram som svårförståeliga, har dessa exkluderats i enlighet med projektets avgränsningar. Kraven som trädde fram under datainsamlingen samlas i Tabell 4.1.

Tabell 4.1: Sammanställning av krav och önskemål på undervisningsmaterialet baserat på datainsamlingen.

ID	Typ	Beskrivning	Källa
K1	Krav	Utrustningen skall vara portabel och enkel att förflytta mellan föreläsningssalar.	Intervjuer
K2	Krav	Montering och demontering ska kunna ske utan externa vertyg.	Intervjuer
K3	Krav	Materialet skall visualisera koncepten tröghetsmoment eller rörelsemängdsmoment.	Enkät & Intervjuer
Ö1	Önskemål	Utrustningen bör vara modulärt uppbyggd för att kunna visa flera olika fenomen.	Intervju
Ö2	Önskemål	Det bör finnas möjlighet att ansluta mätutrustning för att visa direkta samband.	Intervju

4.2 Koncept: Rörelsemängdsmoment

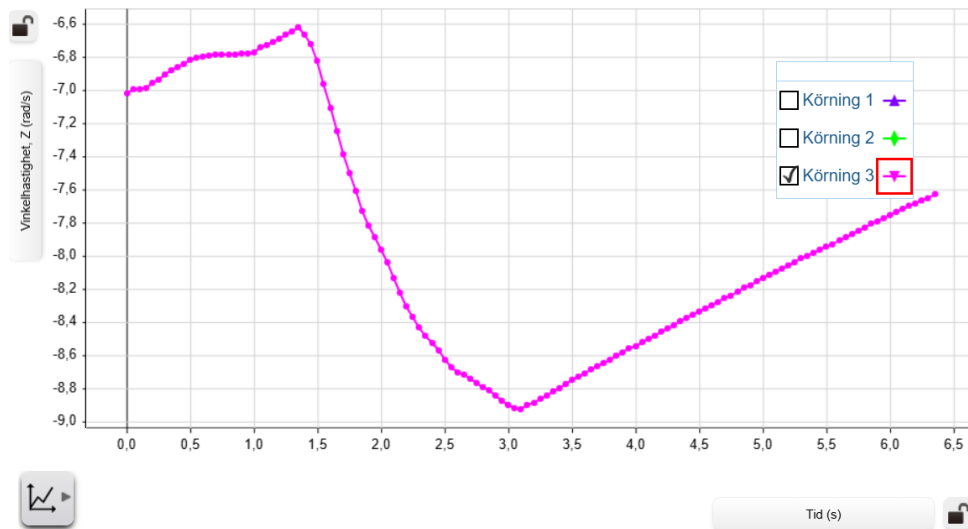
Ett system för att visualisera och mäta rörelsemängdsmoment har utvecklats. Systemets grund utgörs av en aluminiumprofil som roterar och som är monterad på en stabil fot. För att möjliggöra laborationer har flera komponenter 3D-utskrivits i PLA-plast. Dessa inkluderar ett ändstopp för profilen som fästs på kanten, ett fäste för accelerometern, en rörlig släde för applicering av vikter samt ett trishjul som kan fästas i aluminiumprofilen. Se Figur 4.2 för att se det kompletta systemet se.



Figur 4.2: Grunduppställning för visualisering av rörelsemängdsmoment.

När systemet har satts i rotation kan användaren justera slädens position längs alu-

miniumprofilen genom att dra i eller släppa efter på det anslutna snöret. Användaren kan då både visuellt och taktilt uppleva hur systemets vinkelhastighet ökar när släden närmar sig centrum, för att sedan minska när den rör sig ut mot kanten. För en kvantitativ analys kan vinkelhastigheten registreras via accelerometern. Genom att kombinera mätdata med slädens massa och förflyttning, vilken enkelt kan läsas på en mätskala på sidan av aluminiumprofilen, kan det faktiska rörelsemängdsmomentet beräknas. I Figur 4.3 visas grafen från en mätning där vinkelhastigheten presenteras.



Figur 4.3: Experimentella mätvärden vid laboration om rörelsemängdsmoment. Grafen visar hur systemets rotationshastighet varierar dynamiskt som ett resultat av förändringar i uppställningen under mätförloppet.

Till följd av oundvikliga energiförluster i släde och trissa bevaras inte rörelsemängdsmomentet fullt ut jämfört med det ideala teoretiska fallet. Resultaten från Tabell 4.2 visar att det blir en differens på 23% mellan två olika lägen, ett läge där släden är längst ut på profilen (7 rad/s vinkelhastighet) och ett läge där släden har dragits in mot mitten (9 rad/s vinkelhastighet).

Tabell 4.2: Sammanställning av experimentella parametrar och beräknad avvikelse. Tabellen redovisar systemets tillstånd i två lägen, samt den procentuella förlusten av rörelsemängdsmoment jämfört med det teoretiska idealfallet ($L_1 = L_2$).

Parameter	Läge 1	Läge 2
Radie, r [m]	0,23	0,10
Vinkelhastighet, ω [rad/s]	7	9
Totalt tröghetsmoment, I [kg·m ²]	0,0168	0,0103
Rörelsemängdsmoment, L [kg·m ² /s]	0,1173	0,0929
Mätt skillnad i L	23,21 %	

Instruktionerna för genomförande av laborationen vid ett mindre laborationstill-

fälle eller vid föreläsningar presenteras i Appendix C.1. Det inkluderar syftet med laborationen, teori, beskrivning av labbutrustning och avslutningsvis genomförande. För att underlätta utvärderingen av systemet har ett Python-skript utvecklats, se Appendix C.1. I detta program kan mätdata från accelerometern matas in, varpå skriptet automatiskt beräknar och redovisar i procent hur väl rörelsemängdsmomentet har bevarats under rörelsen. Python-skriptet består av Ekvationerna (2.6) och (2.11), samt en ekvation som beräknar skillnaden i procent.

4.3 Koncept: Tröghetsmoment

För att konkretisera tröghetsmoment har en fysisk demonstrationsmodell konstruerats. Systemet utgörs av en ställning med en roterande axel där olika geometriska kroppar (cylinder, kon, etc), kan placeras och roteras för hand med en vev (Figur 4.4). Denna utformningen gör det möjligt för användaren att känna hur motståndet varierar, dels beroende på hur en och samma kropp är placerad i relation till rotationsaxeln.

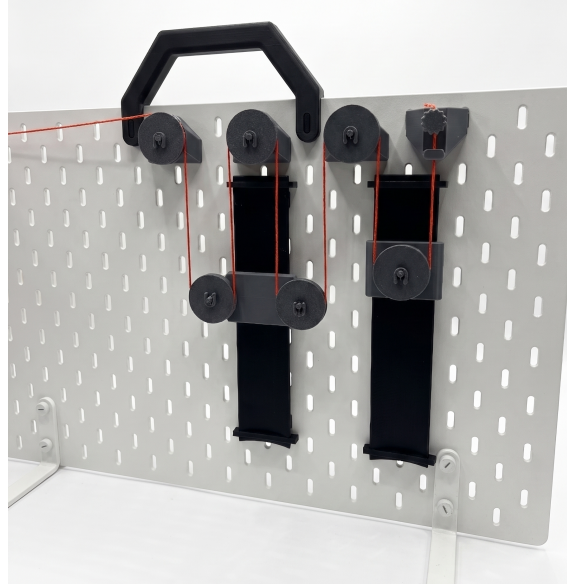


Figur 4.4: Den slutgiltiga fysiska modellen för demonstration av tröghetsmoment.

Samtliga systemkomponenter, inklusive ställning och handtag, är utskrivna i PETG-plast. För att öka kropparnas massor har formerna skrivits ut med 20 % utfyllnadsgrad. En märkbar vikt blev avgörande för att användaren tydligt ska kunna känna den kinematiska skillnaden i tröghetsmoment vid rotation. Till skillnad från projektets övriga koncept är detta system inte utformat för att integreras med mätutrustning. Resultatet av modellen är att dess robusta och kompakta format utgör den mycket portabel, vilket innebär att modellen skulle kunna skickas runt under en föreläsning där studenterna får känna tröghetsmomentet i realtid. Den skulle även kunna tas med till en räknestuga eller laborationstillfälle.

4.4 Koncept: Trissystem

Ett modulärt trissystem kompatibelt med den håltavla som visas i Figur 3.1 har utvecklats. Systemet är i huvudsak 3D-utskrivet i PETG-plast och består av ett flertal trissjul, glidskenor, hållare till accelerometer samt viktslädar med tillhörande fästsystem (se Figur 4.5). Till glidskenorna har stopp skrivits ut i TPU-plast.



Figur 4.5: Trissystemet monterat på håltavlan. Uppställningen visar trissjul, glidskenor och viktslädar som tillsammans möjliggör demonstration av varierande snörkraftsförhållanden och kinematiska samband.

Systemets modularitet medför att det enkelt kan byggas om för att visualisera önskat fenomen. Trisshjulen är skårade, vilket säkerställer att linan löper stabilt utan att snöret glider ur när systemet är i rörelse. Systemet möjliggör demonstration av flera dynamiska koncept, däribland variationer i snörkraftsförhållande beroende på trissornas konfiguration, snörkraften när en vikt i ena änden av snöret faller fritt, kinematiska samband och rörelsemönster i sammansatta upphängningar.

Trissystemet kan användas både som demonstrationsverktyg under föreläsningar och som laborationsutrustning. Systemet kan visas upp under föreläsningar, där inkludering av accelerometer även tillåter att data visas i realtid. För laborationsbruk möjliggör systemet mer komplexa uppställningar. Ett tillhörande laborations-PM har skapats och återfinns i Appendix C.2.

4.5 Koncept: Momentancentrum

För att visualisera momentancentrum har en modell utvecklats, vilken även är kompatibel med håltavlan (Figur 3.1), vilken återanvänder fästordningar från det tidigare beskrivna trissystemet (Figur 4.6). Grunduppställningen består av två vinkelrätt placerade glidskenor som möts i ett hörn för att representerar en vägg och ett

golv. I dessa skenor löper en huvudgeometri med stång och skårad halvcirkel vars ändrar är fästa i respektive skena, vilket illustrerar exemplet med en stång glider ner längs en vägg (likt Figur 2.1).



Figur 4.6: Modell för visualisering av momentancentrum monterad på håltavla. Skärningspunkten mellan de två indikatorstängerna lokaliserar momentancentrum för den rörliga huvudstången under hela rörelseförloppet.

För att konkret visa var det aktuella momentancentrumet befinner sig under rörelse nyttjas två indikatorstänger som utgår från huvudstångens ändpunkter. När huvudstången rör sig kommer dessa indikatorstänger alltid korsa varandra ortogonalt i det aktuella momentancentrumet. Eftersom halvcirkeln representerar polkurvan, kan användaren observera hur indikatorstängernas skärningspunkt alltid följer geometrin under hela förloppet. Denna punkt är målad röd för förtydligande. Systemet kan visas upp på föreläsning och det lämpar sig även under laborationer och räknestugor. En manual för uppsättning kan hämtas i Appendix C.3.

4.6 Koncept: Svängningsrörelse

Två modeller för att demonstrera svängningsrörelser har utvecklats. Den första modellen visualiserar en pendelrörelse, medan det andra visar hur en fjäder beter sig när den sätts i svängning.

4.6.1 Pendelsystem

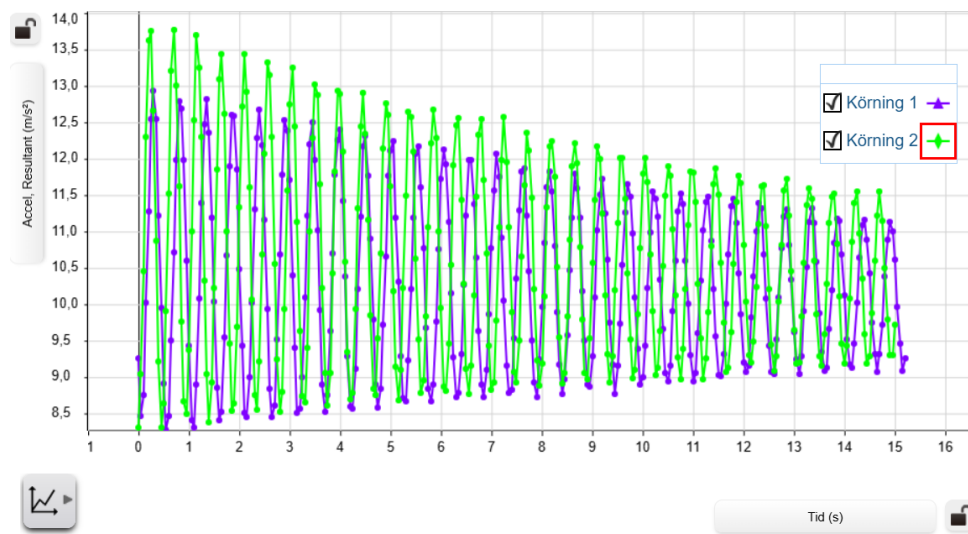
Det koncept som utvecklats för att visualisera pendelrörelser framgår av Figur 4.7, och utgörs av ett system som är kompatibelt med håltavlan (Figur 3.1). Huvud-

komponenterna är 3D-utskrivet i PETG-plast och består av en fästmekanism för montering på tavlan, samt en pendelarm med ett integrerat fäste för en accelerometer.



Figur 4.7: Laborationsuppställning för pendelrörelse monterad på håltavla. Bilden visar pendelarmen med det integrerade fästet för accelerometer.

För att möjliggöra laborationer kring massfördelningens inverkan har pendelarmen försetts med specifika infästningspunkter för vikter. Denna utformning tillåter användaren att tydligt visualisera och demonstrera hur pendelns egenfrekvens och svängningsmönster förändras när en massa placeras på olika avstånd från rotationscentrum. I Figur 4.8 presenteras en jämförande mätning av accelerationsresultanten över tid för två olika konfigurationer. Grafen illustrerar skillnaden i svängningsförlopp mellan pendeln med tre påhängda vikter och referensfallet utan extra vikter.



Figur 4.8: Uppmätt accelerationsresultant över tid för två olika pendelkonfigurationer. Grafen visar hur systemet förändras när mätningen utförs med (grön kurva) respektive utan (lila kurva) extra vikter monterad på pendelarmen.

Pendelsystemet är primärt framtaget som ett pedagogiskt verktyg för att konkretisera svängningsrörelsen under föreläsningar. Systemet möjliggör en lättillgänglig representation av pendels mekaniska principer, samtidigt som den integrerade accelerometern möjliggör kvantitativ datainsamling. Ett tillhörande laborations-PM likt de tidigare återfinns i Appendix C.4.

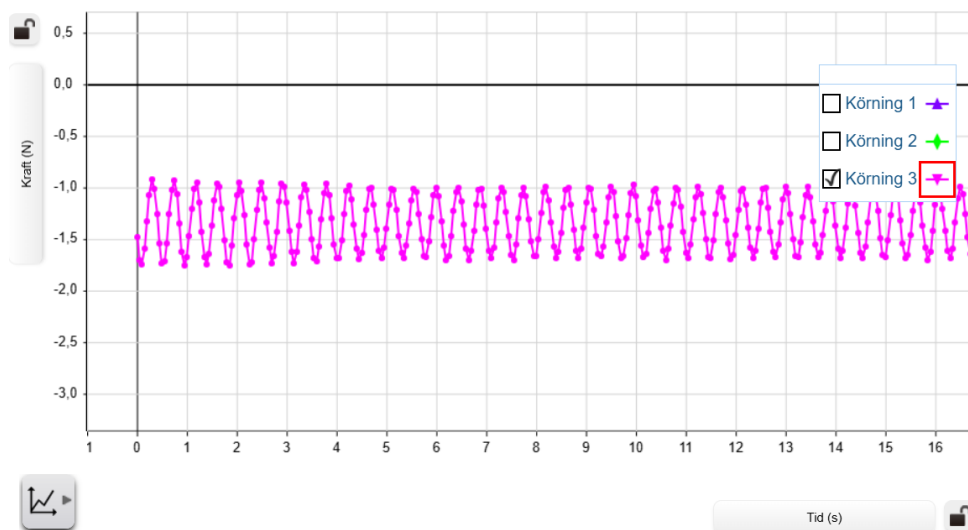
4.6.2 Fjädersystem

Ett upphängningssystem har konstruerats för att åskådliggöra linjära svängningsrörelser i fjädrar. Systemet, som illustreras i Figur 4.9, är konstruerat för att vara kompatibel med håltavlan (Figur 3.1) med hjälp av ett 3D-utskrivet fästelement i PETG-plast. Detta fäste bär upp en accelerometer, vilken i sin tur är försedd med en krok som agerar infästningspunkt för fjäder och massa.



Figur 4.9: Uppställning för fjädersystem monterad på håltavla med det 3D-utskrivna fästet, accelerometern samt upphängning av fjäder och massa

Tillsammans utgör dessa komponenter en uppställning där fjäderns oscillationer inte enbart kan observeras visuellt, utan även loggas och analyseras kvantitativt. I Figur 4.10 presenteras mätdata från en testkörning där en vikt på 100 gram hängdes i en fjäder och sattes i svängning. Grafens vertikala redovisar systemets uppmätta kraft som funktion av tiden. För instruktioner gällande uppställning och laborationsutförande hänvisas till tillhörande laborations-PM i Appendix C.5.



Figur 4.10: Experimentell mätdata från fjädersystemet. Grafen illustrerar det uppmätta svängningsförloppet över tid när systemet belastats med en testvikt på 100 gram.

Konceptet är primärt framtaget för att användas under föreläsningar i syfte att demonstrera dynamiken i fjädrar, men lämpar sig även väl för laborationsövningar. Genom att dra ut fjädern till en elongation kan studenten observera svängningsförloppet samtidigt som accelerometern registrerar kinematiken i realtid. Genom att variera den pålagda massan eller byta typ av fjäder kan användaren se hur fjäderns egenfrekvens och dynamiska beteende förändras.

5

Diskussion

I detta kapitel diskuteras projektets utfall och de val som gjorts under arbetets gång. Inledningsvis förs en diskussion kring hur väl det framtagna utbildningsmaterialet uppfyller sitt syfte. Därefter utvärderas de metodval som legat till grund för arbetet, följt av en reflektion kring hur projektets resurser har hanterats. Kapitlet avslutas med potentiella förbättringsåtgärder och vidareutveckling.

5.1 Utvärdering av utbildningsmaterialet

Det primära målet med projektet har varit att underlätta studenternas förståelse för stelkroppsdynamik. I följande avsnitt utvärderas därför det färdiga utbildningsmaterialet utifrån dess pedagogiska värde, hur väl modellerna lyckas visualisera de teoretiska koncepten, samt i vilken utsträckning de uppfyller användarkraven och önskemålen.

Som tidigare nämnts i rapporten har fokus legat på utbildningsmaterialets modulära design. Allt material som är kompatibelt med håltavlan (se Figur 3.1) kan kombineras fritt, vilket gör det möjligt för användaren att bygga upp ett mer komplext system vid behov där flera olika ämnesområden kan integreras och visualiseras samtidigt. Dessutom delar flera av systemen komponenter, vilket ger en mer portabel och flexibel utrustning med färre delkomponenter.

5.1.1 Datainsamlingen

Den inledande datainsamlingen syftade till att kartlägga studenternas upplevda svårigheter inom dynamik. Även om den kvantitativa enkätundersökningen gav värdefulla insikter kring vilka moment som upplevs som svårast, uppvisar metoden vissa begränsningar. Eftersom enkäten byggde på frågor med graderade svarsalternativ begränsades respondenternas möjlighet att nyansera och motivera sina svar. Ur ett pedagogiskt perspektiv är det dock minst lika intressant att förstå varför ett specifikt område upplevs som utmanande. En kombination av den kvantitativa enkäten och kvalitativa intervjuer hade sannolikt gett en betydligt djupare och bredare förståelse för ämnet. Genom avsaknaden av kvalitativa uppföljningsfrågor riskerar studien att förbise de bakomliggande orsakerna till studenternas inlärningströsklar, såsom till exempel om svårigheterna egentligen grundar sig i specifika matematiska moment eller bristande visualisering i det befintliga kursmaterialet.

5.1.2 Rörelsemängdsmoment

För att utvärdera bevarandet av rörelsemängd i systemet utvecklades ett Python-skript för bearbetning av insamlade mätdata. Analysen visar en mätbar diskrepans mellan mätresultaten och den teoretiska modellen, med en maximal avvikelse på cirka 40 %. Denna brist på bevarande beror primärt på mekanisk friktion mellan släden och aluminiumprofilen, vilket orsakar energiförluster som den idealiserade modellen exkluderar.

För att minimera dessa förluster utvärderades flera konceptuella lösningar. Bland annat övervägdes en konstruktion med integrerade hjul i släden för att ersätta glidfriktion med rullfriktion. Vidare undersöktes möjligheten att applicera glidskenor av lågfriktionsplast mellan kontaktytorna i syfte att sänka friktionskoefficienten och därmed öka systemets verkningsgrad. Dessa lösningsförslag implementerades dock aldrig utan stannade vid konceptstadiet. Rörelsemängdsmomentet uppfyller kraven alla kraven i Tabell 4.1 men även önskemålet om att integrera mätutrustning.

5.1.3 Tröghetsmoment

Modellen som utvecklades för att demonstrera tröghetsmoment uppnådde inte den avsedda pedagogiska effekten. En primär orsak till detta är att de 3D-utskrivna geometriska formerna har en låg massa. Den låga massan medför att den kraft som krävs för att accelerera rotationen blir för liten, vilket gör att användaren inte får en tydlig kännbar återkoppling av att tröghetsmomenten faktiskt skiljer sig åt mellan kropparnas montering.

Ett ytterligare problem uppstod till följd av upphängningens utformning. Eftersom rotationsaxeln monterades horisontellt utövar tyngdkraften ett kontinuerligt nedåtriktat drag på formerna. Beroende på var i rotationsrörelsen modellen befinner sig, skapar gravitationen ett vridmoment som helt dominerar den upplevda kraften. Detta resulterar i att tyngdkraftens inverkan maskerar systemets faktiska tröghetsmoment, vilket försvårar en isolerad demonstration av fenomenet. Om axeln hade varit placerad vertikalt hade tyngdkraftens inverkan kunnat elimineras. De geometriska formerna behöver högre massa för att experimentet ska fungera som tänkt och 3D-utskrivna plast är inte idealt för detta. Material som exempel trä eller metall hade varit ett bättre val.

5.1.4 Trissystemet

Trissystemets (Figur 4.5) modulära utformning möjliggör konstruktion av allt från enkla till mer komplexa mekaniska uppställningar, vilket ger användaren stor flexibilitet beroende på vilket fysikaliskt scenario som ska undersökas. En observerad begränsning i den nuvarande konstruktionen är dock risken för att linan hoppar ur trissans spår, vilket kan påverka systemets och tillförlitlighet. Trissystemet möter alla krav i Tabell 4.1, samt önskemålet om att det ska vara modulärt uppbyggt.

Utöver de geometriska begränsningarna påverkas systemet av friktionskrafter i trissans lagring och mellan linan och spåret. Detta medför att systemet avviker från det teoretiska idealfallet, där man ofta bortser från förluster. I en analys av resultaten är det därför viktigt att ta hänsyn till att den tillförda energin delvis omvandlas som värme genom friktion, vilket resulterar i en lägre verkningsgrad än vad en ideal matematisk modell förutspår.

5.1.5 Momentancentrum

Systemet som visar momentancentrum (Figur 4.6) fungerar som tänkt. En röd prick har målats på toppen av komponenten som agerar som momentancentrum för att tydligt visa var detta finns. Modellen främjar visuellt lärande och förhoppningen är att detta system ska underlätta den visuella förståelsen för studenter. Systemets största brist är friktion mellan kontaktytorna men detta hindrar inte det visuella lärandet.

5.1.6 Svängningsrörelse

De praktiska modellerna för fjäder- (Figur 4.9) och pendelsystem (Figur 4.7) fungerar som effektiva visualiseringar av mekaniska svängningsfenomen. Genom att konkretisera dessa grundläggande koncept underlättas förståelsen för annars abstrakta och komplexa områden inom dynamiken. Det är dock värt att notera att de observerade systemen inte utgör några idealfall; i verkligheten påverkas rörelsen av både friktion och luftmotstånd. Dessa icke-ideala faktorer innebär att den mekaniska energin inte bevaras fullt ut över tid, vilket resulterar i en dämpad svängning. Men att det inte är ett idealt fall kan även det vara en nyttig lärdom för studenter. Kraven att utrustningen skall vara portabel och att montering och demontering sker utan externa verktyg i Tabell 4.1 är uppfyllda. Dessutom möter även för fjäder- och pendelsystem önskemålet av integrering av mätutrustning.

5.2 Metoddiskussion

Tillvägagångssättet har anpassats utefter de förutsättningar som gruppen haft under projektet. Valet av en iterativ designprocess kombinerat med additiv tillverkning (3D-utskrift) visade sig vara ett både tidseffektivt och flexibelt sätt att översätta teoretiska koncept inom dynamik till fysiska, interaktiva modeller.

En central aspekt att reflektera över i relation till de dynamiska momenten är hur utskriftsparametrarna påverkade modellernas fysikaliska egenskaper. Parametrar såsom utfyllnadsgrad, väggtjocklek och materialval (exempelvis PLA eller PETG) har en direkt inverkan på objektens masscentrum, totala massa och tröghetsmoment. Eftersom projektets syfte är att illustrera fysikaliska förlopp kan variationer eller asymmetrier i utskriftenas inre struktur innebära avvikelser mellan den teoretiska modellen och det faktiska, observerbara resultatet. Detta är en oundviklig begränsning i metoden som är viktig att ha i åtanke vid utvärderingen av resultaten.

5.3 Fördelning av resurser

Tidigare erfarenhet av CAD och additiv tillverkning inom gruppen effektiviserade utvecklingsfasens avsevärt. Trots goda kunskaper om design för optimal utskriftskvalitet krävdes flera iterationer av varje utskrift för att säkerställa komponenternas precision.

Projektets tidsåtgång reducerades avsevärt genom att merparten av 3D-utskriften genomfördes på gruppmedlemmarnas privata utrustning (Bambulab P1S och Creality Ender 3). Fördelen med att använda egen hårdvara var en effektivare konfigurationsprocess och eliminerade ledtider. På så sätt undveks den konkurrens om resurser som uppstår vid skolans gemensamma verkstäder, såsom XP-labbet och FUSE. Endast de geometriska komponenterna till tröghetsmomentsystemet skrevs ut i skolans regi, främst för att få tillgång till specifika färgval som inte fanns tillgängliga privat.

5.4 Vidareutveckling

Projektet har genererat omfattande kunskap och nya insikter, men har även belyst komplexiteten i ämnet; ju djupare förståelsen blir, desto tydligare framträder de områden som ännu återstår att utforska. Mot slutet av arbetet har ett flertal idéer för framtida utveckling identifierats. En tänkbar vidareutveckling vore att inte begränsas till additiv tillverkning. Genom att inkludera andra tillverkningsmetoder och material skulle det bli möjligt att fördjupa sig i fenomen som mekaniska stötar, ett område som under datainsamlingen visade sig vara tekniskt utmanande att modellera med enbart 3D-utskrivna komponenter. Att inte begränsas till 3D-utskrivning möjliggör dessutom att skapa specialanpassade fjädrar att integrera i produkterna som erhåller en önskad styvhet.

Ett ytterligare område med utvecklingspotential är mjukvaran kopplad till mätutrustningen. Genom att implementera kundanpassad programmering kan funktionaliteten förbättras och datainsamlingen effektiviseras. Det bör dock noteras att denna typ av mjukvaruutveckling kan falla utanför det primära verksamhetsområdet för Institutionen för mekanik och maritima vetenskaper vid Chalmers tekniska högskola.

Studenter verkar enligt studien tycka att dämpare är svårbegripliga, och skulle vara intressant att framställa utbildningsmaterial som främja förståelsen för momentet.

6

Slutsats

Inom ramen för projektet har fem stycken koncept utvecklats i syfte att åskådliggöra fundamentala koncept inom stelkroppsdyamik. De system som konstruerats behandlar trissor, rörelsemängdsmoment, tröghetsmoment, svängningar samt momentacentrum.

Projektets huvudsyfte var att möjliggöra för lärare att sömlöst integrera det framtagna undervisningsmaterialet i befintlig undervisning. För att underlätta denna implementering har stor vikt lagts vid att göra hårdvaran modulär, portabel samt enkel att montera och demontera. Utöver den fysiska utrustningen har även instruktioner utformats för att vägleda både lärare och studenter, även om materialet med fördel kan användas för egna laborationer eller som visuella demonstrationer under föreläsningar eller dylikt. Slutligen kan det konstateras att de tekniska och pedagogiska målen för systemen har uppnåtts; huruvida materialet kommer att nyttjas i framtida kurser beror nu på lärosätets fortsatta implementeringsvilja.

Källförteckning

- 123-3D. (u. å-a). *Allt om PETG-filament*. Hämtad 13 april 2026, från <https://www.123-3d.se/page/allt-om-petg-filament.html>
- 123-3D. (u. å-b). *Allt om PLA-filament*. Hämtad 13 april 2026, från <https://www.123-3d.se/page/allt-om-PLA-filament.html>
- Al-Duski, A., Enelund, M., Gustafsson, G., Gyllström, L., Jansson, ., C, & Nilsson, R. (2025). *Undervisningsmaterial i mekanik med 3D-skrivning* (tekn. rapport). Chalmers.
- Anakhaev, K. N. (2014). A Contribution to Calculation of the Mathematical Pendulum. *Doklady Physics*, 59(11), 528–533. <https://doi.org/10.1134/S1028335814110081>
- Cooke, H. G. (2022). Fifteen-Plus Years of Strength of Materials with Pool Noodles and More! *ASEE Annual Conference and Exposition, Conference Proceedings*.
- Formlabs. (u. å-a). *Complete Guide to TPU 3D Printing*. Formlabs. Hämtad 11 maj 2026, från <https://formlabs.com/blog/complete-guide-tpu-3d-printing/>
- Formlabs. (u. å-b). *What is Rapid Prototyping? Methods, Tools and Examples*. Formlabs. Hämtad 11 maj 2026, från <https://formlabs.com/blog/ultimate-guide-to-rapid-prototyping/>
- Freeman, S., Eddy, S. L., McDonough, M., Smith, M. K., Okoroafor, N., Jordt, H., & Wenderoth, M. P. (2014). Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(23), 8410–8415. <https://doi.org/10.1073/pnas.1319030111>
- Freinetrörelsen i Sverige. (u.å.). *Célestin Freinet* [Hämtad 2026-03-23]. <https://freinetsverige.se/freinet-celestine/>
- Fysikteknologsektionen, Chalmers Studentkår. (2026). Ftek Statistikportal [Hämtad: 2026-03-24].
- Gero, A., Stav, Y., & Yamin, N. (2017). Use of real world examples in engineering education: The case of the course Electric Circuit Theory. *World Transactions on Engineering and Technology Education*, 15(2), 120–125.
- Grahn, R., Jansson, P.-Å., & Enelund, M. (2022). *Mekanik* (4:4). Studentlitteratur.
- Hookes lag. (u.å.). Nationalencyklopedin. Hämtad 13 april 2026, från <https://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/hookes-lag>
- IKEA. (u. å). *SKÅDIS Fristående förvaringstavla, vit* [Produktinformation]. Hämtad 22 maj 2024, från <https://www.ikea.com/se/sv/p/skadis-fristaende-foerveringstavla-vit-00541574/>
- Japp, M. M. (2003 september). *Formelsamling i mekanik* (Formelsamling). Chalmers tekniska högskola, Teknisk mekanik. Göteborg.
- Khoueiry, J., & Nabhan, R. (2024). ENHANCING ENGLISH VOCABULARY LEARNING: A COMPARATIVE STUDY OF AUDITORY AND VISUAL IN-

- PUT MODALITIES IN ESL. *Centre for Applied Linguistics Research Journal*, 2024 (15). <https://doi.org/10.60149/WQCD8127>
- Kumar, K., & Meenu. (2022). <Kapitelns titel>. I *Optimization of Industrial Systems* (s. 147–159). Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781119755074.ch12>
- Nationalencyklopedin. (u.å.). *block* [Hämtad: 2026-03-19]. <https://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/block>
- Ngo, T. D., Kashani, A., Imbalzano, G., Nguyen, K. T., & Hui, D. (2018). Additive manufacturing (3D printing): A review of materials, methods, applications and challenges. *Composites Part B: Engineering*, 143, 172–196. <https://doi.org/doi:10.1016j.compositesb.2018.02.012>
- Pudlowski, Z. J. (2024). World Transactions on Engineering and Technology Education. *World Transactions on Engineering and Technology Education*, 22(3), 155–155.
- RS Components. (u. å). *Overcoming common 3D printing challenges with ABS filament*. RS Components. Hämtad 23 april 2026, från <https://au.rs-online.com/web/content/discovery/ideas-and-advice/overcoming-common-3d-printing-challenges-with-abs-filament>
- Stork, M. (2014). Oscillator control based on energy feedback. *Proceedings of the 6th International Conference on Electronics, Computers and Artificial Intelligence (ECAI)*. <https://doi.org/10.1109/ECAI.2014.7090139>
- Svenska Akademien. (2007). Trissa [Hämtad: 2026-03-19]. https://www.saob.se/artikel/?unik=T_2391-0359.0TS4
- Thompson, M. K., Moroni, G., Vaneker, T., Fadel, G., Campbell, R. I., Gibson, I., Bernard, A., Schulz, J., Graf, P., Ahuja, B., & Martina, F. (2016). Design for Additive Manufacturing: Trends, opportunities, considerations, and constraints. *CIRP Annals*, 65(2), 737–760. <https://doi.org/doi:10.1016/j.cirp.2016.05.004>
- Utbildningsradion (UR). (2007). *Pedagogikens giganter: John Dewey*. Hämtad 23 mars 2026, från <https://urplay.se/program/145288-pedagogikens-giganter-john-dewey>
- Wikipedia. (u. å-a). *3D printing*. Wikipedia, The Free Encyclopedia. Hämtad 13 april 2026, från https://en.wikipedia.org/wiki/3D_printing
- Wikipedia. (u. å-b). *Polylaktid*. Wikipedia, Den fria encyklopedin. Hämtad 13 april 2026, från <https://sv.wikipedia.org/wiki/Polylaktid>
- Wrathall, M. A. (2021). Oscillation (Schwingung). I M. A. Wrathall (Red.), *The Cambridge Heidegger Lexicon* (s. 562–563). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9780511843778.151>
- Zach, M. F. (2019). Damping. I *CIRP Encyclopedia of Production Engineering*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35950-7_16781-1

A

Kursstatistik för referenskurser

För att motivera behovet av nya pedagogiska verktyg inom dynamikundervisningen har historisk kursstatistik sammanställts för ett urval av relevanta grundkurser vid Chalmers tekniska högskola. Statistiken i Tabell A.1 redovisar genomströmning samt genomsnittligt betyg från kursstart till våren 2026 för de inkluderade kurserna.

Det totala snittet för de analyserade kurserna ligger på 56,5% våren 2026, vilket påvisar att en betydande andel studenter upplever svårigheter med dessa kurser.

Tabell A.1: Sammanställning av genomströmning och snittbetyg för utvalda grundkurser i mekanik/dynamik.

Kurskod	Program - år	Kursstart	Genomströmning	Snittbetyg
TME031	TKMAS-2	2010	67,1 %	3,77
FFM516	TKTFY-1	2013	67,2 %	3,98
MMS135	TKAUT-1	2021	36,7 %	3,50
MMS216	TKAUT-2	2025	58,3 %	3,44
TME221	TIMEL-1	2020	35,3 %	3,63
TME275	TISAM-1	2016	54,6 %	3,63
	TKATK-1			
	TKSAM-1			
Medelvärde			56,5%	3,65

B

Formulär till studenter

Kandidatarbete Dynamik

Vi är fem studenter som under våren 2026 skriver ett kandidatarbete med målet att ta fram undervisningsmaterial inom dynamik. Syftet är att underlätta inläringen av moment som ofta upplevs som svåra, så att studenter kan få en bättre förståelse för hur olika begrepp och samband fungerar.

För att kunna göra detta på ett så relevant sätt som möjligt vill vi gärna veta vilka delar som flest upplevde som svårast att förstå. Därför vore vi mycket tacksamma om ni ville ta er tid att besvara vårt formulär.

Samtliga svar är anonyma och kommer endast att användas för att sammanställa information om vilka moment studenter upplever som särskilt svåra.

Hur upplevde du de olika momenten i dynamikkursen i tvåan? *

	Enkelt att fö...	Relativt lätt ...	Krångligt/ R...	Svårt att för...	Mycket svår...	Minns inte
Fjädrar	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Dämpare	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Tröghetsmo...	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Friktion	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Trissor	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Rörelsemän...	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Pendlar	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Kaströrelser	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Stötar/ Impu...	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Svängningar	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

B. Formulär till studenter

Förstod du koncepten bra eller kunde du endast räkna på dem? *

Kort svarstext

Hur lärde du dig bäst? *

- Föreläsning
- Laboration
- Projekt
- Räkna på veckans uppgifter
- Tentaplugg

Övriga kommentarer

Lång svarstext

Får kandidatarbetsgruppen spara dina uppgifter till och med den 30/6 2026? Uppgifterna används enbart för att sammanställa och bearbeta data i syfte att ta fram undervisningsmaterial.

Om du önskar att dina uppgifter raderas tidigare kan du kontakta elindr@chalmers.se

Ja

Figur B.1: Enkätformulär för utvärdering av studenternas upplevelse.

C

Laborations-PM

Följande Appendix presenterar i sin helhet de laborations-PM som tagits fram för respektive demonstrationsmodell under projektets gång. Dokumenten är utformade för att fungera som ett fristående, praktiskt stöd för studenter och lärare vid utförandet av laborationerna.

C.1 Labb PM - Rörelsemängdsmoment

Syfte:

Denna laboration syftar till att visa och ge mätdata på rörelsemängdens bevarande.

Teori:

Lagen om rörelsemängdsmomentets bevarande visar att ett systems totala rörelsemängdsmoment förblir konstant så länge det inte påverkas av ett externt vridmoment. I detta experiment utgörs systemet av en roterande aluminiumprofil med en rörlig massa (släde). När massan förflyttas radiellt längs profilen, antingen in mot eller ut från rotationsaxeln, förändras systemets tröghetsmoment, I . Eftersom inga externa vridmoment verkar på systemet (i ett idealiserat fall), måste vinkelhastigheten, ω , justeras proportionellt för att bibehålla ett konstant rörelsemängdsmoment L , enligt sambandet:

$$L = I \cdot \omega$$

En minskning av radien resulterar i ett lägre tröghetsmoment, vilket medför en ökning av vinkelhastigheten, och vice versa. Detta beror på att de interna krafter som förflyttar släden längs profilen inte genererar något vridmoment kring rotationsaxeln.

Beskrivning av labbutrustning:

Beskrivning	Bild
<p>Aluminiumprofilställning Roterande aluminiumprofil på en gjutjärmsfot. Profilens rotationscentrum kan justeras.</p>	
<p>Trisshållare till Aluminiumprofil Trisshjulet fästs i den utstickande axeln. En M4 7mm hex mutter limmas fast i hålet i botten.</p>	
<p>Glidskena med vikthållare Designad för vikter upp till 30mm diameter med 2mm skåra, exempelvis Pasco SE-8726A. Komponenten ska glida i aluminiumprofilens spår.</p>	
<p>Fäste för sensor Designad för accelerometer från Pasco, artikelnummer: PS-3202. En M4 7mm hex mutter limmas fast i hålet i botten.</p>	
<p>Trisshjul Fästs i axeln på trisshållaren. Låses på plats med axelsprint.</p>	
<p>Stopp till aluminiumprofil En M4 7mm hex mutter limmas fast i hålet. Komponenter fästes på kanten till aluminiumprofilen.</p>	
<p>Axelsprint Används för att låsa fast trissan.</p>	
<p>Skruvhatt (Linskruv) Samma komponent som <i>Linkskruv</i> i Trissystemet. Limmas på en M4 skruv med runt huvud. Används för att skruva fast komponenterna.</p>	
<p>Accelerometer PASCO Trådlös accelerometer från PASCO</p>	

Tabell C.1: Labbutrustning rörelsemängdsmoment

Genomförande:**1. Montering av släde**

Placera släden i aluminiumprofilens löpspår. Se till att den glider fritt. Montera önskade vikter genom att placera dem korrekt i skåran.

2. Installation av trisshjul

Montera trisshjulet centralt på profilen. Justera positionen så att snörhållaren är vertikalt linjerad direkt ovanför aluminiumprofilens rotationspunkt. Skruva åt skruven tills att den tar emot i botten och komponenten sitter fast.

3. Konfiguration av accelerometer

Fäst monteringspinnen på profilens motsatta sida och skruva fast den. Placera sedan accelerometern på denna och skruva åt accelerometerens skruv.

4. Säkring av systemet

Fixera ändstoppet utanför slädens tänkta rörelseområde för att förhindra att släden lämnar profilen under experimentets gång. Skruva åt skruven tills att delen är fixerad.

5. Anslutning av drivlina

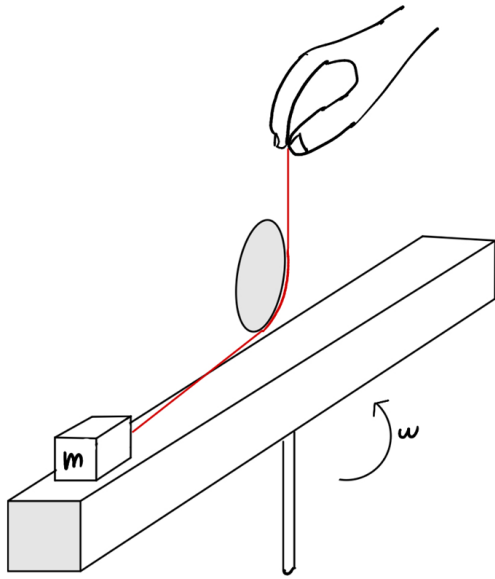
Fäst ena änden av ett snöre i släden genom att knyta det runt den V-formade kanten. Led därefter snöret genom trisshjulet och vidare upp genom den övre snörhållaren. Håll snöret spänt så att det inte trasslar sig.

6. Utförande

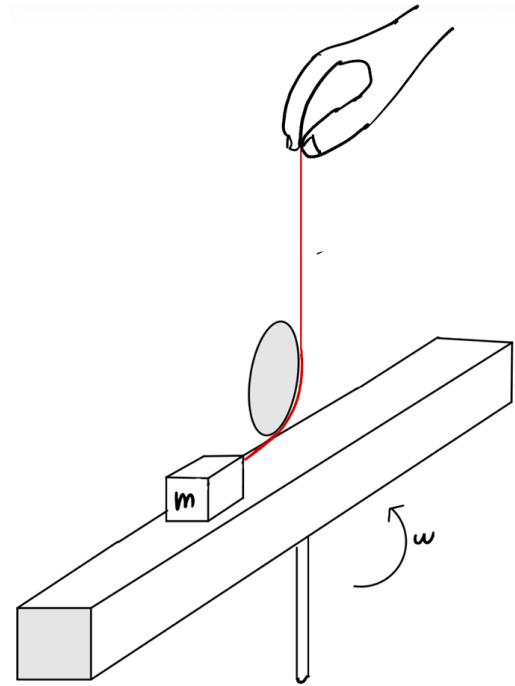
Sätt systemet i rotation. Justera sedan slädens position längs aluminiumprofilen genom att dra i eller släppa efter på det anslutna snöret. Exempel på hur det kan utföras är att med hjälp av det utritade linjalen på aluminiumprofilen mäta hur långt släden flyttas.

7. Tillämpande av Pythonskript

Notera vinkelhastigheten som accelerometern mäter upp med hjälp av SPARKvue och sätt in värden på det och avståndet släden har rört sig i Pythonskriptet. Pythonskriptet ger då ett resultat i procent hur mycket av rörelsemängdsmomentet som bevarades.



Figur C.1: Grunduppställningsskiss för visualisering av rörelsemängdsmoment, där viktsläden befinner sig i sitt yttre läge.



Figur C.2: Systemet efter att släden dragits in mot centrum, vilket minskar radien och därmed ökar vinkelhastigheten.

Pythonskript

```

1 import math
2
3 def berakna_rolsemangdsmoment(I_rig, m_slade, r, omega):
4     """
5     Beräknar det totala tröghetsmomentet och rörelsemängdsmomentet.
6     """
7     # Tröghetsmoment för släden (vi antar att den kan ses som en
8     punktmassa:  $I = m * r^2$ )
9     I_slade = m_slade * (r ** 2)
10
11    # Totalt tröghetsmoment
12    I_tot = I_rig + I_slade
13
14    # Rörelsemängdsmoment ( $L = I * \omega$ )
15    L = I_tot * omega
16
17    return L, I_tot
18
19 # =====
20 # DATA
21 # =====
22 # Riggens konstanter
23 m_aluprofil = 0.422 #kg
24
25 I_rig = (1/12)*m_aluprofil*(0.03**2+0.5**2) #
26     Aluminiumprofilens eget tröghetsmoment ( $kg \cdot m^2$ )
27
28 m_slade = 0.15 # Slädens vikt inklusive vikter (kg)
29
30 # Läge 1 (Innan du drar i/släpper snöret)
31 r1 = 0.2 # Slädens avstånd från centrum (meter)
32 omega1 = 4.2 # Uppmätt vinkelhastighet (rad/s)
33
34 # Läge 2 (Efter du har flyttat släden)
35 r2 = 0.05 # Nytt avstånd från centrum (meter)
36 omega2 = 6 # Ny uppmätt vinkelhastighet (rad/s)
37
38 # =====
39 # 2. BERÄKNINGAR
40 # =====
41 # Beräkna för Läge 1
42 L1, I_tot1 = berakna_rolsemangdsmoment(I_rig, m_slade, r1, omega1
43 )
44
45 # Beräkna för Läge 2
46 L2, I_tot2 = berakna_rolsemangdsmoment(I_rig, m_slade, r2, omega2
47 )
48
49 # Beräkna skillnaden i procent för att se felmarginalen
50 skillnad_procent = abs(L1 - L2) / ((L1 + L2) / 2) * 100
51
52 # =====
53 # 3. SKRIV UT RESULTAT

```

```
51 # =====
52
53 print("--- RESULTAT FRÅN EXPERIMENTET ---")
54 print(f"Slädens massa: {m_slade} kg\n")
55
56 print("LÄGE 1:")
57 print(f"Radie: {r1} m | Vinkelhastighet: {omega1} rad/s")
58 print(f"Totalt tröghetsmoment: {I_tot1:.4f} kg*m^2")
59 print(f"Rörelsemängdsmoment (L1): {L1:.4f} kg*m^2/s\n")
60
61 print("LÄGE 2:")
62 print(f"Radie: {r2} m | Vinkelhastighet: {omega2} rad/s")
63 print(f"Totalt tröghetsmoment: {I_tot2:.4f} kg*m^2")
64 print(f"Rörelsemängdsmoment (L2): {L2:.4f} kg*m^2/s\n")
65
66 print("--- SLUTSATS ---")
67 if skillnad_procent < 25:
68     print(f"Rörelsemängdsmomentet är mycket väl bevarat! Skillnaden
69         är endast {skillnad_procent:.2f}%.")
70 else:
71     print(f"Det finns en skillnad på {skillnad_procent:.2f}%.")
```

C.2 Labb PM - Trissystem


Syfte:










En av de vanligaste verkliga tillämpningarna av trissor är att skapa en mekanisk fördel där en kraft amplificeras i utbyte mot att den appliceras över en längre sträcka och därmed skapa en form av utväxling. Denna laboration syftar till att skapa en intuition för hur dessa förhållanden ser ut i trissystem med olika konstellationer av block.




Teori:

När trissor kombineras i block skapas en mekanisk utväxling som delvis ger upphov till en kraftamplifiering, men även ett kinematiskt samband mellan linans fria ände och blocket. Eftersom linan alltid är i drag och linkraften är konstant genom hela linan kan kraftförhållandet enkelt härledas till $1 : n$, där n är antalet gånger linan går in i blocket. Det kinematiska sambandet kan antingen härledas genom att studera linans längd, eller genom att arbetet utträttat på linans fria ände måste vara det samma som arbetet utträttat av blocket. Detta ger ett kinematiskt samband på $1 : 1/n$.

Beskrivning av labbutrustning:

Beskrivning	Bild
Håltavla Produkt från IKEA som utgör basen för det modulära systemet. IKEA Skådis, artikelnummer: 005.415.74.	
Enkel trissläde Monteras ihop med trissa och axelsprint. Används på vertikal eller horisontell skena	
Dubbel trissläde Monteras ihop med två trissor och två axelsprintar. Används på vertikal eller horisontell skena.	
Sensorsläde Designad för kraft- och accelerationssensor från Pasco, artikelnummer: PS-3202. Används på vertikal eller horisontell skena.	
Viktsläde Designad för runda vikter med upp till 30mm diameter med 2mm skåra, exempelvis Pasco SE-8726A. Används på vertikal eller horisontell skena	

<p>Linsläde Monteras ihop med en M4 7mm hex mutter som med fördel limmas fast. Används på vertikal eller horisontell skena för att skapa en rörlig infästning av linan</p>	
<p>Trissfäste Monteras ihop med trissa och axelsprint. Fästes på håltavlan med en trepunkts tavelprint</p>	
<p>Linfäste Monteras ihop med en M4 7mm hex mutter som med fördel limmas. Fästes på håltavlan med en trepunkts tavelprint. Används för att skapa en fast infästning för linan på tavlan.</p>	
<p>Sensorfäste Designad för kraft- och accelerationssensor från Pasco, artikelnummer: PS-3202. Fästes på håltavlan med en trepunkts tavelprint.</p>	
<p>Trissa Fästs på trissfäste, enkel trissläde eller dubbel trissläde. Läses på plats med axelsprint. Designad för lina med 1mm i diameter.</p>	
<p>Vertikal skena Monteras vertikalt på håltavlan med två stycken tvåpunkts tavelprintar. Kan användas med samtliga slädar. Två stycken skenstopp används, ett vardera ände, för att låsa slädarna på skenan.</p>	
<p>Horisontell skena Monteras vertikalt på håltavlan med två stycken tvåpunkts tavelprintar. Kan användas med samtliga slädar. Två stycken skenstopp används, ett vardera ände, för att låsa slädarna på skenan.</p>	
<p>Skenstopp Används på skenorna för att stoppa slädar från att glida av skenan. Skrivs ut i mjuk material som TPU för att ge dämpning vid hastig stopp av slädar.</p>	
<p>Linskruv Limmas på en M4 skruv med runt huvud. Används för att klämma fast linan i linfästet och linsläden.</p>	

<p>Trepunkts tavelprint Används för att låsa fast fästen på håltavlan.</p>	
<p>Axelsprint Används för att låsa fast trissor på trissfästen och trisslädar.</p>	
<p>Accelerometer PASCO Trådlös accelerometer från PASCO</p>	

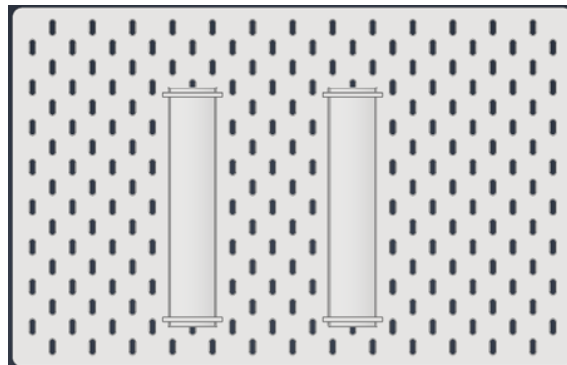
Tabell C.2: Labbutrustning trissystem

Genomförande:

Block med enkel trissa

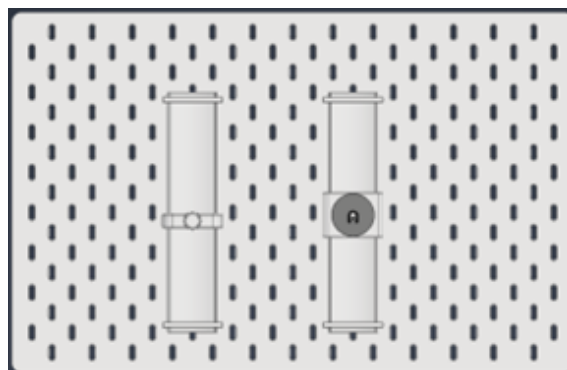
1. **Montera de vertikala skenorna på håltavlan.**

Fäst de två vertikala skenorna på håltavlan med fyra stycken tvåpunkts tavelprintar enligt bilden nedan.



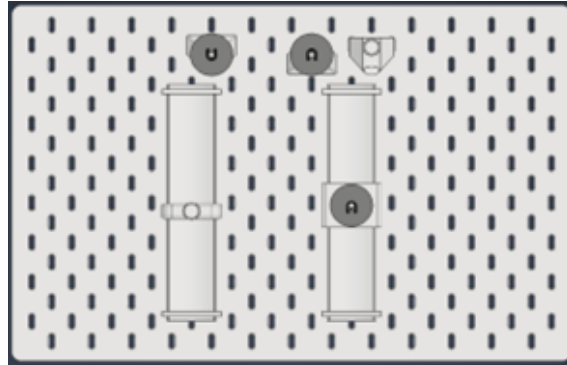
2. **Montera slädarna på skenorna.**

Lossa på ett skenstopp på varje skena. Skjut på linssläden på den vänstra skenan och den enkla trissläden på den högra. Sätt tillbaka skenstoppen.



3. Montera fasta trissor och linfäste på håltavlan.

Fäst två stycken fasta trissor och linfästet på håltavlan med trepunkts tavelsprintar enligt bilden nedan.



4. Montera linan.

Fäst ena änden av linan i linsläden genom att klämma fast den med skruven. Dra linan runt trissor och trä den igenom hålet på det fasta linfästet. Justera längden på linan så att linsläden ligger mot det övre skenstoppet och trissläden ligger mot det nedre. Fäst linan i linfästet genom att klämma fast den med skruven.

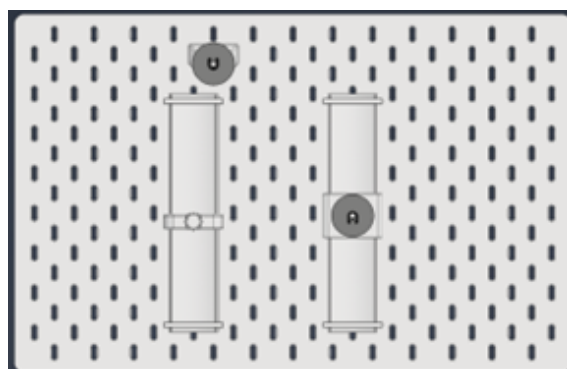
5. Dra linsläden längs skenan.

Dra linsläden längs sin skena och studera förhållandet mellan linslädens rörelse och trisslädens.

Block med dubbla trissor

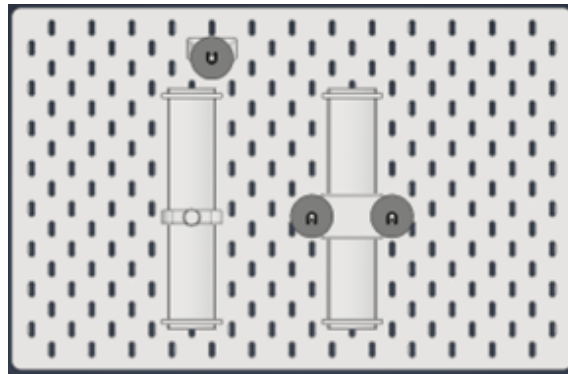
1. Plocka bort fast trissa och linfäste.

Plocka av linfästet och den fasta trissan över den högra skenan.



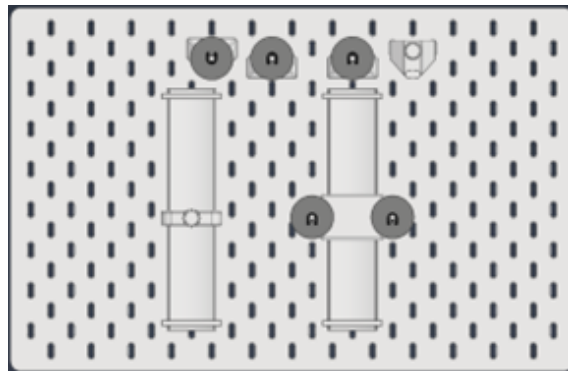
2. Byt till dubbel trissläde.

Lossa på ett skenstopp på den högra skenan och byt ut den enkla trissläden mot den dubbla trissläden. Sätt tillbaka skenstoppet.



3. **Montera fasta trissor och linfäste.**

Montera två fasta trissor och linfästet enligt bilden nedan.



4. **Montera linan.**

Fäst ena änden av linan i linsläden genom att klämma fast den med skruven. Dra linan runt trissor och trä den igenom hålet på det fasta linfästet. Justera längden på linan så att linsläden ligger mot det övre skenstoppet och trissläden ligger mot det nedre. Fäst linan i linfästet genom att klämma fast den med skruven.

5. **Dra linsläden längs skenan.**

Dra linsläden längs sin skena och studera förhållandet mellan linslädens rörelse och trisslädens.

C.3 Labb PM - Momentancentrum





Syfte:







Denna laboration syftar till att visualisera ett av de mest fundamentala fallen av momentancentrum, där en rak stång glider vertikalt i ena änden och horisontellt i den andra. Vidare syftar detta till att skapa en intuition för hur momentcentrum förflyttar sig relativt rörelsen av olika punkter i kroppen.

Teori:

En kropps momentancentrum kan bestämmas om hastighetsvektorerna är kända i två godtyckliga punkter i kroppen. Om två linjer dras från dessa punkter normalt mot hastighetsvektorerna, sammanfaller dessa i kroppens momentancentrum. Detta kan sedan användas för att bestämma hastigheten i andra godtyckliga punkter i kroppen eller kroppens vinkelhastighet.

Beskrivning av labbutrustning:

Beskrivning	Bild
<p>Håltavla Produkt från IKEA som utgör basen för det modulära systemet. IKEA Skådis, artikelnummer: 005.415.74.</p>	
<p>Vertikal skena Monteras vertikalt på håltavlan med två stycken tvåpunkts tavelssprintar. Kan användas med samtliga slädar. Två stycken skenstopp används, ett vardera ände, för att låsa slädarna på skenan.</p>	
<p>Horisontell skena Monteras horisontellt på håltavlan med två stycken tvåpunkts tavelssprintar. Kan användas med samtliga slädar. Två stycken skenstopp används, ett vardera ände, för att låsa slädarna på skenan.</p>	
<p>Skenstopp Används på skenorna för att stoppa slädar från att glida av skenan. Skrivs ut i mjukt material som TPU för att ge dämpning vid hastig stopp av slädar.</p>	

<p>Tvåpunkts tavelprint Används för att låsa fast skenor på håltavlan.</p>	
<p>Axelsprint Används för att låsa fast staget på slädarnas axlar.</p>	
<p>Stag Monteras på släde A och B med axelsprintar.</p>	
<p>Släde A Används på skena. Dess markörstag löper över det av släde B.</p>	
<p>Släde B Används på skena. Dess markörstag löper under det av släde A.</p>	
<p>Markör Löper på slädarnas markörstag, samt i stagets cirkelbåge.</p>	

Tabell C.3: Labbutrustning momentacentrum

Genomförande:

1. **Montera skenor på håltavlan.**

Fäst skenorna på håltavlan med fyra stycken tvåpunkts tavelprintar på ett sådant sätt att den vertikala och den horisontella skenan bildar en L-form.

2. **Montera slädarna på skenorna.**

Lossa på ett skenestopp på de två skenorna. Skjut på en släde på respektive skena. Sätt tillbaks skenstoppen.

3. **Montera markören på slädarnas markörstag.**

För in slädarnas markörstag i respektive hål i markören. Kontrollera att markören är monterad korrekt, detta är då centrum på markörens knopp är i linje med centrum på slädarnas respektive axlar.

4. **Montera staget.** Montera staget på slädarnas respektive axel, om markören är korrekt monterad bör markörknoppen falla in i spåret på stagets cirkelbåge. Fäst staget i slädarnas axlar med två stycken axelsprintar.
5. **Undersök stagets momentancentrum.**
Vrid på staget så att slädarna löper längs skenorna. Observera hur staget alltid vrider sig kring en punkten på cirkelbågen där markören befinner sig, detta är stagets momentancentrum.

C.4 Labb PM - Pendelsystem

Syfte :

Syftet med laborationen är att studera hur en pendel beter sig när den förskjuts från sitt jämviktsläge. Genom att analysera hur vinkelhastighet och accelerationen är i olika punkter kan man få en bredare förståelse över pendels egenskaper.

Teori :

En pendel är en mekanisk anordning med en periodisk rörelse där den mekaniska energin kontinuerligt växlar mellan potentiell energi ($E_p = mgh$) och rörelseenergi ($E_k = \frac{mv^2}{2}$). Enligt energiprincipen är summan av dessa konstant och därför kan man genom att sätta E_p vid maximal amplitud i likhet med E_k i jämviktsläget kan den maximala hastigheten i pendeln beräknas. I ekvationen definieras variabeln h som den vertikala höjdskillnaden mellan vändpunkten och jämviktsläget och kan beräknas genom formeln

$$h = L - L \cos(\theta)$$

När pendeln förskjuts med vinkeln θ uppstår ett vridmoment orsakat av tyngdkraftens komponent. Detta moment strävar efter att återföra pendeln till jämviktsläget. På grund av massans tröghet fortsätter pendeln förbi jämviktsläget, vilket skapar en oscillerande rörelse. Periodtiden (T) för en hel svängning beräknas med formeln

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

, där L är pendelns längd och g är tyngdaccelerationen. Denna formel förutsätter att vinkeln θ är tillräckligt liten för att approximationen $\sin(\theta) \approx \theta$ ska gälla.

Beskrivning av labbutrustning :

Beskrivning	Bild
<p>Håltavla Produkt från IKEA som utgör basen för det modulära systemet. IKEA Skådis, artikelnummer: 005.415.74.</p>	
<p>Infästning Infästning för pendelstav. Monteras fast med trepunkts tavelprint</p>	
<p>Pendelstav Pendelstav för att montera i infästning och accelerometer. För att möjliggöra pendelrörelse</p>	
<p>Pendelstav m viktäste Om en massa önskas fästas på används denna pendelstav med möjlighet för fäste för vikt</p>	
<p>Accelerometer Trådlös accelerometer från PASCO</p>	
<p>Måttband För att möjliggöra mätning mellan rotationspunkt och tyngdpunkt</p>	
<p>Gradskiva Möjliggör relativ mätning av vinkel mellan pendel och jämviktsläge</p>	
<p>Trepunkts tavelprint</p>	
<p>Axelsprint Används för att låsa fast pendelstaven med infästning</p>	

Tabell C.4: Labbutrustning pendelsystem

Genomförande :

1. Placera håltavlan på ett stabilt, plant underlag så att mätningarna kan genomföras korrekt.
2. Montera infästning i tavlan.
3. Fäst pendelstaven i infästningen.
4. Montera accelerometern i pendelstavens nedre ände och kontrollera att den kan svänga fritt utan kontakt med tavlan.
5. Mät pendelns längd L med måttband. Mät från rotationspunkten till accelerometers tyngdpunkt.
6. Starta accelerometern och SPARKvue.
7. Dra ut pendelannordningen och med gradskiva mät vinkeln.
8. Släpp pendeln utan att ge startfart. Låt pendeln oscillera och studera resultatet i SPARKvue.

C.5 Labb PM - Fjädersystem

Syfte : Syftet med laborationen är att undersöka en fjäders beteende när den sätts i svängning efter att ha spänts ut från sitt jämviktsläge. Genom att analysera rörelsen kan sambandet mellan kraft, acceleration och förskjutning studeras. Datan samlas in genom en accelerometer.

Teori : En fjäder är ett elastiskt maskinelement som lagrar och frigör mekanisk energi. När en massa kopplas till en fjäder bildas ett mekaniskt svängningssystem där rörelsen uppstår till följd av samspelet mellan fjäderkraften och massans tröghet.

Då fjädern spänns ut med en viss elongation, x , från sitt jämviktsläge uppstår en återställande kraft som strävar efter att systemet ska återgå till jämvikt. Jämvikt för en upphängd fjäder är när den är i kraftjämvikt. Sambandet mellan kraften och elongationen beskrivs med Hookes lag. $F = -kx$. Där F är fjäderkraften, k fjäderkonstanten som anger fjäderns styvhet samt x som är förskjutningen från jämviktsläget. Minustecknet visar att kraften alltid är riktad mot jämviktsläget.

En massa som är fäst i fjädern kommer då systemet är i rörelse påverkas av den återställande kraften. Newtons andra lag ger $F = ma$, där m är massa och a accelerationen. Genom kombinationen av Hookes- och Newtons andra lag får man sambandet $ma = -kx$. Utöver fjäderkraften påverkas massan av en dämpande kraft som approximeras vara proportionell mot hastigheten $F = -cx'$.

Den totala kraften på systemet kan beskrivas som summan av fjäderkraften och den dämpande kraften. $ma = -kx - cx'$. Ekvationen beskriver en dämpad harmonisk svängning och innebär att systemet fortfarande oscillerar men amplituden avtar över tid.

Beskrivning av labbutrustning :

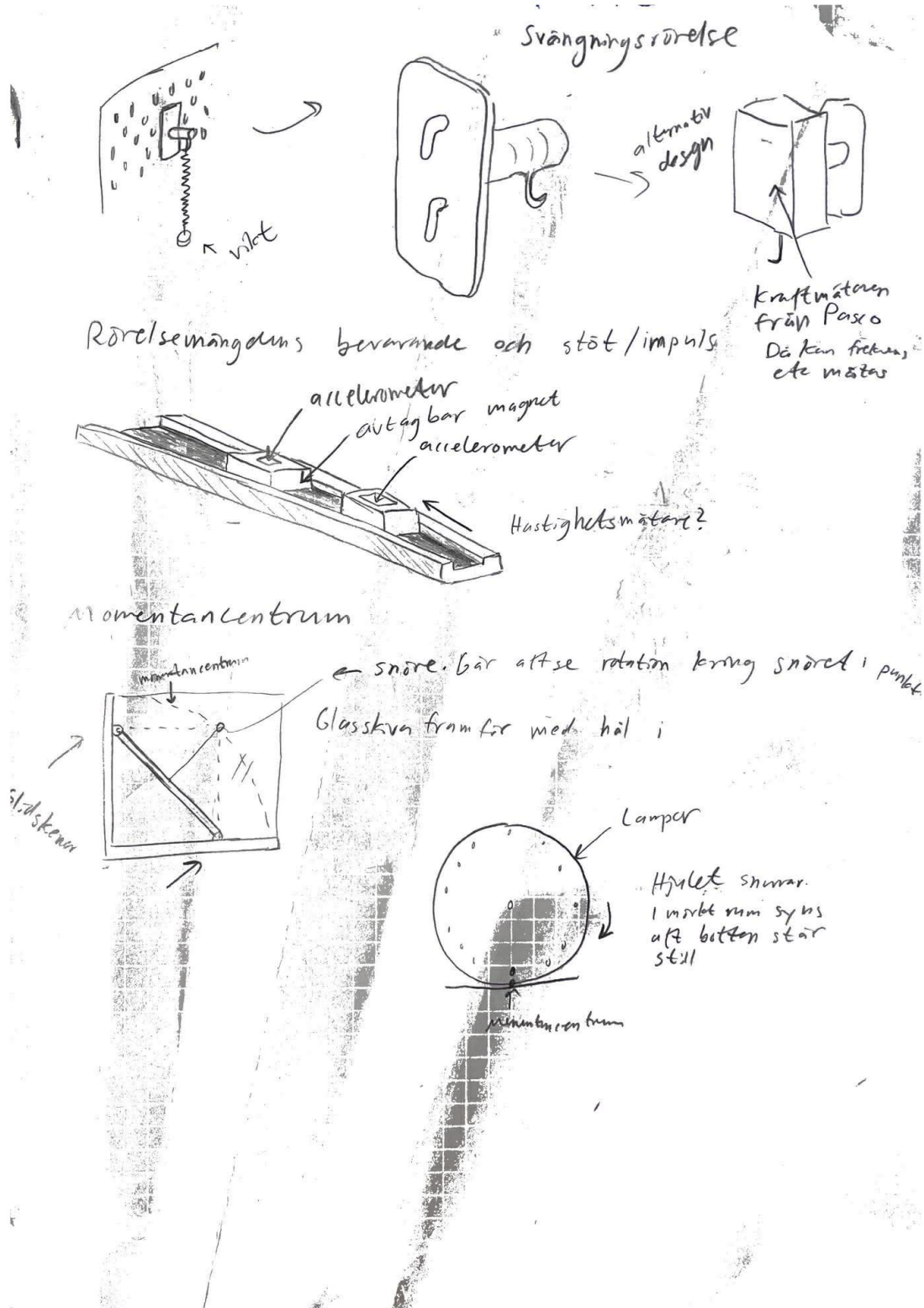
Beskrivning	Bild
Håltavla Produkt från IKEA som utgör basen för det modulära systemet. IKEA Skådis, artikelnummer: 005.415.74.	
Sensorfäste Infästning för accelerometern som monteras med en trepunkts tavelprint	
Massa Godtycklig massa med möjlighet att fästa i fjäderns krok	
Accelerometer PASCO Trådlös accelerometer från PASCO	
Fjäder Önskad fjäder	
Trepunkts tavelprint	

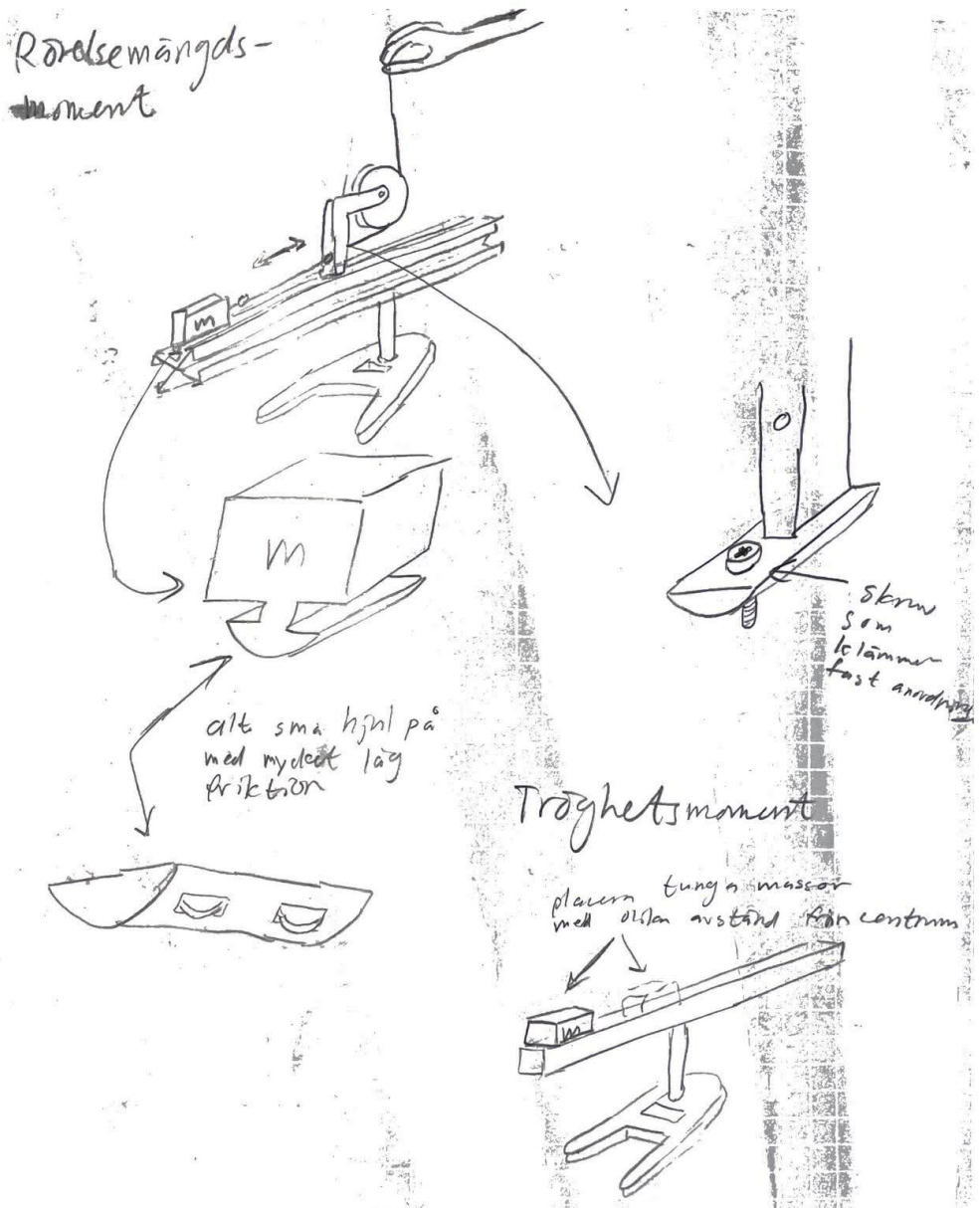
Tabell C.5: Labbutrustning fjädersystem

Genomförande :

1. Placera håltavlan på ett stabilt, plant underlag så att mätningarna kan genomföras korrekt.
2. Montera infästningen i håltavlan med hjälp av en trepunkts tavelprint.
3. Montera accelerometern i infästningen.
4. Häng fjädern i accelerometers krok.
5. Häng massan på fjäderns krok.
6. Starta accelerometern och SPARKvue. Se till att datan är nollställd när endast fjädern och massan hänger i den.
7. Dra vikten vertikalt nedåt och mät elongationen från jämviktsläget. Släpp vikten och dokumentera rörelsen i SPARKvue.

C.6 Konceptskisser





INSTITUTIONEN FÖR MEKANIK OCH MARITIMA VETENSKAPER
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

Göteborg, Sverige 2026

www.chalmers.se



CHALMERS