KANDIDATUPPSATS 2022

# Numerisk simulering av radaravbildning över havets vågor

Theodor Jendle, Pontus Gustafsson, Jesper Buske

Institutionen för Rymd-, geo- och miljövetenskap
Chalmers tekniska högskola
Göteborg, Sverige 2022

Numerisk simulering av radaravbildning över havets vågor

Theodor Jendle, Pontus Gustafsson, Jesper Buske



Handledare: Anis Elyouncha, Leif Eriksson, Institutionen för rymd-, geo- och miljövetenskap
Examinator: Patrick Eriksson, Institutionen för rymd-, geo- och miljövetenskap

Kandidatarbete 2022
Institutionen för rymd-, geo- och miljövetenskap
Chalmers tekniska högskola
SE-412 96 Göteborg
Telefon +46 31 772 1000

Skrivet i LaTeX
Göteborg, Sverige 2022

# Abstrakt

Havsobservationer är ett kraftfullt verktyg för miljöövervakning av havsytor, där SAR idag är en av de mest tillgängliga tekniker. Syftet med detta projekt är att utifrån existerande teoretiska modeller simulera havsytor samt SAR-avbildning av havsytan. En av dessa modeller har tre olika transformalternativ; linjär-, kvasilinjär- och ickelinjär transform, detta arbete begränsar sig till den linjära transformen. Med simuleringarna utförs en analys av den linjära transformmodellens giltighet för olika radarparametrar och väderförhållanden, där främst påverkan från vindriktningen $\phi_{\text{vind}}$ och kvoten mellan satellitens avståndet till havsyta $R$ och satellitens hastighet $V$, $\beta = R/V$, studeras. Arbetet utförs i programmeringsspråket `python`, där paketen `numpy` och `matplotlib` används för numeriska beräkningar och visualiseringar. Det kan konstateras att både den linjära transformen och SAR-avbildningen fungerar bättre då $\beta$ antar lägre värden än för höga, samt att den linjära transformen och SAR-avbildningen fungerar sämre då havsvågorna breder ut sig i satellitens färdriktning. Att transformen fungerar bäst för lägre $\beta$ värden innebär att transformen är mest applicerbar för satelliter med hög fart och/eller på kort avstånd från havsytan. Framtida implementation att göras är de kvasi- och ickelinjära transformmodellerna och en inversionsalgoritm för att kunna extrahera våg- och radarparametrar från ett SAR-bildsspektrum. Vidare kan en analys av vindhastighetens påverkan på de simulerade spektrumen utföras, då vindhastighetsparametern inte analyserats i detta projekt.

Nyckelord: SAR, havsyta, simulering, python, vågspektrum.

# Summary

Ocean observation is a powerful tool for environmental monitoring of sea surfaces, and today SAR is one of the most accessible technologies. The purpose of this project is to simulate sea surfaces and SAR images of sea surfaces based on existing theoretical models. One of these models has three different transform options; linear, quasi-linear and nonlinear transform, this work is limited to the linear transform. With the simulations, an analysis is performed of the validity of the linear transform model for different radar parameters, where mainly the influence of the vind direction $\phi_{\text{vind}}$ and ratio between the distance from the satellite to the ocean surface $R$ and the velocity of the satellite $V$, $\beta = R/V$, is studied. The work is carried out in the programming language `python`, where the packages `numpy` and `matplotlib` are used for numerical calculations and visualizations. It can be stated that the linear transform and the SAR imaging works better for lower $\beta$ values than higher $\beta$ values, and that the linear transform and the SAR imaging works less well when the waves propagate in the direction of travel of the satellite. The fact that the transform works best for lower $\beta$ values means that the transform is most applicable for satellites at high speeds and/or at a short distance from the ocean surface. Remaining implementation to be done are the quasi- and non-linear transform models and an inversion algorithm to be able to extract wave and radar parameters from a SAR image spectrum. Furthermore, an analysis of the effect of wind speed on the simulated spectra can be performed, as the wind speed parameter has not been analyzed in this project.

# Nomenklatur

## Index

| | |
|---|---|
| $i$,$j$ | Index för diskreta vektorer |

## Variabler

| | |
|---|---|
| $\Psi$ | Direktionellt spektrum |
| $Z$ | Våghöjdsfält |
| $\hat{Z}$ | Fouriertransformerat våghöjdsfält |
| $\omega$ | Havsvinkelfrekvens |
| $k$ | Havsvågnummer |
| $\theta$ | Infallsvinkel från satellit till havsyta |
| $S$ | Omnidirektionellt spektrum |
| $u_r$ | Orbitalhastighet |
| $x, y$ | Position (i azimut- och siktlinjeriktning respektive) |
| $I$ | Radarintensitet |
| $\sigma$ | Radartvärsnitt |
| $D$ | Spridningsfunktion |
| $T$ | Transformationsmoduler |
| $U$ | Vindhastighet 10 meter över havsytan |
| $\phi_{\text{vind}}$ | Vindriktning |
| $\varphi$ | Vinkel från vindriktningen |
| $c$ | Vågfashastighet |
| $Z$ | Våghöjdsfält |
| $F_k$ | Vågspektrum |

# Innehåll

# 1
# Introduktion

Studier av havet är viktigt av många anledningar, bland annat för väderprognoser, planering av rutter för skepp och för att uppskatta klimatpåverkan. För studier av havsytan och dess enorma ytor är fjärranalys optimalt. En av de satellitbaserade tekniker som används är SAR *(eng. synthetic aperture radar)*. För att tolka data från en SAR-avbildning krävs en analytisk modell att jämföra den insamlade datan med. SAR är en satellitbaserad teknik som fungerar genom att bestråla havsytan med elektromagnetisk strålning som sedan reflekteras tillbaka till satelliten. Speciellt för SAR är att inte endast strålning som direkt reflekteras till satelliten används, utan den kombineras med strålning som skickats ut vid tidigare tidpunkt. SAR-avbildningen av den simulerade havsytan tas fram genom att simulera intensiteten av den bakåtspridda (*eng. backscatter*) elektromagnetiska strålningen som når satelliten. Den bakåtspridda strålningen påverkas av flera faktorer, vinkeln mellan den infallande strålningen och vågornas lutning, hur slät vågytan är, vågornas fashastighet och dopplerskiftet som uppstår som resultat av vågornas rörelse i satellitens riktning. Ofta är man även intresserad av SAR-avbildningens spektrum. Detta kan via simulering tas fram genom att fouriertransformera en simulerad intensitetsbild eller applicera en transformfunktion på det teoretiska direktionella havsvågsspektrumet. Ett direktionellt havsvågsspektrum är en teoretisk modell som approximerar och försöker beskriva vågor till havs. Modellerna beskriver praktiskt en vågs amplitud och riktning för olika vågnummer givet ansatta vågparametrar, såsom vindriktning, vindhastighet och vindriktningsdistans, (*eng. fetch*). Direktionella havsvågsspektra är därför användbara för att extrahera vågparametrar från en SAR-mätning som endast ser havsytan. För att konstruera ett direktionellt havsvågsspektrum används två separata modeller, en modell för ett omnidirektionellt havsvågsspektrum och en modell för en havsspridningsfunktion. Omnidirektionella havsvågspektra beskriver vågens höjd längs med vindriktningen. De tre omnidirektionella spektra som kommer behandlas i detta arbete är Pierson-Moskowitz, JONSWAP och Elfouhaily. Havsspridningsfunktioner beskriver hur vågens amplitud påverkas av riktning, det vill säga vågens utbredningsförmåga. De tre havsspridningsfunktioner som kommer tillämpas och analyseras i detta projekt är, “Simpel cosinus funktion”, Longuet-Higgins och Elfouhaily.

## 1.1 Bakgrund

Pierson och Moskowitz (1964) (förkortat PM) presenterade en omnidirektionell vågspektrumsmodell för ett fullt utvecklat hav, det vill säga för långa vindriktningsdistanser. De drog slutsatsen att mer data behövde samlas in, studeras och appliceras för att förbättra deras modell. Joint North Sea Wave-projektet (förkortat JONSWAP) lett av Hasselmann m. fl. (1973) var en av de första välgjorda studierna som berörde vågspektrum och analytisk modellering av havsytor. De konstaterade att spektrumets utseende primärt bestäms av den ickelinjära energitransformen från den centrala delen av spektrumet till dess korta och långa vågkomponenter. Speciellt kunde de beskriva spektrumets topp och branta lutning som en självstabliserande egenskap. De kartlade hur mycket av vindens energi som överförs till vågen för både långa och korta vindriktningsdistanser. Även de kom fram till att det behövdes en bättre vågspektrumsmodell. Vilket leder till Elfouhaily, Chapron, Katsaros och Vandemark (1997), där flertalet experiment lyckades sammanställas för att skapa en relativt simpel modell som beskriver havsytans direktionella spektrum.

## 1.2 Syfte

Syftet med arbetet är att konstruera ett simuleringsprogram i `python`, som givet våg- och radarparamerar ger ett SAR-bildsspektrum. Detta genom att implementera fem större moment, vågspektra, linjär transformer av vågspektra, simulering av havsyta utifrån vågspektra, simulering av SAR-avbildning och beräkning av SAR-bildsspektrum. Utifrån detta kommer dessa spektra att simuleras för olika radarparametrar där det skall analyseras för vilka intervall den linjära approximationen är giltig.

## 1.3 Avgränsning

I projektet kommer tre havsvågspektramodeller och havsspridningsfunktioner att implementeras. Vidare kommer SAR-avbildning av havsytan samt en linjärapproximerad SAR-transform implementeras.

## 1.4 Precisering av frågeställning

Hur påverkar radarparametern $\beta = R/V$, kvoten mellan avståndet från satelliten till havsytan och satellitens hastighet i omloppsbana, samt vindriktningen $\phi_{\text{vind}}$ de transformerade vågspektra och SAR-bildsspektra och för vilka värden är den linjära transformen giltig?

# 2

# Teori

## 2.1 Havsvågor

De två krafter som driver bildningen av vågor till havs är gravitationen och vinden. I djupt vatten har vinkelfrekvens och vågnummer följande förhållande (Rizaev, Karakus, Hogan & Achim, 2021):

$$\omega^2 = gk\left(1 + \left(\frac{k\tau}{g\rho}\right)^2\right) \tag{2.1}$$

Där $\omega$ är vågens vinkelfrekvens, $k$ vågnumeret, $g$ gravitationskonstanten, $\tau$ ytspänningen och $\rho$ vattendensiteten. För gravitationsvågor förenklas detta förhållande till:

$$\omega = \sqrt{gk} \tag{2.2}$$

Vågens fashastighet uttrycks, per definition, enligt:

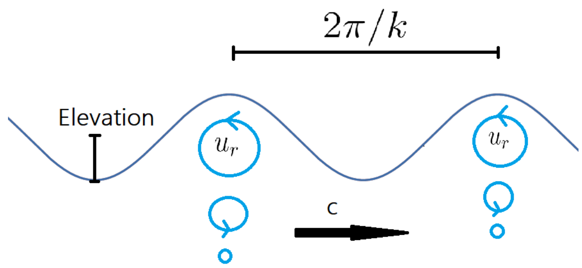
$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} \tag{2.3}$$

Havsytans rörelse påverkas av att vattnetpartiklar har en orbital rörelse, som illustreras i figur 2.1. Denna orbitala rörelse ger upphov till en försämrad SAR-bildsupplösning i azimutriktning och för att ta hänsyn till denna rörelse räknas dess orbitala hastighet ut enligt:

$$u_r(x_0) = \sum_{i=1}^{N} \hat{Z}(k_i)\omega_i G(\theta, \phi) \cdot \sin(k_i x_0 + \phi_i) \tag{2.4}$$

$$G(\theta, \phi) = (\sin^2\theta \sin^2\phi + \cos^2\theta)^{1/2} \tag{2.5}$$

Där $\hat{Z}(k)$ är fouriertransformerade vågfältet, $\phi$ vinkeln mellan vindriktning och azimutriktning, $\theta$ infallsvinkeln mellan satelliten och havsytan och $x_0$ kartesiska koordinaterna för origo (Alpers, 1983). I figur 2.1 ser vi en illustration av $k$, $c$ och $u_r$.




**Figur 2.1:** Bilden illustrerar vågors orbitala rörelser, presenterade som blåa cirklar, samt vågfashastighet, markerat som $c$. Vidare i bilden visas även vågnummer och från vilken höjd relativa elevationen är beräknad.

## 2.2 Omnidirektionella spektra

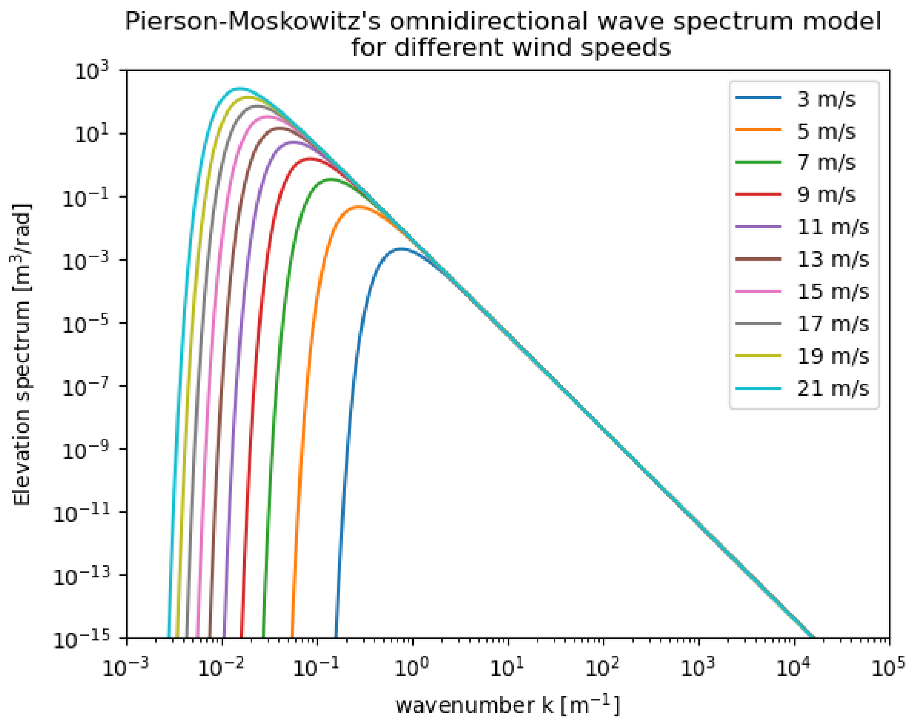
Det omnidirektionella spektrumet beskriver hur vågens amplitud och längd förhåller sig till vågparametrar. För simuleringarna kommer tre olika spektra att användas; Pierson-Moskowitz, JONSWAP och Elfouhaily, som beskrivs nedan. De skiljer sig åt i både komplexitet samt hur väl de avbildar ett verkligt hav.

### 2.2.1 Pierson-Moskowitz

Pierson-Moskowitz (PM) är den enklaste modellen som beskriver vågens amplitud för hur olika vågnummer förhåller sig till vindhastighet. I figur 2.2 återfinns PM spektrum där det observeras att spektrumets topp förskjuts mot lägre vågnummer när vindhastigheten ökar samt får ett högre toppvärde. Vidare ses i figuren hur spektrumet för höga vågnummer avtar oberoende av vindhastighet. Pierson-Moskowitzspektrumet formulerat i vågnummerdomänen fås av (Rizaev m. fl., 2021) och definieras enligt:

$$S(k) = \frac{\alpha}{2k^3} e^{-\beta(\frac{g}{k})^2 \cdot \frac{1}{U_{10}^4}} \tag{2.6}$$

Där $k$ är vågnumret, $U_{10}$ är vindhastigheten 10 meter över havsytan, $\alpha = 0.0081$ är Phillips och Kitaigorodskii längdjämviktsparameter och $\beta = 0.74$ är en dimensionslös parameter. Pierson-Moskowitzspektrumet gäller endast för fullt utvecklade hav och för relativt höga vindhastigheter ($10 - 20$ m/s).




**Figur 2.2:** I bilden återfinns Pierson-Moskowitz omnidirektionella vågspektrum modell. I den logaritmiska grafen går att urskilja vågens elevationsnivå för olika vågnummer samt vindhastigheter.

### 2.2.2 JONSWAP

JONSWAP tar hänsyn till en ytterligare vågparameter, vindriktningsdistans. I figur 2.3 återfinns JONSWAP spektrum där det observeras att spektrumets topp förskjuts inte lika markant som PM-spektrumet. Vidare i figuren syns toppförbättringsfunktions påverkan på spektrumet, en mer definierad topp. JONSWAP-spektrumet är definierad som (Rizaev m. fl., 2021):

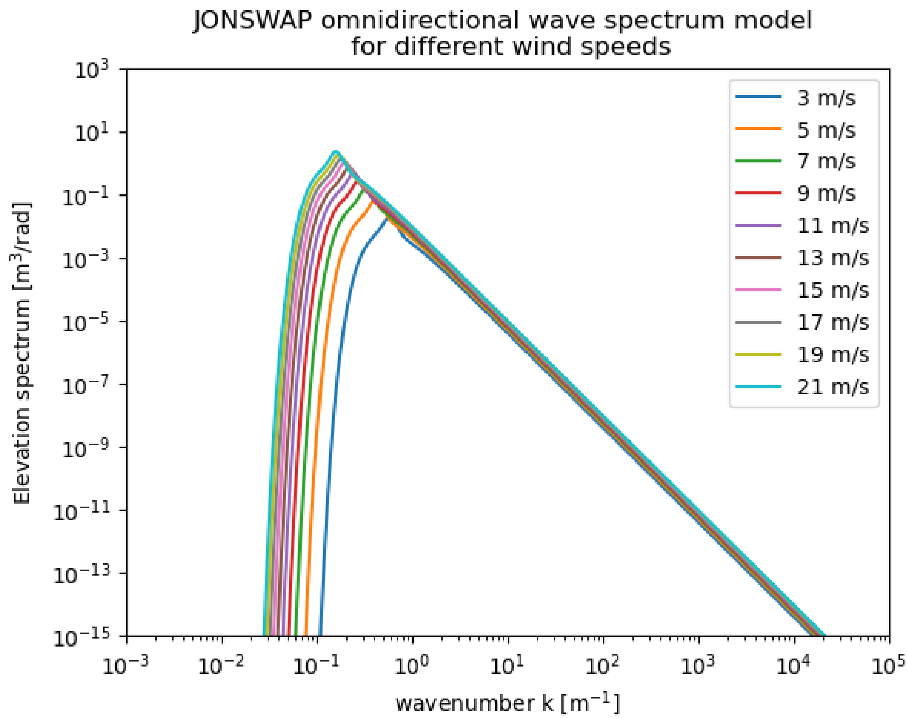
$$S(k) = \frac{\alpha}{2k^3} e^{-\frac{5}{4}(\frac{k_p}{k})^2} e^{\ln\gamma \cdot e^{-\frac{\left(\sqrt{\frac{k}{k_p}}-1\right)^2}{2\sigma^2}}} \tag{2.7}$$

Med hjälpfunktionerna:

$$k_p = \left[7\pi \frac{\sqrt{g}}{U_{10}} \left(\frac{U_{10}^2}{gF}\right)^{0.33}\right]^2 \tag{2.8}$$

$$\sigma = \begin{cases} 0.07 & \text{för } k \leq k_p \\ 0.09 & \text{för } k > k_p \end{cases} \tag{2.9}$$

Där $k$ är vågnumret, $k_p$ vågnumret vid toppen, $U_{10}$ vindhastigheten 10 meter över havet, $\sigma$ spektrumets breddparameter, $\gamma = 3.3$ är toppförbättringsfaktorn, $F$ vindriktningsdistans vilket är avståndet vinden har blåst undan hinder, och $\alpha = 0.0076$ är Phillips och Kitaigorodskiis längdjämviktsparameter.




**Figur 2.3:** JONSWAP-spektrumet för olika vindhastigheter. Gjord med en vindriktningsdistans på $F = 25\,\text{km}$.

### 2.2.3 Elfouhaily

Elfouhaily kombinerar modeller för lågfrekventa vågor, högre vågnummer, och högfrekventa vågor, lägre vågnummer, för att få en bättre modell. I figur 2.4 återfinns Elfouhailys spektrum där det observeras att spektrumets topp förskjuts mot lägre vågnummer när vindhastigheten ökar samt får ett högre toppvärde. Vidare visar figuren även spektrumets sekundära gravitations-kappilärtopp som uppstår vid högre vågnummer, $k \in [10^2, 10^3]$. Vågspektrumet definieras enligt (Elfouhaily m. fl., 1997):

$$S(k) = \frac{1}{k^3}(B_l + B_h) \tag{2.10}$$

Där $B_l$ innehåller information om lägre vågnummer och definieras först enligt:

$$B_l = \frac{\alpha_p c_p}{2c} F_p \tag{2.11}$$

Där $c$ är vågfashastigheten, $c_p$ vågfashastigheten vid toppen. Sidoeffekt-funktionen, $F_p$, och den generaliserade Phillips-Kitaigorodskii längdjämviktsparameter för långa vågor, $\alpha_p$, definieras enligt:

$$\alpha_p = 6 \cdot 10^{-3}\sqrt{\Omega} \tag{2.12}$$

$$F_p = L_{pm} J_p \mathrm{exp}\Big( - \frac{\Omega}{\sqrt{10}}\sqrt{\frac{k}{k_p} - 1}\Big) \tag{2.13}$$

Exponenten i ekvation 2.13 fungerar som filter för att ta bort energinivåer lägre än $10k_p$. Där $k$ motsvarar vågnummer, $k_p$ vågnummer vid toppen, $L_{pm}$ och $J_p$ är toppförbättringsfunktionerna för både Pierson-Moskowitz och JONSWAPs vågmodeller.

$$L_{pm} = \mathrm{exp}\Big( - \frac{5}{4}\Big(\frac{k_p}{k}\Big)^2\Big) \tag{2.14}$$

$$J_p = \gamma^{\Gamma} \tag{2.15}$$

Basen och exponenten för $J_p$ fås av:

$$\gamma = \begin{cases} 1.7 & 0.84 < \Omega_c < 1 \\ 1.7 + 6 \log \Omega_c & 1 < \Omega_c < 5 \end{cases} \tag{2.16}$$

$$\Gamma = \mathrm{exp}\Big( - \frac{\Big(\sqrt{\frac{k}{k_p}} - 1\Big)^2}{0.0128(1 + 4\Omega_c^{-3})^2}\Big) \tag{2.17}$$

$$\tag{2.18}$$

Där $\Omega_c$ är den inversa vågåldern:

$$\Omega_c = 0.84 \tanh((X/X_0)^{0.4})^{-0.75} \tag{2.19}$$

Där $X_0$ är satt till $2.2 \cdot 10^4$ och dimensionslösa $X = \frac{g}{U_{10}^2} F$, där $F$ är vindriktningsdistans.

$B_h$ är den del av Elfouhailys modell som beskriver vågens karaktär vid högre vågnummer och definieras enligt:

$$B_h = \frac{1}{2}\alpha_m \frac{c_m}{c} F_m \tag{2.20}$$

där

$$F_m = L_{pm} \mathrm{exp}\Big( - \frac{1}{4}\Big[\frac{k}{k_m} - 1\Big]^2\Big) \tag{2.21}$$

$$c_m = \sqrt{2g/k_m} = 0.23 \text{ m/s} \tag{2.22}$$

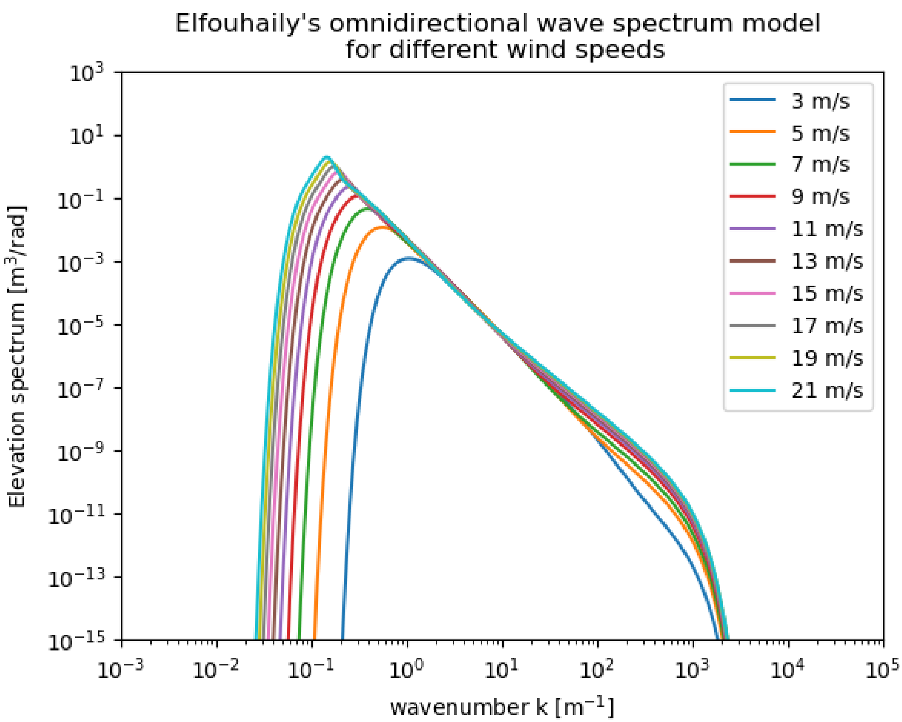
$$\alpha_m = 10^{-2} \cdot \begin{cases} 1 + \ln(u^*/c_m) & u^* < c_m \\ 1 + 3\ln(u^*/c_m) & u^* > c_m \end{cases} \tag{2.23}$$

där

$$u^* = \sqrt{C_{d10N}} U_{10} \tag{2.24}$$

$$C_{d10N} = 10^{-3}(0.08 + 0.065 \cdot U_{10}) \tag{2.25}$$

Där $F_m$ är sidoeffekt funktionen för korta vågor, $\alpha_p$ är Phillips-Kitaigorodskiis generaliserade längdjämviktsparameter för korta vågor, $c$ är vågfashastigheten, $c_m$ är minimala vågfashastigheten associerad med gravitationskappilärtoppen, $C_{d10N}$ är neutrala stabilitets luftmotståndskoefficienten 10 meter över havsytan, $U$ vindhastigheten 10 meter över havsytan och $u^*$ är friktionshastigheten.




**Figur 2.4:** Elfouhaily-spektrumet för olika vindhastigheter. Vindriktningsdistansen är satt till, $F = 25\,\text{km}$.

## 2.3 Spridningsfunktioner

Spridningsfunktioner beskriver teoretisk hur vågen utbreder sig i alla riktningar över en havsyta, givet vindriktning. För simuleringarna kommer spridningsfunktionerna; simpel cosinus funktion, Longuet-Higgins och Elfouhaily att användas samt definieras nedan.

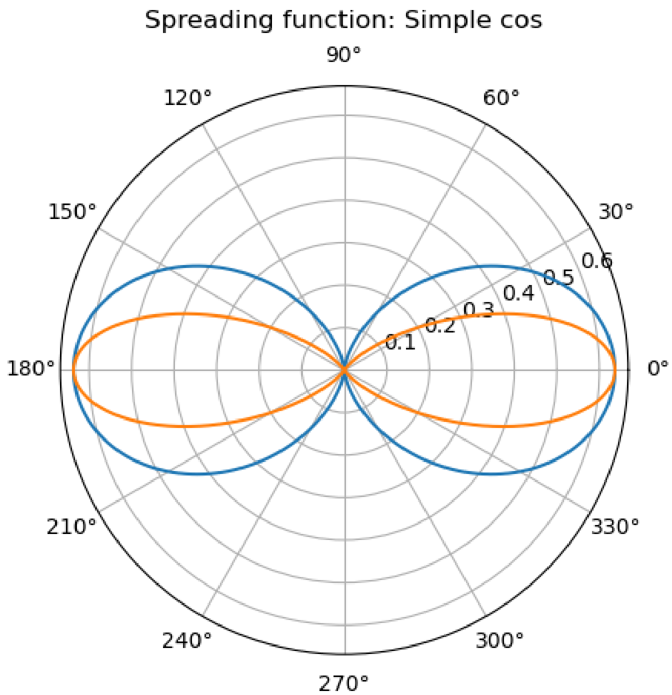
### 2.3.1 Simpel cosinusfunktion

Detta är precis som namnet antyder en av de enklare spridningsfunktioner både till beräkning samt att inga vågparametrar tas till hänsyn. Men definieras enligt (Rizaev

m. fl., 2021):

$$D^{\text{simpel}}(\varphi) = \frac{2}{\pi}\cos(\varphi)^n \tag{2.26}$$

Där funktionen skrivs och används med exponenten $n$ som ett jämnt, positivt heltal, där högre $n$ ger en snabbare dämpning på vågens spridning, vilket i polära figuren 2.5 ger en smalare lob.



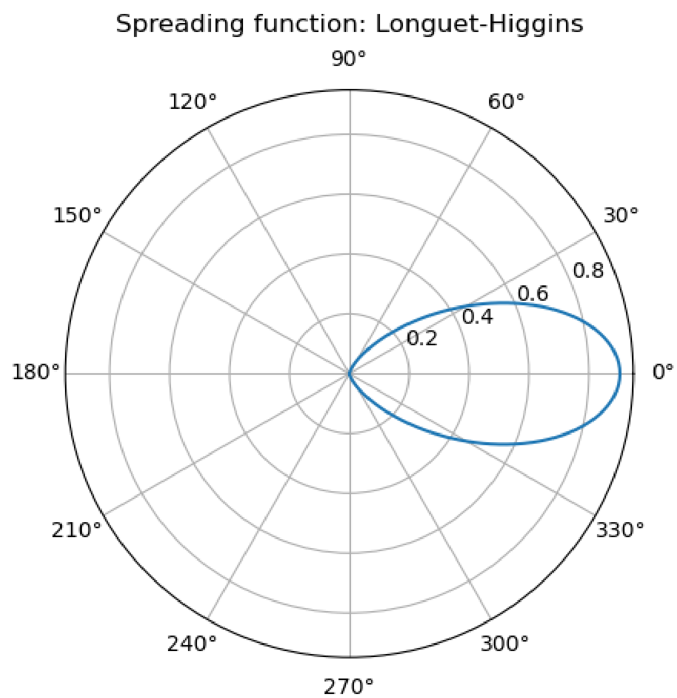

**Figur 2.5:** I bilden återfinns en simpel spridningsfunktion. I den polära grafen går att urskilja vågens teoretiska spridning för olika vinklar utifrån vindriktningen. Den röda smalare grafen är gjord med exponenten $n = 8$ medan den blåa bredare grafen har exponenten $n = 2$.

### 2.3.2 Longuet-Higgins

Longuet-Higgins spridningsfunktion defineras som (Rizaev m. fl., 2021):

$$D^{\text{LH}}(\varphi) = \frac{\Gamma(L+1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(L+0.5)}\cos(\varphi/2)^{2s} \tag{2.27}$$

Där $\Gamma(L)$ är gammafunktionen och $L$ en parameter som kontrollerar funktionens bredd. Likt simpel cosinus funktion är Longuet-Higgins en enkel funktion som beskriver en vågs spridningsegenskaper relativt oexakt. Dock är karaktärsdragen av en verklig spridning mer lik Longuet-Higgins än simpel cosinus. I figur 2.6 noteras att Longuet-Higgins är en enkelsidig spridningsfunktion, då den inte simultant definieras för vinklar i både positiv och negativ riktning. Likheten med simpel cosinus, figur 2.5, är tydlig med skillnaden att Longuet-Higgins är enkelsidig och har bredare utbredning för vid toppen.




**Figur 2.6:** I bilden återfinns Longuet-Higgings spridningsfunktion. I den polära grafen går att urskilja vågens spridning för olika vinklar utifrån vindriktningen. Denna graf är gjord med parametern $L$ satt till 20.

### 2.3.3 Elfouhaily

Elfouhailys spridningsfunktion tar hänsyn till förhållandet mellan amplitud i medvindsriktad våg och vindens korsande våg, *(eng. upwind-crosswind)*. För att få en bild på hur spridningen ser ut se figur 2.7 och härleds (Elfouhaily m. fl., 1997):

$$D^{\mathrm{E}}(k,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\Big(1 + \Delta(k)\cos(2\varphi)\Big) \tag{2.28}$$

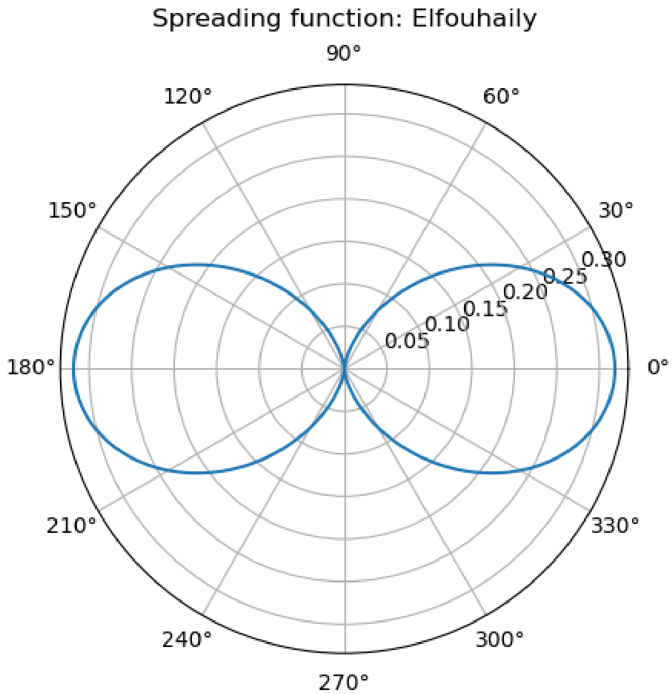
Där förhållandet mellan medvindsriktad våg och vindens korsande våg, $\Delta(k)$, beskrivs som:

$$\Delta(k) = \tanh\left[a_0 + a_p(c/c_p)^{2.5} + a_m(c_m/c)^{2.5}\right] \tag{2.29}$$

Med de experimentellt bestämda parametrarna:

$$a_0 = \frac{\ln(2)}{4}, \quad a_p = 4, \quad a_m = 0.13\frac{u^*}{c_m}$$

och där $u^*$ är friktionshastigheten, $c$ är vågfashastighet, $c_p$ är vågfashastigheten för spektrumtoppen och $c_m$ är minimala vågfashastigheten associerad med gravitationskappilär toppen.




**Figur 2.7:** I bilden återfinns Elfouhailys spridningsfunktion. I den polära grafen går att urskilja vågens spridning för olika vinklar utifrån vindriktningen. Denna graf är gjord med konstanta vågnumret, $k = 0.1$ [rad/m].

## 2.4 SAR-avbildning

SAR skapar en syntetisk antenn som följer satellitens bana genom rymden genom att kompensera för dopplershift för signaler som skickats ut vid en tidigare punkt. Detta genom att lagra och kombinera de tidigare signalerna med efterföljande signaler. Detta innebär att upplösningen längs med färdriktningen, azimutriktning, är oberoende av avstånd till målet och den utstrålade strålens frekvens. Den av satelliten uppfattade intensiteten från en punkt $\vec{x}$ ges av (Rizaev m. fl., 2021):

$$I(\vec{x}) = \int\int \sigma(\vec{x}')(\rho_{aN}(\vec{x}'))^{-1}\exp - \left\{\pi^2(x - x' - \frac{R}{V}u_r(\vec{x}'))^2/\rho_{aN}(\vec{x}')^2\right\}\delta(y - y')dy'dx' \tag{2.30}$$

Där $u_r(\vec{x'})$ är vågens radiella hastighet och $\delta(y-y')$ är Diracs deltafunktion. Kvoten $R/V$ är som tidigare nämnt samma sak som $\beta$, där $R$ och $V$ motsvarar satellitens avstånd till mätpunkt och satellitens fart. Formlerna för radartvärsnittet, $\sigma(\vec{x})$, i punkten $\vec{x}$, upplösningen i azimutriktningen, $\rho_{aN}$, och $u_r$, medelhastigheten av havsytan i satellitens flygriktning listas nedan:

$$\sigma(\vec{x}) = \sigma_0 \Big[1 + 2Re\Big\{ \int_{\vec{k}} \hat{Z}(\vec{k}) T_k(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{k} \Big\}\Big] \tag{2.31}$$

I detta projekt är $\sigma_0$ en konstant, $\hat{Z}$ det fouriertransformerade vågfältet och $T_k$ är transformationsfunktionen enligt ekvation (2.40) (Brünning, Alpers & Hasselmann, 1990).

$$\rho_{aN} = N\rho_a \Big[1 + \frac{\pi^2 T^4}{N^2 \lambda_0^2} a_r(\vec{x'})^2 + \frac{(\Delta x)^2}{N^2 \rho_a^2}\Big]^{1/2} \tag{2.32}$$

Där $N$ är antalet inkoherenta mätningar i azimutriktningen, $T$ integrationstiden, $\lambda_0$ våglängden för den elektromagnetiska strålningen som strålas ut från satelliten, $\rho_a = \frac{\lambda_0 R}{2VT}$ och $\Delta x = \sqrt{2\pi}\frac{R}{V} u_r$ där $u_r$ är havsvågornas orbitala hastighet och ges av

$$u_r = 2\mathrm{Re}\Big\{ \sum_k T_k^v \hat{Z}_k e^{i(kx)} \Big\} \tag{2.33}$$

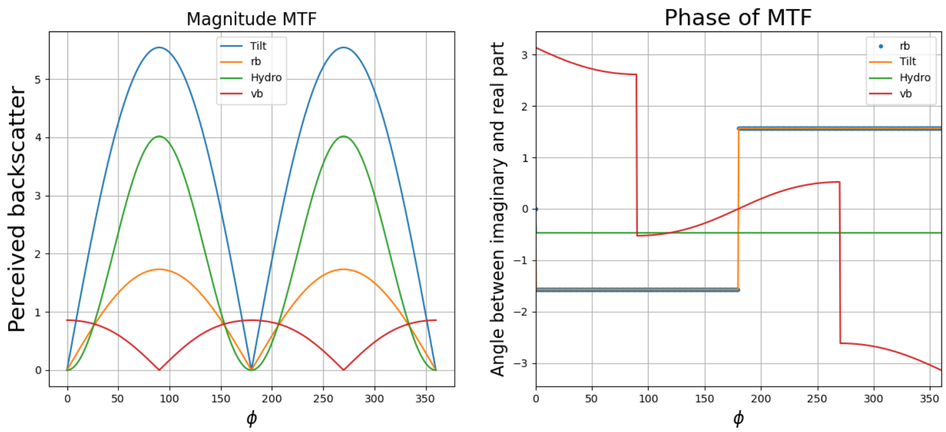
där $\hat{Z}_k$ är det Fouriertransformerade våghöjdsfältet och $T_k^v$ är den orbitala hastighetstransformationsfunktionen som ges av

$$T_k^v = \omega\Big( \frac{k_y}{|k|} \sin\theta + i\cos\theta \Big) \tag{2.34}$$

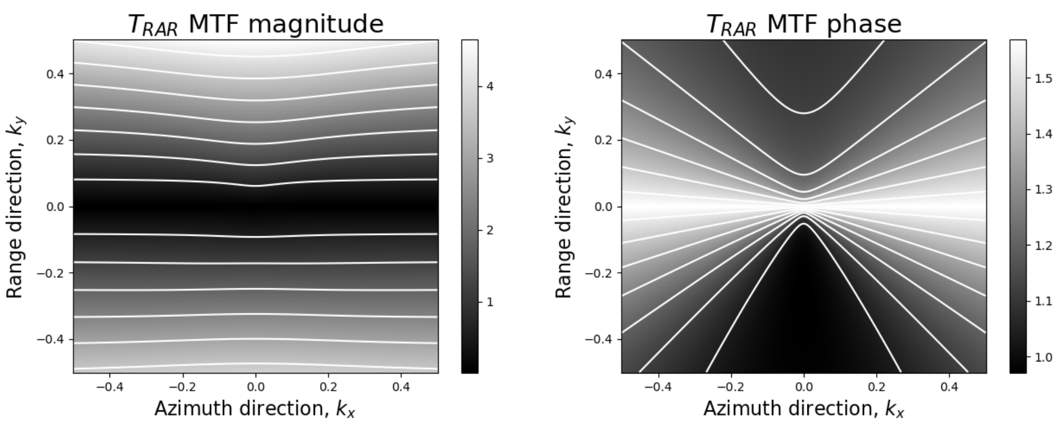
där $\theta$ är infallsvinkeln mellan den elektromagnetiska strålningen från satelliten och havsytan, $\omega$ är havsvågornas frekvens som ges av 2.1.

## 2.5 Transformationsfunktion

När elektromagnetisk strålning reflekteras på havets vågor kan den reflekterade strålningsintensiteten moduleras utifrån fyra olika bidragande faktorer. Samlingsnamnet för faktorerna är modulations transform funktioner (förkortat MTF) men de fyra MTF kallas för “vinkling”, “hydrodynamisk”, “range bunching” och “velocity bunching” som förkortas tilt, hydro, rb och vb. Den vänstra grafen i figur 2.8 visar MTFs magnitud beroende av vindriktning där modulationerna tilt, hydro och rb har maximalt bidrag då vindriktningen är parallell med siktlinjeriktningen, men inget bidrag då satelliten färdas längs med vindriktningen. Vidare syns även att vb är den enda transformmodulationen som har ett bidrag då azimut- och vindriktnignen är parallella. I den högra delen av figur 2.8 syns hur fasen av de fyra MTF förhåller sig till vindriktningen. I figur 2.9 visualiseras hur magnituden och fasen av $T^{\mathrm{RAR}}$, summeringen av transform modulationerna tilt, hydro och rb, förhåller sig till vågnumrets två komponenter, $k_x$ och $k_y$.




**Figur 2.8:** I bilden återfinns de komplexa modulationstermernas magnitud och fas, $T_k^{\text{tilt}}$,$T_k^{\text{hydro}}$,$T_k^{\text{rb}}$ och $T_k^{\text{vb}}$, som funktion av vinkeln mellan vindriktning, $\phi_{\text{vind}}$ och azimutriktning $\phi = 0°$. Där modulationerna tilt, hydro och range bunching har sitt maximum i siktlinjeriktning och minimum i azimutriktning medan velocity bunching sitt maximum i azimutriktning och minimum i siktlinjeriktning. MTF är en förkorting av modulations transform funktion.




**Figur 2.9:** I bilden återfinns det två 2-dimensionella färgdiagram som beskriver fasen och magnituden av $T^{RAR}$ för en infallsvinkel på $\theta = 30°$ för de olika riktningarna av $\phi$. MTF är en förkorting av modulations transform funktion.

Den första modulationstypen, "vinkling", beskriver hur reflektionsvinkeln på vattenytan varierar med den dominanta vågens fas i en punkt, se överst i figur 2.10. (Li, 2010)

$$T_k^{\text{tilt}} = -\frac{4ik_y \cot(\theta)}{1 + \sin(\theta)^2} \tag{2.35}$$

Den andra modulationstypen, "hydrodynamisk", beskriver hur fler småvågor kommer bildas på framsidan av vågen vilket då resulterar i en högre bakåtspridning i framsidan av vågen, se mitten av bilden 2.10

$$T_k^{\text{hydro}} = 4.5\omega \frac{k_y^2(\omega - i\mu)}{|k|(\omega^2 + \mu^2)} \tag{2.36}$$

Den tredje modulationstypen, “range bunching”, beskriver hur den utsända strålningen inte träffar hela vattnets yta jämnfördelat utan träffar framsidan av vågen med en högre intensitet och baksidan med en lägre. Detta resulterar i att framsidan av vågen kommer få en högre intensitet i bilden. (Li, 2010)

$$T_k^{\text{rb}} = -ik_y \cot(\theta) \tag{2.37}$$

Velocity bunching är den sista modulationstypen som påverkar bakåtspridningens intensitet. Detta bidrag relateras till dopplereffekten som skapas av havsytans cirkulära rörelser och har störst påverkan i azimutriktningen. Denna effekt visas längst ner i bilden 2.10 vid orbital. (Li, 2010)

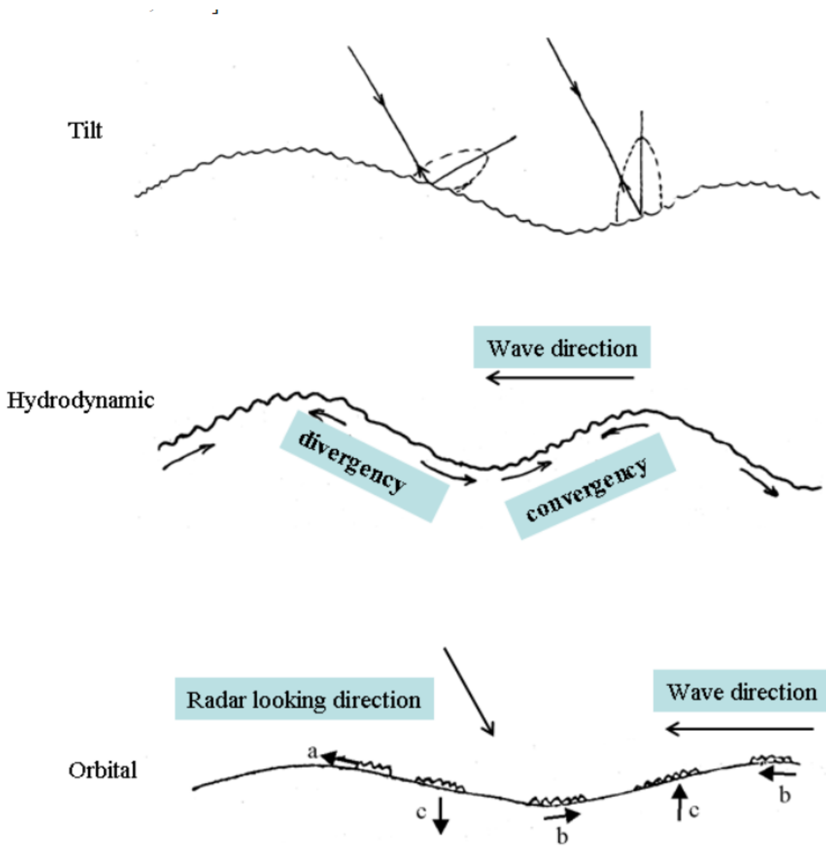
$$T_k^{\text{vb}} = i\frac{R}{V} k_x \omega(\sin(\theta)\cos(\phi) + i\cos(\theta)) \tag{2.38}$$

Där $R$ är avståndet mellan satelliten och ytan, $V$ satellitens fart, $\omega$ vinkelfrekvensen och $\phi$ vinkeln mellan vindriktning och azimutriktningen.
Summan av de tre första bidragande transformtermerna bildar RAR transformen medan summeringen av alla fyra modulationstyper skapar den slutgiltiga SAR transformen, respektive definierad som:

$$T_k^{\text{RAR}} = T_k^{\text{tilt}} + T_k^{\text{hydro}} + T_k^{\text{rb}} \tag{2.39}$$

$$T_k^{\text{SAR}} = T_k^{\text{RAR}} + T_k^{\text{vb}} \tag{2.40}$$

Där $T_k^{vb}$ är transform modulen för velocity bunching, $\theta$ infallsvinkeln från satelliten till havsytan,$k_y$ motsvarar vågnummer i siktlinjeriktningen och $k_x$ i azimutriktning, satellitens färdriktning.




**Figur 2.10:** Illustration av bakåtspridningen skapad av de tre modulationerna vinkling, hydrodynamisk och orbital. Bilden är tagen från Li (2010).

# 3
# Metod

Metoden är uppdelad i de fyra simuleringar som skapats, två fält och två spektra. Samtlig implementation skedde i programmeringsspråket `python` och paktetet `numpy` används för i stort sett samtliga numeriska beräkningar. För datavisualisering används paketet `matplotlib`. Även paketet `scipy` används för konstanter och vissa beräkningar.

## 3.1 Implementering av vågspektrum

Vågspektrum beskriver fysikaliska egenskaper av en utbredande våg. I detta projekt används vågspektra som en analysmetod för att studera hur en våg skulle moduleras med en uppsättning parametrar. Matematiskt definieras ett spektrum som den yttreprodukten av ett omnidirektionellt spektum och en spridningsfunktion.
Det omnidirektionella vågspektrumet ges av

$$\Psi(k, \varphi) = S(k)D(k, \varphi) \tag{3.1}$$

I implementationen genereras $k$ och $\varphi$ som $N \times 1$-vektorer. De två vektorerna $S(k)$ och $D(k, \varphi)$ matrismultipliceras sedan med varandra och resultatet är en $N \times N$-matris som representerar det direktionella vågspektrumet.
För att kontrollera om dessa spridningsfunktioner och omnidirektionella spektra implementerades korrekt, jämfördes både omnidirektionella spektra och spridningsfunktioner med resultaten i Rizaev m. fl. (2021).

## 3.2 Simulering av vågfält

För att simulera havsytan konstrueras först ett rutnät av $N \times N$ punkter som representerar $x$- och $y$-koordinater i ett havsområde med storleken $L_x \times L_y$. I koden representeras rutnätet av en matris. Höjden av havsytan i varje punkt beräknas sedan enligt (Rizaev m. fl., 2021):

$$Z(x, y, t) = \sum_i \sum_j A_{ij} \cos\Big[k_i\Big(x\cos(\varphi_j + \phi_{\text{vind}}) + y\sin(\varphi_j + \phi_{\text{vind}})\Big) - \omega_i t + \epsilon_{ij}\Big] \tag{3.2}$$

Där $\epsilon$ är en uniformt fördelad slumpad fas i intervallet $[0, 2\pi]$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$, $\phi_{\text{vind}}$ är vindriktningen och amplituden, $A_{ij}$ ges av:

$$A_{ij} = \sqrt{2S(k_i)D(k_i, \varphi_j)\Delta k_i \Delta\varphi_j} \tag{3.3}$$

De vågspektra och spridningsfunktioner som användes i projektet listas i sektion 2.2 och 2.3. Våghöjden kan även erhållas genom:

$$Z(x, y, t) = -\frac{1}{g}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\bigg|_{z=0} \tag{3.4}$$

Där hastighetspotentialen, $\Phi$, för havsytan är:

$$\Phi(x, y, z, t) = g\sum_i\sum_j \frac{A_{ij}}{\omega_i}e^{k_i z}\sin\Big[k_i(x\cos(\varphi_j+\phi_{\text{vind}})+y\sin(\varphi_j+\phi_{\text{vind}}))-\omega_i t+\epsilon_{ij}\Big] \tag{3.5}$$

## 3.3 Simulering av SAR-bild

Första steget i simulering av en SAR-avbildning är att simulera dels havsytan, men även accelerationsfältet för havsytan. Samma rutnät som användes för att simulera havsytan används även för att konstruera SAR-bilden. Intensiteten i varje punkt av rutnätet erhålls enligt ekvation 2.30. I implementeringen beräknas först de separata delarna i ekvationen som matriser, sedan integreras hela uttrycket längs $x$-axeln för varje punkt i matrisen. För samtliga fouriertransformer används paketet `numpy.fft`. Termerna $u_r$ och $a_r$ beräknas enligt Rizaev m. fl. (2021)

$$a_r(\vec{x}) = a_z\cos(\theta) - \sin(\theta)\Big(a_x\sin(\phi_{\text{vind}}) + a_y\cos(\phi_{\text{vind}})\Big) \tag{3.6}$$

$$u_r = u_z\cos(\theta) - \sin(\theta)\Big(u_x\sin(\phi_{\text{vind}}) + u_y\cos(\phi_{\text{vind}})\Big) \tag{3.7}$$

Där $\theta$ är infallsvinkeln för SAR-satelliten och $\phi_{\text{vind}}$ är vinkeln mellan azimutriktningen och riktningen som vinden blåser i.
Både hastighetsfälten och accelerationsfälten för havsytan kan fås från hastighetspotentialen i ekvation 3.5 enligt

$$u_x = \frac{\partial\Phi(x, y, 0)}{\partial x} = g\sum_i\sum_j \frac{A_{ij}}{\omega_i}k_i\cos\Big(k_i(x\cos(\varphi_j) + y\sin(\varphi_j)) + \epsilon_{ij}\Big)\cos(\varphi_j) \tag{3.8}$$

$$u_y = \frac{\partial\Phi(x, y, 0)}{\partial y} = g\sum_i\sum_j \frac{A_{ij}}{\omega_i}k_i\cos\Big(k_i(x\cos(\varphi_j) + y\sin(\varphi_j)) + \epsilon_{ij}\Big)\sin(\varphi_j) \tag{3.9}$$

$$u_z = \frac{\partial\Phi(x, y, 0)}{\partial x} = g\sum_i\sum_j \frac{A_{ij}}{\omega_i}k_i\sin\Big(k_i(x\cos(\varphi_j) + y\sin(\varphi_j)) + \epsilon_{ij}\Big) \tag{3.10}$$

$$a_x = \frac{\partial^2 \Phi(x,y,0)}{\partial t \partial x} = g \sum_i \sum_j A_{ij} k_i \sin\Big(k_i(x\cos(\varphi_j) + y\sin(\varphi_j)) + \epsilon_{i,j}\Big)\cos(\varphi_j) \quad (3.11)$$

$$a_y = \frac{\partial^2 \Phi(x,y,0)}{\partial t \partial y} = g \sum_i \sum_j A_{ij} k_i \sin\Big(k_i(x\cos(\varphi_j) + y\sin(\varphi_j)) + \epsilon_{i,j}\Big)\sin(\varphi_j) \quad (3.12)$$

$$a_z = \frac{\partial^2 \Phi(x,y,0)}{\partial t \partial z} = -g \sum_i \sum_j A_{ij} k_i \cos\Big(k_i(x\cos(\varphi_j) + y\sin(\varphi_j)) + \epsilon_{i,j}\Big) \quad (3.13)$$

För att beräkna dessa derivator togs analytiska uttryck fram från ekvation 3.5 och implementerades.
SAR-bildsspektrumet fås sedan av att fouriertransformera den simulerade SAR-bilden. För analys av det simulerade SAR-spektrumet utfördes Monte Carlo-simuleringar genom att simulera SAR-avbildning för $N_{\mathrm{MC}}$ havsytor och summerades sedan enligt:

$$I_{\mathrm{SAR}}^{\mathrm{MC}} = \frac{1}{N_{\mathrm{MC}}} \sum_{1}^{N_{\mathrm{MC}}} |I_{\mathrm{SAR}} - \overline{I}_{\mathrm{SAR}}|^2 \quad (3.14)$$

Där $\overline{I}_{\mathrm{SAR}}$ är medelvärdet av intensiteten i den simulerade SAR-bilden.
För att lättare se att SAR-avbildningen blir korrekt simulerades först SAR-bilden av ett monokromatiskt vågfält, det vill säga ett vågfält med endast en våg.

## 3.4 SAR-avbildningens spektrum

På samma sätt som våg spektumet beskriver ett vågfält ska ett SAR-bilds spektrum beskriva SAR bilden av vågfältet. Detta görs med två olika metoder, antingen med hjälp av fouriertransform byta SAR bildens domän från rum- till vågnummerdomän eller genom att beräkna hur ett vågspektrum skulle tolkas av SAR. Genom att relatera intensiteten som SAR observerar till vågparametrar kan en transferfunktion ställas upp, ekvation 2.40. Dessa transform moduler implementerades med vektorer av $\phi$ och $k$, se figur 2.9 för MTFs beroende av dessa vektorer. Sedan togs ett vågspektrum som multiplicerades med dessa in enligt:

$$P_k = 0.5(\left|T_k^{SAR}\right|^2 F_k + \left|T_{-k}^{SAR}\right|^2 F_{-k}) \quad (3.15)$$

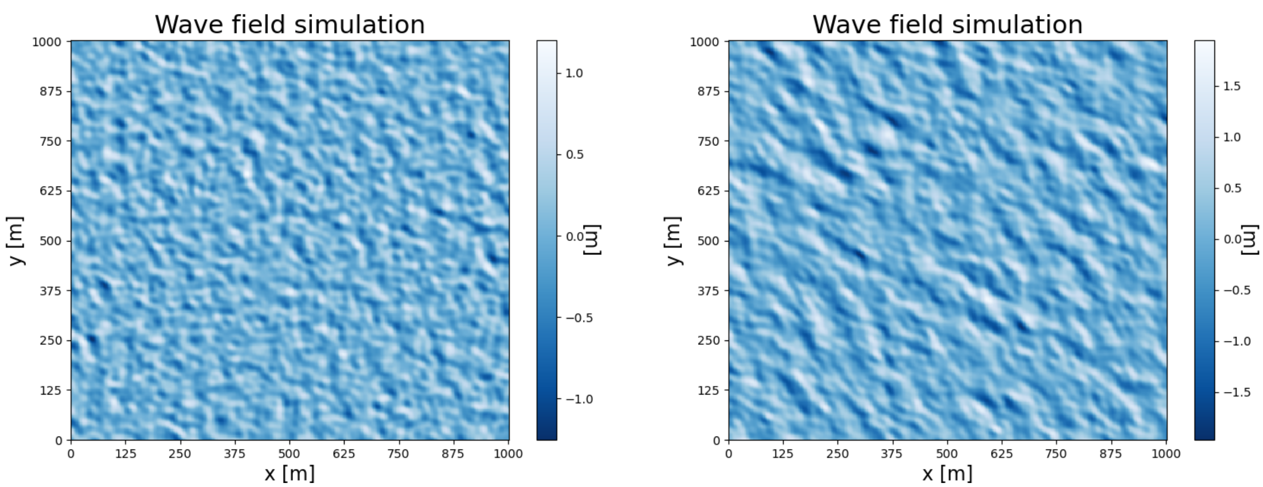
I detta projekt simulerades transformerade vågspektrum endast enligt den linjära modellen, ekvation (3.15), men det finns även definierade kvasi- och ickelinjära transform modeller som inte har implementerats i koden på grund av tidsbrist.

# 4

# Resultat & Diskussion

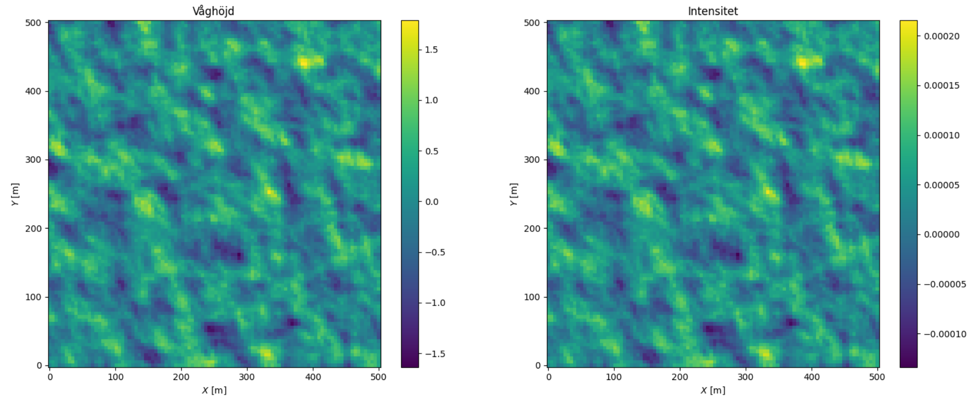
## 4.1 Simulerade fält

Det har simulerats två olika fält, vågfält och SAR-bildsfältet. Vågfälten i figur 4.1 är gjort med olika omnidirektionella vågspektra och spridningsfunktioner och resterande vågparametrar är samma. Det vänstra vågfältet är simulerat med Elfouhailys direktionella vågspektrum medan det högra vågfältet är simulerat med PM som omnidirektionellt spektrum och simpel cosinus funktion som spridningsfunktion. Den största variationen mellan vågfälten är att det högra fältet har en tydligare vågriktning, högre direktivitet. Detta är en följd av att simpel cosinus funktionen har en smalare spridningsfunktion, vilket resulterar i en lägre interferens mellan vågorna.




**Figur 4.1:** I bilden återfinns två simulerade vågfält uppifrån. Simuleringen är gjord med vindriktningen satt på 45°, vindhastighet på 10 [m/s]. Den vänstra har använt Elfouhailys spridningsfunktion samt omnidirektionella vågspektrum medan den högra använde simpel cosinus funktion som spridningsfunktion och PM:s omnidirektionella vågspektrum. Mörkare nyans av blått motsvarar en djup dal och ljusare blått motsvarar en hög topp, se indikatorn till höger.

SAR-bildsfältet efterliknar starkt det simulerade våghöjdsfältet. I figur 4.2 syns både den simulerade SAR-bilden och det simulerade våghöjdsfältet som användes för att




**Figur 4.2:** Simulerad havsyta (vänster). Bilden är skapad med Elfouhailys direktionella spektrum, $\phi_{\text{vind}} = 45°$, $U = 10\,\text{m/s}$. SAR-avbildningen är simulerad med parametrarna $\lambda_0 = 0.235\,\text{m}$, $\theta = 30°$, $\beta = 128\,\text{s}$.

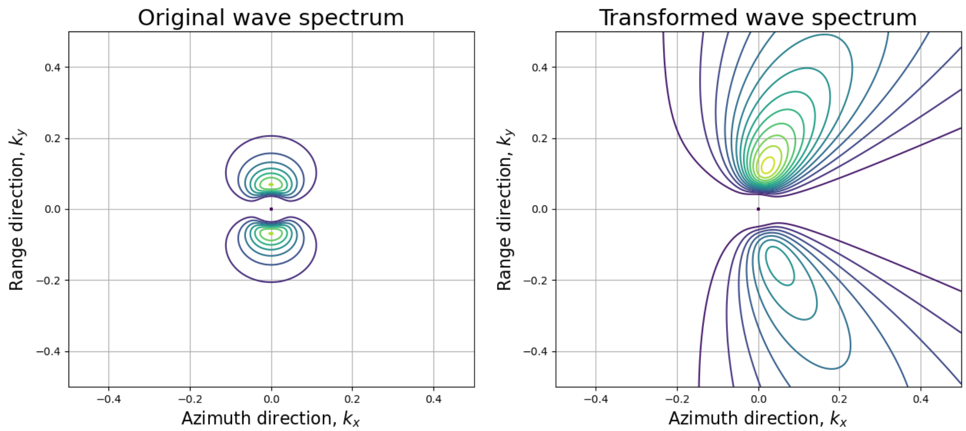
simulera SAR-avbildningen.

## 4.2 Transformmodeller av olika direktionella vågspektra

För att visa de olika modellerna kommer resterande parametrar att hållas konstanta. Dessa parametrar välj utefter motiveringarna:

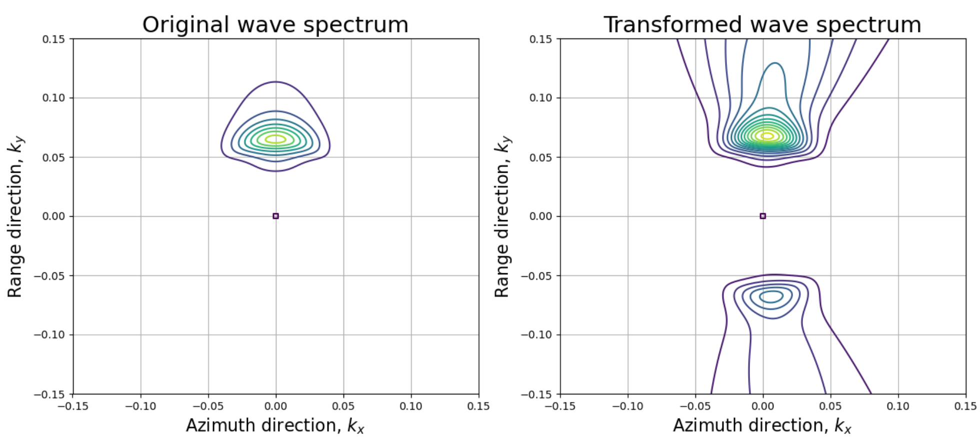
- $k_{max}$ - Väljs sådant att vågmodellens maximum befinner sig centrerat i intervallet $[0, k_{max}]$.
- Vindhastigheten, $U_{10}$, kommer sättas till $10[m/s]$, vilket är något högre än medelvind till havs, $6.5[m/s]$, men ger en tydligare storlek på spektrumet.
- Vindriktningsdistansen, $F$, är konstant satt till 200km för att presentera vågspektrum av fullt utvecklade hav.
- Vindriktningen, $\phi_{\text{vind}}$, kommer ändras för att visa transform modellernas effekt i azimut- och siktlinjeriktning, $\phi_{\text{vind}} = 0°$ och $\phi_{\text{vind}} = 90°$ respektive. Men utöver detta hållas på $\phi_{\text{vind}} = 90°$.
- Kvoten $\beta = \frac{R}{V}$ kommer ligga i intervallet $[1, 128]$ [s] och ändras för att visa dess påverkan på transform och SAR-bild. Men hållas på $\beta = 5$ i övrigt.
- Satellitens infallsvinkel, $\theta$, ligger generellt mellan $20° - 50°$, men kommer ansättas till 30°

Först simuleras Pierson-Moskowitz omnidirektionella spektrum med simpel cosinus spridningsfunktion, se figur 4.3. Det går att se hur den transformerade vågspektrumet blir upp skalad jämfört med det originella vågspektrumet samt hur velocity bunching påverkar transformen genom att högre $k_y$ värden förskjuts i $k_x$ riktning, vilket även motsvarar satellitens färdriktning.



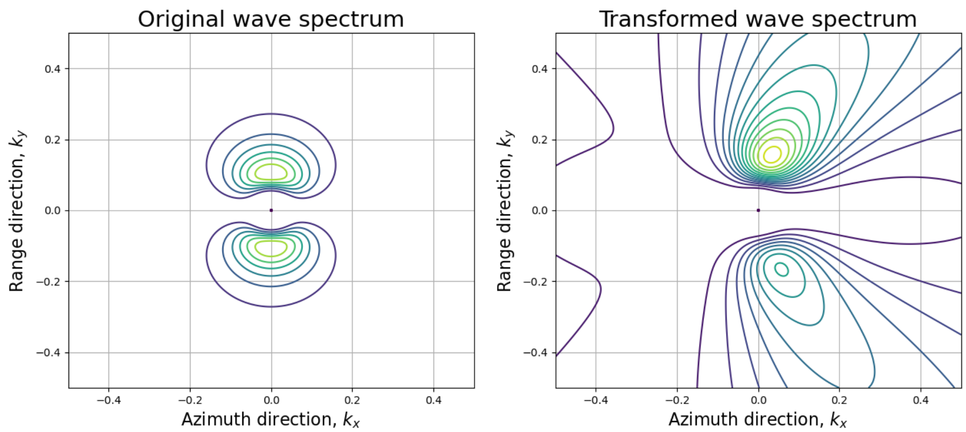

**Figur 4.3:** I bilden återfinns de två olika grafer; vågspektrum och transformen av vågspektrum. Dessa grafer är gjorda med Pierson-Moskowitz omnidirektionella spektrum och simpel cosinus spridningsfunktion. Den våglängd, $\lambda$, som motsvarar högsta elevationen av vågen, givet parametrarna, är $\lambda = 91.518$ [m].

Sedan simulerdes JONSWAP omnidirektionella spektrum med Longuet-Higgins spridningsfunktion, se figur 4.4. Här syns det att spridningen är mer riktad vilket även ger en förändring på transformens riktning, då den inte påverkas lika mycket i färdriktning som transformen av simpel cosinus, se figur 4.3. Transformen har även mer av ett lokaliserat centrum vilket troligen är en konsekvens av att JONSWAPs spektrum har en snävare topp, alltså är det maximala värdet för ett litet intervall av vågnummer, se figur 2.3.




**Figur 4.4:** I bilden återfinns de två olika grafer; vågspektrum och transformen av vågspektrum. Dessa grafer är gjorda med JONSWAP omnidirektionella spektrum och Longuet-Higgins spridningsfunktion. Den våglängd, $\lambda$, som motsvarar högsta elevationen av vågen, givet parametrarna, är $\lambda = 97.059$ [m].

Sist simuleras Elfouhailys direktionella spektrum, se figur 4.5. Där det blir lite vikning på transformens vänstra sida som troligtvis är orsakat av att Elfouhailys spridningsfunktion är väldigt bred.



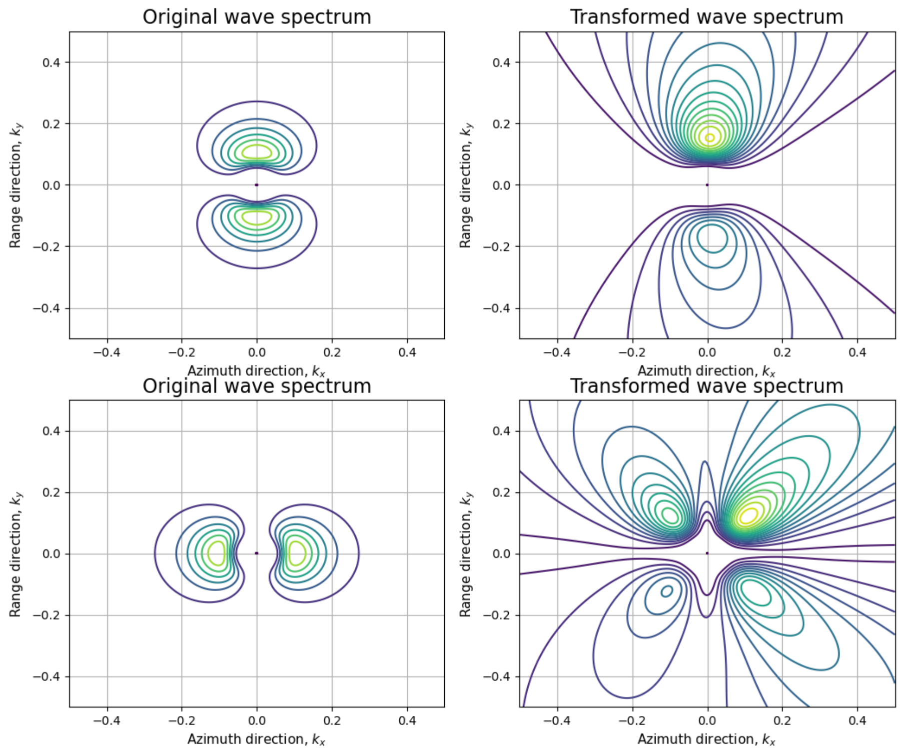

**Figur 4.5:** I bilden återfinns de två olika grafer; vågspektrum och transformen av vågspektrum. Dessa grafer är gjorda med Elfouhailys omnidirektionella spektrum och spridningsfunktion. Den våglängd, $\lambda$, som motsvarar högsta elevationen av vågen, givet parametrarna, är $\lambda = 59.608$ [m].

## 4.3 Parameterars påverkan på transform modellen

Här presenteras resulterade vågspektrum, transformen av vågspektrum, SAR-bild och SAR-bildsspektrum, för olika modeller, vågparametrar och radarparametrar. Om inget annat är givet kommer parametrarna sättas utefter vad som beskrivs i början av delkapitlet 4.2.

### 4.3.1 Vindriktningens påverkan på transform modellen och SAR-avbildningen

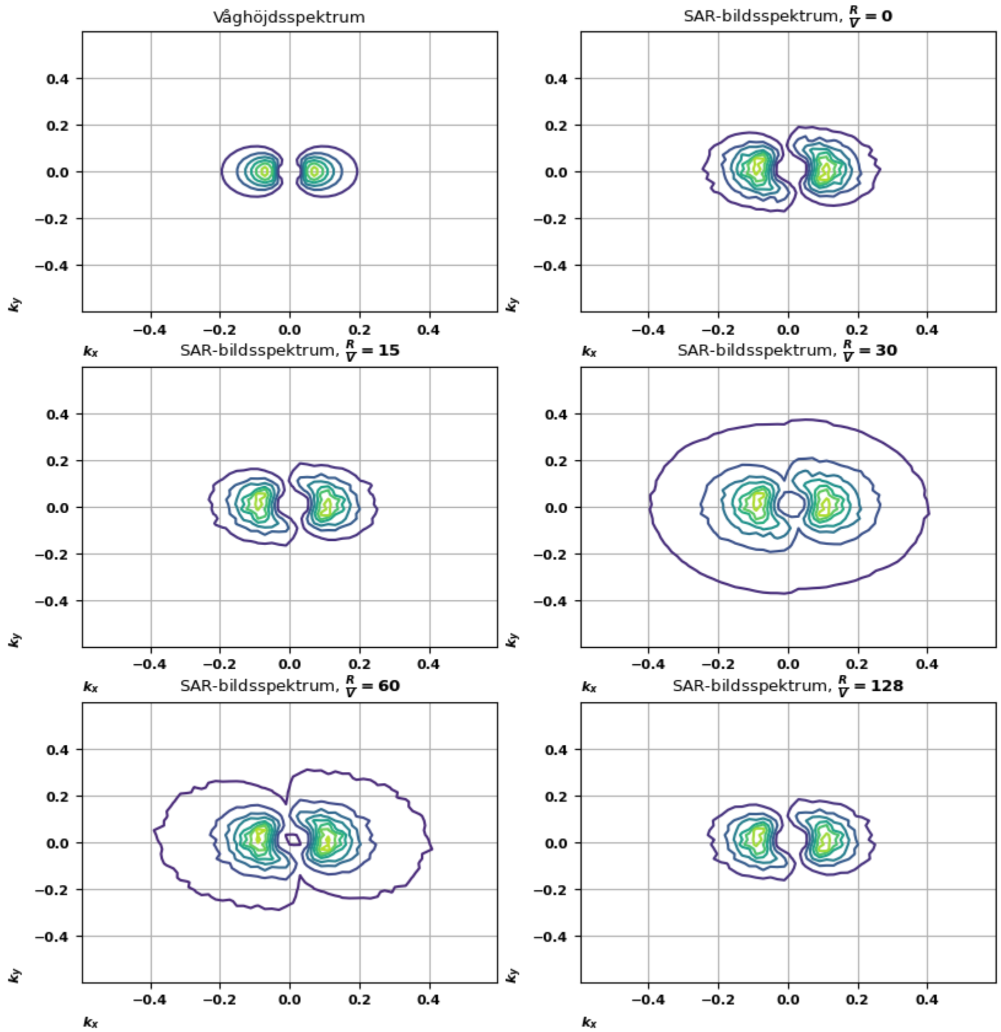
Vindriktningen i förhållande till färdsriktning har två större påverkningar på det transformerade fältet. Den första är velocity bunching som drar ut transformen i $k_x$ riktning, vilket visas efekten av överst i figur 4.6. Den andra är vikning vilket sker på grund av att det finns en diskontinuitet i velocity bunchingens fas vid 90 och 270 grader, se figur 2.8. Denna vikning visas även undertill i figur 4.6.



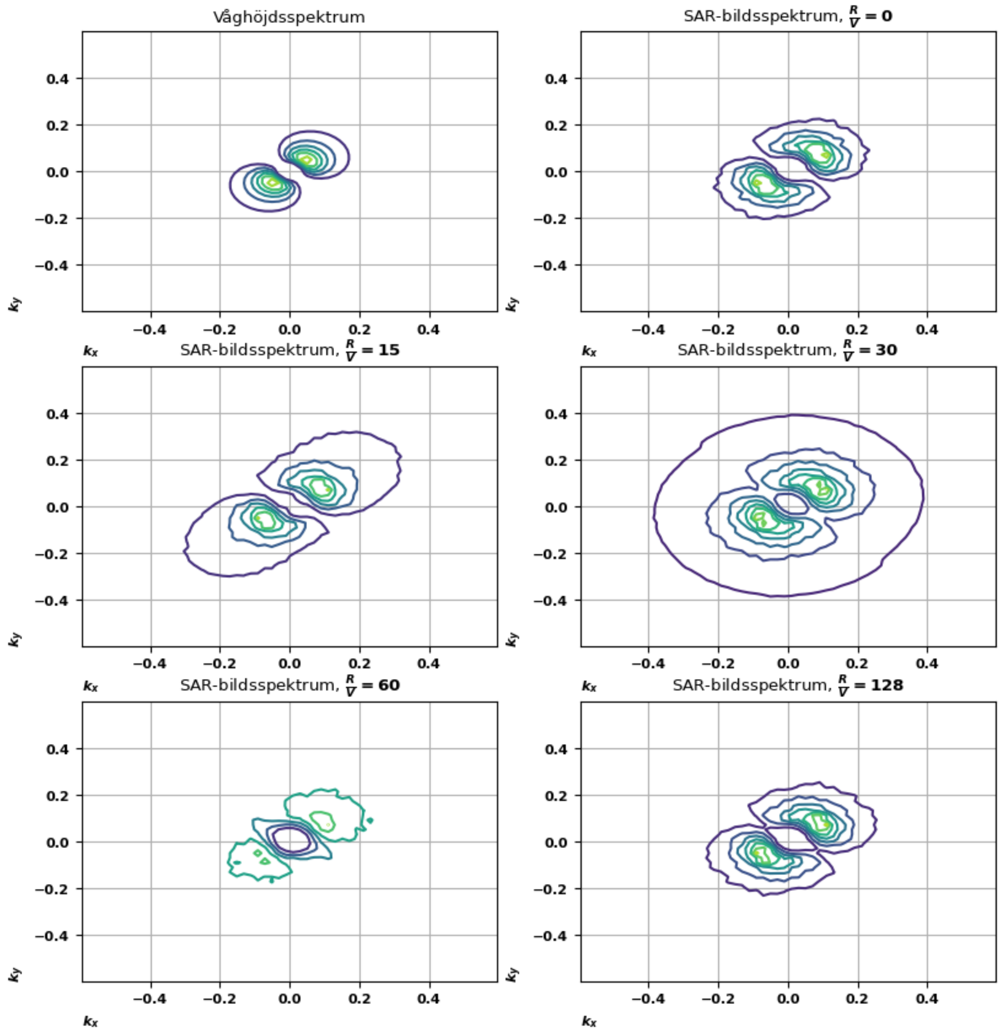

**Figur 4.6:** I figuren återfinns de fyra olika grafer; vågspektrum och transformen av vågspektrum båda för två olika vindriktningar. Dessa grafer är gjorda med Elfouhailys direktionella spektrum. I övre delen av grafen används vindriktningen $\phi_{\text{vind}} = 90°$, medan undre delen har vindriktningen $\phi_{\text{vind}} = 0°$. Båda spektrumen implementeras med $\beta = 1$. Den våglängd, $\lambda$, som motsvarar högsta elevationen av vågen, givet parametrarna, är $\lambda = 59.608$ [m].

### 4.3.2 $\beta$ påverkan på linjära transform modellen och SAR-avbildningen

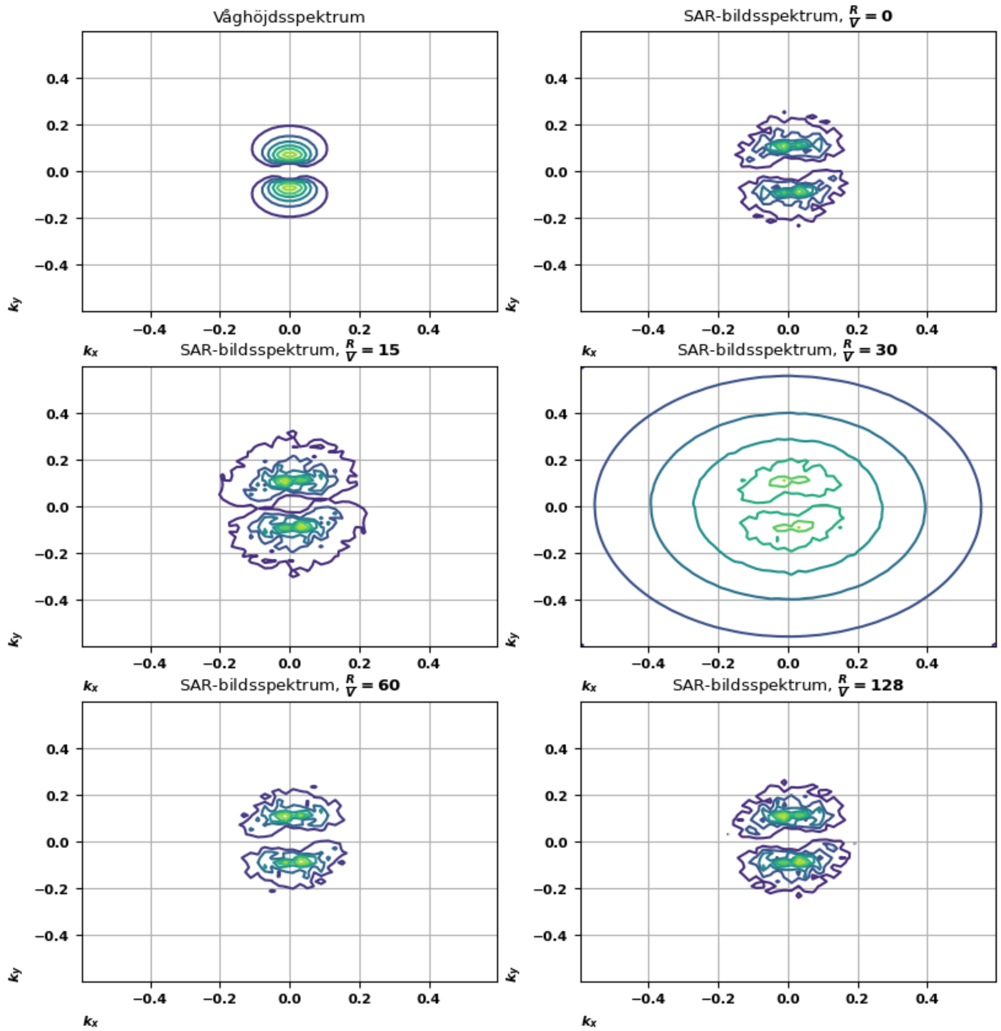
Nedan illustreras påverkan på SAR-bildsspektrumet av parametern $\beta$. SAR-bildsspektrumet har bildats genom att fouriertransformera intensitetsbilden för vindriktningarna $\phi_{\text{vind}} = 0°, 45°, 90°$. Delfiguren längst upp till vänster är det teoretiska direktionella spektrumet som använts vid simuleringarna, i detta fallet Elfouhailys omnidirektionella spektrum med Elfouhailys spridningsfunktion med olika vindriktningar och vindhastigheten $U_{10} = 10\,\text{m/s}$. Resten av delfigurerna är Monte Carlo-simulerade SAR-avbildningar enligt ekvation 3.14 med $N_{\text{simuleringar}} = 10$ som sedan fouriertransformerats. Tydligt är att bilderna stämmer bäst överens med teorin för små $\beta$. Det är också tydligt att $\beta$ har mindre inverkan på avbildningen om vinden blåser i siktlinjeriktningen ($k_y$ i figurerna) och stor inverkan om vinden blåser i azimutriktningen ($k_x$ i figurerna).




**Figur 4.7:** I figuren återfinns Elfouhailys direktionella vågspektrum samt dess SAR-bildsspektra för varierande $\beta$, definierade i respektive subtitel, och vindriktningen $\phi_{\text{vind}} = 0°$.

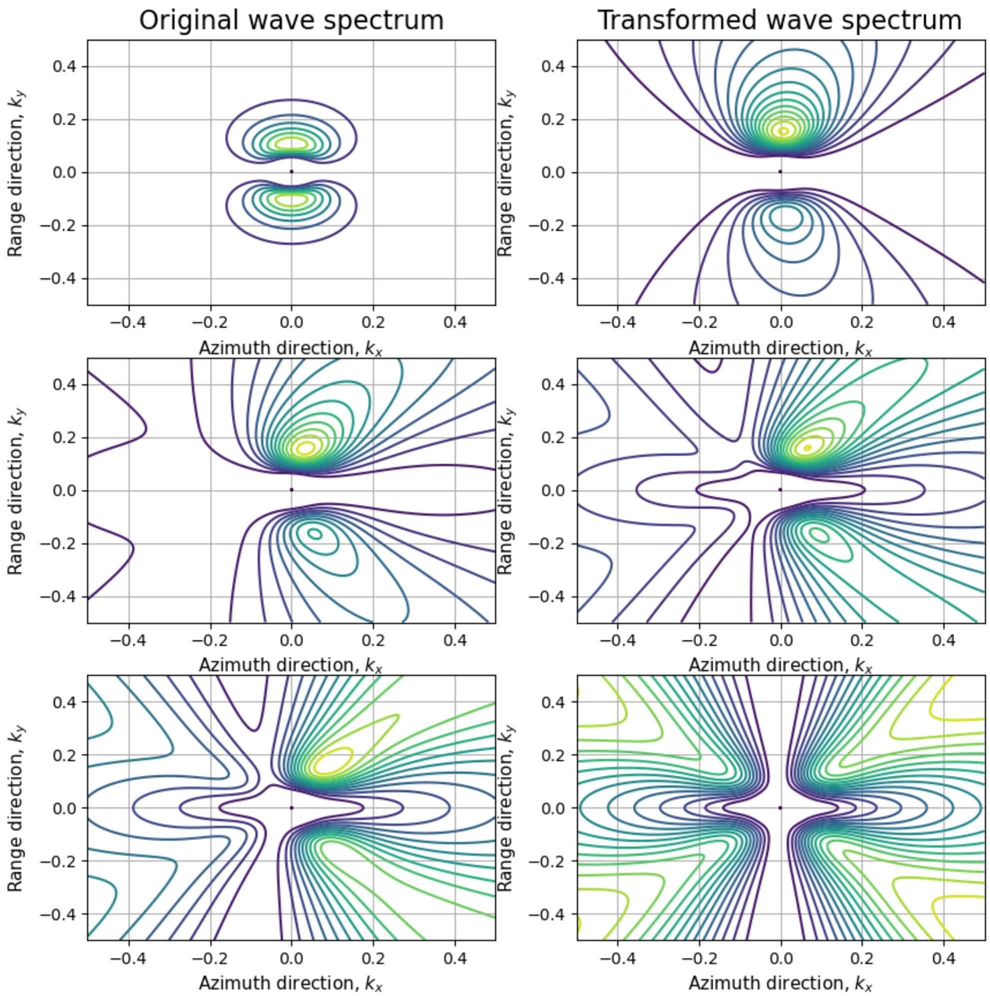



**Figur 4.8:** I figuren återfinns Elfouhailys direktionella vågspektrum samt dess SAR-bildsspektra för varierande $\beta$, definierade i respektive subtitel, och vindriktningen $\phi_{\text{vind}} = 45°$.




**Figur 4.9:** I figuren återfinns Elfouhailys direktionella vågspektrum samt dess SAR-bildsspektra för varierande $\beta$, definierade i respektive subtitel, och vindriktningen $\phi_{\text{vind}} = 90°$.

I figuren 4.10 illustreras $\beta$ parameterns påverkan på linjära transform modellen. Det observeras hur $\beta$ parametern förändrar strukturen av transformerad vågspektrumet, dels med utdragningen i positiv $k_x$ riktning men även med skalning av spektrumet och förskjutning av toppvärdet.




**Figur 4.10:** I figuren återfinns sex olika grafer; ett vågspektrum och fem transformer av vågspektrumet för olika $\beta$ värden. Dessa grafer är gjorda med Elfouhailys direktionella spektrum. I grafen används vindriktningen $\phi_{\text{vind}} = 90°$ och $\beta = 1, 5, 10, 15, 128$ [s]. Den våglängd, $\lambda$, som motsvarar högsta elevationen av vågen, givet parametrarna, är $\lambda = 59.608$ [m].

# 5
# Slutsats

Användningsområdet för den linjära transform modellens är begränsad, dels fungerar modellen dåligt då vindriktningen rör sig längs azimutriktningen men även för högre $\beta$ värden än 5 s, vilket är mycket lägre än vad som förväntas av en satellit. Detta resulterar i att denna modell inte borde användas vid analys av satelliters avbildning.
Den implementerade modellen för SAR-avbildning ger bättre resultat för lägre $\beta$-värden, speciellt då havsvågorna breder ut sig i samma riktning som satelliten färdas.
I övrigt är implementationen giltig och fungerar.

## Framtida arbete

Nästa steg för detta projekt är att implementera följande: kvasi- och/eller ickelinjär transform modell samt en inversionalgoritm för att kunna extrahera radar- och vågparametrar. Vidare kan även analys av andra relevanta parametrar, såsom vindhastighet och infallsvinkel, utföras för att utveckla projektet.

# Litteraturförteckning


Alpers, W. (1983). Monte carlo simulations for studying the relationship between ocean wave and synthetic aperture radar image spectra. *Journal of Geophysical Research*, *88*(C3), 1745. Hämtad från `https://doi.org/10.1029/jc088ic03p01745` doi: 10.1029/jc088ic03p01745

Brünning, C., Alpers, W. & Hasselmann, K. (1990, oktober). Monte-carlo simulation studies of the nonlinear imaging of a two dimensional surface wave field by a synthetic aperture radar. *International Journal of Remote Sensing*, *11*(10), 1695–1727. Hämtad från `https://doi.org/10.1080/01431169008955125` doi: 10.1080/01431169008955125

Elfouhaily, T., Chapron, B., Katsaros, K. & Vandemark, D. (1997, juli). A unified directional spectrum for long and short wind-driven waves. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, *102*(C7), 15781–15796. Hämtad från `https://doi.org/10.1029/97jc00467` doi: 10.1029/97jc00467

Hasselmann, K., Barnett, T., Bouws, E., Carlson, H., Cartwright, D., Enke, K., … Walden, H. (1973, januari). Measurements of wind-wave growth and swell decay during the joint north sea wave project (jonswap). *Ergänzungsheft*, 95. Hämtad från `http://resolver.tudelft.nl/uuid:f204e188-13b9-49d8-a6dc-4fb7c20562fc`

Li, X. (2010). *Ocean surface wave measurements using sar wave mode data* (doktorsavhandling). Hämtad från `https://ediss.sub.uni-hamburg.de/bitstream/ediss/3626/1/XiaomingLi_Dissertation_2010.pdf`

Pierson, W. J. & Moskowitz, L. (1964, december). A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of s. a. kitaigorodskii. *Journal of Geophysical Research*, *69*(24), 5181–5190. Hämtad från `https://doi.org/10.1029/jz069i024p05181` doi: 10.1029/jz069i024p05181

Rizaev, I., Karakus, O., Hogan, J. & Achim, A. (2021, februari). Modeling and SAR imaging of the sea surface: a review of the state-of-the-art with simulations. Hämtad från `https://doi.org/10.31223/x5sp5b` doi: 10.31223/x5sp5b