

## Modellering av utspädningskylare

Simulering och analys av  $^3\text{He}/^4\text{He}$ -utspädningskylare i subkelvinområdet

MMSX21-VT26-19A

Kandidatarbete vid institution för Mekanik och Maritima vetenskaper

MARTIN BORNECRANTZ, AXEL SKOG BRÖNNESTAM,  
HUGO ENGH, MAGDALENA HANSSON,  
OSCAR MOHLIN LINDGREN, MELVIN OTTOSSON



KANDIDATARBETE 2026

## Modellering av utspädningskylare

Martin Bornecrantz  
Axel Skog Brönnestam  
Hugo Engh  
Magdalena Hansson  
Oscar Mohlin Lindgren  
Melvin Ottosson



**CHALMERS**

Institutionen för Mekanik och Maritima Vetenskaper  
Avdelningen för Strömningslära  
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA  
Göteborg 2026

## Modellering av utspädningskylare

Martin Bornecrantz  
Axel Skog Brönnestam  
Hugo Engh  
Magdalena Hansson  
Oscar Mohlin Lindgren  
Melvin Ottosson

© MARTIN BORNECRANTZ, AXEL SKOG BRÖNNESTAM, HUGO ENGH,  
MAGDALENA HANSSON, OSCAR MOHLIN LINDGREN,  
MELVIN OTTOSSON, 2026.

Handledare: Tomas Grönstedt, Mekanik och Maritima Vetenskaper,  
Mehdi Habibniarami, Mekanik och Maritima Vetenskaper

Examinator: Carlos Xisto, Mekanik och Maritima Vetenskaper

Kandidatarbete 2026  
Institutionen för Mekanik och Maritima Vetenskaper  
Chalmers Tekniska Högskola  
SE-412 96 Göteborg  
Telefon +46 31 772 1000

Omslagsbild: Schematisk bild av den modellerade utspädningskylaren.

Typsatt i L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  
Göteborg 2026

## Abstract

The Department for Mechanics and Maritime Sciences, together with the Wallenberg Center for Quantum Technology and Atlas Copco, aims to develop a scalable model of a dilution refrigerator. Today, all larger-scale quantum computers are cooled using  $^3\text{He}/^4\text{He}$  dilution refrigerators. These systems are well proven and reliable. However, challenges arise when increasing the number of qubits in a quantum computer. As the number of qubits increases, the required cooling power needed to maintain sufficiently low temperatures also increases. The aim of this project was to develop a model that could be used as a starting point for future research focused on modeling and increasing the cooling power of dilution refrigerators.

The project initially focused on developing an understanding of the individual components of the dilution refrigerator and modeling them separately. The subsystems were implemented as classes in a python file and later integrated in a Jupyter Notebook to assemble the complete dilution refrigerator model.

The result is a well-functioning model that provides values consistent with literature, and no obvious unphysical behavior was observed. Since no similar publicly available models currently exist, this model provides a strong foundation for future research in this field.

## Sammanfattning

Institutionen för mekanik och maritima vetenskaper vill tillsammans med Wallenberg Center for Quantum Technology och Atlas Copco utveckla en skalbar modell av en utspädningskylare. Alla större kvantdatorer kyls idag med hjälp av  $^3\text{He}/^4\text{He}$ -utspädningskylare. Dessa system är väl beprövade och pålitliga, men problem uppstår när man vill utöka antalet kvantbitar i kvantdatoren. Detta beror på att kraven på kyleffekt ökar för att kunna hålla kvantbitarna vid tillräckligt låga temperaturer. Målet med projektet var att utveckla en modell som kan användas som grund för framtida forskning med syftet att modellera och öka kylsystemets totala kyleffekt.

Projektet inleddes med att skapa en förståelse för de individuella delsystemen i utspädningskylaren och modellera dem separat. Delsystemen implementerades därefter som klasser i en Pythonfil och integrerades sedan i en Jupyter Notebook för att sammanställa den kompletta modellen av utspädningskylaren.

Resultatet är en välfungerande modell vars värden överensstämmer med litteraturen, och inga tydliga ofysikaliska beteenden har observerats. Eftersom inga liknade modeller finns öppet tillgängliga utgör modellen en god grund för framtida forskning inom området.

Nyckelord: Utspädningskylare, blandningskammare, destillator, värmeväxlare, subkelvin, kryoteknik.

---

## Förord

Denna rapport beskriver ett kandidatarbete utfört av tre studenter från civilingenjörsprogrammet kemiteknik med fysik, två studenter från civilingenjörsprogrammet teknisk fysik och en student från civilingenjörsprogrammet maskinteknik på Chalmers tekniska högskola. Kandidatarbetet utfördes vid institutionen för mekanik och maritima vetenskaper under våren 2026 och motsvarar 15 högskolepoäng.

## Författarnas tack

Vi vill rikta ett stort tack till vår kontakt Andrew Chew på Atlas Copco för hans expertis och vägledning inom gasflödesmodeller och vakuumpumpar samt för den värdefulla inblicken i utvecklingen av utspädningskylare. Vi vill även tacka Mehdi Habibniarami och Maksim Nikonovich för deras handledning och stöd under arbetets gång. Ett särskilt stort tack riktas till vår handledare Tomas Grönstedt, som med stort engagemang väglett oss genom hela arbetet och hjälpt oss med allt från frågor och referenser till de utmaningar som uppstått längs vägen. Slutligen vill vi tacka alla som på olika sätt bidragit till genomförandet av detta kandidatarbete.

Martin Bornecrantz, Axel Skog Brönnestam, Hugo Engh, Magdalena Hansson,  
Oscar Mohlin Lindgren, Melvin Ottosson, Göteborg, Maj, 2026



# Nomenklatur

Nedan listas index samt parametrar och variabler som användes under arbetet.

## Index

$3$	${}^3\text{He}$
$4$	${}^4\text{He}$
$c$	Koncentrade lösningen av ${}^3\text{He}$
$d$	Upplösta lösningen av ${}^4\text{He}$
$D$	Trycket nedströms
$mc$	Blandningskammare
$s$	Destillatorn
$u$	Trycket uppströms
$v$	Ånga

## Parametrar och variabler

$A$	Tvärsnittsarea på rören [ $\text{m}^2$ ]
$A_s$	Arean på mynningen i destillatorn [ $\text{m}^2$ ]
$B$	Kanalens omkrets [ $\text{m}$ ]
$C$	Omkretsen på mynningen från destillatorn [ $\text{m}$ ]
$C_a$	Molekylärflödeskonduktans för en apparatur
$C_c$	Specifik värmekapaciteten för koncentrerad lösning värmeväxlare
$C_d$	Specifik värmekapaciteten för utspädd lösning värmeväxlare
$C_D$	Kontinuumflödeskonduktans beräknat vid trycket nedströms (downstream)
$C_m$	Molekylärflödeskonduktans för en kanal
$C_u$	Kontinuumflödeskonduktans beräknat vid trycket uppströms

---

$C_z$	Hjälpterm = $A\sqrt{\frac{RT_0}{M}} = \sqrt{2\pi} C_a$
$c_v$	Ljudets hastighet i helium [m/s]
$d$	Tjocklek av superfluiden [m]
$d_0$	Tjocklek av ett atomlager till superfluiden [m]
$d_{mol}$	Molekylär diameter för $^3\text{He}$ vilket sätts till 2,6 Å
$D_h$	Karakteristiska längden [m]
$f_D$	Darcy-friktionsfaktor [-]
$h_f$	Term för energiförlust [-]
$H_{30}$	Entalpin för ren $^3\text{He}$ [J/mol]
$H_d$	Entalpin för $^3\text{He}$ i upplösta lösningen [J/mol]
$H_{Bland}$	Entalpin för upplösta fasen [J/mol]
$H_{konc}$	Entalpin för koncentrerade fasen [J/mol]
$K_c$	Tryckkvot mellan ingång och utgång av rör
$Kn$	Knudsen-tal [-]
$k_b$	Boltzmannskonstant [J/K]
$k_c$	värmeledningskoefficient för koncentrerade fasen i värmeväxlaren [W/(K·m)]
$k_d$	Värmeledningskoefficient för utspädda fasen i värmeväxlaren [W/(K·m)]
$l_e$	Ekvivalent längd vid beräkning av molekylär transmissionssannolikhet [-]
$L_c$	Effektiv kanallängd i kontinuumflöde [m]
$L_{imp}$	Längd på impedansröret in till kondensorn [m]
$M_3$	Molmassa av $^3\text{He}$ sätts till $3,016 \cdot 10^{-3}$ [kg/mol]
$M_4$	Molmassa av $^4\text{He}$ sätts till $4,003 \cdot 10^{-3}$ [kg/mol]
$M_v$	Genomsnittlig molmassa i destillatorn [kg/mol]
$Ma$	Mach-talet (kvot mellan flödes hastigheten och ljudhastigheten)
$Ma_n$	Mach-talet vid kanalens öppning
$Ma_x$	Mach-talet vid kanalens ände
$N_a$	Avogadros tal
$\dot{n}$	Totala molflödet [mol/s]
$\dot{n}_1$	Molflöde från superfilmerna ut ur destillatorn [mol/s]
$\dot{n}_2$	Molflöde ut ur destillatorn [mol/s]
$\dot{n}_3$	Molflöde av rent $^3\text{He}$ [mol/s]
$n_c$	Förlust koefficient eller antal 90-graders böjar [-]

---

$P_0$	Tryck utanför mynningen till destillator [Pa]
$P_c$	Kritiska trycket som ger kvävt flöde [Pa]
$P_D$	Tryck nedströms (downstream) [Pa]
$P_k$	Trycket i kondensorn [Pa]
$P_p$	Trycket precis innan pumpen / vid inlopp [Pa]
$P_u$	Tryck uppströms [Pa]
$P_v$	Trycket i destillatorn [Pa]
$Pe$	Peclet talet [-]
$p$	Omkrets på inre röret i värmeväxlaren [m]
$\dot{Q}_{mc}$	Kylningseffekt [W]
$Q$	Genomflöde [W]
$Q_m$	Molekylärt genomflöde [W]
$Q_v$	Visköst/kontinuum genomflöde [W]
$R$	Gaskonstanten [J/(mol·K)]
$R_{kt}$	Kapitza-resistansen [m <sup>2</sup> K/W]
$Re$	Reynolds tal [-]
$Re^*$	Modifierade reynolds tal [-]
$r_c$	Radie på rören i värmeväxlaren [m]
$r_{imp}$	Radie på impedansröret in till kondensorn [m]
$r_{tub}$	Radie på modellerad gastub [m]
$r_{still}$	Radie på mynningen till destillatorn [m]
$S_c$	Tvärsnittsarean för koncentrat flöde i värmeväxlaren [m <sup>2</sup> ]
$S_d$	Tvärsnittsarean för utspädd flöde i värmeväxlaren [m <sup>2</sup> ]
$S_p$	Pumphastigheten [m <sup>3</sup> /s]
$S_f$	Tvärsnittets formfaktor [-]
$T_0$	Stagnationstemperatur [K]
$T_c$	Temperatur koncentrerad lösning i värmeväxlare [K]
$T_d$	Temperatur utspädd lösning i värmeväxlare [K]
$T_{in}$	Temperatur in i blandningskammaren [K]
$T_{mc}$	Temperatur i blandningskammaren [K]
$T_p$	Rumstemperatur [K]
$T_s$	Temperatur i destillatorn [K]
$\dot{V}_c$	Volymflödet för koncentrerade fasen i värmeväxlaren [m <sup>3</sup> /s]
$\dot{V}_d$	Volymflödet för utspädda fasen i värmeväxlaren [m <sup>3</sup> /s]

---

$x$	Molfraktion [-]
$x_d$	Molfraktion i upplösta fasen i blandningskammaren [-]
$x_{in}$	Molfraktion in i värmeväxlaren [-]
$x_s$	Molfraktion i vätskefasen i destillatorn [-]
$x_v$	Molfraktion i gasfasen i destillatorn [-]
$Z$	Flödesimpedansen [Pa · s/m]
$Z_c$	Flödesimpedansen för koncentrerade fasen i värmeväxlaren [Pa · s/m]
$Z_d$	Flödesimpedansen för utspädda fasen i värmeväxlaren [Pa · s/m]
$\epsilon$	Kanalväggens ytråhet, sätts ofta till 0.0015mm vakuum rör [mm]
$\eta$	Viskositet [Pa · s]
$\gamma$	Värmekapacitetsförhållande för helium [-]
$\lambda$	Fria medelväglängden [m]
$\mu$	Kemisk potential [J/mol]
$\mu_{4,mc}$	Kemisk potential för $^4\text{He}$ i blandningskammaren [J/mol]
$\mu_{4,s}$	Kemisk potential för $^4\text{He}$ i destillatorn [J/mol]
$\mu_c$	Kemisk potential för koncentrerad lösning [J/mol]
$\mu_d$	Kemisk potential för utspädd lösning [J/mol]
$\nu_c$	Kritiska superfluidhastigheten [m/s]
$\pi$	Osmotiskt tryck [Pa]
$\rho_s$	Densiteten på superfluiden i destillatorn [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]
$\rho_v$	Densiteten på gasen i destillatorn [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]
$\varphi(Kn)$	Funktion av Knudsen-talet [-]

# Innehåll

<b>Nomenklatur</b>	<b>ix</b>
<b>Figurer</b>	<b>xv</b>
<b>Tabeller</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Inledning</b>	<b>1</b>
1.1 Syfte . . . . .	1
1.2 Avgränsningar . . . . .	2
<b>2 Teori</b>	<b>3</b>
2.1 Grundläggande fysikaliska samband . . . . .	4
2.1.1 Entropi . . . . .	4
2.1.2 Fria energier . . . . .	4
2.1.3 Kemisk potential . . . . .	5
2.1.4 Osmotiskt tryck . . . . .	5
2.1.5 Fermi-gasteori och superfluid . . . . .	5
2.1.6 Löslighet hos $^3\text{He}$ i $^4\text{He}$ . . . . .	6
2.1.7 Kapitza-resistans . . . . .	6
2.1.8 Knudsen-talet . . . . .	7
2.1.9 Peclet-talet . . . . .	7
2.1.10 Reynolds tal . . . . .	8
2.1.11 Hagen-Poiseuilleflöde . . . . .	8
2.2 Brents rotsökningsmetod . . . . .	8
2.3 Delsystem . . . . .	8
2.3.1 Värmeväxlare . . . . .	9
2.3.2 Blandningskammare . . . . .	10
2.3.3 Destillator . . . . .	12
2.3.3.1 Mynningen ut från destillatorn . . . . .	13
2.3.4 Gasflödesmodell för hela Knudsen-regimen . . . . .	13
<b>3 Metod</b>	<b>17</b>
3.1 System . . . . .	17
3.2 Värmeväxlare . . . . .	18
3.3 Blandningskammare . . . . .	20
3.4 Destillator . . . . .	20
3.4.1 Mynningen ut från destillatorn . . . . .	21

3.5	Pump . . . . .	22
3.6	Lösning av gasflödesmodell . . . . .	22
3.7	Kopplad lösningsalgoritm av destillator till pump . . . . .	24
3.8	Övergripande programmeringsstruktur . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Resultat och diskussion</b>	<b>27</b>
4.1	Parameterstudie . . . . .	27
4.1.1	Kapitza-resistansens påverkan på in-temperaturen och kyleffekten i blandningskammaren . . . . .	27
4.1.2	Kyleffekten i förhållande till andel $^3\text{He}$ i destillatorns gasfas . . . . .	29
4.1.3	Kyleffekten i förhållande till storlek på destillatormynning . . . . .	31
4.1.4	Tryck vid pumpen och pumphastighet i förhållande till storlek på destillatormynningen . . . . .	32
4.1.5	Analys av molflöde och krypande $^4\text{He}$ superfluid ut ur destillatorn . . . . .	33
4.1.6	Temperatur- och koncentrationsprofiler för värmväxlaren . . . . .	35
4.1.7	Beräkning och analys av Peclet-talet i värmväxlaren . . . . .	37
4.1.8	Dimensionering av huvudsaklig flödesimpedans . . . . .	38
4.2	Skalbarhet av systemet . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Slutsatser</b>	<b>41</b>
	<b>Litteraturförteckning</b>	<b>43</b>
<b>A</b>	<b>Appendix 1</b>	<b>I</b>

# Figurer

2.1	Schematisk bild av den modellerade utspädningskylaren. . . . .	3
2.2	Schematisk uppdelning av utspädningskylare i fyra delsystem: pumpsystem (orange), destillator (grön), värmeväxlare (röd) samt blandningskammare (lila). . . . .	9
2.3	Schematisk bild av värmeväxlare som illustrerar riktningen för värmeväxlingen och molflödet. . . . .	10
2.4	Blandningskammare med ingående och utgående flöden. Figuren visar separationen mellan den koncentrerade fasen (ljusblå) och den utspädda fasen (mörkblå). . . . .	10
2.5	Destillator med utloppsmynning. Illustrationen visar ångan (ljusblå) som bildas vid ångtrycket $P_v$ , samt hur den utspädda fasen (mörkblå) kryper längs med väggarna upp till utloppet. Trycket $P_o$ är trycket vid mynningen. De två flödena, $\dot{n}_2$ från ångan och $\dot{n}_1$ från den utspädda fasen, bildar tillsammans molflödet $\dot{n}$ . . . . .	12
3.1	Flödesschema över systemet. Grå pilar representerar manuellt inmatade parametrar, färgade pilar visar indata från delsystem, och linjer som avslutas med en cirkel indikerar beräknade resultat. Färgerna representerar delsystemen i Figur 2.2. Namnen för blocken är samma som används i källkoden, där blandningskammare förkortas <i>MC</i> , destillator <i>still</i> och värmeväxlare <i>VVX</i> . . . . .	17
3.2	Schematisk bild över värmeväxlaren som beskriver rörlängd för dem båda rören i värmeväxlaren. . . . .	18
3.3	Pump, impedans, kylsystem och rör. Figuren illustrerar uppdelningen av rörsegment. För varje segment beräknades nedströmstrycket och resultatet användes för att dimensionera en impedans. Temperaturerna för varje segment visas, där $T_{still}$ är temperaturvariabeln ut ur destillatorn. . . . .	24
3.4	Översikt av projektets mappstruktur. Rotkatalogen, project root, innehåller de centrala Python-filerna samt underkataloger för exempelvis komponentdefinitioner, jämviktsberäkningar, konstanter och termisk data, vilka tillsammans används av huvudkoden för att genomföra simuleringen. . . . .	26
4.1	Figur som visar temperaturen som värmeväxlaren ger in i blandningskammaren som funktion av önskad temperatur i blandningskammaren. Figuren visar gentemot referensfallet $T_{mc} = 100 \text{ mK}$ och $x_v = 0,75$ . . . . .	28

4.2	kyleffekten, $\dot{Q}_{mc}$ , som funktion av temperaturen i blandningskammaren, $T_{mc}$ . Figuren visar gentemot referensfallet $r_{still} = 1,5 \text{ mm}$ och $x_v = 0,75$ . . . . .	29
4.3	Kyleffekten som funktion av andelen ${}^3\text{He}$ i gasfasen i destillatorn. Figuren visar gentemot referensfallet $T_{mc} = 100 \text{ mK}$ och $x_v = 0,75$ . . . . .	30
4.4	Molflödets påverkan på kyleffekten när andel ${}^3\text{He}$ i gasfasen i destillatorn varierar. Figuren visar gentemot referensfallet $T_{mc} = 100 \text{ mK}$ och $x_v = 0,75$ . . . . .	30
4.5	Destillatormynningens radie påverkan på kyleffekten. Figuren visar gentemot referensfallet $T_{mc} = 100 \text{ mK}$ och $x_v = 0,75$ . . . . .	31
4.6	Molflödets påverkan på kyleffekten när destillatormynningens radie varierar. Figuren visar gentemot referensfallet $T_{mc} = 100 \text{ mK}$ och $x_v = 0,75$ . . . . .	32
4.7	Minsta pumphastighet som krävs för att uppnå det kritiska trycket $P_c$ utanför destillatormynningen beroende på radien av mynningen (blå). Inloppstrycket som pumpen ger är plottad i samma axel (röd). . . . .	33
4.8	Molflödet ut ur destillatorn som funktion av radien på mynningen. Det totala flödet (blå) och dess två komponenter ${}^3\text{He}$ (orange) och superfluida ${}^4\text{He}$ filmflödet (grön). Inputparametrar givna under huvudrubriken. . . . .	34
4.9	Molfraktionen av ${}^3\text{He}$ beroende av radie till destillatormynningen. Inputparametrar givna under huvudrubriken. . . . .	34
4.10	Totala molflödet vid olika pumphastigheter. Inputparametrar givna under huvudrubriken. . . . .	35
4.11	Temperaturprofilen för värmeväxlaren längs dess längd. Det är en motströms-tubvärmeväxlare där den varma sidan med koncentrerad ${}^3\text{He}$ (röd) är en 5 meter lång spiral inuti den kalla sidan med utspädd ${}^3\text{He}/{}^4\text{He}$ (blå). Pilarna visar flödesriktningen. . . . .	36
4.12	Koncentrationsprofilen av ${}^3\text{He}$ i den utspädda fasen längs värmeväxlaren från blandningskammaren till destillatorn. . . . .	37

# Tabeller

4.1	Referensfallet som användes som utgångspunkt för parameterstudien samt analys av resultaten. . . . .	27
4.2	Lämpliga radier för flödesimpedansen vid 5 representativa exempel på molflöden. För samtliga exempel har impedansen längden $L_{imp} = 5$ m och en geometri som motsvarar $n_c = 10$ vinkelräta böjningar. . .	38



# 1

## Inledning

Kapaciteten att nå extremt låga temperaturer är avgörande för flertalet områden inom modern fysik och teknik, särskilt inom områden som kvantteknologi, materialfysik och vid precisionsmätningar. Temperaturer nära den absoluta nollpunkten möjliggör studier av exempelvis superfluiditet och supraledning samt användning av känsliga instrument som astronomiska sensorer [1]. Extremt låga temperaturer resulterar även i att kvantmekaniska effekter framträder, vilket möjliggör användning av kvantbaserade beräkningssystem. Kvantdatorer är särskilt känsliga för termiska vibrationer som stör dess kvantbitar. Det krävs därför kylsystem som kan nå subkelvinområdet för att möjliggöra kvantdatorer.

En etablerad metod för att uppnå subkelvintemperaturer är utspädningskylning, som utvecklades under 1960-talet. Principen bygger på den endotermiska egenskapen då Fermi-vätskan  $^3\text{He}$  löser sig i superfluiden  $^4\text{He}$  och tar upp energi från sin omgivning. Den blandade vätskan destilleras och pumpas sedan tillbaka in i systemet. Denna teknik gör det möjligt att nå temperaturer ned till 2 mK, vilket gör den till den enda kontinuerliga kylmetoden som kan nå temperaturer under 0,3 K [2]. En vanlig termisk last i systemet är kvantdatorer, det vill säga det prov som kyles av blandningskammaren, vilka kräver temperaturer i subkelvinområdet.

Trots dess framgångar är dagens utspädningskylare begränsade av sin storlek, vilket begränsar dess kylkapacitet och därmed även prestandan hos framtida kvantdatorer. Kvantdatorer är designade för att klara tyngre parallella beräkningar, såsom kvantmekaniska beräkningar, optimeringar och kryptografi, där klassiska datorer har begränsningar. För att möjliggöra dessa tillämpningar ökar därför kraven för kylsystemen [3].

### 1.1 Syfte

Syftet med detta projekt är att ta fram en termodynamisk simuleringsmodell för en utspädningskylare (*dilution refrigerator* på engelska). Modellen ska identifiera olika flaskhalsar i systemet som begränsar kyleffekten i blandningskammaren, detta genom att optimera olika parametrar, exempelvis cirkulationsflödet  $\dot{m}$ .

## 1.2 Avgränsningar

Under arbetets gång har vissa antaganden och avgränsningar varit nödvändiga för att kunna sammanställa och presentera relevanta resultat inom tidsramen för projektet. Ett huvudantagande var att systemet befinner sig i jämviktstillstånd. Syftet med detta antagande var att undvika komplicerade differentialekvations-formuleringar samt att kunna fokusera på de fysikaliska processerna.

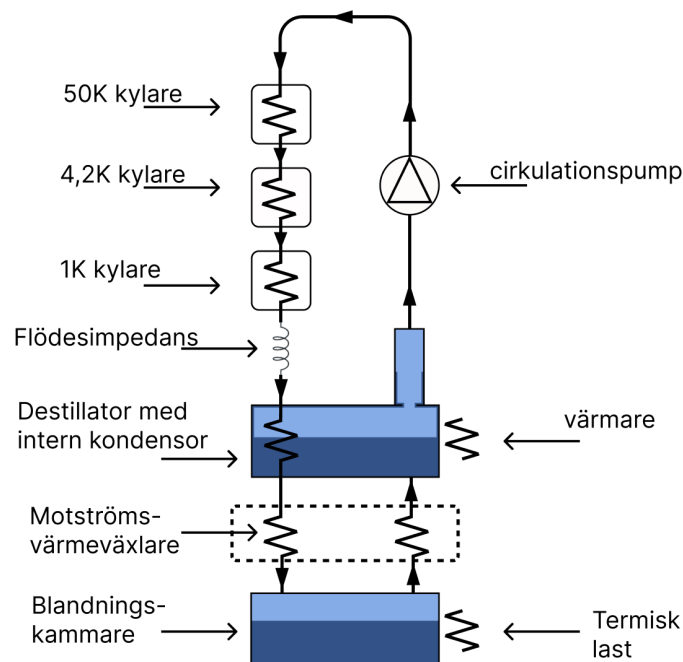
I de allra flesta konstruktioner av utspädningskylare upprätthålls en god värmeekonomi genom värmeväxling mellan flöden med stor temperaturskillnad. För att undvika en alltför komplex modell har detta frångåtts under arbetet. Eftersom denna förenkling främst påverkar systemets värmeekonomi förväntas det inte ha någon betydande inverkan på de resultat som presenteras. Ett annat antagande var att systemet är välisolerat, alltså att värmeförluster till omgivningen försumrades.

Det antogs även att utspädningskylaren är ett slutet system, vilket innebär att processen för återcirkulation och påfyllning av helium inte inkluderades. Systemet förenklades därmed så att endast en pump behövdes, istället för den serie av pumpar, kompressorer och kylare som normalt används i utspädningskylare.

# 2

## Teori

Till skillnad från konventionella heliumkylare, som utnyttjar den värmeabsorberande förångningen av helium [2], bygger utspädningskylare istället på kylning som uppstår när  $^3\text{He}$  löses i  $^4\text{He}$  vid låga temperaturer. Själva kylningen sker i blandningskammaren, se Figur 2.1, där  $^3\text{He}$  övergår från en koncentrerad fas till en utspädd fas med 6,4%-7,1%  $^3\text{He}$  för temperaturer mellan 0-0,1 K. Att denna utspädning kan ske även vid 0 K är orsaken till att utspädningskylare kan nå temperaturer i subkelvinområdet [1].



**Figur 2.1:** Schematisk bild av den modellerade utspädningskylaren.

För att upprätthålla kontinuerlig kylning avlägsnas  $^3\text{He}$  hela tiden från den utspädda fasen. Detta rubbar jämvikten i systemet, vilket gör att nytt  $^3\text{He}$  fortlöpande löser sig i  $^4\text{He}$  i blandningskammaren. Processen är endoterm och ger upphov till kylning.

Det bortförda  $^3\text{He}$  återvinns genom att det förångas i destillatorn och därefter transporteras via pumpar och kompressorer, där det kondenseras och kyls för att kunna återföras till blandningskammaren. Innan  $^3\text{He}$  når blandningskammaren genomgår det dessutom stegvis kylning i en värmeväxlare för att uppnå de låga temperaturer som krävs i blandningsprocessen [3].

## 2.1 Grundläggande fysikaliska samband

I detta avsnitt introduceras de grundläggande fysikaliska samband och storheter som används i den fortsatta teorin.

### 2.1.1 Entropi

Entropi är ett termodynamiskt mått på oordning i ett system. Isolerade system går spontant mot högre entropi. I utspädningskylaren används detta fenomen både i blandningskammaren för att driva kylningen, samt i destillatorn för att separera  $^3\text{He}$  från  $^4\text{He}$ -blandningen.

### 2.1.2 Fria energier

Entalpin  $H$  för ett system definieras som summan av den inre energin  $U$  och det arbete som behövs för att skapa den volym  $V$  systemet upptar i en omgivning med konstant tryck  $P$  enligt

$$H \equiv U + PV. \quad (2.1)$$

Helmholtz fria energi är istället ett mått av hur mycket användbart arbete man kan få ut ur ett system vid isoterma omständigheter. Det definieras som differensen mellan inre energi  $U$  och produkten av temperatur  $T$  och entropi  $S$  enligt

$$F \equiv U - TS. \quad (2.2)$$

Ur definitionen följer att det arbete som inte går nyttjat vid en isoterm process ökar istället entropin.

Om ett system har både konstant temperatur och tryck motsvaras istället arbetet som krävs för att skapa systemet av Gibbs fria energi, som ges av

$$G \equiv U - TS + PV. \quad (2.3)$$

Förändringen av Gibbs fria energi avgör vilka processer som sker spontant, eftersom spontana processer kräver  $\Delta G < 0$  [4].

### 2.1.3 Kemisk potential

Kemisk potential är ett mått på hur den fria energin i ett system ändras när antalet partiklar ändras vid konstant temperatur och tryck. Den kemiska potentialen definieras som den partiella molära Gibbs fria energin, enligt

$$\mu_i = \left( \frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T,P} \quad (2.4)$$

där  $n_i$  är substansmängden av komponent  $i$ . Om man lägger till en partikel till ett slutet system med konstant T och P kommer Gibbs fria energi att öka med  $\mu$  Joule. I ett system med endast en typ av partikel kan den kemiska potentialen därför ses som Gibbs fria energi per partikel [4].

### 2.1.4 Osmotiskt tryck

Osmotiskt tryck uppkommer då man har två vätskor med skillnader i koncentration och temperatur. Vid superfluida företeelser kan vätskorna antas vara ideala gaser och van't Hoff's lag används då för att få

$$\pi V_{m,4} \simeq x_3 RT \quad (2.5)$$

där  $\pi$  är det osmotiska trycket,  $V_{m,4}$  är molvolymen för  $^4\text{He}$  och  $x_3$  är koncentrationen för  $^3\text{He}$ . I destillatorn kokas  $^3\text{He}$  bort, och på så vis skapar man en gradient i det osmotiska trycket. Det är denna gradient som driver flödet av  $^3\text{He}$  bort från blandningskammaren där koncentrationen av  $^3\text{He}$  är relativt hög, mot destillatorn där koncentrationen av  $^3\text{He}$  är lägre. Skillnaden i osmotiskt tryck för utspädningskylaren kan beskrivas enligt

$$\pi_{mc} - \pi_s \simeq \frac{(x_{mc}T_{mc} - x_sT_s)R}{V_4} \quad (2.6)$$

där mc är blandningskammaren, s är destillatorn, x är koncentrationen, T är temperaturen, R är allmänna gaskonstanten och  $V_4$  är molvolymen. Här kan man se att trycket endast påverkas av koncentrations- och temperaturskillnaderna då molvolymen kan antas vara konstant. För att bibehålla trycket måste koncentrationsskillnaden upprätthållas genom att pumpa ut  $^3\text{He}$  ur destillatorn [2].

### 2.1.5 Fermi-gasteori och superfluid

I de flesta delar av en utspädningskylare brukar temperaturen vara enbart några Kelvin eller lägre. Vid så låga temperaturer slutar fluiderna att bete sig klassiskt. Deras beteende beskrivs istället bättre av kvantmekanik. Fluidernas egenskaper kan förklaras med hjälp av kvantstatistik genom deras olika kärnspinn.  $^4\text{He}$  har ett kärnspinn på  $I=0$  och följer därför Bose-statistik. Detta innebär att  $^4\text{He}$  kan övergå till en superfluid för temperaturer under 2,17 K. Då sker en så kallad Bose-kondensation som innebär att  $^4\text{He}$  övergår till sitt kvantmekaniska grundtillstånd där dess viskositet, entropi, och specifika värmekapacitet kan antas vara noll.  $^3\text{He}$  har däremot

ett kärnspinn på  $I=1/2$ , vilket gör att den beter sig som en Fermi-partikel. Den följer därför Fermi-statistik och följaktligen Pauliprincipen, vilket dikterar att för ett system med en temperatur under dess Fermi-temperatur, kan två Fermi-partiklar inte ockupera samma kvanttillstånd samtidigt. Ett sådant system beter sig då som en Fermi-gas.

Vid rådande temperaturer når vi inte under Fermi-temperaturen för en koncentrerad  $^3\text{He}$ -blandning, och vår koncentrerade  $^3\text{He}$ -fas beskrivs därför ej som en Fermi-gas. Däremot beter sig  $^4\text{He}$  som en superfluid i den utspädda fasen, med inert bakgrund för vårt  $^3\text{He}$  som höjer dess Fermi-temperatur. Följaktligen kan den utspädda fasen beskrivas som en Fermi-gas vid rådande temperaturer. Denna Fermi-gas antas då bestå av kvasipartiklar med en effektiv massa större än heliumpartiklarnas egentliga massa. Den effektiva massan varierar med koncentrationen, men kan under rådande omständigheter antas vara 2,4 gånger så stor som massan hos en  $^3\text{He}$ -partikel [5, 6].

När Fermi-partiklar adderas till en Fermi-gas behöver varje adderad partikel ockupera ett successivt högre energitillstånd, ty de lägre tillstånden är redan ockuperade [2]. I blandningskammaren begränsar denna energikostnad hur gynnsamt det är att lösa  $^3\text{He}$  i  $^4\text{He}$ -fasen.

### 2.1.6 Löslighet hos $^3\text{He}$ i $^4\text{He}$

Nollpunktsenergi är den lägsta möjliga energi ett kvantmekaniskt system kan ha, och som följd av Heisenbergs osäkerhetsprincip är den energin aldrig noll [2]. Detta innebär att även vid väldigt låga temperaturer, under 1 K, rör sig heliumatomerna fortfarande med en så kallad nollpunktsrörelse. Denna rörelse drivs av nollpunktsenergin, vilket är samma för båda isotoperna. Detta innebär att den lättare  $^3\text{He}$ -atomen rör sig mer än den tyngre isotopen  $^4\text{He}$ . Att  $^4\text{He}$  rör sig mindre än  $^3\text{He}$  gör att det är lättare för en  $^3\text{He}$ -atom att komma nära en  $^4\text{He}$ -atom än en  $^3\text{He}$ -atom. Med andra ord binder  $^3\text{He}$  intermolekylärt starkare till en  $^4\text{He}$ -atom än till en annan  $^3\text{He}$ -atom. Denna termodynamiska kraft driver  $^3\text{He}$  att lämna den koncentrerade  $^3\text{He}$ -fasen och lösa sig i  $^4\text{He}$ -fasen. Detta fortlöper tills energikostnaden för att höja en  $^3\text{He}$ -atom till högre energitillstånd i Fermi-gasen är större än energivinsten som fås när  $^3\text{He}$  löses i  $^4\text{He}$  istället för  $^3\text{He}$ . Detta sker temperaturberoende i en utspädningskylare vid en  $^3\text{He}$ -koncentration på 6,4%-7,1%.

### 2.1.7 Kapitza-resistans

Kapitza-resistans är ett värmeledningsmotstånd som är proportionellt mot skillnader mellan två akustiska impedanser i ett materialgränssnitt. Ett materials akustiska impedans är en produkt av dess densitet och ljudhastighet. När fononer som vanligtvis leder värme mellan materialen ska korsa gränssnittet, möts de av en skillnad i impedans och reflekteras därför ofta tillbaka. Ett materials akustiska impedans är också temperaturberoende [7]. Vid låga temperaturer och i gränssnitt med höga skillnader i akustisk impedans är detta motstånd dominerande [8].

### 2.1.8 Knudsen-talet

Knudsen-talet är en dimensionslös konstant inom fluidmekanik som avgör om flöden kan betraktas som kontinuumflöden, eller måste betraktas molekylärt. Talet definieras som kvoten mellan den fria medelvägen  $\lambda$  och den karakteristiska längden  $D_h$  enligt

$$Kn = \frac{\lambda}{D_h}. \quad (2.7)$$

Den fria medelvägen är den genomsnittliga sträcka en partikel kan färdas innan den kolliderar med en annan partikel. Den karakteristiska längden är ett geometriskt mått på det system där flödet befinner sig, till exempel diametern av ett rör.

Storleken på Knudsen-talet avgör flödets karakteristik enligt:

- $Kn < 0.01$ : Kontinuumflöde
- $0.01 < Kn < 0.1$ : Glidflöde
- $0.1 < Kn < 10$ : Övergångsflöde
- $Kn > 10$ : Frimolekylärt flöde

Vid kontinuumflöde är den fria medelvägen mycket mindre än den karakteristiska längden, vilket innebär att molekylära kollisioner sker så frekvent att gasen kan beskrivas som ett kontinuum. Det klassiska randvillkoret kallat *no slip*, vilket innebär att hastigheten vid väggen antas vara noll, gäller vid kontinuumflöde. När Knudsen-talet ökar och övergår till glidflöde gäller inte *no slip* villkoret längre, och de måste därför kompletteras med ett glidvillkor. Vid övergångsflödet kan varken kontinuum- eller frimolekylära modeller ge en tillräckligt noggrann beskrivning av flödet, och därför krävs andra metoder. När den fria medelvägen är mycket längre än den karakteristiska längden, och Knudsen-talet blir stort, kolliderar partiklarna i flödet mer med väggarna än med varandra. De måste därför betraktas som enskilda partiklar istället för ett kontinuum, och kan beskrivas med kinetisk gasteori. Om vi betraktar partiklarna i gasen som sfäriska kan den fria medelvägen beskrivas genom  $\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$  [9].

### 2.1.9 Peclet-talet

Peclet-talet är ett dimensionslöst tal som motsvarar kvoten mellan advektiv och diffusiv transport [10]. Vid beräkning av värmeledning i en fluid kan man försumma den axiella värmeledningen om Peclet-talet är mindre än 100. Peclet-talet kan beräknas genom

$$Pe = \frac{\rho C_p U L_{kar}}{k} \quad (2.8)$$

där  $\rho$  är densiteten,  $C_p$  är den specifika värmekapaciteten,  $U$  är fluidens hastighet och  $k$  är värmeledningsförmågan [11]. Med hjälp av sambandet att  $U = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{\dot{n} V_m}{A}$  och att  $\rho = \frac{M}{V_m}$  kan vi med insättning i Ekvation 2.8 få

$$Pe = \frac{\dot{n} C_{p,mol} L_{kar}}{k A} \quad (2.9)$$

där  $C_{p,mol} = MC_p$  är värmekapaciteten per mol,  $V_m$  är molvolymen och  $M$  är molmassan.

### 2.1.10 Reynolds tal

Reynolds tal är ett dimensionslöst tal som används inom flödesdynamik för att förutspå flödesmönster. Talet definieras som förhållandet mellan fluidens tröghetskrafter och viskösa krafter enligt

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} \quad (2.10)$$

där  $\rho$  är densiteten,  $v$  är karakteristiska hastigheten,  $L$  är längden och  $\mu$  är dynamiska viskositeten. Vid låga Reynoldstal tenderar flödet att vara laminärt, medan höga tal ger ett turbulent flöde.

### 2.1.11 Hagen-Poiseuilleflöde

Hagen-Poiseulles lag är ett fysikaliskt samband som gäller vid laminärt flöde, det vill säga flöde där  $Re < 2300$ . Vid laminärt flöde kan man beräkna tryckgradienten enligt

$$\Delta P = \frac{8\eta L \dot{V}}{\pi r^4} = \eta Z \dot{V} \quad (2.11)$$

där  $L$  är rörets längd,  $\eta$  är viskositeten,  $\dot{V}$  är volymflödet,  $Z$  är flödesimpedansen, och  $r$  är rörets radie. För en gas kan man beskriva viskositeten med hjälp av kinetisk gasteori enligt

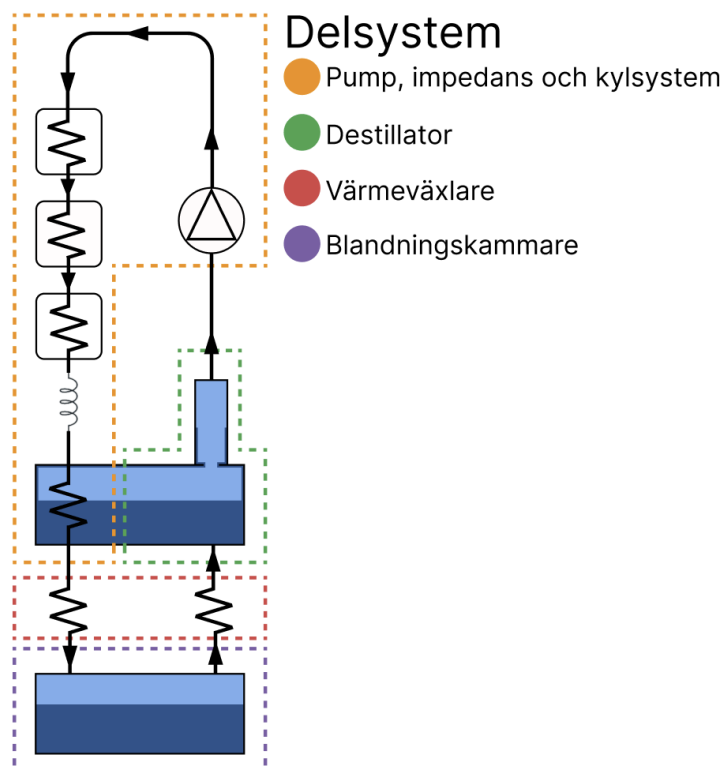
$$\eta = \frac{2\sqrt{M_3 k_b T_0}}{3\pi^{3/2} d_{mol}^2 \sqrt{N_a}} \quad (2.12)$$

## 2.2 Brents rotsökningsmetod

Brents metod är en numerisk lösningsalgoritm för att hitta rötter till en funktion av en variabel inom ett visst intervall  $[a,b]$ . Om målet är att lösa ekvationen  $A(x) = B(x)$ , så åstadkoms detta genom att skapa en så kallad residualfunktion,  $r(x) = A(x) - B(x)$ , och applicera Brents metod för att hitta det  $x$  som uppfyller  $r(x) = 0$ . Brents metod använder en kombination av rotinneslutningsmetod, intervallsbisektion och invers kvadratisk interpolation för att uppnå konvergens snabbt och robust. Metoden bygger på att intervallet  $[a,b]$  som anges ger funktionsvärden  $r(a)$  och  $r(b)$  i olika tecken för att kunna konvergera [12].

## 2.3 Delsystem

För att förenkla utspädningskylaren delas den ofta in i delsystem som modelleras separat. Dessa delsystem utgörs av pumpsystem, destillator, värmeväxlare samt blandningskammare, vilka visas schematiskt i Figur 2.2.



**Figur 2.2:** Schematisk uppdelning av utspädningskylare i fyra delsystem: pumpsystem (orange), destillator (grön), värmeväxlare (röd) samt blandningskammare (lila).

### 2.3.1 Värmeväxlare

Värmeledningen i en motströms värmeväxlare, se Figur 2.3, kan beskrivas av två kopplade ordinära differentialekvationer av andra ordningen [3] enligt

$$\underbrace{S_d \frac{d}{dx} \left( k_d \frac{dT_d}{dx} \right)}_{\text{Axial värmeledning}} + \underbrace{\eta \dot{V}_d^2 \frac{dZ_d}{dx}}_{\text{Viskös uppvärmning}} + \underbrace{\frac{dA}{dx} \frac{T_c^4 - T_d^4}{4R_{kt}}}_{\text{Radiell värmeledning}} = \underbrace{\dot{m} C_d \frac{dT_d}{dx}}_{\text{Entalpiflöde}} \quad (2.13)$$

$$\underbrace{S_c \frac{d}{dx} \left( k_c \frac{dT_c}{dx} \right)}_{\text{Axial värmeledning}} + \underbrace{\eta \dot{V}_c^2 \frac{dZ_c}{dx}}_{\text{Viskös uppvärmning}} + \underbrace{\frac{dA}{dx} \frac{T_c^4 - T_d^4}{4R_{kt}}}_{\text{Radiell värmeledning}} = \underbrace{\dot{m} C_c \frac{dT_c}{dx}}_{\text{Entalpiflöde}} \quad (2.14)$$

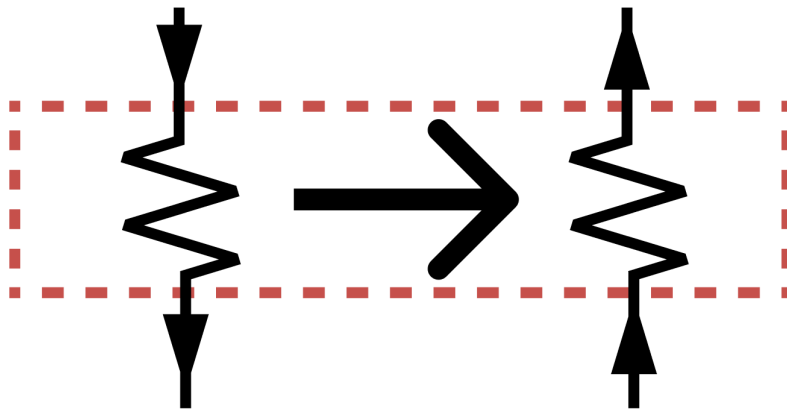
där Ekvation 2.13 beskriver värmeväxlingen för den utspädda fluiden ut ur blandningskammaren till destillator, och Ekvation 2.14 beskriver värmeväxlingen för den koncentrerade fluiden som flödar motströms in i blandningskammaren, se Figur 2.3. För dessa ekvationer är  $R_{kt}$  Kapitza-resistansen. För rören i vår värmeväxlar-modell har vi valt att använda en koppar-nickellegering på grund av dess relativt låga akustiska impedans. Trots detta är den akustiska impedansen för legeringen fortfarande flera storleksordningar större än den hos fluiderna i utspädningskylaren. Därför fås en Kapitza-resistans som är begränsande för värmeväxlarens kylkapacitet. I rådande temperaturer så kommer Kapitza-resistansen vara proportionerligt mot  $T^3$  [7, 13],

och den radiella värmeledningstermen kommer vara dominerande för värmeöverföringen [3] enligt

$$\underbrace{\dot{m}C_c \frac{dT_c}{dx}}_{\text{Entalpiflöde}} \approx \underbrace{\frac{dA}{dx} \frac{T_c^4 - T_d^4}{4R_{kt}}}_{\text{Radiell värmeledning}} \propto \frac{T_d^4}{T_d^3} = T_d. \quad (2.15)$$

Ekvation 2.15 ger det till synes överraskande resultatet att värmeledningen från den koncentrerade till den utspädda sidan av värmeväxlaren kommer att vara högre ju varmare den utspädda sidan är. Detta kommer att vara definierande för arbetets resultat.

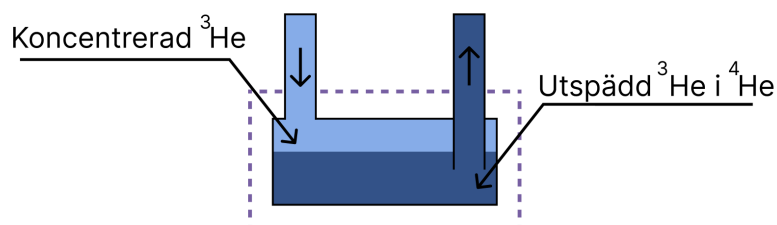
Den inre värmeledningsförmågan hos koppar-nickellegeringen är tillräckligt hög att dess värmemotstånd ska försummas.



**Figur 2.3:** Schematisk bild av värmeväxlare som illustrerar riktningen för värmeväxlingen och molllödet.

### 2.3.2 Blandningskammare

Blandningskammaren, *mixing chamber* på engelska, förkortas *MC*, är illustrerad i Figur 2.4. Blandningskammaren är den kallaste delen av en utspädningskylare och det är i denna del som kyleffekten uppkommer.



**Figur 2.4:** Blandningskammare med ingående och utgående flöden. Figuren visar separationen mellan den koncentrerade fasen (ljusblå) och den utspädda fasen (mörkblå).

${}^3\text{He}$  kan beskrivas som en fermisk tätpackad vätska där rörelseenergin för  ${}^3\text{He}$ -atomerna är begränsad, medan  ${}^4\text{He}$  istället beter sig som en superfluid och därmed antas entropin vara noll. Därför ökar  ${}^3\text{He}$ -atomernas entropi när de löser sig i  ${}^4\text{He}$ -fasen. Energin för denna övergång kan beskrivas med ekvationen

$$\dot{Q}_{mc} = \dot{n}_3 [H_{Bland}(T) - H_{konc}(T)] \quad (2.16)$$

där  $\dot{n}_3$  är molflödet av  ${}^3\text{He}$  till den blandade  ${}^4\text{He}$ -fasen [3]. Fasövergången är endo-term och kommer ta upp energi från omgivningen. Det är detta som ger den önskade kyleffekten, som är grunden för utspädningskylaren.

Om utspädningskylaren antas vara i jämviktstillstånd, måste den kemiska potentialen,  $\mu$ , vara samma i den koncentrerade  ${}^3\text{He}$ -fasen som i den utspädda,  ${}^4\text{He}$ -rika, fasen. Enligt Radebaugh [5] påverkas den kemiska potentialen av temperaturen i blandningskammaren, samt av  ${}^3\text{He}$ - och  ${}^4\text{He}$ -koncentrationerna i den utspädda fasen. För temperaturer under 0,1 K löser sig  ${}^4\text{He}$  dåligt i den koncentrerade fasen och faller istället ut i den utspädda fasen. Därför finns inget koncentrationsberoende hos den kemiska potentialen efter inflödet till blandningskammaren. Detta går att se vid beräkning utifrån sambandet  $x_4 = 0.857 T^{3/2} e^{-0.56/T}$ , då en temperatur under 0,1 K gör att  $x_4$ ,  ${}^4\text{He}$ -koncentrationen i den koncentrerade fasen, blir mycket liten och därmed kan försummas [2]. Den kemiska potentialen är då endast beroende av temperaturen, som antas vara samma för koncentrerad och utspädd fas, samt koncentrationen i den utspädda fasen. Detta resulterar i sambandet  $\mu_c(T_{mc}) = \mu_d(T_{mc}, x_d)$  som ger löslighetskurvan [3]

$$x_d = 0.0648(1 + 8.4T_{mc}^2 + 9.4T_{mc}^3). \quad (2.17)$$

Enligt Ekvation 2.16 beror nettokyleffekten,  $\dot{Q}_{mc}$ , i blandningskammaren på entalpi skillnaden mellan inflöde och utflöde. Med en temperatur under 0,1 K, och en inte helt ren lösning av  ${}^3\text{He}$ , bestäms nettokyleffekten,  $\dot{Q}_{mc}$ , enligt Radebaugh [5] av ekvationen

$$\dot{Q}_{mc} = \dot{m} \left[ x_{in} H_d[T_{mc}] - \left( \frac{(x_{in} - x_d) H_{30}[T_{in}]}{1 - x_d} + \frac{x_d(1 - x_{in}) H_d[T_{in}]}{1 - x_d} \right) \right] \quad (2.18)$$

där  $T_{mc}$  är temperaturen i blandningskammaren.  $T_{in}$  är den inkommande flödets temperatur från värmeväxlaren.  $H_d$  är entalpin för  ${}^3\text{He}$  i  ${}^4\text{He}$  och  $H_{30}$  är entalpin för ren  ${}^3\text{He}$ . Även om inkommande  ${}^4\text{He}$  faller ut direkt i blandningskammaren påverkar andelen  $x_{in}$  kyleffekten.

För att få fram en kyleffekt krävs att inflödet till blandningskammaren är tillräckligt kallt, annars blir nettokyleffekten negativ. För att approximera den maximala temperaturen in i blandningskammaren användes entalpierna [3]

$$H_{Bland}(T) = 95 T^2 \quad [\text{J/mol}] \quad (2.19)$$

$$H_{konc}(T) = 11 T^2 \quad [\text{J/mol}]. \quad (2.20)$$

Eftersom  $\dot{Q}_{mc} \geq 0$  krävs för att blandningskammaren ska producera nettokylning blir förenklingen

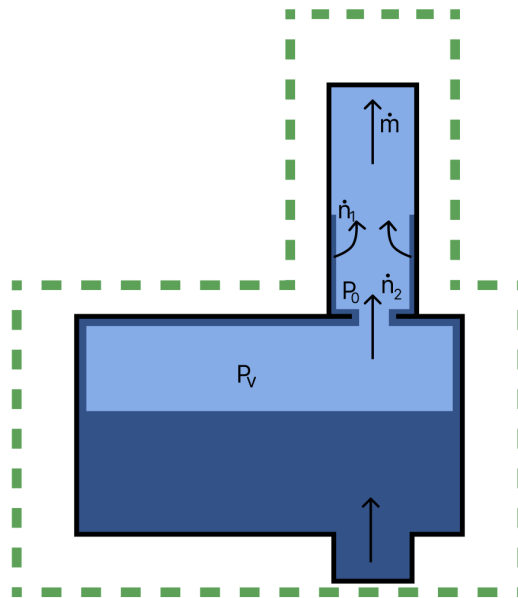
$$H_{Bland}[T_{mc}] \geq H_{konc}[T_{in}] \implies 95 T_{mc}^2 \geq 11 T_{in}^2 \implies T_{in}^2 \leq \frac{95}{11} T_{mc}^2 \quad (2.21)$$

$$T_{in} \leq \sqrt{\frac{95}{11}} \cdot T_{mc} \approx 2,94 \cdot T_{mc}. \quad (2.22)$$

Den inkommande  ${}^3\text{He}$ -temperaturen får således vara upp till 2,94 gånger högre än temperaturen i blandningskammaren för att kylning ska uppstå. Vid  $T_{in} > 2,94 \cdot T_{mc}$  blir  $\dot{Q}_{mc} < 0$ , vilket innebär att blandningskammaren tillför värme till systemet [2].

### 2.3.3 Destillator

I destillatorn värms den utspädda fasen från blandningskammaren upp för att kunna pumpa iväg den förångade  ${}^3\text{He}$  gasen [3]. På grund av att ångtrycket är högre för  ${}^3\text{He}$  än för  ${}^4\text{He}$ , är det till stor del nästan bara  ${}^3\text{He}$  som förångas och pumpas iväg [1]. Eftersom koncentrationen  ${}^3\text{He}$  då minskar, skapas en skillnad i osmotiskt tryck mellan destillator och blandningskammare. Den utspädda fasen flödar då från blandningskammaren till destillatorn för att bibehålla jämvikt. Enligt Radebaugh [5] är den kemiska potentialen lika mellan destillator och blandningskammare vid låg flödesimpedans mellan dessa.



**Figur 2.5:** Destillator med utloppsmynning. Illustrationen visar ångan (ljusblå) som bildas vid ångtrycket  $P_v$ , samt hur den utspädda fasen (mörkblå) kryper längs med väggarna upp till utloppet. Trycket  $P_o$  är trycket vid mynningen. De två flödena,  $\dot{n}_2$  från ångan och  $\dot{n}_1$  från den utspädda fasen, bildar tillsammans molflödet  $\dot{m}$ .

### 2.3.3.1 Mynningen ut från destillatorn

Superfluidens egenskaper gör att  $^4\text{He}$  kryper upp på väggarna från destillatorn och därmed bidrar till det totala molflödet i processen. Radien på mynningen, kallad *orifice* på engelska, samt trycket i och utanför har en avgörande betydelse för det totala molflödet. Det totala molflödet byggs upp av molflödet från superfluiden  $\dot{n}_1$  och molflödet från destillatorn  $\dot{n}_2$ , se Figur 2.5. Molflödet  $\dot{n}_1$  från superfluiden kan beskrivas genom

$$\dot{n}_1 = \frac{\rho_s C \nu_c (d - d_0)}{M_4} \quad (2.23)$$

där  $\rho_s$  är densiteten av superfluidfilmen,  $C = 2\pi r_{still}$  är omkretsen på mynningen med radien  $r_{still}$ ,  $d$  är tjockleken av superfluiden och  $d_0$  är tjockleken på det atomlager som fäster på pumpledningens innersta lager.  $\nu_c$  är den kritiska superfluidhastigheten, *critical superfluid speed* på engelska, vilken för  $d$  inom intervallet 2-35 nm [14] kan approximeras genom sambandet

$$\nu_c d = 1,23 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}. \quad (2.24)$$

Molflödet  $\dot{n}_2$  ut från destillatorn kan enligt Wang et al. [14] beskrivas genom

$$\dot{n}_2 = \frac{A_s \rho_v(T_s, P_v) c_v(T_s) \left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{1/2} \left(\frac{P_0}{P_v}\right)^{1/\gamma} \left[1 - \left(\frac{P_0}{P_v}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{1/2}}{M_v} \quad (2.25)$$

där  $A_s = \pi r_{still}^2$  är arean av mynningen och  $\gamma$  värmekapacitetsförhållandet för helium, alltså  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  som för idealt helium är 5/3.  $P_v$  är trycket i destillatorn,  $P_0$  är trycket vid mynningen,  $M_v$  är den genomsnittliga molmassan för gasen i destillatorn,  $\rho_v$  är gasens densitet och  $c_v$  är ljudhastigheten i gasen.

Utifrån Ekvation 2.25 kan man se att ett minskat tryck vid mynningen,  $P_0$ , resulterar i ett ökat molflöde. Det finns dock ett minimivärde för trycket, kallat kritiskt tryck  $P_c$ . Om pumpen utanför destillatorn sänker trycket så att det kommer under det kritiska trycket, blir molflödet från destillatorn konstant. Flödet blir alltså strypt, *choked flow* på engelska. Ekvationen för detta kritiska tryck ges av

$$\frac{P_c}{P_v} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (2.26)$$

### 2.3.4 Gasflödesmodell för hela Knudsen-regimen

Flödet av  $^3\text{He}$  i gasform kommer att ha varierande knudsen tal i olika delar av rörsystemet och behöver enligt Livesey [15] modelleras med en kombination av ett kontinuum/visköst genomflöde  $Q_v$  och en molekylär  $Q_m$  genomflödeskomponent enligt

$$Q = Q_v + \frac{Q_m}{1 + \varphi(Kn)} \quad (2.27)$$

där  $\varphi(Kn)$  är en dimensionslös funktion av Knudsen-talet. Denna funktion beräknas enligt

$$\varphi(Kn) = \varphi_s + (\varphi_l - \varphi_s) \frac{L}{L + D_h} \quad (2.28)$$

där  $\varphi_s$  och  $\varphi_l$  ges av

$$\varphi_s = \frac{3\pi}{128 Kn} \quad \text{samnt} \quad \varphi_l = \frac{3\pi(1 + 4Kn)}{128(1 + Kn)Kn^{0.55}} \quad (2.29)$$

där  $L$  är kanallängden. För det molekylära flödet används den faktiska längden, men för det viskösa flödet används en effektiv längd som definieras som  $L_e = L + 0,41D_h$  för att ta hänsyn till den extra friktion som vätskan har mot rörets väggar. Knudsen-talet är ett enhetslöst tal som fås av

$$Kn = \frac{\lambda}{D_h} \quad (2.30)$$

där  $D_h$  är den karakteristiska längden och  $\lambda$  är medelfrivägen, det vill säga den genomsnittliga sträckan en partikel hinner färdas mellan kollisioner. Denna medelfriväg definieras som

$$\lambda = \frac{k_b T}{\sqrt{2} \pi d_{mol}^2 P}. \quad (2.31)$$

Det finns tre olika randvillkor för systemet. Det enklaste är när systemets upp- och nedströmstryck är givna och modellen ger oss genomflödet. För detta randvillkor gissar man Reynoldstalet, räknar ut genomflödet med hjälp av Reynoldstalet, och får ut ett nytt Reynoldstal med hjälp av flödet. Detta itereras tills Reynoldstalen konvergerar. Då är det uträknade genomflödet sanningsenligt. Om genomflödet och trycket i ett av rörets ändrar är givna, och vi vill lösa för trycket i motsatt riktning, krävs ytterligare en numerisk lösning eftersom funktionen  $\varphi(Kn)$  innehåller exponenter som gör att trycket ej algebraiskt kan brytas ut. Detta åstadkoms genom att gissa det okända trycket och lösa problemet enligt ovan. Trycket gissas ända tills det uträknade genomflödet är densamma som det faktiska genomflödet.

Enligt Livesey [15] beskrivs kontinuumflödes-komponenten bäst genom att lösa de adiabatiska flödesekvationerna där värmeledning försummas. Detta är en bra uppskattning vid höga flödeshastigheter, och i de fall där de isoterma ekvationerna hade varit bättre, vid exempelvis låga flöden eller långa rör, skiljer sig den adiabatiska och den isoterma lösningen mycket lite. I det här arbetet antas långa cylindriska rör. Denna geometri relateras till de lokala Mach-talen i rörets ändrar enligt

$$\frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{1}{Ma_n^2} - \frac{1}{Ma_x^2} - \frac{\gamma + 1}{2} \ln \left[ \left( \frac{Ma_x}{Ma_n} \right)^2 \frac{(\gamma - 1)Ma_n^2 + 2}{(\gamma - 1)Ma_x^2 + 2} \right] \right\} = h_f \quad (2.32)$$

där  $\gamma$  är kvoten mellan den specifika värmekapaciteten och  $h_f$  är en term för energiförlust. Ekvation 2.32 behöver lösas numeriskt, och löses här för två fall. Antingen när flödet är strypt och  $Ma_x = 1$  eller när flödet inte är strypt och  $Ma_x$  fås via

$$Ma_x^2(\gamma - 1) = \left[ 1 + \frac{2(\gamma - 1)K^2 Ma_n^2}{\left[1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)Ma_n^2\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \right] - 1. \quad (2.33)$$

Energiförlusten  $h_f$  beräknas enligt

$$h_f = n_c + \frac{f_D L_c}{D_h} \quad (2.34)$$

där  $n_c$  är antalet 90-gradersböjningar av röret.  $f_D$  är Darcy-friktionsfaktor som enligt Livesey [15] kan beskrivas som

$$f_D = \frac{1.6364}{\left\{ \ln \left[ \frac{6.9}{Re^*} + \left( \frac{S_f \varepsilon}{3.7 L_{kar}} \right)^{1.11} \right] \right\}^2} \quad (2.35)$$

där  $S_f$  är tvärsnittets formfaktor som är  $S_f = 1$  för cylindriska rör,  $\varepsilon$  är kanalväggens ytråhet [15] och  $Re^* = \frac{Re}{S_f}$  är det modifierade Reynoldstalet. Eftersom  $S_f = 1$  i cylindriska rör så blir  $Re = Re^*$  och därför används dessa hädanefter synonymt. Flödet börjar gå mot turbulent flöde när Reynoldstalet överstiger 2300 och blir fullt turbulent då det överstiger 3500.

När flödet är ett laminärt kontinuumflöde är Darcy friktionsfaktorn

$$f_D = \frac{64}{Re}. \quad (2.36)$$

Mellan 2300 och 3500 kan  $f_D$  istället beräknas med en linjär interpolering.

Den ostrypta kontinuumflödeskomponenten vid höga genomflöden och tryckgradienter kan skrivas som

$$Q_v = \gamma^{1/2} C_z P_u \frac{Ma_n}{\left[1 + 0.5(\gamma - 1)Ma_n^2\right]^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}} \quad (2.37)$$

där  $P_u$  är uppströmstrycket.  $C_z$  är en hjälpterm som definieras som

$$C_z = A \sqrt{\frac{RT_0}{M_3}} \quad (2.38)$$

där  $T_0$  är stagnationstemperaturen, det vill säga temperaturen en fluid hade haft om man låter den stagnera isentropiskt [16]. Eftersom stagnationstemperaturen används vid mynningarna av rören, och flödes hastigheten där kan antas vara väldigt låg, kan man därför anta att stagnationstemperaturen är den samma som temperaturen, det vill säga  $T_0 = T$ . Hädanefter används dessa uttryck synonymt.

Vid strypta flöden gäller att

$$K_c < \frac{P_u}{P_D} \quad (2.39)$$

där  $K_c$  fås av

$$K_c = \frac{1}{Ma_n} \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^2 \left[ 1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)Ma_n^2 \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}. \quad (2.40)$$

För strypta flöden erhålls istället ett annat kontinuumgenomflöde enligt

$$Q_v = \sqrt{\frac{\gamma(\gamma + 1)}{2}} \frac{C_z P_u}{K_c}. \quad (2.41)$$

Vid låga genomflöden eller låga tryckgradienter slutar Ekvation 2.32 att gälla, och en approximativ lösning för kontinuumgenomflödet behöver göras. Vid  $Re < 2300$  kan kontinuumgenomflödet approximeras som

$$Q_v = \frac{C_z P_D}{n_c + 1} * \left[ \sqrt{\left(\frac{C_z}{C_d}\right)^2 + (n_c + 1)\left(\left(\frac{P_u}{P_D}\right)^2 - 1\right)} - \frac{C_z}{C_D} \right]. \quad (2.42)$$

Vid  $Re \geq 2300$  approximeras kontinuumgenomflödet istället som

$$Q_v = C_z P_D \sqrt{\frac{\frac{P_u}{P_D} - 1}{n_c + 1 + \frac{f_d L_c}{D_h}}} \quad (2.43)$$

där  $C_D$  är den viskösa vätskekonduktansen vid utloppet av röret, vilket approximeras som konduktansen vid Poiseuille flöde.

Det molekylära genomflödet fås från tryckgradienten och den molekylära vätskekonduktansen  $C_m$  enligt

$$Q_m = C_m (P_u - P_D) \quad (2.44)$$

där

$$C_m = \frac{C_z}{\sqrt{2\pi} \frac{3l_e}{8R}} \quad (2.45)$$

för ett cylindriskt rör, och

$$l_e = L + \frac{L}{3 + \frac{3L}{7r}}. \quad (2.46)$$

För att bestämma vilket flöde som äger rum kan Reynoldstalet beräknas för ett givet genomflöde enligt

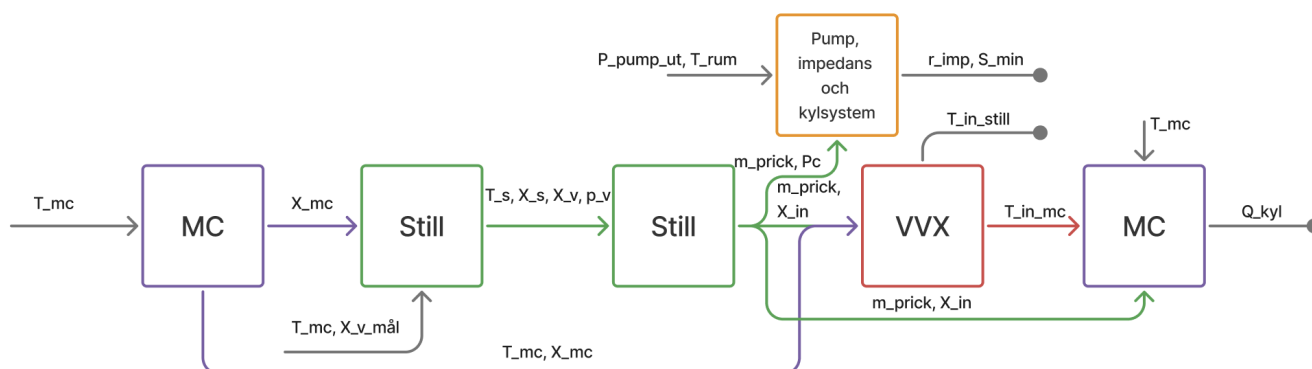
$$Re = \frac{4 M Q}{R T_0 B \eta} \quad (2.47)$$

där B är kanalens omkrets och  $\eta$  gasens viskositet.

# 3

## Metod

För att simulera en utspädningskylare delades kylaren in i fyra delar som modellerades separat. Varje delsystem, som visas schematiskt i Figur 2.2, beskrevs matematiskt baserat på etablerad litteratur. Vid modelleringen infördes även ett antal förenklingar, approximationer och antaganden. För att ge en överblick över modellens uppbyggnad presenteras i Figur 3.1 även parametrar som används i systemet eller bedöms vara av intresse. I flödesschemat visas två block för exempelvis destillatorn på grund av att data därifrån används ytterligare en gång inom samma delsystem för att beräkna andra parametrar.



**Figur 3.1:** Flödesschema över systemet. Grå pilar representerar manuellt inmatade parametrar, färgade pilar visar indata från delsystem, och linjer som avslutas med en cirkel indikerar beräknade resultat. Färgerna representerar delsystemen i Figur 2.2. Namnen för blocken är samma som används i källkoden, där blandningskammare förkortas *MC*, destillator *still* och värmeväxlare *VVX*.

### 3.1 System

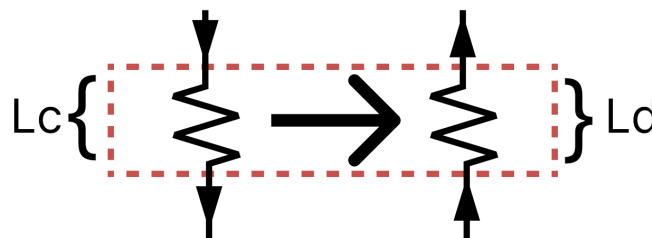
Hela systemet är uppbyggt av delsystemen som Figur 2.2 visar, och körs enligt flödesschemat i Figur 3.1. Nedan beskrivs en fullständig iteration av den simule-

ringsmodell som tagits fram, se Appendix A.

Det första som görs är att definiera standardparametrar. Därefter beräknas molfraktionen i blandningskammaren. Med molfraktionen och temperaturen i blandningskammaren beräknas temperaturen och molfraktionen i destillatorn, samt ångans molfraktion och dess tryck. Med dessa värden beräknas molflödet, molfraktionen och trycket ut ur destillatornmynningen. Molflödet och trycket används för att beräkna tryckfallen i systemet och få fram en lämplig flödesimpedans. Molflödet och molfraktionen används för att beräkna två temperaturer, den från värmeväxlaren till blandningskammaren och den till destillatorn. Med temperaturen ut från värmeväxlaren till blandningskammaren, temperaturen i blandningskammaren, molflödet och molfraktionen beräknas slutligen kyleffekten.

## 3.2 Värmeväxlare

Värmeväxlaren modellerades som en kontinuerlig motströms-tubvärmeväxlare. Flödet mellan blandningskammaren och destillatorn begränsas av det osmotiska trycket där röret med den utspädda fasen inte får vara längre än  $L_d = 1\text{m}$  långt. Röret med den koncentrerade fasen har dock ingen sådan begränsning, och eftersom målet med värmeväxlaren huvudsakligen är att kyla flödet i detta rör tillåts röret vara  $L_c = 5\text{m}$  långt. Skillnaden i längd förklaras spatiellt genom att låta röret med den koncentrerade fasen bilda ett spiralmönster genom röret med den utspädda fasen. Värmeväxlarens dimensioner beskrivs i Figur 3.2.



**Figur 3.2:** Schematisk bild över värmeväxlaren som beskriver rörlängd för dem båda rören i värmeväxlaren.

Kondensorns temperatur antogs vara 0,7 K för att kunna kondensera  ${}^3\text{He}$ . Denna temperatur antogs sedan vara intemperaturen i värmeväxlaren. För att enklare kunna lösa systemet försumrades den axiella värmeledningstermen och det inre rörets omkrets antogs vara konstant längs hela värmeväxlaren,  $\frac{dA}{dx} = p$ . Det ledde fram till kopplade ordinära differentialekvationer av första ordningen enligt

$$\eta V_c^2 \frac{dZ_c}{dx} + p \frac{T_c^4 - T_d^4}{4R_{kt}} = \dot{m} C_c \frac{dT_c}{dx} \quad (3.1)$$

och

$$\eta V_d^2 \frac{dZ_d}{dx} + p \frac{T_c^4 - T_d^4}{4R_{kt}} = \dot{m} C_d \frac{dT_d}{dx}. \quad (3.2)$$

För att lösa ekvationssystemet bestående av Ekvation 3.1 och 3.2 beräknades den radiella värmeledningstermen och den viskösa uppvärmningstermen separat. Den radiella termen beräknades med hjälp av samband för den specifika värmekapaciteten enligt

$$C_c(T) = 22T \quad (3.3)$$

samt

$$C_d(T) = 106T. \quad (3.4)$$

Med insättning i Ekvation 3.1 och 3.2, kunde ekvationerna

$$T_c \frac{dT_c}{dx} = \frac{106}{22} T_d \frac{dT_d}{dx} \quad (3.5)$$

och

$$T_c \frac{dT_c}{dx} = \frac{p(T_c^4 - T_d^4)}{88\dot{m}R_{kt}} \quad (3.6)$$

tas fram. Det resulterade i ett kopplat system av två ordinära differentialekvationer av första ordningen. Detta är ett icke-linjärt system, ty de innehåller  $T^4$ -termer. Systemet kunde därför inte lösas analytiskt, utan var tvunget att lösas numeriskt.

För att bestämma den viskösa uppvärmningen integrerades termen för viskös uppvärmning över värmeväxlarens längd enligt

$$\int \eta \dot{V}^2 \frac{dZ}{dx} dx = \eta \dot{V}^2 Z = \Delta P \cdot \dot{V}. \quad (3.7)$$

Sedan adderades den viskösa uppvärmningstermen till den radiella värmeledningen i varje steg av värmeväxlaren. Detta förutsatte laminär strömning för flödena i värmeväxlarens rör, ty Reynoldstalet var lågt, och uppfyllde därför Hagen-Poiseuilles lag. Tryckskillnaden,  $\Delta P$ , mellan rörets ändar kunde då beräknas enligt Ekvation 2.11. Geometriparametrarna och konstanter kunde samlas ihop och definiera flödesimpedansen  $Z = \frac{8L}{\pi r^4}$ .

Eftersom värmeväxlaren är en motströmsvärmväxlare är temperaturen för den inkommande varma strömmen lika med temperaturen från destillatorn,  $T_s$ . Inkommande temperaturen för den kalla strömmen är lika med den i blandningskammaren,  $T_m$ . Dessa två temperaturer sattes som randvillkor till ekvationssystemet. Systemet löstes numeriskt med hjälp av skjutmetoden där den radiella värmeledningstermen och den viskösa uppvärmningen beräknades separat och adderades sedan ihop. Skjutmetoden bygger på att gissa utloppstemperaturerna för de två flödena och integrera bakåt längs hela värmeväxlaren med Euler-steg för att säkerställa att randvillkoret vid den andra änden uppfylls. Den korrekta gissningen erhöles genom användning av Brents rotsökningsmetod.

Lösningss algoritmen innehåller även en lokal lösning för jämvikt hos den kemiska potentialen. Den kemiska potentialen är densamma i blandningskammaren och destillatorn. Med hjälp av data för koncentrationen vid olika kemiska potentialer, Tabell 10 från Radebaugh [5], definierades en residual för den kemiska potentialen. Denna minimerades med hjälp av Brents metod, vilket genererade koncentrationsprofilen längs hela värmeväxlaren.

Hela värmeväxlar-komponenten summeras i Algoritm 1 som pseudokod.

---

**Algorithm 1:** Pseudokod för värmeväxlare, genererar temperatur på flödet in i blandningskammare och in i destillator

---

**Data:**  $T_{MC}, x_{MC}, T_{nc}, x_c, \dot{m}, L_c, L_d, r_c, r_d$

**Result:**  $T_{1c}, T_{nd}$

Hämta kemisk potential för MC  $\{\mu_{MC} = f(T_{MC}, x_{MC})\}$  från [5];

Dela upp värmeväxlarens två rör i  $n$  delar, räknat från MC;

**while**  $T_{1d} \neq T_{MC}$  **do**

Gissa  $T_{still}$  med Brents metod;

$T_{nd} = T_{still}$ ;

$i = n$ ;

**while**  $i > 1$  **do**

$x_{ic} = x_c$ ;

$x_{id} = \{\text{Tabell 10, [5]}\} = f(T_{id}, \mu_{MC})$ ;

$T_{(i-1)d} = \{\text{Ekvationer 3.2, 3.7, 2.11}\} = f(T_{ic}, T_{id}, x_c, x_{id}, \dot{m}, L_d, r_d, \eta_d)$ ;

$T_{(i-1)c} = \{\text{Ekvationer 3.1, 3.7, 2.11}\} = f(T_{ic}, T_{id}, x_c, x_{id}, \dot{m}, L_c, r_c, \eta_c)$ ;

$i = i - 1$ ;

**end**

**end**

---

### 3.3 Blandningskammare

Molflödet och temperaturen in i blandningskammaren är beroende av andra komponenter i systemet. Men för att göra det möjligt att beräkna kyleffekt, se Ekvation 2.18, antogs temperaturen i blandningskammaren vara konstant. Tabelldata för de olika entalpierna som användes,  $H_{30}$  och  $H_d$ , återfinns i Tabell 4 respektive Tabell 9 i Radebaugh [5].

### 3.4 Destillator

En iterativ beräkningsmetod implementerades för att bestämma parametrarna i destillatorn. Destillatortemperaturen  $T_s = 1$  K och andelen  ${}^3\text{He}$  i vätskefasen  $x_s = 0,001$  användes som startvärden för programmet. Molfraktionen i gasfasen,  $x_v$ , som är beroende av  $T_s$  och  $x_s$ , sattes till ett önskat värde,  $x_{v\_mål}$ . Lägre värden på  $x_v$  innebär en större andel  ${}^4\text{He}$  i gasfasen, vilket motsvarar ett högre tryck i destillatorn. Enligt Pobell [2] brukar andelen  ${}^4\text{He}$  ut ur destillatorn vara mellan 10-20 %.

Eftersom den kemiska potentialen är lika mellan destillatorn och blandningskammaren vid låg flödesimpedans mellan dessa, måste villkoret  $\mu_{4,s} = \mu_{4,mc}$  vara uppfyllt. Pythonbiblioteket `scipy.optimize` med funktionen `least_squares` användes därför för att iterativt bestämma systemets parametrar så att villkoret uppfylldes. Tabelldata för kemisk potential för  $^4\text{He}$  hämtades från Tabell 10 i Radebaugh [5]. Beräkningarna resulterade i värden på destillatortemperaturen  $T_s$ ,  $^3\text{He}$ -koncentrationen i vätskefasen  $x_s$ ,  $^3\text{He}$ -koncentrationen i gasfasen  $x_v$  samt ångtrycket  $P_v$ .

### 3.4.1 Mynningen ut från destillatorn

För att kunna använda Ekvation 2.23 och 2.25 behövdes vissa antaganden och approximationer användas. Densiteten av superfluidfilmen approximerades som flytande helium vid given temperatur,  $\rho_s \approx 145 \text{ kg/m}^3$ , och tjockleken av superfluiden sattes till  $d = 30 \text{ nm}$ . Eftersom avståndet mellan mynningen och toppen av superfluiden är kort, antogs superfluidens tjocklek vara konstant. Tjockleken av ett atomlager superfluid mot väggen för gasflödet sattes till  $d_0 = 0,36 \text{ nm}$ . Den kritiska superfluidhastigheten,  $\nu_c$ , approximerades med Ekvation 2.24 [14].

$P_v$ , trycket i destillatorn, antogs vara stabilt, och för  $P_0$ , trycket vid mynningen, antogs det att toppen av superfluidens film har samma tryck som botten, eftersom höjdskillnaden mellan mynningen och toppen av filmen är liten [14].  $M_v$ , den genomsnittliga molmassan för gasen i destillatorn, approximerades som en linjär blandning enligt

$$M_v = x_v M_3 + (1 - x_v) M_4. \quad (3.8)$$

I enlighet med Lua [17], approximerades densiteten  $\rho_v(T_s, P_v)$  och ljudhastigheten  $c_v(T_s)$  som en ideal gas. Med hänsyn till den genomsnittliga molmassan  $M_v$ , beräknades densiteten enligt

$$\rho_v(T_s, P_v) = \frac{P_v}{T_s R} M_v. \quad (3.9)$$

För att beräkna ljudhastigheten i en ideal gas användes sambandet

$$c_v(T_s) = \sqrt{\frac{\gamma R T_s}{M_v}}. \quad (3.10)$$

Eftersom ett högt molflöde av  $^3\text{He}$  är en eftertraktad egenskap för utspädningskylaren, antogs att  $P_0 = P_c$ . Detta antagande ställer däremot krav på pumpen, eftersom en otillräcklig sugkraft från pumpen sänker trycket utanför destillatorn och därmed minskar molflödet av  $^3\text{He}$ .

Det totala molflödet ges av att addera molflödet av  $\dot{n}_1$  och  $\dot{n}_2$ . För att beräkna andelen  $^3\text{He}$  efter destillatorn och därmed andelen som går in i värmeväxlaren användes sambandet

$$x_{in} = \frac{x_v \dot{n}_2}{\dot{n}_1 + \dot{n}_2} = \frac{x_v \dot{n}_2}{\dot{m}}. \quad (3.11)$$

## 3.5 Pump

Trycket ut ur mynningen sattes till det kritiska trycket  $P_c$  för att få det maximala konstanta molflödet, se teoriavsnitt 2.3.3.1. Detta ställer krav på att pumpen ska variera sin pumphastighet för att hålla  $P_o = P_c$ . Tryckfallet utifrån gasflödesmodellen gav inloppstrycket till pumpen  $P_p$ . Volymflödet som pumpen behöver generera,  $S_p$ , approximerades som en ideal gas enligt

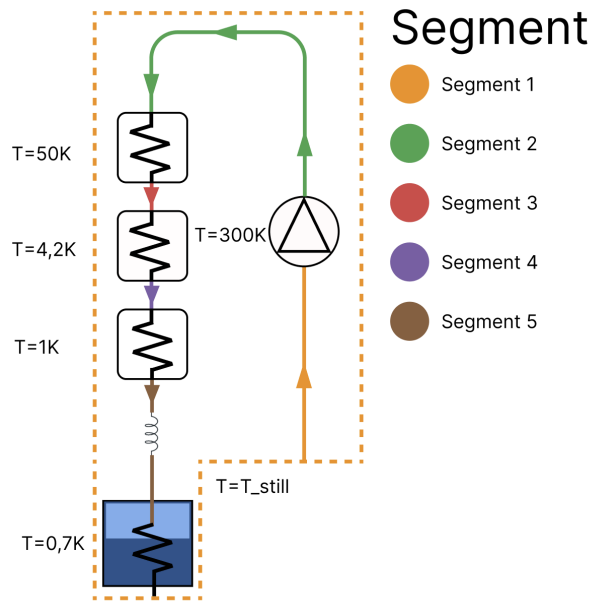
$$S_p = \frac{\dot{m}RT_p}{P_p}. \quad (3.12)$$

Temperaturen som pumpen opererar vid,  $T_p$ , antogs vara rumstemperatur (300 K) och det antogs att gasen också värmdes till denna temperatur [14]. Utloppstrycket för pumpen sattes till 30 kPa vid referensfallet. För att  $^3\text{He}$  skall kunna kondenseras i kondensorn vid temperaturen 0,7 K behöver trycket vara mellan 3-20 kPa. För att kunna uppnå detta tryck behöver geometrierna för flödesimpedanserna ändras, vilket innebär att pumpens utloppstryck också måste anpassas. För att systemet ska kunna fungera krävs en pump som uppfyller dessa specifikationer. Någon undersökning av om en sådan pump finns tillgänglig har dock inte hunnit genomföras inom ramen för detta arbete.

## 3.6 Lösning av gasflödesmodell

För att generera lämpliga dimensioner på rören mellan destillator, pump, kylare, och kondensor, samt tryckgradienten över dessa rör, konstruerades först en allmän modell för gasflöden över olika geometrier utifrån Liveseys metod [15]. Modellen applicerades sedan enligt Figur 3.3. Modellen genererar numeriskt nedströmstrycket för varje rörsegment utifrån uppströmstrycket och genomflödet, samt rörgeometrierna. Detta åstadkoms genom att först gissa nedströmstrycket, numeriskt räkna ut genomflödet för gällande tryckgradient, och repetera tills det beräknade genomflödet är samma som det faktiska genomflödet. Det rätta nedströmstrycket hittas då med Brents metod. Hela modellen beskrivs förenklat med pseudokod i Algoritm 2.

**Algorithm 2:** Pseudokod för gasflödesmodell**Data:**  $P_u, Q_{faktisk}, T_{0u}, T_{0d}, L_{tub}, r_{tub}, n_{ctub}, S_p$ **Result:**  $P_D$  $Q_{utr} = 0;$  $D_h = f(r_{tub});$  $L_e = f(L_{tub}, D_h);$ **while**  $Q_{utr} \neq Q_{faktisk}$  **do**    Gissa  $P_D$  med Brents metod;     $Re_{ny} = 2300;$     **while**  $Re_{gammal} \neq Re_{ny}$  **do**         $Re_{gammal} = Re_{ny};$          $f_d = \{\text{Ekvationer 2.35, 2.36}\} = f(Re_{gammal}, \epsilon, D_h);$          $h_f = \{\text{Ekvation 2.34}\} = f(f_d, L_e, D_h, n_{ctub});$          $\lambda = \{\text{Ekvation 2.31}\} = f(T_{0u}, P_u, T_{0d}, P_D);$          $Kn = \{\text{Ekvation 2.30}\} = f(\lambda, D_h);$          $\varphi(Kn) = \{\text{Ekvation 2.28}\} = f(Kn, L_{tub}, D_h);$          $C_z = \{\text{Ekvation 2.38}\} = f(T_d, r_{tub});$         **if** För lågt flöde, alltså  $S \cdot \sqrt{(\frac{C_z}{C_u})^2 + \frac{1}{0,01} + n_{ctub}} - \frac{C_z}{C_u} < C_z$  **then**             $Q_v = \{\text{Lågt flöde, Ekvationer 2.42, 2.43}\} =$              $f(Re_{gammal}, f_d, P_D, P_u, T_{0d}, L_e, D_h, n_{ctub}, L_{tub}, r_{tub});$         **else**            Anta strypt flöde, det vill säga  $Ma_x = 1;$              $Ma_n = \{\text{Strypt, Ekvation 2.32}\} = f(P_D, P_u, h_f, Ma_x = 1);$              $K_c = f(Ma_n);$             **if** Vi har strypt flöde, alltså  $K_c < \frac{P_u}{P_D}$  **then**                 $Q_v = \{\text{Ekvation 2.41}\} = f(K_c, P_u, T_{0u}, r_{tub});$             **else**                 $Ma_n = \{\text{Ostrypt, Ekvationer 2.32, 2.33}\} = f(P_D, P_u, h_f);$                  $Q_v = \{\text{Ostrypt, Ekvation 2.37}\} = f(T_{0u}, L_{tub}, r_{tub}, Ma_n);$             **end**        **end**         $Q_m = \{\text{Ekvationer 2.44, 2.45}\} = f(P_u, P_D, T_{0u}, L_{tub}, r_{tub});$          $Q_{utr} = \{\text{Ekvation 2.27}\} = f(Q_v, Q_m, \varphi(Kn));$          $Re_{ny} = \{\text{Ekvation 2.47}\} = f(Q_{utr}, T_{0u}, r_{tub})$     **end****end**



**Figur 3.3:** Pump, impedans, kylsystem och rör. Figuren illustrerar uppdelningen av rörsegment. För varje segment beräknades nedströmstrycket och resultatet användes för att dimensionera en impedans. Temperaturerna för varje segment visas, där  $T_{\text{still}}$  är temperaturvariabeln ut ur destillatorn.

### 3.7 Kopplad lösningsalgoritm av destillator till pump

När delsystemen sattes ihop i en stor kod sattes  $P_o = P_c$ , men för att analysera superfluiden och molflödet ut ur mynningen för varierande  $P_o$  skapades en separat kodfil.  $P_o$  behandlades som en fri variabel istället för att fixeras till det kritiska trycket  $P_c$ . Trycket bestämdes av flödesbalansen mellan mynningen och röret, som uppfylldes simultant enligt

$$Q_{\text{rör}}(P_o, P_p) = \dot{m}RT_s. \quad (3.13)$$

Det  $P_o$  som uppfyllde flödesbalansen beräknades med Brents metod.  $Q_{\text{rör}}$  är en funktion som beräknar flöde med hjälp av trycket i ändarna av röret och följer samma fysik och itereringsprocess som funktionen i avsnitt 3.6, men returnerar flödet istället för ett tryck. Nedan finns pseudokod för den kopplade lösningsalgoritmen mellan destillatorn och pumpen, se Algorithm 3.

---

**Algorithm 3:** Pseudokod för kopplad lösare: Destillator till pump

---

**Data:**  $P_v, T_s, X_3, r_{still}, L_{rör}, r_{rör}, S_{pump}, T_{pump}$

**Result:**  $P_o, P_p, \dot{n}_1, \dot{n}_2, \dot{n}_{tot}$

Filmflöde och  $^3\text{He}$  flöde

$\dot{n}_1 = \text{Eq. 2.23}$  ;

$\dot{n}_2 = \text{Eq. 2.25}$  ;

$\dot{n} = \dot{n}_1 + \dot{n}_2$ ;

Sökintervall för att innesluta  $P_o$   $P_{o,1} = \max(0.1 P_c, 10^{-6} P_v)$ ;

$P_{o,2} = 0.9999 P_v$ ;

Definiera residual för Brents metod

**Funktion residual( $P_o$ ):**

$P_p = \dot{n} R T_{pump} / S_{pump}$ ;

$Q_{mynning} = \dot{n} R_0 T_s$ ;

$Q_{rör} = f(P_o, P_p, T_s, L_{rör}, r_{rör})$ ;

**return**  $Q_{rör} - Q_{mynning}$ ;

Lös för  $P_o$   $P_o = \text{Brentq}(\text{residual}, P_{o,1}, P_{o,2})$ ;

Beräkna slutliga värden vid funnet  $P_o$   $\dot{n}_2 = f(P_v, P_o, T_s, r_{still}, X_3)$ ;

$\dot{n} = \dot{n}_1 + \dot{n}_2$ ;

$P_p = \dot{n} R T_{pump} / S_{pump}$ ;

---

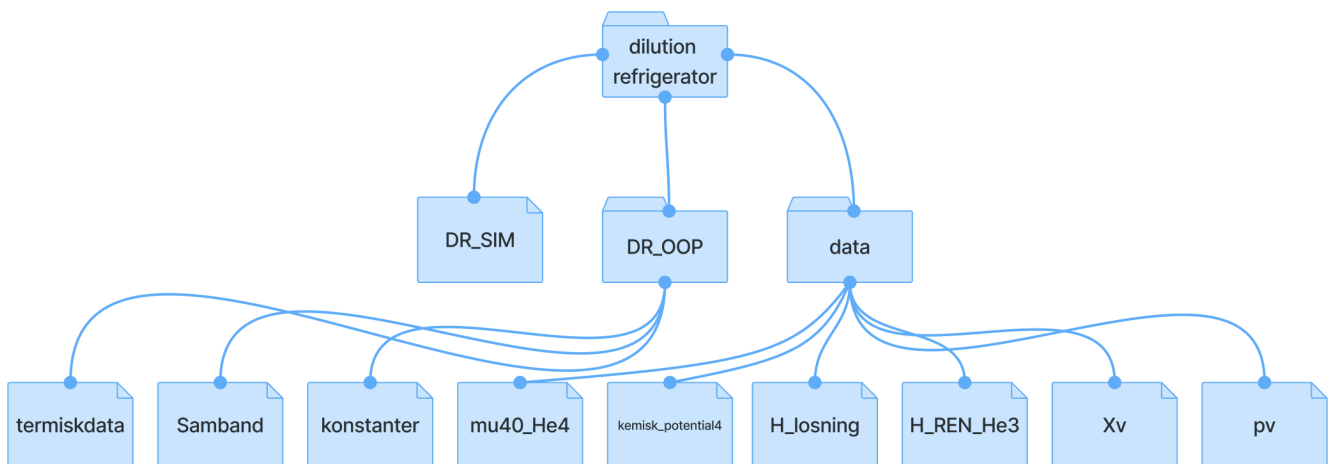
## 3.8 Övergripande programmeringsstruktur

Projektet är programmerat i Python och använder objektorienterad programmering (OOP), där koden strukturerades med hjälp av klasser. Detta angreppssätt valdes för att göra koden modulär, lättunderhållen och enkel att navigera. Källkoden för simuleringen återfinns i Appendix A.

För att ytterligare förbättra läsbarheten delades koden upp i tre separata Python-filer, där olika typer av funktionalitet definierades. I filen `komponenter.py` definierades systemets komponenter som objekt. Fysikaliska konstanter och parametrar samlades i `konstanter.py`, medan termisk data lästes in och hanterades i `termiskdata.py`. Dessa filer organiserades i en gemensam mappstruktur och importerades till en huvudkod som körde själva simuleringen.

Data hämtad från Radebaugh [5] formaterades som CSV-filer för att möjliggöra enkel inläsning och interpolation med hjälp av Python biblioteket `scipy.interpolate`. Datan omfattade Tabell 9 (*entalpi för He-3 i utspädd lösning*), Tabell 4 (*entalpi för rent He-3*), Tabell 15 (*He-3 molfraktion i ångfas*) samt Tabell 14 (*totalt ångtryck*). En illustration av mappstrukturen visas i Figur 3.4.

LLM:en (Large Language Model) Claude.ai har använts vid programmering för tre olika ändamål. För det första användes Cluade.ai för att få en tydlig och fungerande filstruktur. För det andra användes det för att läsa in data på ett effektivt sätt och definiera klasser korrekt. Utöver det har det använts under processen för att felsöka och förbättra koden.



**Figur 3.4:** Översikt av projektets mappstruktur. Rotkatalogen, project root, innehåller de centrala Python-filerna samt underkataloger för exempelvis komponentdefinitioner, jämviktsberäkningar, konstanter och termisk data, vilka tillsammans används av huvudkoden för att genomföra simuleringen.

# 4

## Resultat och diskussion

För att analysera den programmerade modellen och validera delsystemen genomfördes en parameterstudie. Genom att systematiskt variera utvalda parametrar undersöktes deras påverkan på relevanta storheter inom modellen. Modellens känslighet för parametrarna inom olika intervall kunde därmed identifieras och analyseras. Därefter presenteras en analys av möjligheten att skala upp systemet.

### 4.1 Parameterstudie

Det finns tre parametrar som inte beräknas i simuleringen. De är fria variabler som måste sättas till konstanta värden. Dessa utgörs av radien av mynningen till destillatorn  $r_{still}$ , andelen  $^3\text{He}$  i gasfasen i destillatorn  $x_v$ , och temperaturen i blandningskammaren  $T_{mc}$ . För dessa tre variabler utfördes en parametrisk studie för att se hur de bland annat påverkar kyleffekten. Endast en variabel varierades, och de övriga hölls konstanta under varje simulering. Utgångspunkten för parameterstudien, alltså standardvärdet för dessa fria variabler, refereras till som referensfallet. Värdena för referensfallet återfinns i Tabell 4.1. För impedansen och tryckfallen genomfördes ingen parameterstudie.

**Tabell 4.1:** Referensfallet som användes som utgångspunkt för parameterstudien samt analys av resultaten.

Parameter	Värde
$T_{mc}$	100 mK
$x_v$	0,75
$r_{still}$	1,5 mm

Resultaten från parameterstudien presenteras här i form av grafer med tillhörande analyser. Möjliga fysikaliska orsaker till grafernas utseende diskuteras, liksom hur resultaten kan användas för att bedöma modellens giltighet.

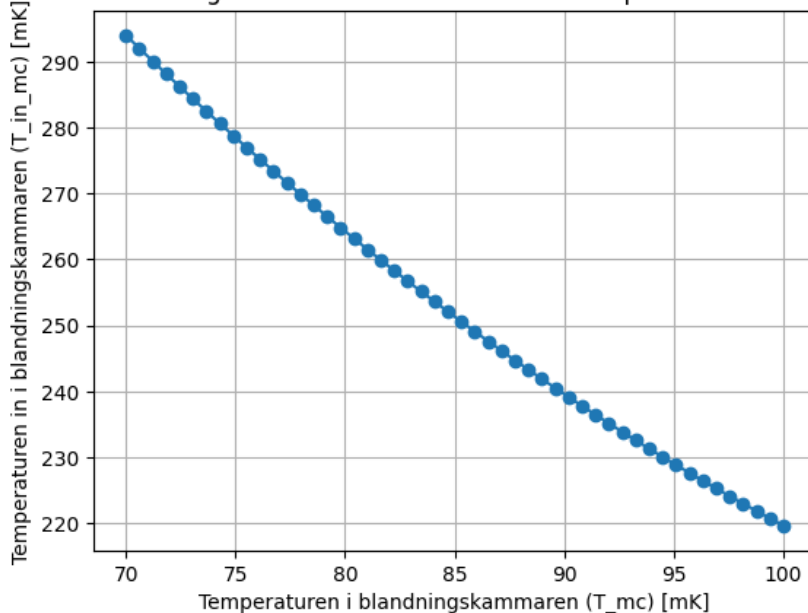
#### 4.1.1 Kapitza-resistansens påverkan på in-temperaturen och kyleffekten i blandningskammaren

Figur 4.1 visar att en lägre önskad temperatur i blandningskammaren medför en högre temperatur på flödet från värmeväxlaren till blandningskammaren. Intuitivt

bör en motströmsvärmeväxlare som har en större temperaturskillnad mellan den varma och den kalla sidan ha mer värmeöverföring. Ekvation 2.15 ger oss dock att värmeledningen är proportionerlig mot temperaturen. Det gör att den kalla sidan får sämre förmåga att kyla den varma sidan och temperaturen in i blandningskammaren blir varmare vid lägre temperaturer i stället för kallare.

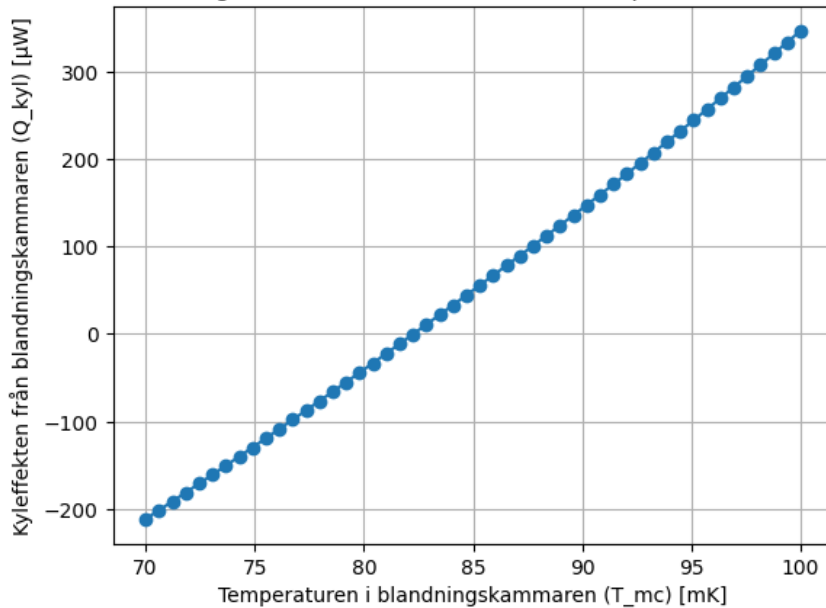
I Figur 4.2 vänder kyleffekten vid  $T_{mc} \approx 82\text{mK}$  från att vara positiv till att vara negativ. Enligt teoriavsnittet 2.3.2 krävs att  $T_{in} < 2,94 \cdot T_{mc}$  för att uppnå någon kyleffekt. Det innebär att blandningskammaren tillför värme till systemet istället för att kyla det när man försöker uppnå en lägre temperatur än 82 mK. Att kyleffekten blir negativ visar att värmeväxlaren är för dålig för att blandningskammaren ska kunna kyla till lägre temperaturer än 82 mK.

Temperaturen in i blandningskammaren som funktion av temperaturen i blandningskammaren



**Figur 4.1:** Figur som visar temperaturen som värmeväxlaren ger in i blandningskammaren som funktion av önskad temperatur i blandningskammaren. Figuren visar gentemot referensfallet  $T_{mc} = 100 \text{ mK}$  och  $x_v = 0,75$ .

Kyleffekten från blandningskammaren som funktion av temperaturen i blandningskammaren



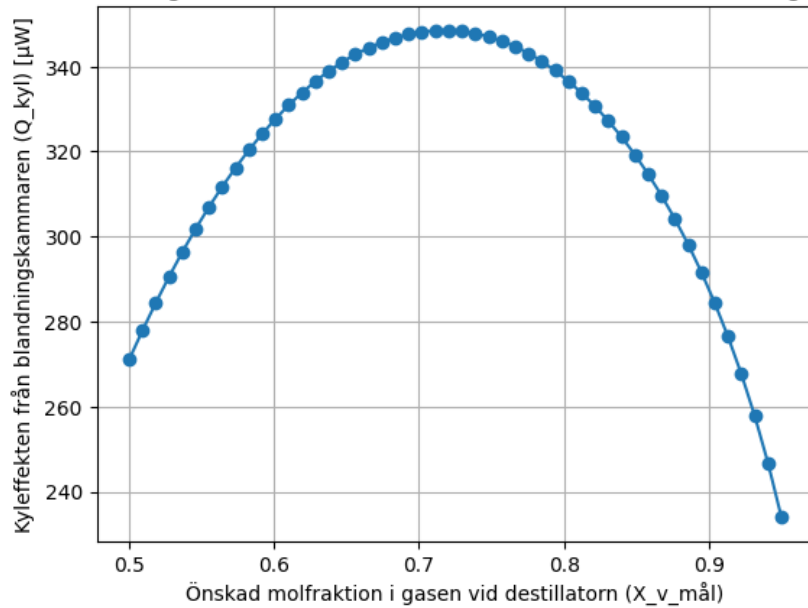
**Figur 4.2:** kyleffekten,  $\dot{Q}_{mc}$ , som funktion av temperaturen i blandningskammaren,  $T_{mc}$ . Figuren visar gentemot referensfallet  $r_{still} = 1,5 \text{ mm}$  och  $x_v = 0,75$ .

#### 4.1.2 Kyleffekten i förhållande till andel $^3\text{He}$ i destillatorns gasfas

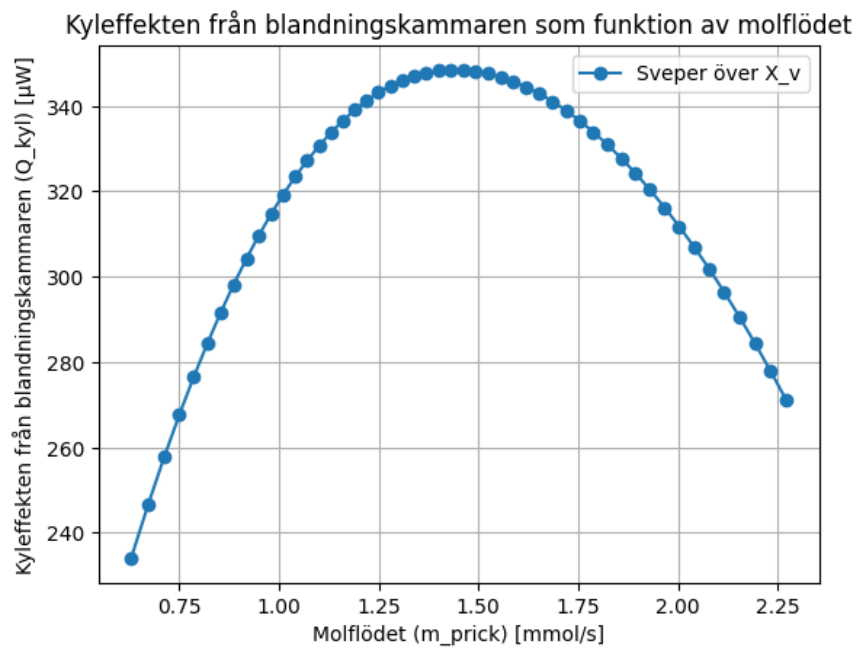
När andelen  $^3\text{He}$  i gasfasen,  $x_v$ , varierar återfinns i referensfallet ett maximum för kyleffekten, se Figur 4.3 och 4.4. Från Figur 4.3 ses att minskande  $x_v$  ger stigande temperatur vilket ökar trycket och därmed molflödet, tills  $x_v$  understiger 0,7 då kyleffekten istället minskar. Det kan därför avläsas ett maximum för kyleffekten beroende av  $x_v$ . Molflödet,  $\dot{m}$ , har en stor påverkan på kyleffekten, men det är molflödet av  $^3\text{He}$  som avgör kyleffekten. Alltså när  $x_v$  understiger 0,7 blir andelen  $^4\text{He}$  så stort att det påverkar kyleffekten negativt.

Andelen  $^3\text{He}$  i gasfasen,  $x_v$ , är direkt kopplad till temperaturen i destillatorn,  $T_s$ , och koncentrationen i destillatorn  $x_s$ . I referensfallet är temperaturen i blandningskammaren,  $T_{mc}$ , fixerad och därmed även den kemiska potentialen, se metodavsnitt 3.4. Ett högre  $x_v$  ger lägre  $x_s$  och högre temperatur. Med andra ord hade det gått att byta plats på  $T_s$  och  $x_v$ , alltså att  $T_s$  blir en justerbar variabel och  $x_v$  blir en funktion av  $T_s$ . Graferna 4.3 och 4.4 är spegelvända, vilket stämmer överens med att ett lägre  $x_v$  ger en högre temperatur,  $T_s$  och därmed ett högre molflöde.

Kyleffekten från blandningskammaren som funktion av önskad molfraktion i gasen vid destillatorn



**Figur 4.3:** Kyleffekten som funktion av andelen  $^3\text{He}$  i gasfasen i destillatorn. Figuren visar gentemot referensfallet  $T_{mc} = 100 \text{ mK}$  och  $x_v = 0,75$ .



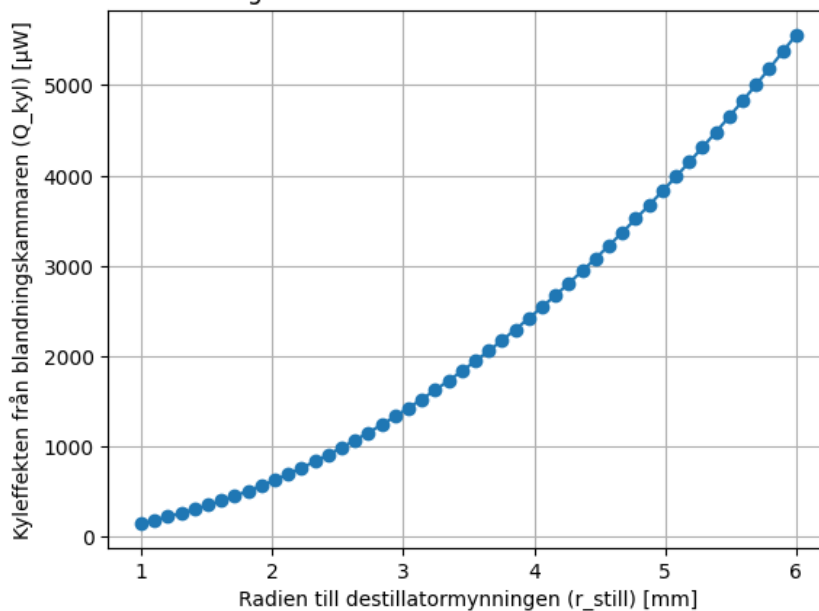
**Figur 4.4:** Molflödets påverkan på kyleffekten när andel  $^3\text{He}$  i gasfasen i destillatorn varierar. Figuren visar gentemot referensfallet  $T_{mc} = 100 \text{ mK}$  och  $x_v = 0,75$ .

### 4.1.3 Kyleffekten i förhållande till storlek på destillatormynning

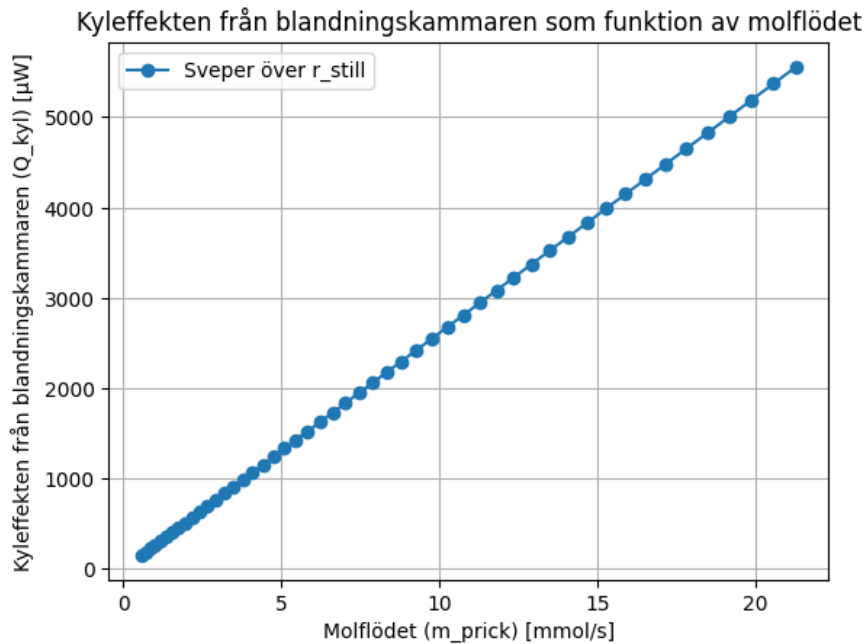
Mynningens radie påverkar inte trycket, temperaturen eller andel  $^3\text{He}$  i gasfas i destillatorn,  $x_v$ , vilket innebär att en större radie ger ett ökat molflöde. Det totala molflödet ökar med  $r_{still}^2$ , eftersom  $\dot{n}_2$  ökar med  $r_{still}^2$ , se Ekvation 2.25.  $\dot{n}_1$  påverkar det totala molflödet men är mycket liten. I referensfallet är det totala flödet 1,33 mmol/s och  $\dot{n}_1$  är 4,15  $\mu\text{mol/s}$ , vilket innebär att molfraktionen tillbaka till värmväxlaren,  $x_{in}$ , kommer vara väldigt nära det förutbestämda  $x_v$  från destillatorn. Kyleffekten är direkt proportionell mot molflödet, vilket ses som ett linjärt samband i Figur 4.6. I enlighet med Ekvation 2.18, ökar därför kyleffekten med  $r_{still}^2$ . Detta resulterar i det paraboliska utseendet i Figur 4.5.

Utifrån Figur 4.5 kan man se att skalan för kyleffekten är betydligt större än för Figur 4.3. Detta tyder på att destillatormynningen, och därmed molflödet, har en mycket större inverkan på kyleffekten jämfört med en ändring av molfraktionen i gasen. Notera att en större radie på destillatormynningen ställer högre krav på pumpen, eftersom ett strypt flöde i röret till pumpen måste uppnås.

Kyleffekten från blandningskammaren som funktion av radien till destillatormynningen



**Figur 4.5:** Destillatormynningens radie påverkan på kyleffekten. Figuren visar gentemot referensfallet  $T_{mc} = 100 \text{ mK}$  och  $x_v = 0,75$



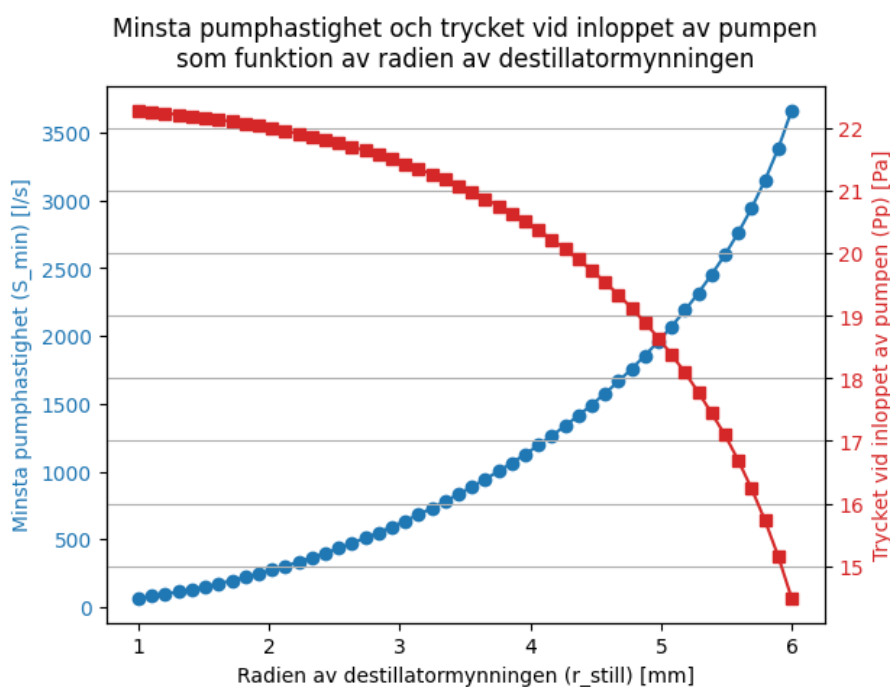
**Figur 4.6:** Molflödets påverkan på kyleffekten när destillator mynningsradie varieras. Figuren visar gentemot referensfallet  $T_{mc} = 100 \text{ mK}$  och  $x_v = 0,75$

#### 4.1.4 Tryck vid pumpen och pumphastighet i förhållande till storlek på destillatormynningen

Trycket vid inloppet till pumpen,  $P_p$ , skiljer sig lite från det kritiska flödet,  $P_c$ . I referensfallet med rörlängd 0,5 m, rörradie 10 mm och utan förluster från krökning,  $n_c = 0$ , går trycket mellan mynningen och inloppet till pumpen från 22,35 Pa till 22,17 Pa.

Det superfluida filmflödet  $\dot{n}_1$  är mycket liten i förhållande till  $^3\text{He}$  gasflödet  $\dot{n}_2$ .  $\dot{n}_2$ -termens  $r_{still}^2$  beroende kommer därför påverka molflödet enligt Ekvation 3.12 och därmed utseendet på kurvorna i Figur 4.7. Det paraboliska utseendet följer av  $r_{still}^2$ -beroendet. Pumptrycket beräknas med Ekvation 3.12 där  $S_p$  och  $P_p$  har inverst förhållande mot varandra med en konstant  $\dot{m}RT$ .

Då  $\dot{n}_1$  är väldigt liten i förhållande till  $\dot{n}_2$  skiljer sig andelen  $^3\text{He}$  i destillatorn,  $x_v$  mot inflödet till blandningskammaren,  $x_{in}$  mycket lite. I referensfallet, då  $x_v = 0,75$ , blir  $x_{in} = 0,747$ .

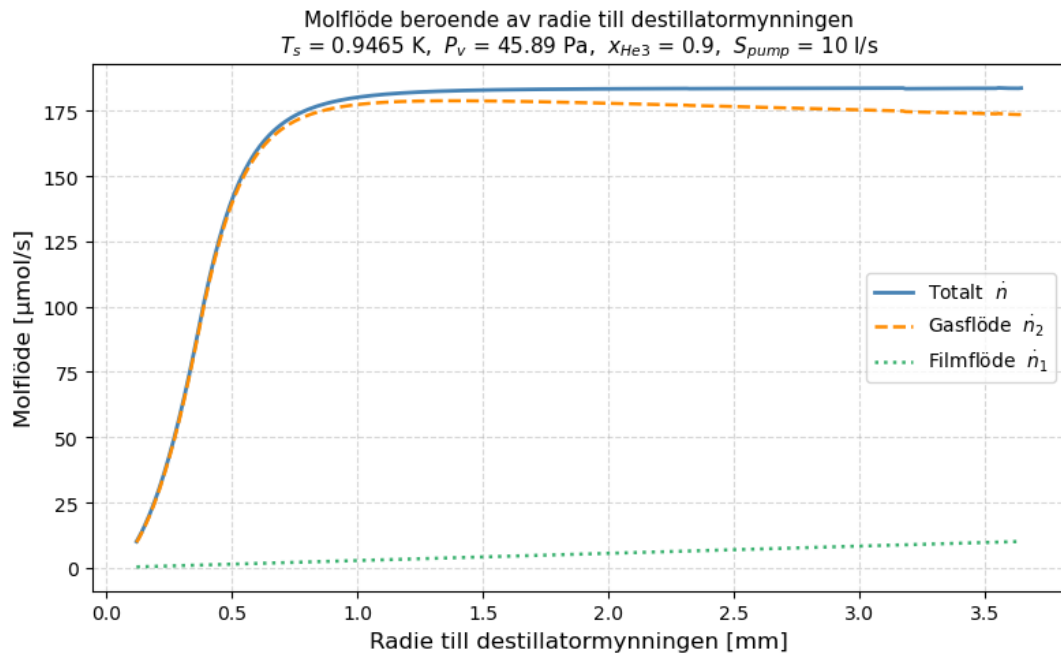


**Figur 4.7:** Minsta pumphastighet som krävs för att uppnå det kritiska trycket  $P_c$  utanför destillatormynningen beroende på radien av mynningen (blå). Inloppstrycket som pumpen ger är plottad i samma axel (röd).

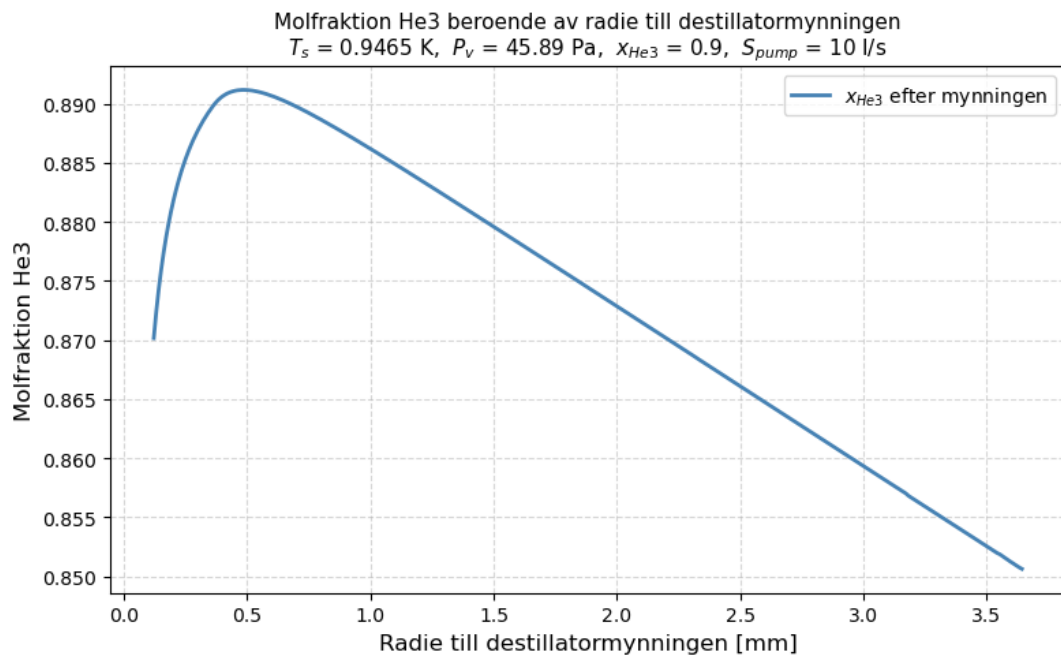
#### 4.1.5 Analys av molflöde och krypande $^4\text{He}$ superfluid ut ur destillatorn

I Figur 4.8 sätts pumphastigheten konstant och därmed ges ett inloppstryck genom inversen i Ekvation 3.12. Filmflödet från  $^4\text{He}$  ökar linjärt, vilket är rimligt då det är proportionellt mot  $r_{still}$  enligt Ekvation 2.23. Vid små radier ökar molflödet hastigt och planar sedan ut. Detta beror på att flödet är strypt vid små radier och enligt Ekvation 2.25 är det proportionellt mot  $r_{still}^2$ , vilket ger den branta kurvan. Till slut orkar inte pumpen hålla trycket  $P_o = P_c$  utan  $P_o$  stiger, vilket gör att kurvan planar ut. Då ökar istället filmflödet och mängden  $^3\text{He}$  minskar, vilket visar att det inte är optimalt att ha en för stor destillatormynning. I Figur 4.9 ökar molfraktionen av  $^3\text{He}$  till en viss punkt för att sedan avta, vilket stämmer bra överens med hur de två flödena beter sig i Figur 4.8.

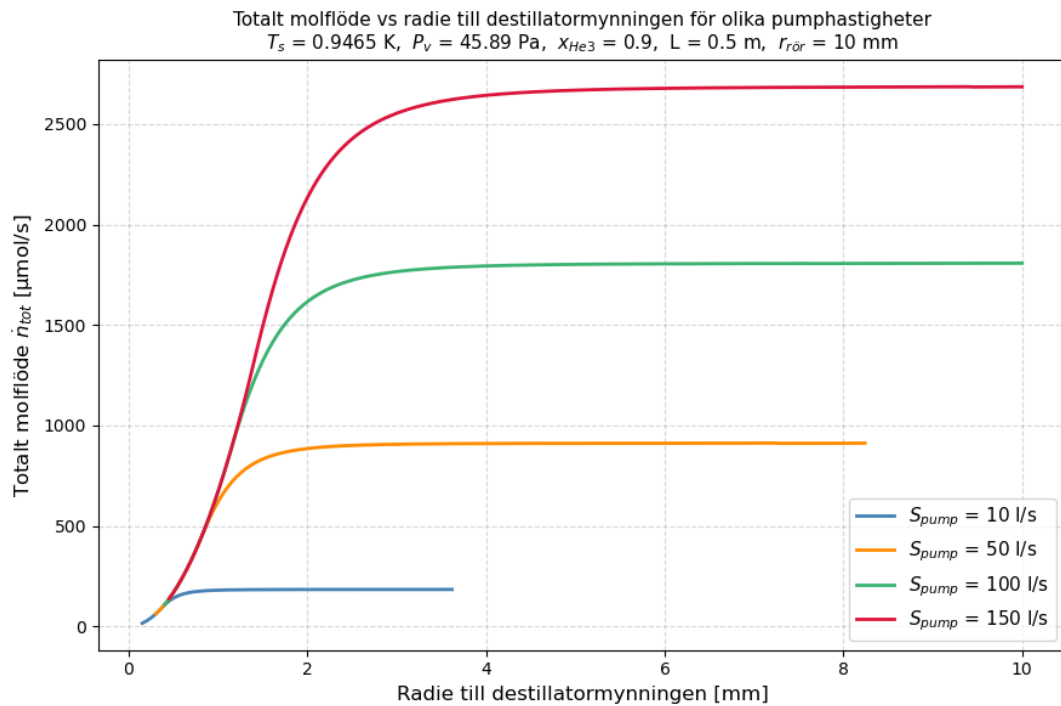
Figur 4.10 plottar det totala molflödet för olika pumphastigheter. Varje kurva planar ut vid ett maximalt flöde som är direkt proportionellt mot pumphastigheten. Det visar att destillatormynningen inte är flaskhalsen när den är tillräckligt stor, utan att pumpen är det. En större mynning ger inget extra flöde vid en pumphastighet, utan kommer bara ge en högre andel filmflöde. För att öka molflödet för stora radier krävs en starkare pump.



**Figur 4.8:** Molflödet ut ur destillatorn som funktion av radien på mynningen. Det totala flödet (blå) och dess två komponenter  $^3\text{He}$  (orange) och superfluida  $^4\text{He}$  filmflödet (grön). Inputparametrar givna under huvudrubriken.



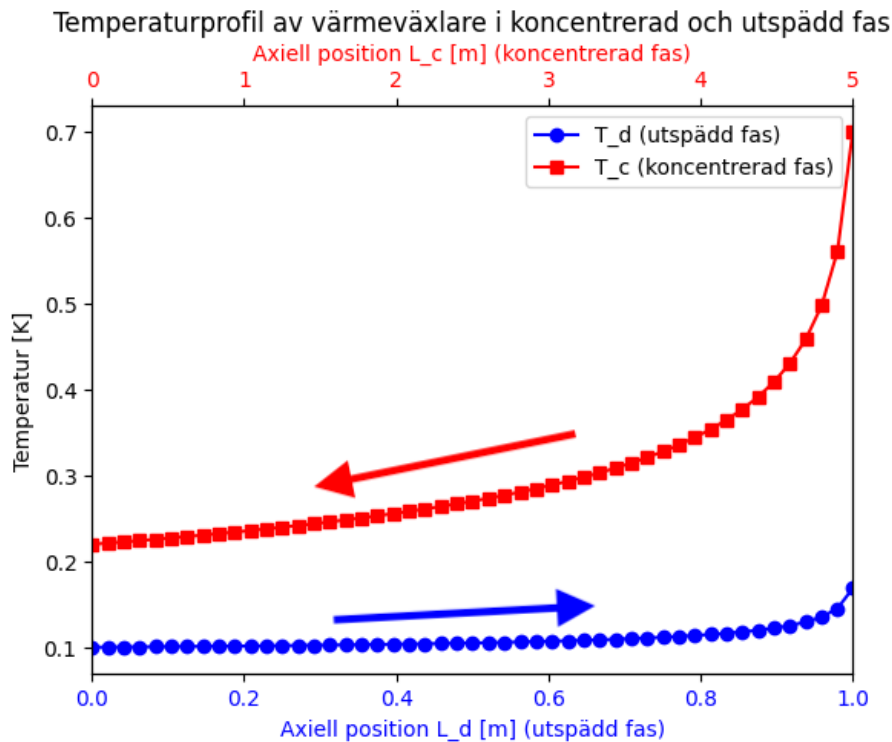
**Figur 4.9:** Molfraktionen av  $^3\text{He}$  beroende av radie till destillatormynningen. Inputparametrar givna under huvudrubriken.



**Figur 4.10:** Totala molflödet vid olika pumphastigheter. Inputparametrar givna under huvudrubriken.

#### 4.1.6 Temperatur- och koncentrationsprofiler för värmeväxlaren

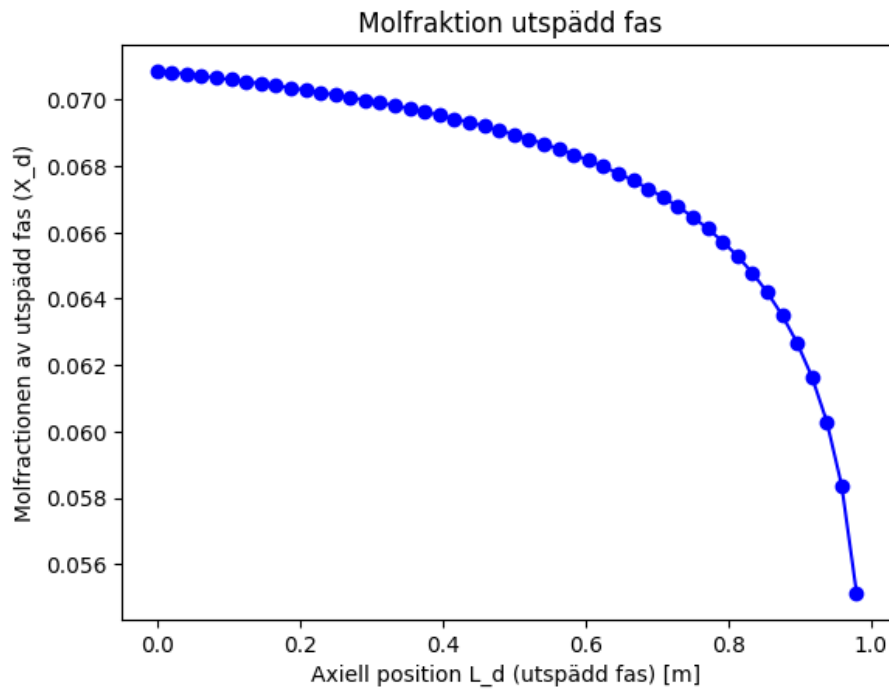
I Figur 4.11 plottas temperaturprofilen för värmeväxlaren för båda sidorna. Man kan se i figuren att intemperaturen på koncentrerade sidan stämmer överens med den satta temperaturen i kondensorn på 0,7 K.  $T_{mc}$ , som är satt till 100 mK, är den temperatur som går in i värmeväxlaren på den utspädda sidan. Detta visar att värmeväxlarmodellen uppfyller de angivna randvillkoren. Den varma koncentrerade fluiden (röd i Figur 4.11) kyls från 0,7 K till 0,220 K och flödar sedan in i blandningskammaren. Den kalla utspädda fluiden från blandningskammaren (blå i Figur 4.11) värms upp från  $T_{mc} = 100$  mK till 168 mK och flödar sedan in i destillatorn.



**Figur 4.11:** Temperaturprofilen för värmeväxlaren längs dess längd. Det är en motströms-tubvärmeväxlare där den varma sidan med koncentrerad  ${}^3\text{He}$  (röd) är en 5 meter lång spiral inuti den kalla sidan med utspädd  ${}^3\text{He}/{}^4\text{He}$  (blå). Pilarna visar flödesriktningen.

I blandningskammaren är koncentrationen 7,1 %. Det beror på att  ${}^3\text{He}$  har en begränsad löslighet i superflytande  ${}^4\text{He}$  vid låga temperaturer. Lösligheten konvergerar mot koncentrationen 6,48 % när temperaturen närmar sig 0 K enligt Ekvation 2.17 [3].  ${}^3\text{He}$  evaporerar i destillatorn och pumpas sedan ut. För att bibehålla systemets kemiska jämvikt sjunker därför koncentrationen längs värmeväxlaren från blandningskammaren till destillatorn. Detta fenomen kan tydligt utläsas från Figur 4.12 som visar en sjunkande koncentration för ökande axiell position, vilket stärker validiteten hos vår modell.

Molfraktionen på den koncentrerade sidan av värmeväxlaren är konstant längs värmeväxlaren i simuleringen, vilket stämmer överens med teorin. Det beror på den höga andelen  ${}^3\text{He}$  som dominerar den koncentrerade fasen, med endast en liten mängd  ${}^4\text{He}$ . Till skillnad från den utspädda fasen är  ${}^4\text{He}$  i den koncentrerade fasen inte superfluid och kan därför inte röra sig fritt längs kanalen. Det innebär att villkoret om konstant kemisk potential inte driver någon koncentrationsförändring längs värmeväxlaren, och förblir därmed oförändrad längs hela värmeväxlarens längd.



**Figur 4.12:** Koncentrationsprofilen av  $^3\text{He}$  i den utspädda fasen längs värmeväxlaren från blandningskammaren till destillatorn.

#### 4.1.7 Beräkning och analys av Peclet-talet i värmeväxlaren

I värmeväxlaren försummas den axiella värmeledningen eftersom det gav ett enklare system att lösa, men enligt Paradis och Champiaud [11] bör Peclet-talet vara under 100 för att det skall vara ett fysikaliskt rimligt antagande. Vid överslagsberäkning av Peclet-talet fås för de två sidorna i värmeväxlaren  $Pe_{dilute} \approx 40$  och  $Pe_{conc} \approx 8,4$ . Detta fås med Ekvation 2.9 för båda sidor av värmeväxlare och med värdena  $T = 0.45$  K,  $\dot{m} = 100$   $\mu\text{mol/s}$ ,  $r = 0.015$  m,  $L_{kar} = 0.03$  m och  $k = 5 \times 10^{-3}$  W/(m · K), samt Ekvation 3.3 och 3.4 för värmekapaciteten. Värmeledningskoefficienten,  $k$ , är tagen från Anderson Figur 3 s. 5 [18]. Dessa värden för  $Pe_{dilute}$  och  $Pe_{conc}$  är en bit ifrån riktvärdet 100.

Dessa antaganden är vanliga och görs av bland annat Pradhan [3] som försummar axial värmeledning, samt Takano [7] och Frossati [19] som antar en ideal värmeväxlare som endast tar hänsyn till radiell värmeöverföring. En anledning till att vår modell får väldigt låga Peclet-tal kan vara på grund av stora flöden och stora rördiameter i jämförelse med tidigare nämnd litteratur. Vid skapandet av nya modeller bör detta tas i beaktning genom att antingen skapa en modell som har högre Peclet tal, eller ta hänsyn till den axiella värmeledningen.

### 4.1.8 Dimensionering av huvudsaklig flödesimpedans

För att  $^3\text{He}$ -gas ska kondensera vid 0,7 K behövs ett tryck mellan 3-20 kPa. Detta uppnås med hjälp av en flödesimpedans precis innan kondensorn som sänker trycket på inkommande gas. Trycksänkningen är proportionell mot molflödet, varför man behöver olika impedanser vid olika molflöden. Gasflödesmodellen från kapitel 3.6 användes för att finna lämpliga dimensioner hos den huvudsakliga flödesimpedansen, så att trycket in i kondensorn är under 20 kPa. Modellen är såpass generell att impedansens dimensioner praktiskt sett kan sättas fritt. Några exempel på lämpliga dimensioner hos flödesimpedansen vid olika molflöden ges i Tabell 4.2.

**Tabell 4.2:** Lämpliga radier för flödesimpedansen vid 5 representativa exempel på molflöden. För samtliga exempel har impedansen längden  $L_{imp} = 5$  m och en geometri som motsvarar  $n_c = 10$  vinkelräta böjningar.

$\dot{m}$ [ $\mu\text{mol/s}$ ]	$r_{imp}$ [mm]
520	0,15
680	0,17
830	0,19
960	0,21
1100	0,22

## 4.2 Skalbarhet av systemet

Utifrån Figur 4.5 och 4.6 kan man se att ökning av radien på mynningen i destillator, ger en större kyleffekt på grund av ett högre molflöde. Detta kräver dock att pumpen klarar ett större flödena, detta är inte självklart då dagens vakuumpumpar har begränsningar i kapacitet.

En annan begränsande faktor för att kunna skala upp kyleffekten är att när modellen skalades upp med ökande flöden så sjönk kyleffekten. Detta beror på att värmeväxlaren inte klarar av att kyla flödet tillräckligt mycket för att behålla rätt temperatur i blandningskammaren då flödet överstiger ett visst värde. Om man bortser från kaptiza-resistansen, eller använder sig av ett annat värmeväxlarsystem som klarar av högre flöden, så skulle man kunna skala upp systemet för att få en högre kyleffekt vid låg temperatur, omkring 20 mK.

När systemet skalas upp kommer rörradien och volymerna för destillatorn och blandningskammaren att behöva ökas. Denna volymökning av systemet innebär att mängden  $^3\text{He}$  och  $^4\text{He}$  också behöver ökas. Den begränsade tillgången på båda heliumisotoperna utgör därför en begränsande faktor. Speciellt  $^3\text{He}$  är en begränsad resurs, eftersom den primära källan utgörs av radioaktivt sönderfall från tritium, som är en biprodukt från kärnvapen. Så i takt med att man avvecklar kärnvapen, kommer tillgången till  $^3\text{He}$  att minska. Det finns dock alternativa sätt att producera  $^3\text{He}$  från tungvattenreaktorer, men den produktionen är väldigt liten i jämförelse med

produktionen kopplad till kärnvapen [20]. Man bör därför ha tillgången till  $^3\text{He}$  i åtanke vid uppskalning av utspädningskylare.



# 5

## Slutsatser

Utifrån antagandena som gjorts under arbetet har det tagits fram en fungerande kod som ger möjlighet att modellera hela systemet för en utspädningskylare. Systemvalideringen i parameterstudien visar inga tecken på ofysikaliska eller avvikande trender. Detta tyder på att den grundläggande fysiken stämmer, samt att de antaganden som gjorts är fysikaliskt rimliga. Detta styrks även av att de värden och samband som fås av modellen stämmer väl överens med litteraturen.

Tydliga begränsningar har också påträffats, såsom från värmeväxlaren och pumpen, vilka begränsar skalbarheten av systemet vid högre flöden. Trots detta ger koden en bra förståelse för systemet i sin helhet. Eftersom inga modelleringsystem för utspädningskylare finns öppet tillgängliga, utgör denna modell en god grund för framtida forskning inom området.



# Litteratur

- [1] H. Zu, W. Dai och A. T. de Waele, *Development of dilution refrigerators—A review*, jan. 2022. DOI: 10.1016/j.cryogenics.2021.103390.
- [2] F. Pobell, *Matter and methods at low temperatures*. Springer, 2007, s. 461, ISBN: 9783540463566.
- [3] J. Pradhan, N. K. Das och A. Chakraborty, “Thermo-dynamical process simulation of dilution refrigerator,” *Cryogenics*, årg. 57, s. 158–165, okt. 2013, ISSN: 00112275. DOI: 10.1016/j.cryogenics.2013.07.003.
- [4] D. V. Shroeder, *An introduction to Thermal Physics*, S. Iwata, utg. Addison Wesley Longman, 2000, s. 1–422.
- [5] R. Radebaugh, “Thermodynamic properties of He3-He4 solutions with applications to the He3-He4 dilution refrigerator,” National Bureau of Standards, Gaithersburg, MD, tekn. rapport, 1967. DOI: 10.6028/NBS.TN.362. URL: <https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/Legacy/TN/nbstechnicalnote362.pdf>.
- [6] John C. Wheatley, “Dilute Solutions of He3 in He4 at Low Temperatures,” *American Journal of Physics*, årg. 36, nr 3, s. 181–210, mars 1968, ISSN: 0002-9505. DOI: 10.1119/1.1974483. URL: [/aapt/ajp/article/36/3/181/1048012/Dilute-Solutions-of-He3-in-He4-at-Low-Temperatures](http://aapt.org/ajp/article/36/3/181/1048012/Dilute-Solutions-of-He3-in-He4-at-Low-Temperatures).
- [7] Y. Takano och J.-T. cryocooler, “Cooling power of the dilution refrigerator with a perfect continuous counterflow heat exchanger,” *Review of Scientific Instruments*, årg. 65, nr 5, s. 1667–1674, maj 1994, ISSN: 00346748. DOI: 10.1063/1.1144857. URL: [/aip/rsi/article/65/5/1667/450113/Cooling-power-of-the-dilution-refrigerator-with-a](http://aip/rsi/article/65/5/1667/450113/Cooling-power-of-the-dilution-refrigerator-with-a).
- [8] A. Khater och J. Szeftel, “Theory of Kapitza resistance,” maj 1987. DOI: 10.1103/PhysRevB.35.6749.
- [9] *Knudsen number*. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Knudsen\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Knudsen_number).
- [10] *Péclet number*. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/P%C3%A9clet\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/P%C3%A9clet_number).
- [11] P. Y. Paradis och H. Champliand, “New correlations for heat transfer in parallel-plate ducts at low Peclet number,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, årg. 178, okt. 2021, ISSN: 00179310. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.121595.
- [12] *scipy.optimize.brentq*. URL: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.brentq.html>.
- [13] J. D. Siegwarth och R. Radebaugh, “Analysis of Heat Exchangers for Dilution Refrigerators,” *Review of Scientific Instruments*, årg. 42, nr 8, s. 1111–1119, aug. 1971, ISSN: 00346748. DOI: 10.1063/1.1685324. URL: [/aip/](http://aip/)

- rsi/article/42/8/1111/305399/Analysis-of-Heat-Exchangers-for-Dilution.
- [14] D. M. Wang m. fl., “Modeling and Analysis of Flow Through the Orifice of Still in Dilution Refrigerator,” *Journal of Low Temperature Physics*, årg. 216, nr 3-4, s. 469–482, aug. 2024, ISSN: 15737357. DOI: 10.1007/s10909-024-03157-3.
- [15] R. G. Livesey, “Solution methods for gas flow in ducts through the whole pressure regime,” *Vacuum*, årg. 76, nr 1, s. 101–107, okt. 2004, ISSN: 0042207X. DOI: 10.1016/j.vacuum.2004.05.015.
- [16] G. Van Wylen, C. Borgnakke och R. Sonntag, *Fundamentals of Classical Thermodynamics*.
- [17] J. Lau, M. Benna, M. Devlin, S. Dicker och L. Page, “Experimental tests and modeling of the optimal orifice size for a closed cycle 4He sorption refrigerator,” *Cryogenics*, årg. 46, nr 11, s. 809–814, nov. 2006, ISSN: 00112275. DOI: 10.1016/j.cryogenics.2006.08.003.
- [18] V. E. 147, N. B. Er, A. C. Anderson, J. I. Connolly, O. E. Vnmms och A. J. C. Wheatlev, “PHYSICAL REVIEW Exped  
ental Thei  
al Conductivity of Helium-3f,” tekn. rapport, 1966.
- [19] G. Frossati, “Experimental Techniques: Methods for Cooling Below 300 mK,” tekn. rapport, april 1992.
- [20] Market Growth Reports, *Helium-3 Market Global Industry Analysis, Size, Share, Growth, Trends, and Forecast (2024-2032)*, dec. 2025. URL: [https://www.marketgrowthreports.com/market-reports/helium-3-market-100079#rd\\_table](https://www.marketgrowthreports.com/market-reports/helium-3-market-100079#rd_table).

# A

## Appendix 1

Länk till källkoden som har skrivits under detta projekt;  
GitHub-projekt

**INSTITUTIONEN FÖR MEKANIK OCH MARITIMA VETENSKAPER  
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA**

Göteborg, Sverige 2026

[www.chalmers.se](http://www.chalmers.se)



**CHALMERS**