

Absorption av mörk materia i dielektriska material

Kandidatarbete vid institutionen för fysik
TIFX11-VT24-02

Emma Chan Johan Hermansson
Carl Hoogervorst Isak Syvänen

INSTITUTIONEN FÖR FYSIK

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg 2024
www.chalmers.se

KANDIDATARBETE 2024

**Absorption av mörk materia
i dielektriska material**

**Dark matter absorption
in dielectric materials**

Emma Chan
Johan Hermansson
Carl Hoogervorst
Isak Syvänen



**GÖTEBORGS
UNIVERSITET**



CHALMERS

Institutionen för fysik
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg 2024

Absorption av mörk materia i dielektriska material
EMMA CHAN, JOHAN HERMANSSON, CARL HOOGERVORST & ISAK SYVÄNEN

© EMMA CHAN, JOHAN HERMANSSON, CARL HOOGERVORST & ISAK SYVÄNEN, 2024.

Handledare: Riccardo Catena, Institutionen för Fysik
Examinator: Jan Swensson, Institutionen för Fysik

Examensarbete 2024
Institutionen för Fysik
Chalmers Tekniska Högskola
Göteborgs Universitet
SE-412 96 Göteborg
Telefon +46 31 772 1000

Omslagsbild: Bilden illustrerar ett Feynmandiagram för emissionsprocessen av en mörk foton [1]. De rosa pilarna representerar en SM partikel. i står för partikelns inertialtillståndet och f står för finaltillståndet. Den mörka fotonen framträder efter den effektiva blandningsparametern, κ .

Skriven i L^AT_EX
Göteborg 2024

Absorption av mörk materia i dielektriska material
EMMA CHAN, JOHAN HERMANSSON, CARL HOOGERVORST & ISAK SYVÄNEN
Institutionen för Fysik
Chalmers Tekniska Högskola
Göteborgs Universitet

Sammandrag

Syftet med denna studie var att undersöka absorption av mörk materia i form av mörka fotoner för de åtta materialen Al_2O_3 , GaN, Al, ZnS, GaAs, SiO_2 , Si och Ge. För att göra detta undersöktes absorptionshastigheten Γ samt absorptionshastighetens händelsefrekvens \bar{N} hos de mörka fotonerna. Detta gjordes med numeriska och analytiska metoder. Det centrala för båda analyserna var att Γ och \bar{N} delades upp i en longitudinell del samt en transversell del som undersöktes separat. Den numeriska analysen utfördes med hjälp av Python-paketet *DarkELF* som innehöll färdig data för den dielektriska funktionen $\varepsilon_r(\mathbf{q},\omega)$. Resultaten för Γ presenterades med grafer i massintervallet 1-10 eV och för \bar{N} redovisades respektive materials händelsefrekvens för massan 1 eV i en tabell. Från tabellen kunde slutsatsen dras att Al var mest benägen att absorbera mörka fotoner medan SiO_2 var minst benägen. För den analytiska delen användes Kramers-Kronig relationerna för att härleda ett uttryck för en övre gräns av \bar{N} . För den longitudinella delen presenteras en graf som visar hur materialen förhåller sig till den övre gränsen. Resultatet visar att aluminium är nära att mätta den övre gränsen. Den transversella händelsefrekvensen kunde däremot inte evalueras då uttrycket blev materialberoende.

Abstract

The purpose of this thesis was to study the absorption of dark matter in the form of dark photons for the eight materials Al_2O_3 , GaN, Al, ZnS, GaAs, SiO_2 , Si, and Ge. To do this, the absorption rate Γ and the event rate of the absorption \bar{N} for the dark photons were examined. This was done using both numerical and analytical methods. In order to ease the analysis, both Γ and \bar{N} were split up into a longitudinal part and a transverse part, which in turn was studied separately. The numerical analysis was done through the Python package *DarkELF* which contained data for the dielectric function $\varepsilon_r(\mathbf{q},\omega)$. The results for Γ was presented with graphs for the mass-interval 1-10 eV and for \bar{N} , the event rate of each material were presented in a table for the mass 1 eV. From this table, the conclusion could be drawn that Al was most probable to absorb dark photons, and SiO_2 was the least probable. In the analytical part of the study, the Kramers-Kronig relations were used to derive an upper limit of \bar{N} . For the longitudinal part, a graph was presented showing how the materials compare to the upper limit. The result showed that aluminum was close to saturating the upper limit. However, the transverse event rate could not be evaluated as the expression became material-dependent.

Nyckelord: Mörka fotoner, Kramers-Kronig relation, dielektriska material, dielektriska funktionen, absorptionshastighet av mörka fotoner.

Keywords: Dark photons, Kramers-Kronig relation, dielectric material, dielectric function, absorptionrate of dark photons.

Tillkännagivanden

Under projektets gång har vi fått mycket stöd av vår handledare Riccardo Catena. Vi vill därför tacka honom för det engagemang han visat och hans hjälp igenom hela arbetet. Vi vill även tacka honom för alla råd och den vägledning han gett oss. Utan honom hade detta arbetet inte varit möjligt.

Emma Chan, Johan Hermansson, Carl Hoogervorst, Isak Syvänen, Göteborg, Maj 2024

Innehåll

1	Inledning	1
1.1	Syfte	2
1.2	Avgränsningar	2
2	Bakomliggande Teori	3
2.1	Vektornotation	3
2.2	Naturliga enheter	4
2.3	Speciell relativitet	4
3	Bakgrund	5
3.1	Absorption av mörk materia	5
3.2	Absorptionshastighetens händelsefrekvens	6
3.3	Dielektriska funktionen	7
3.4	Kramers-Kronig-relationerna	8
3.5	Summaregler	9
3.6	DarkELF	10
4	Metoder	11
4.1	Numeriska metoder	11
4.1.1	Antaganden som gjordes för beräkningarna	12
4.1.2	Tillvägagångssätt för att evaluera $\Gamma_{T,L}$ och \bar{N}	12
4.1.3	Dimensionsanalys för händelsefrekvensen, \bar{N}	13
4.2	Analytiska metoder	13
4.2.1	Övre gräns för den longitudinella händelsefrekvensen, \bar{N}_L	13
4.2.2	Övre gräns för den transversella händelsefrekvensen, \bar{N}_T	14
4.3	Felanalys för \bar{N} och \bar{N}_L^{opt}	15
5	Resultat	17
5.1	Dielektriska funktionen för Al_2O_3 och SiO_2	17
5.2	Graferna Γ_L och Γ_T för respektive material	18
5.3	Beräkningarna av \bar{N}_L , \bar{N}_T och \bar{N}	21
5.4	Förhållandet mellan materialets händelsefrekvens och den teoretiska övre gränsen	22
6	Diskussion	25
6.1	Graferna för Γ_L och Γ_T	25
6.2	Händelsefrekvensen, \bar{N}	26

6.3	Den teoretiska övre gränsen	27
7	Slutsats och framtidsutsikter	29
	Referenser	31
A	Appendix A	I
A.1	Dielektriska funktionen för olika material	I
A.2	ELF för alla olika material	III
B	Appendix B	V
C	Appendix C	VII
C.1	Kod för alla funktioner	VII
C.2	Kod för all plottning	XII
C.3	Kod för att interpolera $d\Phi/d\omega$	XIII
C.4	Kod för att beräkna \bar{N} för alla ämnen samt plottning av resultatet för den analytiska delen	XIV
C.5	Kod för alla felanalys funktioner	XV
C.6	Kod för att beräkna felanalys	XVI
D	Appendix D	XIX

1

Inledning

Allt som utgör både massa och volym kallas för materia inom modern fysik, och i vardagligt tal refererar materia ofta till allt som är uppbyggt av atomer [2]. Till exempel är alla galaxer, stjärnor och nebulosor som kan observeras i universum gjorda av materia. Mängden materia i hela universum skulle därmed kunna betraktas som nästan oändlig. Trots denna stora mängd materia, antas materia utgöra endast fyra procent av det universum som kan observeras [2]. Utöver detta antas universum utgöras av cirka 73 procent mörk energi och 23 procent mörk materia [2]. Den mörka materia antas generellt vara en oidentifierad massa som varken avger, reflekterar eller absorberar vanlig elektromagnetisk strålning, vilket gör den omöjlig att observera på vanligt sätt [3]. Det finns däremot flera tydliga bevis för den mörka materians existens [4]. Bland annat har det observerats att hastighetspridningen mellan galaxer inom galaxhopar är betydligt högre än vad den borde vara om bara den vanliga materia fanns [5]. Dessutom har det observerats att stjärnor i ytterkanter av galaxer roterar med snabbare hastighet än förväntat samtidigt som väldigt lite ljus kan ses från dessa platser, vilket indikerar att det finns stora mängder osynlig massa närvarande [4].

Potentiella kandidater för mörk materia har föreslagits av forskare, och den mest studerade hypotetiska kandidatpartikeln kallas WIMPs (weakly interacting massive particles) [4]. En annan hypotetisk kandidatpartikel som ofta studeras kallas för axion [5] och denna kandidatpartikel föreslås existera för att kunna förklara en av symmetrierna inom stark växelverkan mellan nukleoner [4]. Ytterligare en hypotetisk kandidatpartikel som ofta förekommer i utvidgningar av standardmodellen inom partikelfysik kallas för mörk foton (dark photon) [6]. Om de mörka fotonerna existerar, är det däremot ännu inte bestämt ifall de utgör den mörka materia eller ifall de fungerar som medlare då den synliga och mörka materia interagerar med varandra [7].

Metoderna att försöka upptäcka dessa partiklar ser lite olika ut för varje typ av kandidatpartikel. För att försöka detektera WIMPs låter man dem kollidera med vanliga atomkärnor i syfte att försöka observera energiöverföringar under kollisionen [8]. För de hypotetiska axionerna försöker man omvandla dessa partiklar i ett starkt och statiskt magnetfält till en signal bestående av fotoner med identiska våglängder inom mikrovågsområdet [5]. En av metoderna som används till att försöka upptäcka mörka fotoner genomförs via absorption där de mörka fotonerna exciterar elektroner hos detektormaterialets atomer [9], vilket kan liknas med den fotoelektriska effekten.

För att studera absorption av mörk materia har flera experiment utförts hos olika material. I detta arbete undersöks åtta material: aluminiumdioxid (Al_2O_3), galliumnitrid (GaN), aluminium (Al), zinksulfid (ZnS), galliumarsenid (GaAs), kiseldioxid (SiO_2), kisel (Si)

och germanium (Ge). Dessa material har en dielektrisk respons vilket är betydelsefullt för beräkningen av absorptionen av mörka fotoner [10].

1.1 Syfte

Huvudsyftet med detta arbete är att studera absorption av mörk materia i form av mörka fotoner. Studien kommer att undersöka åtta material med dielektrisk respons. Detta görs både numeriskt och analytiskt. Den numeriska analysen syftar till att undersöka vilket material som är mest benäget till att absorbera mörka fotoner. För att systematiskt undersöka absorptionshastigheten numeriskt används det nedladdningsbara Python-paketet DarkELF. Den analytiska delen syftar till att studera ifall absorptionshastigheten har en övre gräns samt hur materialen förhåller sig till denna gräns. För att ta fram uttrycket för den övre gränsen används Kramers-Kronig-relationerna.

1.2 Avgränsningar

I denna studie hanteras den dielektriska responsen som också kallas för dielektriska funktionen. I detta arbete kommer en approximation av denna funktion att göras där beroendet av riktningen för rörelsemängden försummas. Detta är motiverat för isotropiska material¹ och är ett standard antagande inom detta område [11, ek. 24]. En ytterligare avgränsning är att ursprunget av den mörka materia som behandlas inte kommer att undersökas då det skulle krävas en mer komplicerad analys [12]. Slutligen har den numeriska undersökningen begränsats till endast åtta material. Detta är för att DarkELF inte har data till den dielektriska funktionen för fler material och därmed är studien begränsad till dessa åtta.

¹För isotropiska material är egenskaperna detsamma i alla riktningar.

2

Bakomliggande Teori

För att förstå de notationer och antaganden som presenteras i denna rapport ger följande tre avsnitt en sammanfattning på den relevanta teorin. Först introduceras 4-vektorer, vilken notation som används för dessa och hur de multipliceras med varandra (Avsnitt 2.1). Därefter följer en förklaring på hur de naturliga enheterna används samt hur det går att använda dimensionsanalys för att skriva om storheter i andra enheter (Avsnitt 2.2). Till slut presenteras en kort text om speciell relativitet där det redogörs kring vad mass-skal-relationen är (Sektion 2.3).

2.1 Vektornotation

Inom relativistisk fysik används 4-vektorer vilket är en vektor med fyra komponenter. En sådan vektor skrivs med grekiska index som x^μ ($\mu = 0,1,2,3$) och för en rumtidsvektor är $x^0 = ct$ tidskomponenten [13, ss. 525-527]. Rumskomponenterna ges av x^1, x^2 och x^3 och kan istället skrivas som en 3-vektor. Till skillnad från en 4-vektor skrivs en 3-vektor med latinska index som x^j där $j = 1,2,3$, alternativt kan en 3-vektor skrivas i fetstil som \mathbf{x} . En 4-vektor kan då skrivas som $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$ [14, ss. 26-27].

En vektor x^μ kallas kontravariant medan vektorn x_μ kallas kovariant [13, s. 526]. För att höja och sänka index införs Minkowski metriken

$$\begin{cases} \eta_{00} = -\eta_{11} = -\eta_{22} = -\eta_{33} = 1 \\ \eta_{\mu\nu} = 0, \text{ om } \mu \neq \nu \end{cases}$$

och utifrån denna kan den kovarianta vektorn beskrivas utifrån den kontravarianta som

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} x^\nu \equiv \eta_{\mu\nu} x^\nu,$$

där vi introducerat Einsteins summationskonvention, vilket innebär att två upprepade index, ett nere och ett uppe summeras över som

$$x^\mu x_\mu = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu$$

[14, ss. 26-27]. Fortsättningsvis, genom Minkowskimetriken kan skalärprodukten¹ mellan två godtyckliga 4-vektorer $A^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ och $B^\mu = (b^0, b^1, b^2, b^3)$ skrivas som

$$A \cdot B = A^\mu B_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = a^0 b^0 - (a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3),$$

¹Denna skalärprodukt brukar även kallas Lorentzprodukt.

vilket är invariant under Lorentztransformation [14, ss. 26-27]. Genom detta kan Lorentzkvadraten definieras som

$$x^2 := x^\mu x_\mu.$$

2.2 Naturliga enheter

De naturliga enheterna inom partikel- och atomfysik definieras via

$$c, \hbar, m_e, \epsilon_0,$$

där c är ljusets hastighet i vakuum, \hbar är Plancks reducerade konstant, m_e är elektronens vilomassa och ϵ_0 är permittiviteten i vakuum [15]. Vid beräkningar används därför $c = \hbar = m_e = \epsilon_0 = 1$. Användningen av naturliga enheter kan förenkla många beräkningar och notationer. Ett exempel är vid dimensionsanalys. En dimensionsanalys på ljusets hastighet, c , ger dimensionerna $[L][T^{-1}]$ [15]. Detta är lika med 1 vilket betyder att hastighet i naturliga enheter är dimensionslös samt att dimensionerna $[L] = [T]$. På samma sätt går det att visa att rörelsemängd och massa ska ha enheten energi från mass-skals-relationen (Ekvation (2.1) som presenteras i nästa avsnitt, 2.3).

Detta resonemang kan appliceras på flera storheter och det går att göra omskrivningar för att uttrycka olika storheter i termer av andra enheter. I denna rapport kommer fokus ligga på enheten energi. När $c = \hbar = 1$ kan alla andra storheter skrivas i termer av energi [16] och i detta fallet i eV. Exempelvis kan en sträcka skrivas $[L] = [E^{-1}]$ och då även $[T] = [E^{-1}]$ där E står för enheten energi [16]. En sträcka kan därför skrivas som $m = \frac{1}{1.973 \cdot 10^{-7}} \text{ eV}^{-1}$ och en tid som $s = \frac{1}{6.58 \cdot 10^{-16}} \text{ eV}^{-1}$ [16].

2.3 Speciell relativitet

I den här sektionen kommer naturliga enheter användas, och en partikels 4-rörelsemängd kan då skrivas som $p^\mu = (E, \mathbf{p})$, där $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ är den vanliga rörelsemängden i tre dimensioner [13, ss. 535-537]. Här ges energin för en partikel av $E = \gamma m$, där γ är Lorentzfaktorn $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ och för en partikel i vila reduceras detta till $E = m$. Eftersom Lorentzkvadraten (se Avsnitt 2.1) inte beror på valet av inertialsystem är den densamma oavsett vilket inertialsystem som väljs. Detta leder till *mass-skals-relationen* [13, ss. 535-537]

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2, \tag{2.1}$$

vilket är användbart då den relaterar energin, massan och rörelsemängden för en partikel.

3

Bakgrund

I kommande kapitel redogörs hur absorption av mörk materia observeras, vilka ekvationer som är av betydelse och hur DarkELF verktyget fungerar. Först förklaras det hur den mörka fotonen ursprungligen introducerades samt hur absorptionshastigheten kan beräknas (Avsnitt 3.1). Därefter beskrivs det hur absorptionshastigheten kan relateras till en händelsefrekvens samt hur denna händelsefrekvens kan beräknas (Avsnitt 3.2). För att kunna beräkna absorptionshastigheten kräver det teori om den dielektriska responsen, också kallat den dielektriska funktionen. Detta beskrivs i Avsnitt 3.3. Följaktligen presenteras teorin som är relevant för den analytiska studien i Avsnitt 3.4 och Avsnitt 3.5. Slutligen introduceras DarkELF-verktyget och dess metoder (Avsnitt 3.6).

3.1 Absorption av mörk materia

Det är svårt att beräkna absorptionen av något som är oidentifierat och det kommer därför antas att absorption av mörk materia är i formen av mörka fotoner. Den mörka fotonen introducerades genom att utveckla Standardmodellen (SM) [9]. Standardmodellen är redan mycket välutvecklad i ett brett spektrum och därför vill man lägga till nya komponenter för att kunna beskriva nya tillstånd. I försöken att framställa nya tillstånd visade det sig att den enklaste och mest naturliga metoden är med hjälp av ett så kallad $U(1)_Y$ -hyperladdningsfält [9]. I denna hyperladdade portalen kan den mörka fotonen observeras när den förs ihop med en SM-foton. Från denna upptäck har olika experiment gjorts och formeln för att beräkna absorptionshastigheten av mörka fotoner i en detektors material kan skrivas som följande, [9]

$$\Gamma_{T,L} = \frac{\kappa_{T,L}^2 \text{Im } \Pi_{T,L}}{\omega}$$

där ω är frekvensen då $\omega > 0$, $\kappa_{T,L}$ är den effektiva blandningen i den transversala (T) och longitudinella (L) riktningen och definieras som, [9]

$$\kappa_{T,L} = \frac{\kappa \cdot m_V^2}{(m_V^2 - \text{Re } \Pi_{T,L})^2 + (\text{Im } \Pi_{T,L})^2}$$

där κ är den kinetiska blandningstermen och m_V är massan av den mörka fotonen. Dessa parametrar väljs i enighet med de rätta omständigheterna. Fortsättningsvis är $\text{Im } \Pi_{T,L}$ definierad via polarisationstensorn i mediumet av detektorn. I isotropiska icke-magnetiska material definieras $\Pi_{T,L}$ som, [9]

$$\begin{cases} \Pi_T = -\omega^2(\epsilon_r - 1) \\ \Pi_L = -q^2(\epsilon_r - 1) \end{cases}$$

där ε_r är den relativa permittiviteten hos materialet och q^μ är den mörka fotonens 4-rörelsemängd (Se Avsnitt 2.3) med $\omega = q^0$. Från detta kan absorptionshastigheten beskrivas som följande, [9]

$$\begin{cases} \Gamma_T = \left(\frac{\kappa^2 m_V^4 \text{Im } \varepsilon_r}{\omega^3 |\Delta \varepsilon_r|^2} \right) \left[1 + \frac{2m_V^2 \omega^2 \text{Re } \Delta \varepsilon_r + m_V^4}{\omega^4 |\Delta \varepsilon_r|^2} \right]^{-1} \\ \Gamma_L = \frac{\kappa^2 m_V^2 \text{Im } \varepsilon_r}{\omega |\varepsilon_r|^2} \end{cases} \quad (3.1)$$

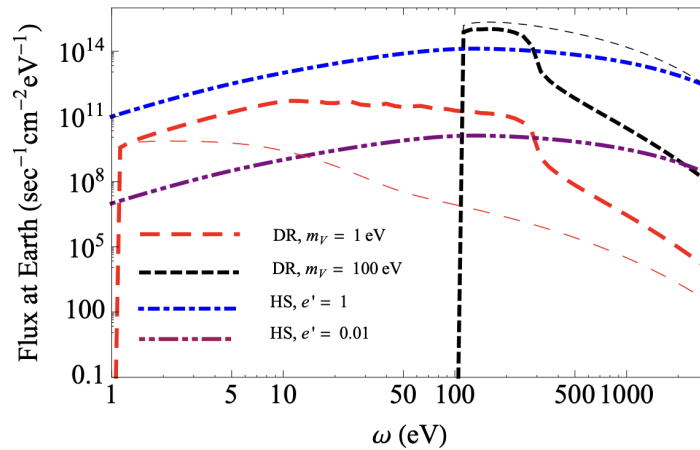
där $\Delta \varepsilon_r = \varepsilon_r - 1$.

3.2 Absorptionshastighetens händelsefrekvens

En händelsefrekvens är ett mått på hur ofta en specifik händelse inträffar under ett experiment [9]. I detta fallet är det hur ofta en mörk foton absorberas av ett specifikt material. I arbetet *Dark Matter Detectors as Dark Photon Helioscopes* [9] tas det fram ett uttryck för händelsefrekvensen som, [9]

$$\bar{N} = VT \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \frac{\omega d\omega}{|\mathbf{q}|} \left(\frac{d\Phi_T}{d\omega} \Gamma_T + \frac{d\Phi_L}{d\omega} \Gamma_L \right) \text{Br} \quad (3.2)$$

där V är den förtroendegivande (fiducial) volymen, det vill säga den volymen av detektorn som med säkerhet ger noggranna resultat. T är den aktiva tiden för experimentet och Br är grenförhållandet mellan fotojoniseringshastigheten och den totala absorptionshastigheten, en kvot på andelen av de mörka fotonerna som faktiskt absorberas av detektormaterialet i kontrast till de som ger upphov till fotojonisering. Om Br är 1 ger alla mörka fotoner som absorberas av detektormaterialet upphov till fotojonisering. $|\mathbf{q}|$ är absolutbeloppet av fotonens 3-rörelsemängd som kan härledas från Ekvation (2.1) där $E = \hbar\omega$ och i naturliga enheter blir $E = \omega$. $|\mathbf{q}|$ kan därför skrivas som $|\mathbf{q}| = \sqrt{\omega^2 - m_V^2}$. Vidare, är $d\Phi_{TL}/d\omega$ det transversala respektive longitudinella flödet på jorden som en funktion av energin (ω) [9], [17]. Flödet kan ses i Figur 3.1 som visar flödet vid jorden för mörka fotoner då $\kappa = 10^{-12}$.



Figur 3.1: Flöden vid jorden som funktioner av energi för mörka fotoner då $\kappa = 10^{-12}$. De röda och svarta tjockstreckade kurvorna visar bidraget från longitudinell mörk strålning (DR) för $m_V = 1$ eV respektive $m_V = 100$ eV. De motsvarande tunna kurvorna visar det transversala bidraget. De blåa och lila prickade streckade kurvorna visar bidraget från Higgs-strålning (HS) [9].

3.3 Dielektriska funktionen

Den dielektriska funktionen $\varepsilon_r(\mathbf{q}, \omega)$ är en komplexvärd funktion och ett kraftfullt redskap i att beskriva ett materials elektriska egenskaper. Dielektrikum är en term som används omväxlande med insulator, med en distinkt skillnad [18, ss. 108–110]. Dielektriska material saknar, liksom insulatorer, fria eller löst bundna elektroner vilket betyder att det inte enkelt uppstår någon elektrisk ström. Detta uttrycks i att insulatorer har låg konduktivitet, medan ett dielektrikum har hög polariserbarhet vilket medför att de polariseras snarare än att börja leda ström [18, ss. 108–110]. Ett materials polariserbarhet kvantifieras av permittiviteten ϵ [19].

I följande stycke används vektornotation, se Avsnitt 2.1, med $i, j \in \{1, 2, 3\}$ där repeterade index summeras över enligt Einsteins summationskonvention. Då ett dielektriskt material utsätts för ett externt elektriskt fält $E_j(\mathbf{r}, t)$, skiftande i rum och tid, ändras alltså dess polarisering snarare än att en ström uppstår [20]. Effekten av denna polarisering beskrivs av den elektriska flödestätheten $D_i(\mathbf{r}, t)$, som återfinns i Maxwells ekvationer [21, ss. 16-20]. Denna relation är icke-lokal i rummet, vilket betyder att D_i inte är beroende av ett specifikt värde för E_j , och kausal i tid, vilket betyder att ändringen i D_i över tid orsakas efter en förändring i E_j [21, ss. 16-20]. Flödestätheten kommer då behöva summeras kontinuerligt över rummet och tiden, med ϵ_{ij} och E_j beroende av tiden [22, s. 61]. Flödestätheten kan därmed uttryckas, [22, s. 61]

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^t \epsilon_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') E_j(\mathbf{r}', t) dt' \quad (3.3)$$

där \mathbf{r}' och t' är små förändringar i rummet respektive tiden. Ekvationen gäller för homogena material i allmänhet, och isotropa material specifikt, med skillnaden att homogena material är lika i alla positioner medan isotropa är lika i alla riktningar. Alltså är alla isotropa material homogena, men inte tvärtom. För ickehomogena material¹ gäller beroendet $\epsilon_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t')$ [22, s. 62]. Fouriertransformen av Ekvation (3.3) ger sambandet, [22, s. 62]

$$D_i(\mathbf{q}, \omega) = \epsilon_{ij}(\mathbf{q}, \omega) E_j(\mathbf{q}, \omega) \quad (3.4)$$

där \mathbf{q} är rörelsemängdsvektorn. Därmed har den elektriska flödestätheten blivit relaterad till det elektriska fältet med hjälp av den dielektriska funktionen i ett linjärt tidsinvariant beroende. Den dielektriska funktionen är då definierad som, [22, s. 63]

$$\varepsilon_r(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\epsilon_{||}(\mathbf{q}, \omega)}{\epsilon_0} \quad (3.5)$$

där $\epsilon_{||}(\mathbf{q}, \omega) = \hat{q}_i \epsilon_{ij} \hat{q}_j$, den longitudinella delen av den dielektriska funktionen, och \hat{q} är enhetsvektorn, ϵ_0 är permittiviteten i vakuum [22, s. 62]. Den dielektriska funktionen är således en kvot på hur väl ett material polariseras. Dielektriska material har alltså ett värde $\varepsilon_r(\mathbf{q} = 0, \omega = 0) > 1$, där ε_r blir den dielektriska konstanten då \mathbf{q} och ω är 0, vilket också understryker faktumet att dielektriska material polariseras snarare än leder ström [20].

Som ovan nämnt är den dielektriska funktionen komplexvärd, och kan således delas upp i följande samband,

$$\varepsilon_r(\mathbf{q}, \omega) = \varepsilon_r'(\mathbf{q}, \omega) + i\varepsilon_r''(\mathbf{q}, \omega) \quad (3.6)$$

¹Vilka inte behandlas i rapporten, men är för läsarens intresse då inga helt isotropa material existerar i naturen. Däremot finns det material som uppvisar tillräckligt hög grad för praktisk användning.

Detta beror återigen på att sambandet mellan E_j och D_i är kausalt i tiden, vilket gör att en fasskillnad uppstår, som kan beskrivas med hjälp av komplexa tal.

Med hjälp av den dielektriska funktionen går det att beräkna energiförlustfunktionen (ELF). Detta är en funktion som beskriver hur en laddad partikel förlorar energi när den färdas genom ett material. Den är relaterad till den dielektriska funktionen via [10]

$$\text{ELF} = \text{Im} \left[\frac{-1}{\varepsilon_r(\mathbf{q}, \omega)} \right] \quad (3.7)$$

vilket ska kunna härledas till spridningshastigheten för mörk materia och elektroninteraktioner.

3.4 Kramers-Kronig-relationerna

För att kunna arbeta vidare med den dielektriska funktionen krävs kraftfullare matematiska verktyg, ett behov fyllt av de så kallade Kramers-Kronig-relationerna. Dessa är matematiska samband som relaterar den imaginära delen av en funktion till den reella, och tvärtom, om någon av dem är kända. Viktigt att anmärka är att delarna inte är beroende av varandra, utan endast relaterade. Relationerna gäller för en komplexvärd, linjär svarsfunktion $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$ som uppfyller kausalitet, diskuterat ovan, och är analytisk i det övre halvplanet. Vanligtvis skrivs relationerna som [22, ss. 588-589]

$$\begin{aligned} \chi'(\omega) &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = \frac{2}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega' \chi''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \\ \chi''(\omega) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \end{aligned} \quad (3.8)$$

där P är Cauchys huvudvärde, en metod för att bestämma värden av vissa integraler med poler i inom integreringsgränsen [23]. Högerleden i Ekvation (3.8) härleds från faktumet att den reella funktionen är jämn, medan den imaginära är udda. $\chi(\omega)$ är däremot en generell funktion som uppfyller kraven för Kramers-Kronig-relationerna, och den härledda dielektriska funktionen i Ekvation (3.5) behöver därmed skrivas om innan relationerna kan användas. Längre fram, kommer denna omskrivning och Kramers-Kronig-relationerna tillåta en härledning av en övre gräns för Γ .

Maxwells ekvationer får inleda härledningen, och under antagandet att fältens variation i Ekvation (3.4) beskrivs av $e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ [21, s. 17] blir relationen mellan det elektriska fältet \mathbf{E} och flödestäthetsfältet \mathbf{D} [21, ss. 16-20]

$$i\epsilon_0 \mathbf{q} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{q}, \omega) = i\mathbf{q} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{q}, \omega) + \rho_{\text{ind}}(\mathbf{q}, \omega).$$

Båda fälten är tredimensionella, eftersom den inducerade laddningsdistributionen² ρ_{ind} är relaterad till \mathbf{D} via $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{ind}}$, vilket medför att \mathbf{D} måste vara en vektor [22, s. 63]. Om inte \mathbf{q} och \mathbf{E} är ortogonala³ och från Ekvation (3.4) fås sambandet [21, s. 18]

$$\varepsilon(\mathbf{q}, \omega) = \epsilon_0 + i \frac{\rho_{\text{ind}}}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{q}, \omega)}. \quad (3.9)$$

²Distributionen av laddning inom materialet som ett resultat av ett yttre elektriskt fält.

³I vilket fall $\mathbf{q} \perp \mathbf{E} \implies \mathbf{q} \cdot \mathbf{E} = 0$, från Maxwells ekvation $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{ind}} = 0$.

I frekvensdomänen (det vill säga, genom fouriertransform) relateras den inducerade strömmen⁴ $\mathbf{I}_{\text{ind}}(\mathbf{q}, \omega)$ till det elektriska fältet $E_j(\mathbf{q}, \omega)$ och konduktivitetstensorn⁵ $\sigma_{ij}(\mathbf{q}, \omega)$ i sambandet [22, s. 107]

$$I_i^{\text{ind}}(\mathbf{q}, \omega) = \sigma_{ij}(\mathbf{q}, \omega) E_j(\mathbf{q}, \omega). \quad (3.10)$$

Då den elektriska laddningen måste vara bevarad i enlighet med konserveringslagarna, relateras \mathbf{I}_{ind} vidare via en kontinuitetsekvation⁶ i $\mathbf{q} \cdot \mathbf{I}_{\text{ind}} - \omega \rho_{\text{ind}} = 0$ [21, s. 18]. Den inducerade laddningsdistributionen är alltså proportionell mot den inducerade strömmen. Insatt i Ekvation (3.10) fås, [21, s. 18]

$$\rho_{\text{ind}} = \frac{\sigma(\mathbf{q}, \omega)}{\omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{q}, \omega). \quad (3.11)$$

Med ρ härlett kan nu Ekvation (3.9) förenklas genom insättning av Ekvation (3.11) [21, s. 18]:

$$\varepsilon_r(\mathbf{q}, \omega) = \varepsilon_0 + i \frac{\sigma_{\parallel}(\mathbf{q}, \omega)}{\omega}.$$

I termer av i rapporten redan etablerade samband kan Ekvation (3.6) nu skrivas om till

$$\varepsilon_r(\mathbf{q}, \omega) = \varepsilon_r'(\mathbf{q}, \omega) + i \varepsilon_r''(\mathbf{q}, \omega) = \varepsilon_0 + i \frac{\sigma_{\parallel}(\mathbf{q}, \omega)}{\omega}.$$

Detta beror på att den reella delen av konduktiviteten σ är relaterad till den imaginära delen av den dielektriska funktionen ε , och vice versa [21, s. 19]. Sambandet är dessutom kausalt och analytiskt i det övre halvplanet (med en pol i $\omega = 0$) och uppfyller därför Kramers-Kronig-relationerna via, [21, ss. 16-20]

$$\begin{aligned} \varepsilon_r'(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega' \varepsilon_r''(\mathbf{q}, \omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' + 1 \\ \varepsilon_r''(\mathbf{q}, \omega) &= -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_r'(\mathbf{q}, \omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \end{aligned}$$

och på så sätt kan den dielektriska funktionen beräknas. Relationerna är väldigt användbara i linjär svarsteori, och då den dielektriska funktionen är en svarsfunktion (på grund av kausalitet i tiden) appliceras de här. De är av ytterligare intresse för ämnet då de på senare tid har använts i litteraturen för att sätta en teoretisk övre gräns på spridningsgraden av mörk materia i dielektriska material [24], vilket kommer diskuteras vidare senare i rapporten.

3.5 Summaregler

För att studera om det finns en övre gräns för absorptionshastigheten av mörka fotoner i Ekvation (3.1) måste det maximala antalet möjliga absorptionshändelser undersökas. Antalet absorptionshändelser ges av Ekvation (3.2), vilket kan delas upp i en longitudinell och transversell del. Givet att mörk materia sprids genom medlare som kopplar till elementarladdningen e , sätter elektromagnetiska summaregler (sum rules) en övre gräns

⁴Elektrisk ström som alstras av ett skiftande magnetfält.

⁵Konduktivitet kvantifierar ett materials möjlighet att leda ström.

⁶En ekvation som i transporten av någon kvantitet beskriver hur denna är bevarad.

på absorptionshastigheten $\Gamma_{T,L}$ [24]. Dessa regler relaterar integralen av en dynamisk kvantitet till en statisk kvantitet [25, s. 212]. I det här fallet kommer den redan kända summaregeln som relaterar ELF (se Ekvation (3.7)) integrerat med avseende på ω till en statisk kvantitet användas. Den härleds från Kramers-Kronig-relationerna, diskuterade i Avsnitt 3.4, från vilka sambandet [22, ss. 594-598]

$$1 - \varepsilon_r^{-1}(\mathbf{q}, 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \text{Im} \left(-\varepsilon_r^{-1}(\mathbf{q}, \omega) \right)$$

fås, och integreras funktionen över ett godtyckligt positivt intervall ges istället olikheten [24]

$$\int \frac{d\omega}{\omega} \text{Im} \left(-\varepsilon_r^{-1}(\mathbf{q}, \omega) \right) \leq \frac{\pi}{2} \left(1 - \varepsilon_r^{-1}(\mathbf{q}, 0) \right). \quad (3.12)$$

Eftersom imaginärdelen av ε_r är en udda funktion av ω gäller det att ε_r^{-1} är reell då $\omega = 0$ [24]. Det gäller även att $\lim_{|\mathbf{q}| \rightarrow 0} \varepsilon_r^{-1}(\mathbf{q}, 0)$ måste vara positiv för att systemet ska vara stabilt, däremot för $|\mathbf{q}| \neq 0$ behöver $\varepsilon_r^{-1}(\mathbf{q}, 0)$ inte vara positivt [26].

3.6 DarkELF

DarkELF är ett Python-paket utvecklat av Knapen m. fl. [10] för att beräkna interaktionshastigheter av mörk materia hos olika material med dielektrisk respons. Ursprungligen beräknades interaktionshastigheterna med hjälp av täthetsfunktionalteori (DFT), men det har senare visats att interaktionshastigheterna kan också beräknas direkt från energiförlustfunktionen, ELF (se Ekvation (3.7)) [10]. ELF har två huvudsakliga fördelar: den tar automatiskt hänsyn till skärmningseffekter och den är en välstuderad funktion, både experimentellt och analytiskt [10]. Detta innebär att väletablerade verktyg som har visat sig ge pålitliga resultat kan användas för att beräkna ELF. DarkELF-verktyget baserar därför beräkningarna av interaktionshastigheter på ELF som i sin tur beräknas genom information från experimentella data. Programmet använder en tabell med uppmätta värden för den reella- samt imaginära-komponenten av den dielektriska funktionen för de olika materialen [10]. Från dessa värden går det att beräkna ELF med olika metoder.

ELF beräkningarna i DarkELF bygger på tre olika metoder, Lindhard, Mermin och GPAW [10]. Lindhard är den enklaste metoden på grund av de antaganden som görs, bland annat tar metoden inte hänsyn till energiförluster, samt att den inte kan användas för absorption av mörk materia då metoden misslyckas med att beskriva halvledare för låga q och höga ω värden. Mermin metoden är en utvidgning av Lindhard metoden då den bland annat tar hänsyn till energiförluster, detta gör att Mermin metoden även kan användas för beräkningar av absorption. GPAW är den mest rigorösa metoden och leder till de mest tillförlitliga resultaten, däremot är den mer beräkningskrävande jämfört med de andra två metoderna.

För absorption av mörka fotoner är absorptionshastigheten proportionell mot ELF när rörelsemängden q går mot noll, detta motsvarar det optiska gränsläget [10]. I programmet genereras ELF antingen genom anpassning till optisk data (med mermin metoden) eller så finns redan data tillgängligt som tar hänsyn till det optiska gränsläget och kan användas direkt. I det optiska gränsläget kan absorptionen även beräknas utifrån fonon- eller elektronregimerna.

4

Metoder

Följande kapitel presenterar den numeriska och analytiska metoden (Avsnitt 4.1 och Avsnitt 4.2). Först introduceras den numeriska metoden där de antaganden som gjordes redogörs samt hur tillvägagångssättet såg ut. Även en kort genomgång kring dimensionsanalysen av händelsefrekvensen redovisas för att kunna motivera hur resultatet ska presenteras. Därefter beskrivs metoden för den analytiska delen där uttrycket för den övre gränsen tas fram. Slutligen redogörs felanalysen (Avsnitt 4.3) för både den numeriska och analytiska resultatet.

4.1 Numeriska metoder

För att kunna studera absorptionshastigheten av de olika materialen samt undersöka vilka material som är mer benägna att absorbera mörk materia är det därför intressant att evaluera absorptionshastigheten, $\Gamma_{T,L}$ och händelsefrekvensen, \bar{N} . Följande kapitel fokuseras därför på evalueringen av $\Gamma_{T,L}$ och \bar{N} . För att göra den numeriska analysen skrevs en Python-kod som använder de olika funktionerna som finns i Python-paketet DarkELF, se [Appendix C](#) för hela koden som användes. Eftersom DarkELF använder experimentell data kan värdet på $\Gamma_{T,L}$ evalueras för de åtta materialen som finns dokumenterade i programkoden, Al_2O_3 , GaN, Al, ZnS, GaAs, SiO_2 , Si och Ge. Evalueringen görs i det optiska gränsläget och därför användes data som antingen har tagit hänsyn till detta gränsläget eller så görs det en anpassning med Mermin metoden för att kunna arbeta i det optiska gränsläget. I gränsläget är $q = 0$ och därav kommer $\varepsilon_r(\mathbf{q}, \omega)$ betecknas som $\varepsilon_r(\omega)$ i resten av detta kapitel.

Denna del av arbetet utfördes på två olika sätt genom att två olika Python-script skrevs för alla evalueringar och plottar hos alla ämnen (Se [Appendix C](#) för ena koden och [Appendix D](#) för den andra). Anledningen till att arbetet delades upp på detta sätt istället för att skriva ett enda Python-skript var för att göra det mer trovärdigt att $\Gamma_{T,L}$, $\varepsilon_r(\omega)$ och \bar{N} hade evaluerats på rätt sätt. Om bara ett Python-skript hade använts hade det troligtvis inneburit större risk för inkorrekta beräkningar och plottar. Vid händelse av olika resultat på de båda delarna kunde koderna från de olika skripten kritiskt granskas för att hitta möjliga fel. När resultaten blev likadana kunde det dras en säkrare slutsats att beräkningarna och analyserna hade genomförts korrekt. Dock gjordes felanalysen för \bar{N} endast med koden som presenteras i [Appendix C](#).

4.1.1 Antaganden som gjordes för beräkningarna

För att kunna beräkna $\Gamma_{T,L}$ och \bar{N} , behövde några antaganden göras. Först och främst behövdes Figur 3.1 tas till hänsyn eftersom dess värden på $d\Phi_T/d\omega$ och $d\Phi_L/d\omega$ skulle användas. I artikeln som Figur 3.1 är tagen från antas $\kappa = 10^{-12}$ och $Br = 1$. Eftersom det är mörk strålning som studeras behövdes endast de röda och svarta kurvorna beaktas, där den röda är flödet för $m_V = 1$ eV och den svarta för $m_V = 100$ eV. Däremot är den tillgängliga datan från DarkELF programmet för $\varepsilon_r(\omega)$ endast registrerad i två områden. Antingen då ω är mellan 0 och 100 eV eller mellan 0 och 80 eV. Alltså slutar datan vid 100 eV eller 80 eV, men flödet för $m_V = 100$ eV börjar vid 100 eV. Detta gör att händelsefrekvensen inte går att beräkna för $m_V = 100$ eV eftersom det inte finns någon data i intervallet större än 100 eV. Fortsättningsvis, beror händelsefrekvensen också av V och T . Eftersom detta är beroende på experimentet valdes det att presentera resultatet som händelsefrekvens per volym- och tidsenhet.

Vidare, för att evaluera $\varepsilon_r(\omega)$ kunde DarkELF göra beräkningar i både elektron- och fononområdet. Skillnaden mellan dessa områden är energin av partiklarna [27]. För energier mindre än 1 eV sker absorptionen i fononområdet och för energier större än 1 eV sker absorptionen i elektronområdet [27]. Inom dessa två områden är energin i princip lika med massan av partikeln [27]. Som det nämndes innan studeras endast massorna $m_V = 1$ eV, 5 eV. och 10 eV. Vid massor (eller i detta fallet energier) större än eller lika med 1 eV är partiklarna i elektronområdet. Därför utfördes alla beräkningar inom elektronområdet.

4.1.2 Tillvägagångssätt för att evaluera $\Gamma_{T,L}$ och \bar{N}

För att kunna evaluera $\Gamma_{T,L}$ behövdes först real- och imaginärdelen av $\varepsilon_r(\omega)$ beräknas. Detta gjordes genom att använda den inbyggda funktionen som finns i DarkELF programmet samt med den datan som fanns tillgänglig i DarkELF. Beräkningar med Lindhard och Mermin metoden fanns tillgängliga för samtliga åtta material medan GPAW metoden endast fanns tillgänglig för de två materialen Si och Ge [10]. Då GPAW metoden är den mest rigorösa metoden användes den till Si och Ge. För de resterande ämnena användes Mermin metoden eftersom Lindhard metoden inte lämpar sig för beräkningar av absorption. För att beräkna $\varepsilon_r(\omega)$ behövdes ett intervall för ω väljas samt ett antal punkter. Intervallet valdes till 0-80 eV med 10 000 datapunkter. Därefter plottades två grafer upp, en som visar realdelen och den andra som visar imaginärdelen. Från detta kunde $\Gamma_{T,L}$ beräknas via Ekvation (3.1) och därmed också plottas. Observera att det inte går att beräkna $\Gamma_{T,L}$ då ω är noll. För att lösa detta problemet valdes samma intervall som för $\varepsilon_r(\omega)$ med ändringen att ta bort första värdet. Vilket motsvarar nollvärdet. På detta sättet kunde värden nära noll också evalueras. $\Gamma_{T,L}$ beräknades sedan för massorna, 1 eV, 5 eV och 10 eV där respektive massa plottades upp i samma graf.

För att sedan beräkna händelsefrekvensen användes de numeriskt beräknade värdena på $\Gamma_{T,L}$ och definitionen av $|\mathbf{q}|$. För att uppskatta flödet på jorden användes Figur 3.1. Datapunkter extraherades genom att använda en digital hemsida, *PlotDigitizer* [28], och från dessa datapunkter kunde en interpolation göras. Därefter kunde \bar{N} evalueras genom att använda Ekvation (3.2). För \bar{N}_L evaluerades endast den longitudinella delen och för \bar{N}_T evaluerades endast den transversella delen. Integrationen gjordes från $\omega = 1$ eV till $\omega = 80$ eV. Beräkningen av händelsefrekvensen gjordes endast på massan 1 eV. Detta eftersom flödet endast finns tillgänglig för $m_V = 1$ eV.

4.1.3 Dimensionsanalys för händelsefrekvensen, \bar{N}

Från Ekvation (3.2) kan en dimensionsanalys göras för händelsefrekvensen. V och T som är utanför integralen är en volym samt en tid. Dessa två antogs ha enheterna cm^3 samt sec . Anledningen till att volymen är i kubikcentimeter och inte kubikmeter är för att flödet beskrivs i kubikcentimeter vilket gör analysen enklare om volymen är i samma enhet. Innanför integralen blir $\omega/|\mathbf{q}|$ dimensionslös då båda är i enheten eV . $d\omega$ har enheten eV och enheten för $d\Phi_L/d\omega$ hittas från Figur 3.1, vilket har enheten $\text{sec}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{eV}^{-1}$. Γ_L och Γ_T har enheten eV och Br är dimensionslöst. Eftersom resultatet kommer att presenteras som per volym- och tidsenhet kan uttrycket ställas upp som,

$$\frac{\cancel{\text{cm}^3} \cancel{\text{sec}} \text{eV} \text{sec}^{-1} \text{cm}^{-2} \cancel{\text{eV}^{-1}} \text{eV}}{\cancel{\text{cm}^3} \cancel{\text{sec}}} \Rightarrow \text{eV} \text{sec}^{-1} \text{cm}^{-2}.$$

Då vi arbetar i naturliga enheter kan eV skrivas om till en sträcka som, $\text{eV} = \frac{1}{1.973 \cdot 10^{-7}} \text{m}^{-1}$ och i centimeter som, $\text{eV} = \frac{1}{1.973 \cdot 10^{-5}} \text{cm}^{-1}$. Detta ger oss slutligen,

$$\frac{10^5}{1.973} \text{sec}^{-1} \text{cm}^{-3}.$$

För att redovisa resultatet som antal per volym- och tidsenhet, multiplicerades resultatet av integralen med $10^5/1.973 = 50684$.

4.2 Analytiska metoder

Förutom att undersöka vilka ämnen som är mest benägna att absorbera mörk materia finns det även ett intresse att studera om det finns någon övre gräns på absorptions-hastigheten. Intresset härstammar från bland annat de praktiska aspekterna av mörk materiaabsorption, såsom att vidare kunna bestämma det optimala materialet för detek-tion. Detta kommer åstadkommas analytiskt genom sambandet mellan händelsefrekvensen för absorptions-hastigheten $\bar{N}_{T,L}$ och den dielektriska funktionen ε_r samt, med hjälp av Kramers-Kronig-relationerna diskuterade i Avsnitt 3.4 och summareglerna diskuterade i Avsnitt 3.5. Efter framtagandet av maxfunktionerna $M(\omega)$ kommer dessa också testas i Python med data från DarkELF, vars kod presenteras i Appendix C.

Innan analysen inleds behövs däremot Ekvation (3.1) skrivas om, då det syns att den inte är skriven på samma form som ELF i summaregeln där man jämför hur den dielektriska funktionen relaterar till absorptions-hastigheten. För att kunna använda summaregeln behöver därför imaginärdelen av den dielektriska funktionen för absorptions-hastigheten i Ekvation (3.1) skrivas om, vilket kan göras genom

$$\text{Im} \left(\frac{1}{-\varepsilon_r} \right) = \text{Im} \left(\frac{1}{\varepsilon_r^*} \right) = \text{Im} \left(\frac{1}{\varepsilon_r^*} \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r} \right) = \text{Im} \left(\frac{\varepsilon_r}{|\varepsilon_r|^2} \right) = \frac{\text{Im} \varepsilon_r}{|\varepsilon_r|^2}. \quad (4.1)$$

4.2.1 Övre gräns för den longitudinella händelsefrekvensen, \bar{N}_L

För att göra beräkningar enklare delas händelsefrekvensen upp i dess longitudinella och transversella delar. Först kommer den longitudinella delen att diskuteras och fysikaliskt är detta absorption som sker i samma plan som detektormaterialet. Detta beskrivs genom sambandet,

$$\bar{N}_L = VT(\text{Br}) \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \frac{\omega d\omega}{|\mathbf{q}|} \frac{d\Phi_L}{d\omega} \Gamma_L$$

och genom att använda likheten i Ekvation (4.1) i uttrycket för Γ_L i Ekvation (3.1) blir händelsefrekvensen

$$\bar{N}_L = VT\kappa^2 m_V^2(\text{Br}) \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \frac{d\omega}{\omega} \text{Im}(-\varepsilon_r^{-1}) \frac{\omega}{|\mathbf{q}|} \frac{d\Phi_L}{d\omega}. \quad (4.2)$$

Bortsett från faktorn där det finns ett ω beroende är detta uttryck identiskt med summaregeln i Ekvation (4.2). Vid härledningen av en övre gräns för elektronspridning av mörk materia hade Lasenby och Pradler [24, s. 10, ek. 8] ω beroende termer där de löste problemet genom att använda en max funktion för ω . Genom att använda en liknande metod kan uttrycket skrivas som

$$\bar{N}_L \leq VT\kappa^2 m_V^2(\text{Br}) \frac{\pi}{2} \left(1 - \varepsilon_r^{-1}(\mathbf{q}, 0)\right) \max_{\omega} \left(\frac{\omega}{|\mathbf{q}|} \frac{d\Phi_L}{d\omega} \right), \quad (4.3)$$

där \max_{ω} funktionen tar det största värdet i argumentet. Då flödet $d\Phi_L/d\omega$ är beroende av κ , m_V och Br kan värdet på dessa konstanter inte bestämmas fritt från flödet. Det räcker därför att undersöka vilket det största värde funktionen

$$M(\omega) = \kappa^2 m_V^2(\text{Br}) \left(\frac{\omega}{|\mathbf{q}|} \frac{d\Phi_L}{d\omega} \right) \quad (4.4)$$

antar.

4.2.2 Övre gräns för den transversella händelsefrekvensen, \bar{N}_T

I likhet med hur den övre gränsen för \bar{N}_L togs fram kommer nu den transversella delen, det vill säga absorption som sker ortogonalt mot detektormaterialet, att bearbetas. Denna delen ges av

$$\bar{N}_T = VT(\text{Br}) \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \frac{\omega d\omega}{|\mathbf{q}|} \frac{d\Phi_T}{d\omega} \Gamma_T$$

och kan beräknas med samma metod. För att skriva om $\text{Im} \varepsilon_r$ som $\text{Im}(-\varepsilon_r^{-1})$ behöver Γ_T i Ekvation (3.1) förlängas med $|\varepsilon_r|^2/|\varepsilon_r|^2$ och den transversella absorptionshastigheten ges då av

$$\Gamma_T = \left(\frac{\kappa^2 m_V^4 \text{Im}(-\varepsilon_r^{-1})}{\omega^3 |\Delta\varepsilon_r|^2} |\varepsilon_r|^2 \right) \left[1 + \frac{2m_V^2 \omega^2 \text{Re} \Delta\varepsilon_r + m_V^4}{\omega^4 |\Delta\varepsilon_r|^2} \right]^{-1}.$$

Med relationen i Ekvation (3.12) ges den övre gränsen för den transversella delen av

$$\bar{N}_T \leq VT\kappa^2 m_V^4(\text{Br}) \frac{\pi}{2} (1 - \varepsilon_r^{-1}(\mathbf{q}, 0)) \max_{\omega} \left\{ \left(\frac{|\varepsilon_r|^2}{\omega |\mathbf{q}| |\Delta\varepsilon_r|^2} \right) \left[1 + \frac{2m_V^2 \omega^2 \text{Re} \Delta\varepsilon_r + m_V^4}{\omega^4 |\Delta\varepsilon_r|^2} \right]^{-1} \frac{d\Phi_T}{d\omega} \right\} \quad (4.5)$$

och precis som för den longitudinella delen kan det undersökas om det finns en övre gräns genom att studera \max_{ω} funktionen. För att göra detta krävs det däremot att maxfunktionen inte är materialberoende, vilket den är eftersom den dielektriska funktionen närvarar i \max_{ω} .

4.3 Felanalys för \bar{N} och \bar{N}_L^{opt}

För att kunna estimeras en felmarginal för \bar{N} samt \bar{N}^{opt} hos alla material behövdes felet från den digitala datainsamlingen av $d\Phi_{LT}/d\omega$ uppskattas. Eftersom Figur 3.1 är i logaritmisk skala observerades det att felet blir större ju större flödet är. Detta eftersom värdena blir större exponentiellt och marginalen för att pricka in ett rimligt värde blir mindre ju större flödet blir. En annan observation är att grafen för $d\Phi_L/d\omega$ är tjockstreckat, detta medför en ännu större tvetydighet i vad det faktiska värdet på flödet är, speciellt vid de större värdena. Däremot, eftersom grafen som visar $d\Phi_T/d\omega$ är tunnare, borde felet för $d\Phi_T/d\omega$ vara mindre än för $d\Phi_L/d\omega$. Från detta gjordes felanalysen genom att använda Monte-Carlo simuleringar. Varje datapunkt hade ett fel associerat till värdet. Som det diskuterades innan kommer detta felet beror på värdet och storleksordningen av datapunkten. För $d\Phi_L/d\omega$ approximerades det att alla värden som hade en storleksordning mindre än 10^6 hade ett fel som var 0,05 av datapunktens värde. För värden med storleksordningen större än 10^6 men mindre än 10^{11} hade ett fel som var 0,1 av datapunktens värde och för värden större än 10^{11} var felet 0,2 av datapunktens värde. Samma sak gjordes för $d\Phi_T/d\omega$ med skillnaden att för värden mindre än 10^6 var felet 0,01 av värdet, värden mellan 10^6 och 10^{11} hade ett fel som var 0,08 av värdet, och värden större än 10^{11} hade ett fel som var 0,12 av värdet.

Monte-Carlo metoden som användes gick ut på att simulera flera mätningar med antagandet att felen var normalfördelade. För varje datapunkt skapades det nya värden med slumpmässiga fel där felet berodde på datapunktens värde och storlek. Detta itererades 1 000 gånger, vilket innebär att 1 000 nya datapunkter genererades för varje ursprunglig datapunkt och samlades sedan i en lista,

$$D = \begin{bmatrix} D_1 + f_{1,1} & D_1 + f_{1,2} & \dots & D_1 + f_{1,1000} \\ D_2 + f_{2,1} & D_2 + f_{2,2} & \dots & D_2 + f_{2,1000} \\ & & \vdots & \\ D_n + f_{n,1} & D_n + f_{n,2} & \dots & D_n + f_{n,1000} \end{bmatrix}.$$

där D är listan med alla datapunkter, D_n är n:te datapunkten och $f_{n,m}$ är det m:te associerade felet som är dragen ut en normalfördelning. Eftersom varje kolumn är nu innehåller en uppsättning av datapunkter kan samma beräkningar genomföras på varje kolumn. Detta ger tillslut 1 000 värden på \bar{N} respektive \bar{N}^{opt} . Därefter kunde standardavvikelsen beräknas av dessa 1 000 värden vilket användes som felet för respektive ämnes \bar{N} och \bar{N}_L^{opt} . Se [Appendix C](#) för programmeringskoden.

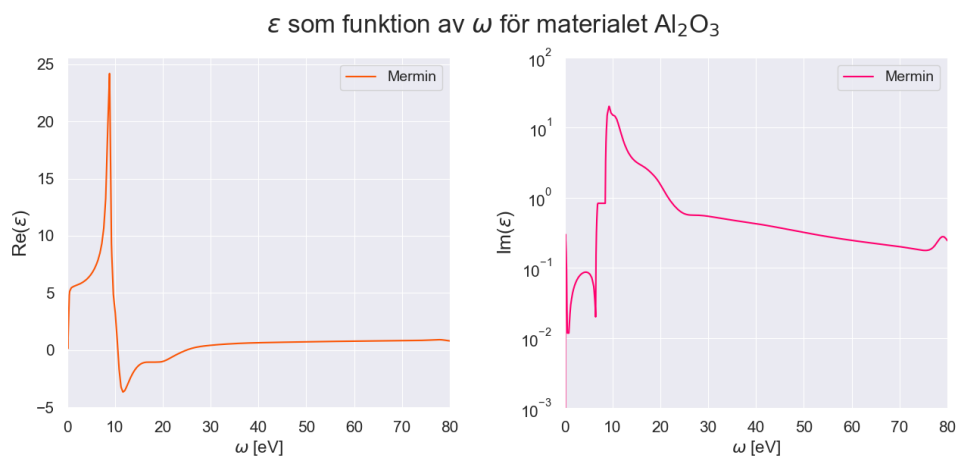
5

Resultat

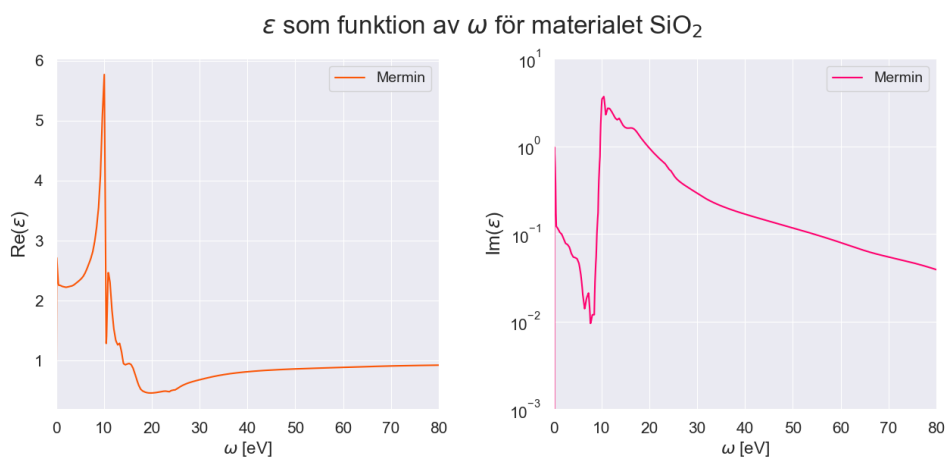
I följande kapitel presenteras och beskrivs resultatet för den numeriska (Avsnitt 5.2 och 5.3) samt den analytiska (Avsnitt 5.4) delen. För den numeriska delen redovisas absorptionshastigheterna, Γ_L och Γ_T , grafiskt. Vidare har resultatet för beräkningen av \bar{N} för alla ämnen sammanställts i en tabell. För den analytiska delen presenteras två grafer: en för maxfunktionen $M(\omega)$ och en där förhållandet $\bar{N}_L^{\text{opt}}/\bar{N}_L$ för respektive material visas.

5.1 Dielektriska funktionen för Al_2O_3 och SiO_2

Figur 5.1 visar real- och imaginärdelen av den dielektriska funktionen, $\varepsilon(\omega)$, för materialen Al_2O_3 och SiO_2 . Det valdes att inte redovisa alla graferna för $\varepsilon(\omega)$ eftersom det som undersöktes var absorptionshastigheten. Dock kan det ändå vara intressant att se hur $\varepsilon(\omega)$ plottades och därför redovisas $\varepsilon(\omega)$ för två material. Alla grafer för real- och imaginärdelen av $\varepsilon(\omega)$ finns att hitta i [Appendix A.1](#).



(a) $\varepsilon(\omega)$ för Al_2O_3 som beräknades med Mermin metoden. Den vänstra figuren visar realdelen av $\varepsilon(\omega)$ där det syns en topp vid ungefär 10 eV. Den högra figuren visar imaginärdelen av $\varepsilon(\omega)$ som också har en topp vid ungefär 10 eV.

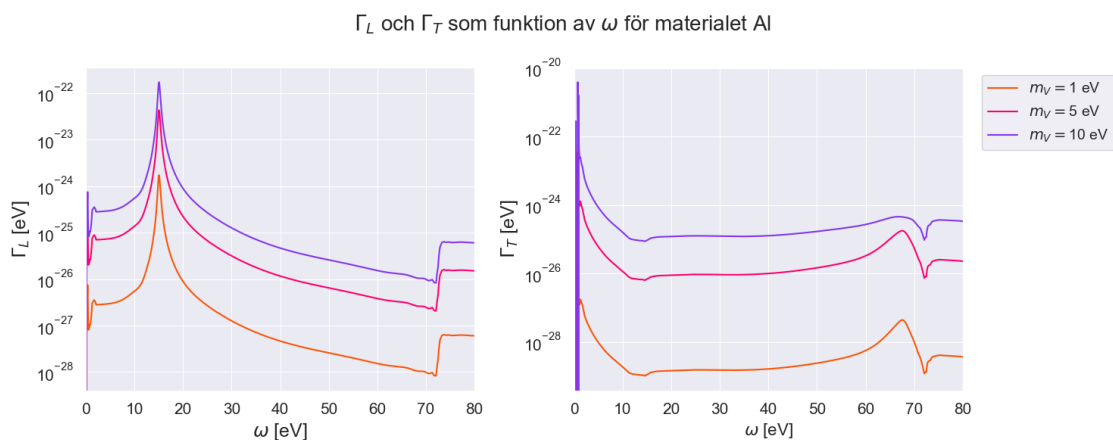


(b) $\varepsilon(\omega)$ för SiO₂ som beräknades med Mermin metoden. Den vänstra figuren visar realdelen av $\varepsilon(\omega)$ där det syns en topp vid ungefär 10 eV. Den högra figuren visar imaginärdelen av $\varepsilon(\omega)$ som också har en topp vid ungefär 10 eV.

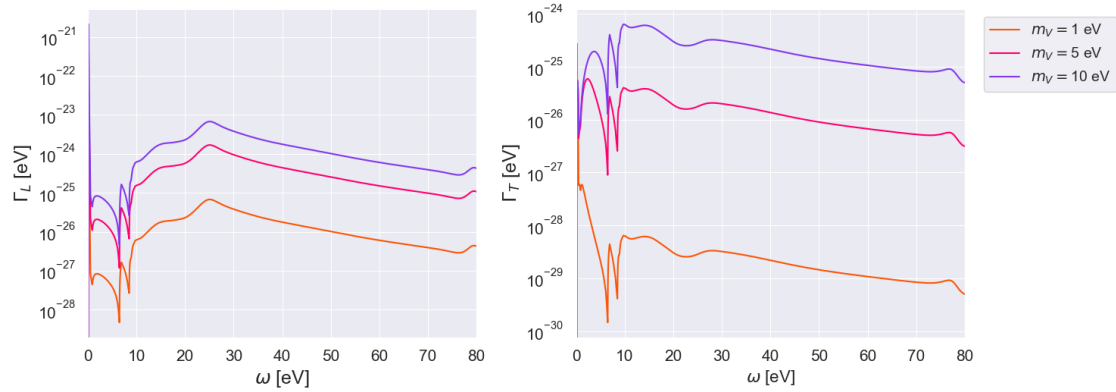
Figur 5.1: Figurerna visar den dielektriska funktionen ε som funktion av ω för materialen Al₂O₃ och SiO₂.

5.2 Graferna Γ_L och Γ_T för respektive material

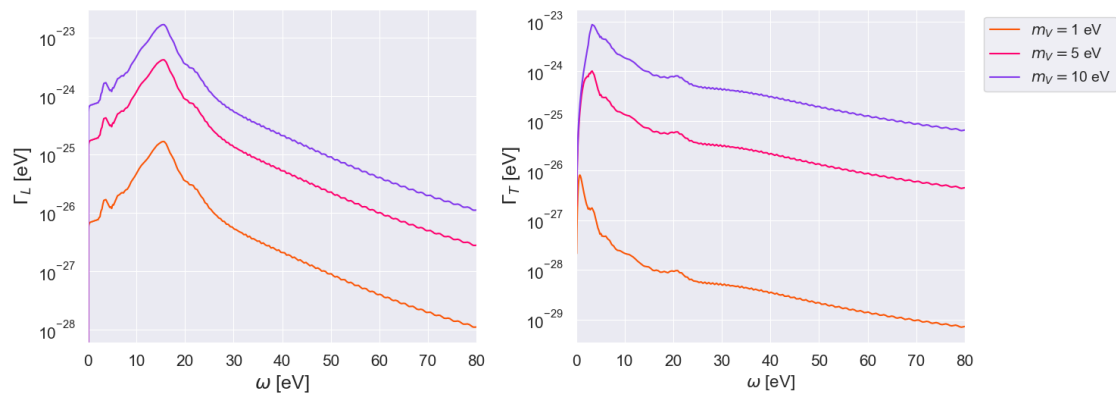
Figur 5.2 visar resultatet för beräkningen av den transversella absorptionshastigheten Γ_T , och den longitudinella absorptionshastigheten, Γ_L för respektive material. Resultatet presenteras som två grafer för varje material. Den till vänster är för Γ_L och den till höger är för Γ_T . För båda figurerna gäller det att y-axeln är i eV för absorptionshastigheten (Γ_{LT}) och x-axeln är energin (ω) som också presenteras i eV. I graferna redovisas det även absorptionshastigheten för tre olika massor, 1 eV, 5 eV och 10 eV.



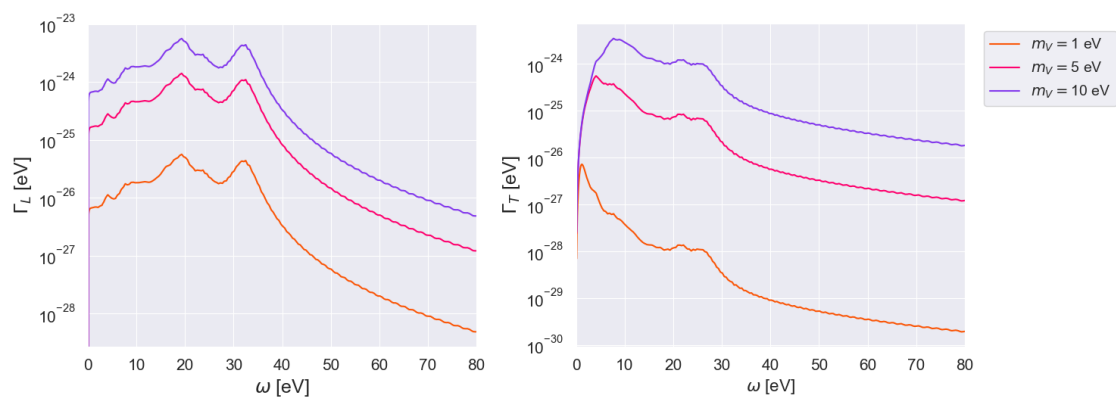
(a) Γ_L för Al har en topp vid 15 eV och för Γ_T har grafen en topp i början av intervallet (då $\omega \approx 0$ eV) samt en dip i vid ungefär 70 eV.

Γ_L och Γ_T som funktion av ω för materialet Al_2O_3 

(b) För Al_2O_3 har både Γ_L och Γ_T två dippar vid ungefär 7 eV och 9 eV. Γ_L har även en topp i början av grafen då $\omega \approx 0$ eV och Γ_T har en topp vid 9 eV.

 Γ_L och Γ_T som funktion av ω för materialet GaAs

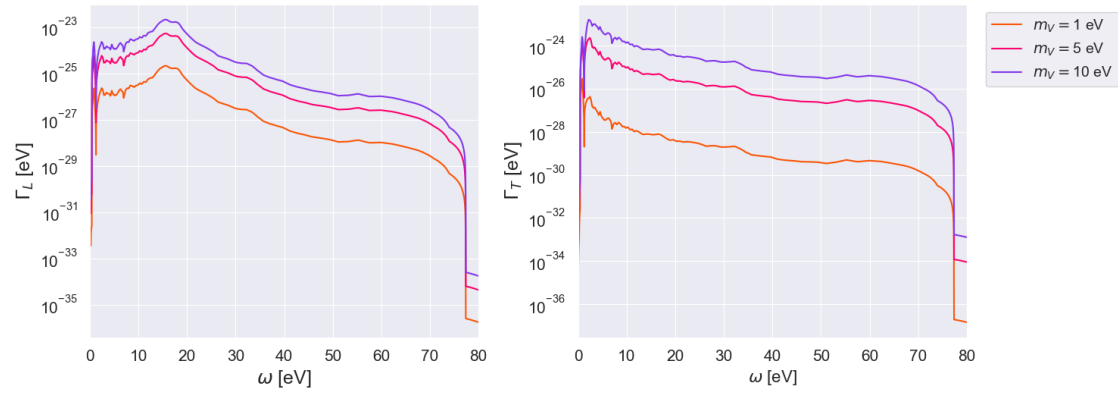
(c) För GaAs har Γ_L en topp vid ungefär 15 eV och för Γ_T är toppen vid ungefär 3 eV.

 Γ_L och Γ_T som funktion av ω för materialet GaN

(d) För GaN har Γ_L två toppar, en vid ungefär 20 eV och den andra vid 33 eV. För Γ_T är toppen vid 8 eV.

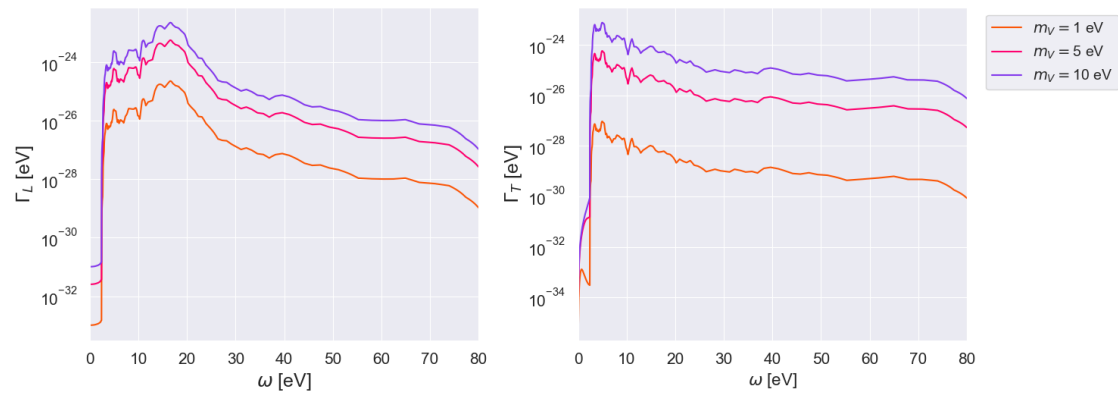
5. Resultat

Γ_L och Γ_T som funktion av ω för materialet Ge



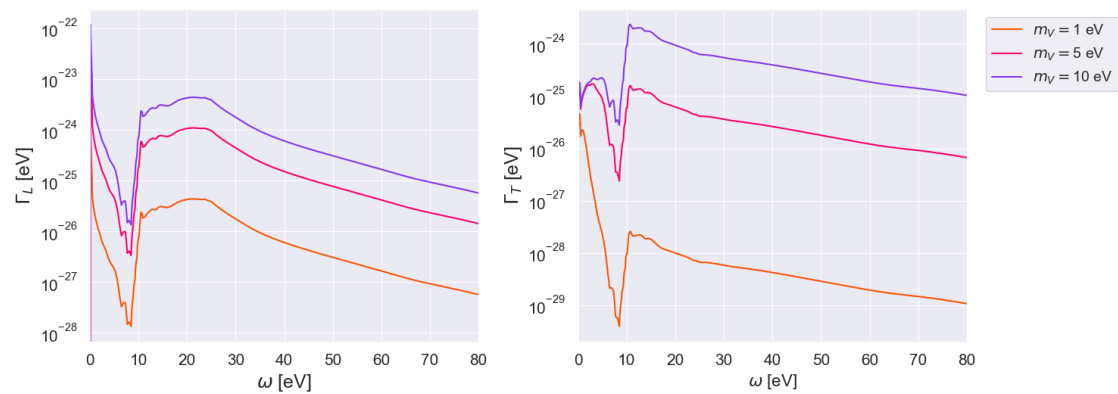
(e) För Ge har Γ_L en svag topp vid ungefär 15 eV och för Γ_T är toppen vid ungefär 2 eV. Båda graferna har även en drastisk minskning vid 75 eV.

Γ_L och Γ_T som funktion av ω för materialet Si

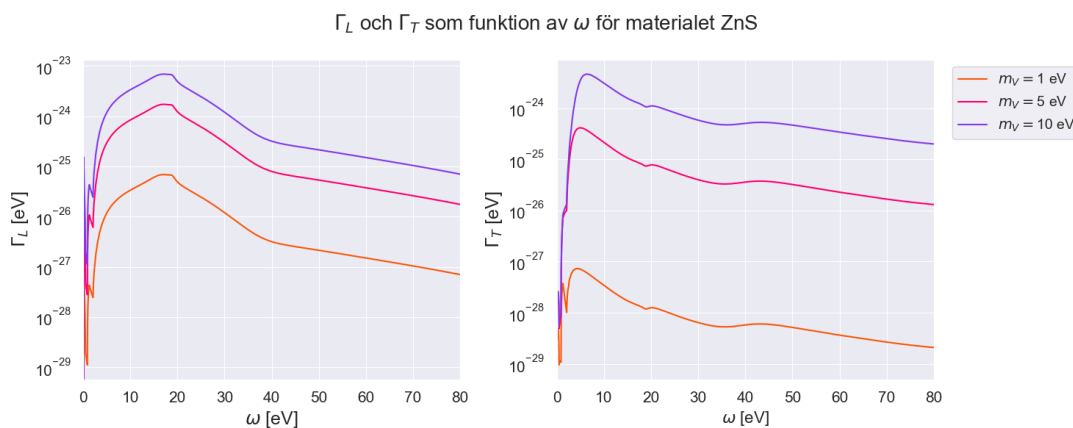


(f) För Si har Γ_L svag topp vid cirka 15 eV och Γ_T har en topp vid cirka 3 eV.

Γ_L och Γ_T som funktion av ω för materialet SiO₂



(g) För SiO₂ syns det att både Γ_L och Γ_T har en dip vid 9 eV.



(h) För ZnS syns det att Γ_L har en ganska utbredd topp vid cirka 17 eV och att Γ_T har en vanlig topp vid cirka 5 eV.

Figur 5.2: Dessa åtta figurer visar resultatet av Γ_T och Γ_L som funktion av ω för respektive material.

Utseendet på graferna visar hur absorptionen beter sig mellan 0 eV och 80 eV. Eftersom datan som användes bara var tillgänglig mellan 0 eV och 80 eV eller 0 eV och 100 eV valdes att presentera resultatet mellan 0 eV och 80 eV för att alla grafer skulle vara enhetliga. Det är därför inte möjligt att avgöra hur absorptionshastigheten beter sig efter 80 eV. Däremot, mellan 0 eV och 80 eV, visar graferna generellt ett beteende där den får en topp vid de lägre energierna (ω mellan 0 eV och 30 eV) och därefter avtar vid de högre energierna (ω mellan 40 eV och 80 eV). Detta går att observera hos alla ämnen för både Γ_L och Γ_T . Ett undantag är aluminium, som visar en ökning vid 70 eV för Γ_L och en ökning vid 60 eV för Γ_T , se Figur 5.2a.

5.3 Beräkningarna av \bar{N}_L , \bar{N}_T och \bar{N}

För beräkningen av händelsefrekvensen, \bar{N} , \bar{N}_L och \bar{N}_T per volym- och tidsenhet, visas respektive värde i Tabell 5.1.

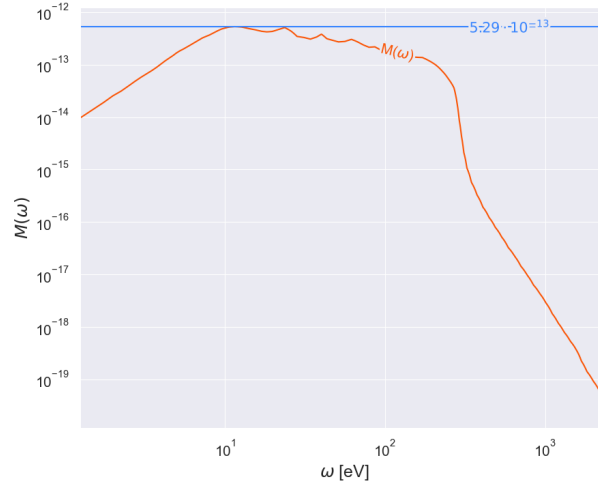
Tabell 5.1: Tabellen visar resultatet \bar{N}_L , den longitudinella händelsefrekvensen, \bar{N}_T , den transversella händelsefrekvensen, och \bar{N} , den totala händelsefrekvensen för de åtta ämnena då massan är $m_V = 1$ eV.

Material	\bar{N}_L (sec ⁻¹ cm ⁻³)	\bar{N}_T (sec ⁻¹ cm ⁻³)	\bar{N} (sec ⁻¹ cm ⁻³)
Al	$3,5672 \cdot 10^{-8} \pm 4,4089 \cdot 10^{-9}$	$7,9813 \cdot 10^{-13} \pm 3,3267 \cdot 10^{-14}$	$3,5673 \cdot 10^{-8} \pm 4,5269 \cdot 10^{-9}$
Al ₂ O ₃	$2,2812 \cdot 10^{-8} \pm 1,2056 \cdot 10^{-9}$	$3,4067 \cdot 10^{-13} \pm 1,4212 \cdot 10^{-14}$	$2,2813 \cdot 10^{-8} \pm 1,2630 \cdot 10^{-9}$
GaAs	$3,0078 \cdot 10^{-8} \pm 1,7761 \cdot 10^{-9}$	$3,2883 \cdot 10^{-12} \pm 1,1260 \cdot 10^{-13}$	$3,0082 \cdot 10^{-8} \pm 1,9236 \cdot 10^{-9}$
GaN	$1,8291 \cdot 10^{-8} \pm 9,5060 \cdot 10^{-10}$	$5,3038 \cdot 10^{-12} \pm 2,1645 \cdot 10^{-13}$	$1,8297 \cdot 10^{-8} \pm 1,0791 \cdot 10^{-9}$
Ge	$3,2142 \cdot 10^{-8} \pm 2,0965 \cdot 10^{-9}$	$3,2605 \cdot 10^{-12} \pm 1,3472 \cdot 10^{-13}$	$3,2145 \cdot 10^{-8} \pm 2,3323 \cdot 10^{-9}$
Si	$3,1498 \cdot 10^{-8} \pm 2,1797 \cdot 10^{-9}$	$8,4687 \cdot 10^{-13} \pm 3,3238 \cdot 10^{-14}$	$3,1499 \cdot 10^{-8} \pm 2,3853 \cdot 10^{-9}$
SiO ₂	$1,7807 \cdot 10^{-8} \pm 9,2751 \cdot 10^{-10}$	$7,1261 \cdot 10^{-12} \pm 5,1864 \cdot 10^{-13}$	$1,7814 \cdot 10^{-8} \pm 1,0542 \cdot 10^{-9}$
ZnS	$2,3003 \cdot 10^{-8} \pm 1,1165 \cdot 10^{-9}$	$1,4196 \cdot 10^{-12} \pm 4,0928 \cdot 10^{-14}$	$2,3005 \cdot 10^{-8} \pm 1,3007 \cdot 10^{-9}$

Från kolumnen med den totala händelsefrekvensen, \bar{N} , kan det konstateras att det ämnet som har störst absorptionshastighet är Al och den med lägst absorptionshastighet är SiO₂. Eftersom resultatet presenteras som antalet mörka fotoner som absorberas per volym- och tidsenhet kommer absorptionshastigheten att ändras beroende på volymen och tiden. Det går därför att applicera detta resultat på andra experiment ifall volymen av detektorn (i cm³) och tiden av experimentet (i sekunder) är känt.

5.4 Förhållandet mellan materialets händelsefrekvens och den teoretiska övre gränsen

Med härledningarna i Avsnitt 4.2.1 producerades en pythonkod som använts för att ta fram följande resultat, se Appendix C. Figur 5.3 visar maxfunktionen $M(\omega)$ i Ekvation (4.4) för varierande ω då $\kappa = 10^{-12}$, $m_V = 1$ eV och Br = 1. Maxvärdet denna funktion antog var $\approx 5,292 \cdot 10^{-13} \pm 5,674 \cdot 10^{-14}$.



Figur 5.3: Värdet för $M(\omega)$ i Ekvation (4.4) (orange linje) för ω mellan 1 och 2500 eV. Funktionen antog sitt största värde (blå linje) vid $\omega \approx 11.5$ eV där $M(\omega) \approx 5,292 \cdot 10^{-13}$ eV.

Med maxvärdet från $M(\omega)$ insatt i Ekvation (4.3) ges det optimala värdet för händelsefrekvensen av

$$\bar{N}_L^{\text{opt}} \approx VT \frac{\pi}{2} \left(1 - \varepsilon_r^{-1}(\mathbf{q}, 0) \right) \left(5,292 \cdot 10^{-13} \right).$$

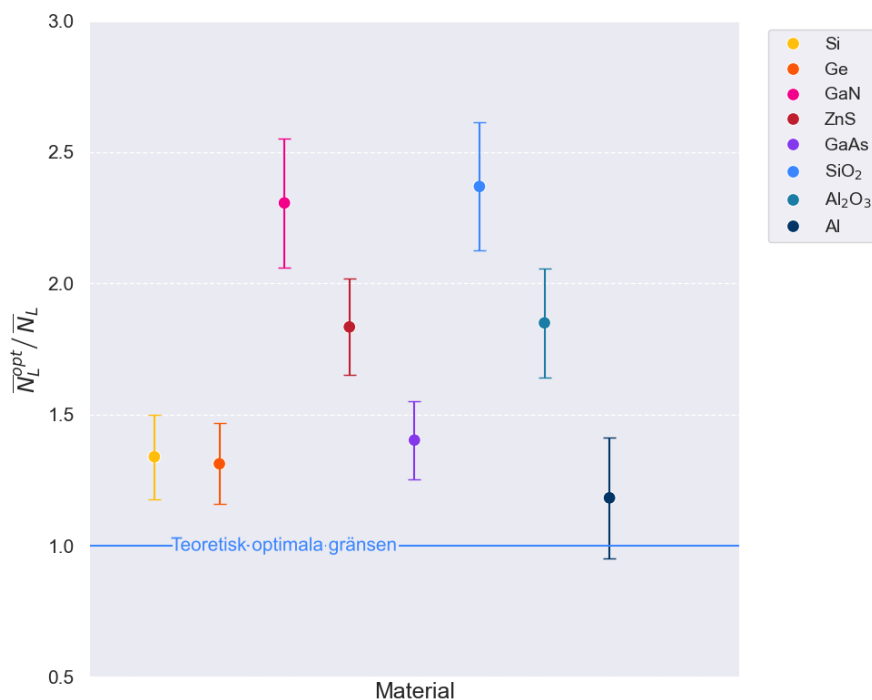
Generellt för tillräckligt stora \mathbf{q} kan $1 - \varepsilon_r^{-1}(\mathbf{q}, 0) \geq 1$, men då \mathbf{q} är mindre än en inverterad gitterskala bör detta inte bli större än ett [24]. Eftersom den här studien fokuserar på det optiska området där $\mathbf{q} \rightarrow 0$ borde $1 - \varepsilon_r^{-1}(\mathbf{q}, 0) = 1$ vara en bra approximation och \bar{N}_L^{opt} kan då skrivas som

$$\bar{N}_L^{\text{opt}} \approx VT \frac{\pi}{2} \left(5,292 \cdot 10^{-13} \right).$$

Detta kunde därefter jämföras med materialens händelsefrekvens genom

$$\frac{\bar{N}_L^{\text{opt}}}{\bar{N}_L} \approx \frac{\pi}{2} \left(5,292 \cdot 10^{-13} \right) \left[\kappa^2 m_V(\text{Br}) \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \frac{\omega d\omega}{|\mathbf{q}|} \frac{d\Phi_L}{d\omega} \Gamma_L \right]^{-1}, \quad (5.1)$$

där \bar{N}_L är respektive materials händelsefrekvens, se Tabell 5.1, kolumn 2. Samt att $\kappa = 10^{-12}$, $m_V = 1$ eV och $Br = 1$ precis som för N_L^{opt} då dessa parametrar bestäms av flödet. Resultatet av detta visas i Figur 5.4 där Al, Si och Ge var de ämnena som var närmast den övre gränsen. Aluminium var närmast den övre gränsen med förhållandet $\bar{N}_L^{\text{opt}}/\bar{N}_L^{\text{Al}} \approx 1,183 \pm 0,209$. För Ge och Si var värdet på förhållandet någorlunda lika med en skillnad på $\approx 0,027$. Det syns även att SiO_2 var längst ifrån den optimala gränsen med förhållandet $\bar{N}_L^{\text{opt}}/\bar{N}_L^{\text{SiO}_2} \approx 2,369 \pm 0,262$. För resterande materials förhållanden, se Tabell B.1, Appendix B.



Figur 5.4: Figuren visar förhållandet mellan händelsefrekvensen för olika material och den optimala händelsefrekvensen, se Ekvation (5.1). Den heldragna blåa linjen är den optimala gränsen $\bar{N}_L^{\text{opt}}/\bar{N}_L^{\text{opt}} = 1$ där Al (mörkblå prick), Si (gul prick) och Ge (orange prick) är närmast att mätta gränsen.

6

Diskussion

I kommande kapitel diskuteras resultatet för den numeriska och analytiska delen av arbetet. Först resoneras utseendet och rimligheten hos graferna för absorptionshastigheten, Γ_L och Γ_T (Avsnitt 6.1). Därefter diskuteras resultatet av händelsefrekvensen och hur den longitudinella och den transversella delen av händelsefrekvensen skiljer sig från varandra (Avsnitt 6.2). Slutligen behandlas den analytiska delen angående vilka ämnen som är närmast att mäta den övre gränsen (Avsnitt 6.3).

6.1 Graferna för Γ_L och Γ_T

Genom att studera graferna som presenteras i resultatet går det att observera vissa egenskaper. Från varje ämnes graf syns det att utseendet på absorptionshastigheten är detsamma för varje massa, med skillnaden att absorptionshastigheten blir större med en större massa hos de infallande mörka fotonerna. Detta gäller för både Γ_L och Γ_T hos alla material, vilket är mycket rimligt med tanke på hur ekvationerna för Γ_L och Γ_T ser ut. Med en större massa, m_V , blir värdet på absorptionshastigheten större, se Ekvation (3.1). Ytterligare en egenskap som går att notera är att Γ_L och Γ_T hos respektive ämne får en topp vid de lägre energierna (mellan 0 eV och 30 eV) och ett avtagande beteende efter dess topp. Detta kan betyda att absorptionshastigheten generellt är störst vid små energier.

En annan observation som kan göras är att för vissa ämnen är graferna för Γ_L och Γ_T på ungefär samma storleksordning och har någorlunda lika utseenden. Exempelvis graferna för Al_2O_3 , där samma två dippar förekommer i både Γ_L och Γ_T vid ungefär samma ω (mellan 5-10 eV). Eller exempelvis SiO_2 , där det också finns en liknande dipp hos både Γ_L och Γ_T vid 10 eV. Detta kan också bero på utseendet av ekvationerna, men det kan även bero på att utseendet av kurvorna för real- och imaginärdelen av $\varepsilon(\omega)$ ($q = 0$). I Figur 5.1 går det att se att real- och imaginärdelen av $\varepsilon(\omega)$ för Al_2O_3 och SiO_2 har liknande drag, vilket leder till att evalueringen av Γ_L och Γ_T antagligen också blev någorlunda lika.

Det är dock svårt att bedöma ifall utseendet på graferna för respektive ämne är helt korrekt. För att minimera risken för felberäkningar har alla grafer för de olika materialen beräknats och plottats i Python på två olika sätt. Risken för att det har blivit någon felkalkulering finns fortfarande, men eftersom alla resultat blev ungefär lika hos de två olika Python-skripten antas det att beräkningarna har gått rätt till. Det är även möjligt att datan från DarkELF som användes inte är exakt. Dock hade det blivit för svårt och tidskrävande att korrigera eller kontrollera datan som fanns i DarkELF. Därför har det inte kunnat göras en mer noggrann felanalys då det är svårt att uppskatta felet hos respektive data. Således utgick arbetet från att datan var korrekt. Med detta i åtanke, samt att

resultaten blev ungefär samma hos de två Python-skripten, bedöms det att resultatet för Γ_L och Γ_T är trovärdigt.

6.2 Händelsefrekvensen, \bar{N}

I Tabell 5.1 presenteras resultatet för beräkningen av händelsefrekvensen för alla material samt den longitudinella och transversella delen av händelsefrekvensen. Som nämnts tidigare visar resultatet att Al är det ämne med störst absorptionshastighet och att det med lägst absorptionshastighet är SiO₂. Utöver Al uppvisar även Ge och Si en stor händelsefrekvens. Det som går att notera hos dessa två ämnen är att Ge och Si har ungefär samma händelsefrekvens och felmarginal, med skillnaden att värdet för Ge är något större. Därmed går det att diskutera ifall dessa två värden ligger såpass nära varandra att möjligheten för Si att få ett större värde inte är helt orimlig. Detta eftersom deras värden ligger inom varandras felmarginal och därför kan påverkas av en liten ändring av flödet. Däremot går det även att argumentera för att det inte är sannolikt med tanke på att graferna för absorptionshastigheten (se Figur 5.2e och 5.2f) för Si och Ge i stora drag är mycket lika varandra. Därav behöver flödet ha en ganska stor ändring för att faktiskt kunna påverka Si till att få ett större värde än Ge. Det anses därmed att möjligheten att Si skulle få ett bättre värde än Ge inte är sannolikt.

I Ref. [9] skriver de att för små massor är Γ_L proportionell mot materialets atomdensitet¹ och att ett material med högre atomdensitet ska få ett större värde på \bar{N}_L . Detta stämmer bra för Al, då det har störst atomdensitet. GaN är det material med tredje störst atomdensitet, men i denna studie visade resultatet att GaN hade den näst minsta longitudinella händelsefrekvensen. På samma sätt har GaAs lägst atomdensitet jämfört med de andra materialen men det uppvisar ändå en stor longitudinell händelsefrekvens. Detta kan eventuellt bero på att absorptionshastigheten endast beräknades i intervallet 0-80 eV och att detta intervall inte är tillräckligt. Dock syns det i graferna för Γ_L att absorptionshastigheten minskar med högre energier samt att efter 295 eV minskar flödet snabbt [17]. Därför är det inte säkert att ett större intervall skulle förändra resultatet. Alltså visar detta resultat att material med högre atomdensitet inte nödvändigtvis ger en större longitudinell händelsefrekvens.

En annan intressant observation från resultatet i Tabell 5.1 är att \bar{N}_L dominerar för alla ämnen. \bar{N}_L är cirka sex storleksordningar större än \bar{N}_T , vilket inte är helt uppenbart från graferna av $\Gamma_{T,L}$. Som nämnts tidigare i rapporten verkar Γ_L och Γ_T vara förhållandevis lika varandra hos varje ämne med relativt lika storleksordningar. Det som kan ha lett fram till resultatet i Tabell 5.1 bör därför bero på flödet. I Figur 3.1 går det att observera att den röda tjockstreckade linjen ($d\Phi_L/d\omega$) har större värden än den röda tunnstreckade ($d\Phi_T/d\omega$). Detta är troligen den största orsaken till att \bar{N}_L framträder starkast av de två händelsefrekvenserna.

Angående rimligheten av resultatet anses det vara någorlunda trovärdigt. Det som kan ha påverkat resultatet är datapunkterna för $d\Phi_{LT}/d\omega$ som extraherades från Figur 3.1. Eftersom datapunkterna från grafen togs fram från en hemsida och inte från ögonmått ökar trovärdigheten på att punkterna är tämligen nära det riktiga värdet. Däremot är det ändå svårt att veta om värdet är exakt. Således kan det komma att påverka interpolationen av $d\Phi_{LT}/d\omega$ vilket i sin tur påverkar värdet på \bar{N} .

¹Här syftar atomdensitet till antalet atomer per volymenhet.

6.3 Den teoretiska övre gränsen

Lasenby och Pradler [24] härledde en övre gräns för elektronspridning av mörk materia och genom att applicera en liknande metod kunde en övre gräns för händelsefrekvensen tas fram, se Ekvation (4.3) och (4.5). Från härledningen av den optimala händelsefrekvensen för den transversella delen syns det i Ekvation (4.5) att den är materialberoende och kan därför inte undersökas oberoende av material. Med metoden som användes kunde därför \bar{N}_T inte evalueras och för att vidare hitta en övre gräns för denna del bör ett annat tillvägagångssätt användas.

För den longitudinella delen av händelsefrekvensen (Ekvation (4.3)) skrevs maxfunktionens argument om till $M(\omega)$ i Ekvation (4.4), där konstanterna $\kappa = 10^{-12}$, $m_V = 1$ eV och $Br = 1$ togs med. Maxvärdet hittades då $\omega \approx 11,5$ och värdet blev $5,292 \cdot 10^{-13}$. Detta värde anses rimligt eftersom $M(\omega)$ är detsamma som flödet bortsett från κ , m_V , Br och faktorn $\omega/\sqrt{\omega^2 - m_V^2}$ som går mot ett när ω ökar. Det här maxvärdet bör därför vara ungefär detsamma som maxvärdet för det longitudinella flödet multiplicerat med κ och m_V . I Figur 3.1 kan maxvärdet för det longitudinella flödet approximeras till $5,282 \cdot 10^{11}$ och genom att dividera maxvärdet av $M(\omega)$ med κ^2 blir värdet $5,292 \cdot 10^{11}$, vilket tyder på att maxvärdet är rimligt. Fortsättningsvis, går det även att diskutera förhållandet mellan den optimala händelsefrekvensen och händelsefrekvensen för de olika materialen (se Ekvation (5.1)), där approximationen $1 - \varepsilon_r^{-1} = 1$ gjordes. I Figur 5.4 syns det hur de olika materialen förhåller sig till det optimala värdet. Det som går att notera direkt är att aluminiums felmarginal är precis under den teoretiskt optimala gränsen. Detta anses inte vara ett problem med tanke på att den optimala gränsen också har en felmarginal och felet för båda härstammar från flödet.

Slutligen, kan förhållandet mellan den optimala händelsefrekvensen och händelsefrekvensen för de olika materialen från denna studie jämföras med det förhållande som tagits fram för elektronspridning [24]. Till skillnad från spridningen [24] ligger samtliga material som undersöktes i denna studie nära den övre gränsen. Notera dock att i denna studie har endast en övre gräns för den longitudinella delen tagits fram. Att materialen var närmare att mätta den övre gränsen för absorption kan därför bero på att den transversella delen inte har tagits hänsyn till. Däremot, eftersom det största bidraget till händelsefrekvensen för små massor kommer från den longitudinella delen [9] kan denna övre gräns ändå fungera som en bra approximation till en övre gräns för \bar{N} .

7

Slutsats och framtidsutsikter

Arbetets centrala syfte var att undersöka absorption av mörk materia i form av mörka fotoner hos olika material genom en numerisk och analytisk analys. Den numeriska analysen utfördes med hjälp av Python-paket DarkELF och resultaten tyder på att aluminium (Al) har högst händelsefrekvens. Därmed dras slutsatsen att aluminium är bäst kapabel till att absorbera mörka fotoner medan kiseldioxid (SiO_2) som har lägst händelsefrekvens är minst kapabel till absorption av mörka fotoner. Det går även att dra slutsatsen kring utseendet av absorptionshastigheten, där absorptionen ofta är högre vid en lägre energi. Fortsättningsvis, i den analytiska delen härleddes ett uttryck för den övre gränsen av \bar{N}_L och \bar{N}_T . Detta gjordes med hjälp av Kramers-Kronig-relationerna. För den transversella delen kunde uttrycket inte vidare undersökas eftersom den var materialberoende, däremot för den longitudinella delen togs det fram en övre gräns. I jämförelsen mellan de olika materialen och förhållandet till den optimala gränsen visade resultaten att aluminium, kisel och germanium var närmast att mätta den teoretiskt optimala gränsen. Vidare är materialen som studeras i denna rapport mycket närmare den teoretiska gränsen jämfört med fallet för elektronspridning.

För att vidare studera detta hade det därför varit intressant att fortsätta undersöka den teoretiska övre gränsen för \bar{N}_T då metoden som användes i denna studie inte var tillräcklig. För den numeriska delen kan en förbättring vara att studera fler material eller försöka studera händelsefrekvensen för andra massor än 1 eV. Det hade även varit intressant att studera vidare på absorptionshastigheten och händelsefrekvensen i energier över 80 eV. Utöver det, finns det andra områden som hade varit givande att undersöka, såsom vilka egenskaper som gör ett material mer benäget att absorbera mörka fotoner eller att undersöka ursprunget av de mörka fotonerna. Avslutningsvis, finns det fortfarande mycket mer att utforska och studera kring mörk materia, och förhoppningsvis har detta arbete bidragit med intressanta insikter i flera aspekter av den pågående sökningen efter mörk materia.

Referenser

- [1] H. An, M. Pospelov och J. Pradler, "New stellar constraints on dark photons," *Physics Letters B*, årg. 725, nr 4–5, aug. 2013. DOI: [10.48550/arXiv.1302.3884](https://doi.org/10.48550/arXiv.1302.3884).
- [2] D. Shapere, "Matter," *AccessScience*, maj 2021. DOI: [10.1036/1097-8542.410600](https://doi.org/10.1036/1097-8542.410600).
- [3] CERN, *Dark matter | CERN*, <https://home.cern/science/physics/dark-matter>, Hämtad: 2024-02-08, 2019.
- [4] D. N. Spergel, "Dark matter," *AccessScience*, aug. 2022. DOI: [10.1036/1097-8542.800520](https://doi.org/10.1036/1097-8542.800520).
- [5] G. Bertone och D. Hooper, "History of dark matter," *Reviews of Modern Physics*, årg. 90, nr 4, okt. 2018, ISSN: 1539-0756. DOI: [10.1103/revmodphys.90.045002](https://doi.org/10.1103/revmodphys.90.045002).
- [6] I. M. Bloch, R. Essig, K. Tobioka, T. Volansky och T.-T. Yu, "Searching for dark absorption with direct detection experiments," *Journal of High Energy Physics*, årg. 2017, nr 6, juni 2017, ISSN: 1029-8479. DOI: [10.1007/jhep06\(2017\)087](https://doi.org/10.1007/jhep06(2017)087).
- [7] R. Lea, *Hypothetical 'dark photons' could shed light on mysterious dark matter*, <https://www.space.com/dark-photons-shed-light-mystery-dark-matter>, Hämtad: 2024-04-19, 2023.
- [8] J. R. Primack, "Weakly interacting massive particle (WIMP)," *AccessScience*, aug. 2020. DOI: [10.1036/1097-8542.742250](https://doi.org/10.1036/1097-8542.742250).
- [9] H. An, M. Pospelov och J. Pradler, "Dark Matter Detectors as Dark Photon Helioscopes," *Physical Review Letters*, årg. 111, nr 4, juli 2013, ISSN: 1079-7114. DOI: [10.1103/physrevlett.111.041302](https://doi.org/10.1103/physrevlett.111.041302).
- [10] S. Knapen, J. Kozaczuk och T. Lin, "python package for dark matter scattering in dielectric targets," *Physical Review D*, årg. 105, nr 1, jan. 2022, ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/physrevd.105.015014](https://doi.org/10.1103/physrevd.105.015014).
- [11] K. Knapen och Lin, "Dark matter-electron scattering in dielectrics," *Phys. Rev. D*, årg. 104, 9 juli 2021. DOI: [10.1103/PhysRevD.104.015031](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.104.015031).
- [12] M. Fabbrichesi, E. Gabrielli och G. Lanfranchi, *The Physics of the Dark Photon: A Primer*. Springer International Publishing, 2021, ISBN: 9783030625191. DOI: [10.1007/978-3-030-62519-1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-62519-1). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-62519-1>.
- [13] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4. utg. Cambridge University Press, 2017, ISBN: 978-1108420419.
- [14] F. Mandl och G. Shaw, *Quantum field theory*, 2. utg. Hoboken, N.J: Wiley, 2010, ISBN: 978-0-471-49683-0.
- [15] "Appendix A: Natural Units," i *Gauge Field Theories*. John Wiley & Sons, Ltd, 1991, s. 509–514, ISBN: 9783527617357. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9783527617357.app1>.

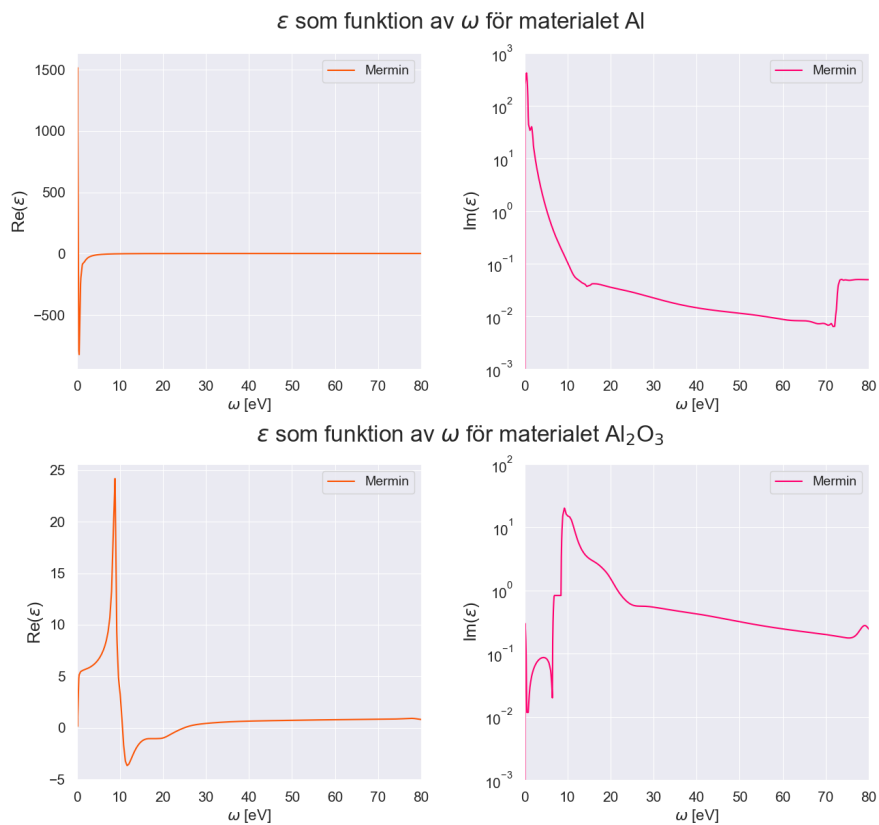
- [16] A. Korytov, *Introduction to Elementary Particle Physics - Natural units*. URL: http://www.phys.ufl.edu/~korytov/phz5354/note_01_NaturalUnits_SMsummary.pdf.
- [17] J. Redondo, "Helioscope bounds on hidden sector photons," *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, årg. 07, s. 008, 2008. DOI: [10.1088/1475-7516/2008/07/008](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2008/07/008).
- [18] D. K. Cheng, "Field and wave electromagnetics," i 2. utg. Pearson Education Limited, 2014, s. 108–110, ISBN: 978-7-302-15212-5.
- [19] W. L. Hosch, *Permittivity*, Hämtad 2024-05-07. URL: <https://www.britannica.com/science/permittivity>.
- [20] *Dielectric | Definition, Properties, & Polarization | Britannica*, maj 2024. URL: <https://www.britannica.com/science/dielectric>.
- [21] J. Sólyom, *Fundamentals of the Physics of Solids: Volume II: Electronic Properties*. Springer Science & Business Media, 2008, vol. 2.
- [22] J. Sólyom, "Fundamentals of the Physics of Solids: Volume 3-Normal, Broken-Symmetry, and Correlated Systems," i Springer Science & Business Media, 2010, vol. 3, s. 16, 20, ISBN: 978-3-642-04517-2.
- [23] J. Orloff, *10.5: Cauchy principal value*, Hämtad 2024-05-05, maj 2023. URL: [https://math.libretexts.org/Bookshelves/Analysis/Complex_Variables_with_Applications_\(Orloff\)/10%3A_Definite_Integrals_Using_the_Residue_Theorem/10.05%3A_Cauchy_principal_value](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Analysis/Complex_Variables_with_Applications_(Orloff)/10%3A_Definite_Integrals_Using_the_Residue_Theorem/10.05%3A_Cauchy_principal_value).
- [24] R. Lasenby och A. Prabhu, "Dark matter–electron scattering in materials: Sum rules and heterostructures," *Phys. Rev. D*, årg. 105, s. 095009, 9 maj 2022. DOI: [10.1103/PhysRevD.105.095009](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.105.095009).
- [25] G. D. Mahan, "Many-particle physics," i 3rd. Springer US, 2000, s. 212, ISBN: 0-306-46338-5.
- [26] O. V. Dolgov, D. A. Kirzhnits och E. G. Maksimov, "On an admissible sign of the static dielectric function of matter," *Rev. Mod. Phys.*, årg. 53, s. 81–93, 1 jan. 1981. DOI: [10.1103/RevModPhys.53.81](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.53.81).
- [27] S. Griffin, S. Knapen, T. Lin och K. M. Zurek, "Directional detection of light dark matter with polar materials," *Physical Review D*, årg. 98, nr 11, dec. 2018, ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/physrevd.98.115034](https://doi.org/10.1103/physrevd.98.115034).
- [28] *PlotDigitizer*, Hämtad: 2024-04-10. URL: <https://plotdigitizer.com/>.

A

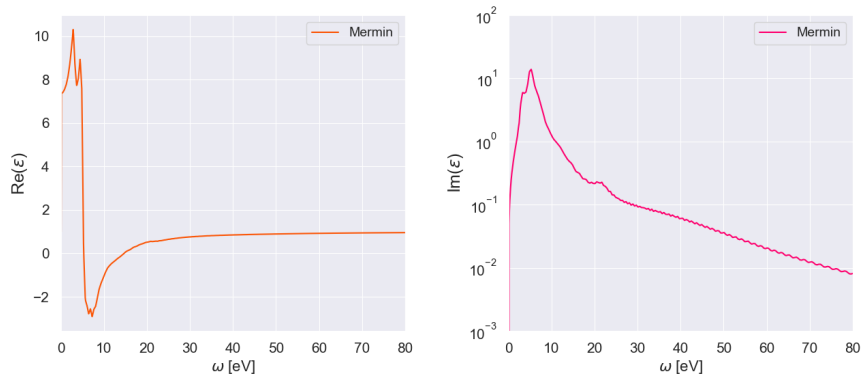
Appendix A

Följande avsnitt visar alla grafer som plottades upp för respektive ämne. Först visas plottningen av den dielektriska funktionen och därefter figurerna för ELF.

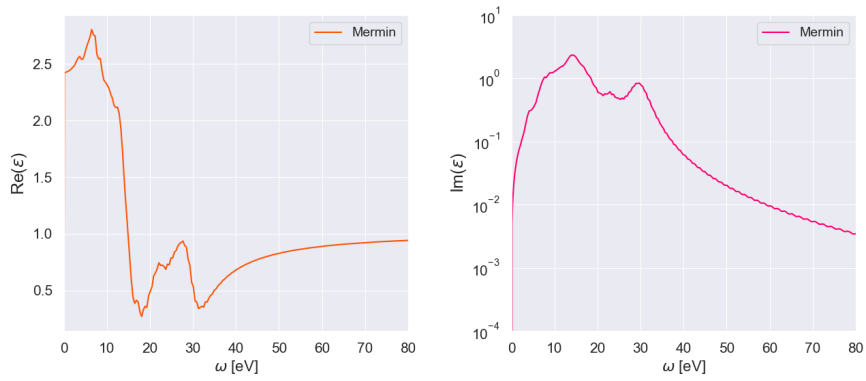
A.1 Dielektriska funktionen för olika material



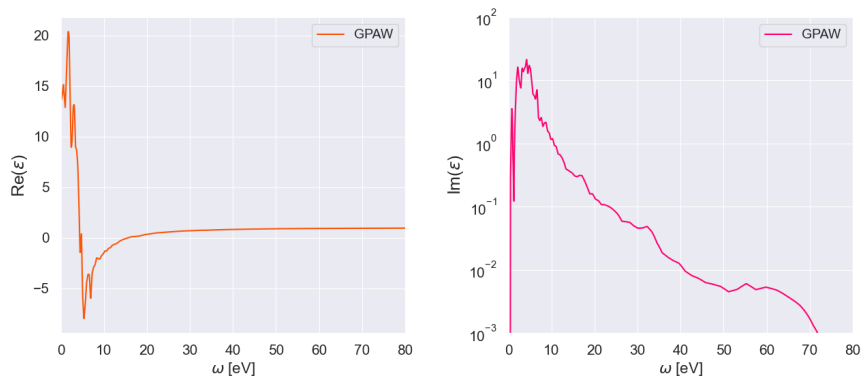
ϵ som funktion av ω för materialet GaAs



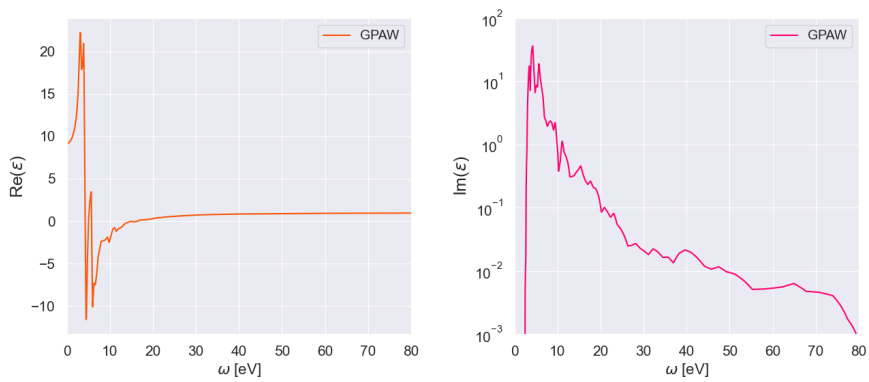
ϵ som funktion av ω för materialet GaN

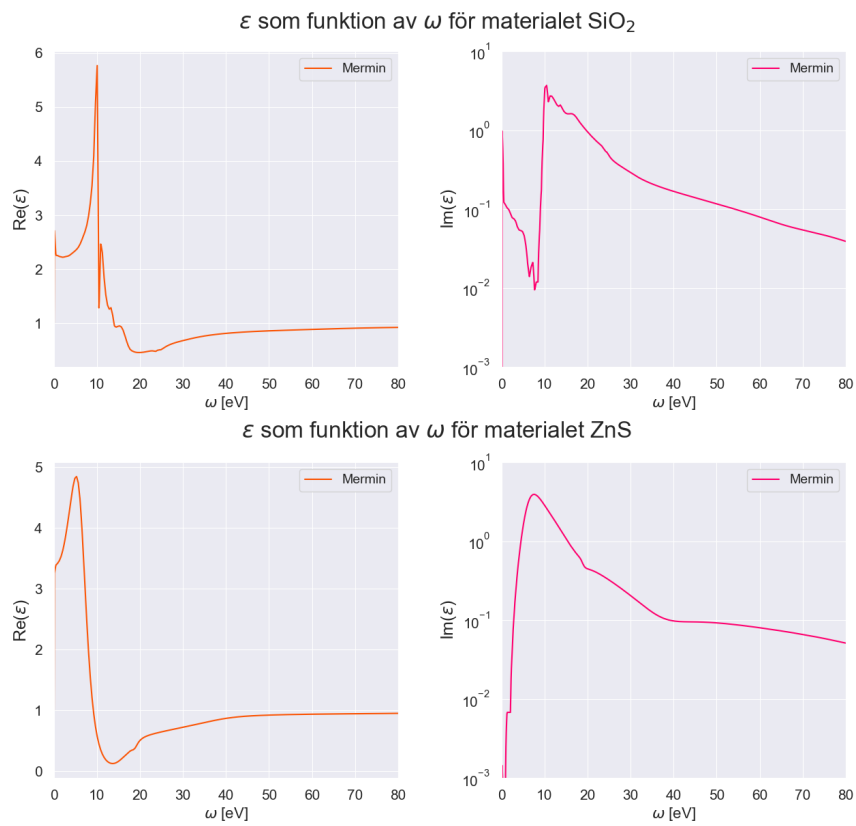


ϵ som funktion av ω för materialet Ge



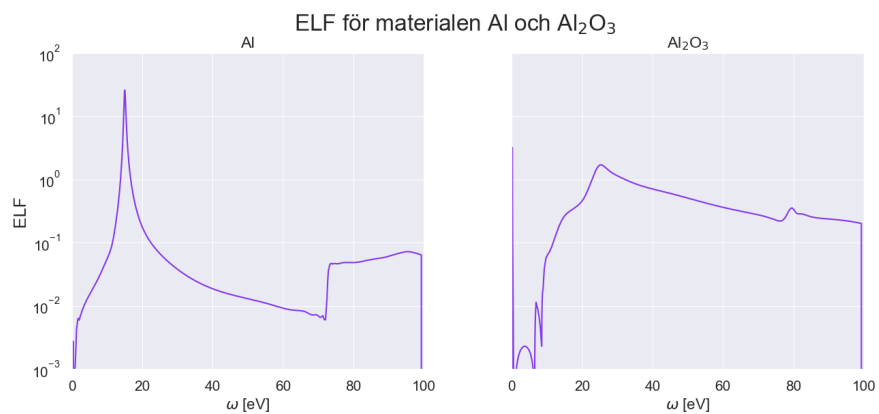
ϵ som funktion av ω för materialet Si

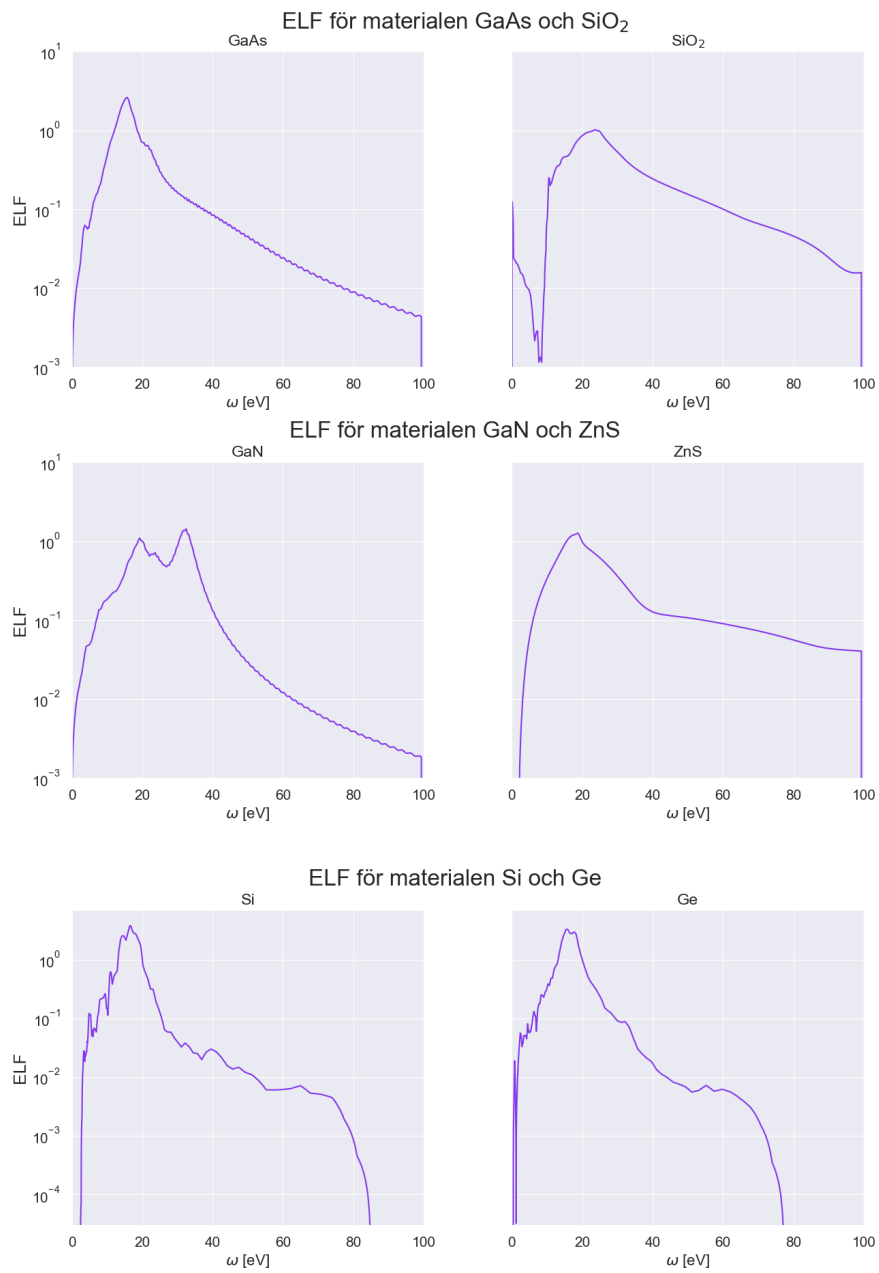




Figur A.1: Dessa åtta figurer visar graferna för epsilons real (vänster figur) och imaginär (höger figur) del för respektive material.

A.2 ELF för alla olika material





Figur A.2: Dessa åtta figurer visar plottningen av ELF för respektive material. För Si och Ge finns det inte mer tillgänglig data än till cirka 80 eV och därför uppvisar den ett sjunkande utseende vid slutet grafen.

B

Appendix B

Tabell B.1 presenterar värdena på förhållandet N_L^{opt}/N_L för de olika materialen, samt deras felmarginaler.

Tabell B.1: Följande tabell visar värdet samt felmarginalen på förhållandet mellan den teoretiska gränsen samt respektive materials longitudinella händelsefrekvens.

Material	$\overline{N}_L^{\text{opt}}/\overline{N}_L$
Si	1.3393 ± 0.1657
Ge	1.3124 ± 0.1561
GaN	2.3063 ± 0.2656
ZnS	1.8339 ± 0.1929
GaAs	1.4025 ± 0.1488
SiO ₂	2.3691 ± 0.2625
Al ₂ O ₃	1.8493 ± 0.2220
Al	1.1826 ± 0.20864

C

Appendix C

Nedan presenteras en av dem två python-koden som skrevs för den numeriska analysen. I detta kapitel redovisas även koden som användes för att generera resultaten för analytiska delen samt felanalysen för både den numeriska och analytiska delen. Detta skiljer sig från [Appendix D](#) då den inte gjorde någon programmering för den analytiska delen eller någon felanalys.

C.1 Kod för alla funktioner

```
import matplotlib.pyplot as plt
from darkelf import *
import seaborn as sns
import scipy.integrate as integrate
from labellines import labelLine, labelLines
import pandas as pd
import numpy as np

# ----- LOAD DATA -----
Si = darkelf(target='Si',filename='Si_gpaw_withLFE.dat')

Ge = darkelf(target='Ge',filename='Ge_gpaw_withLFE.dat')

Al = darkelf(target='Al',filename="Al_mermin.dat")

Al2O3 = darkelf(target='Al2O3',filename='Al2O3_mermin.dat')

GaN = darkelf(target='GaN',filename='GaN_mermin.dat')

ZnS = darkelf(target='ZnS',filename='ZnS_mermin.dat')

GaAs = darkelf(target='GaAs',filename='GaAs_mermin.dat')

SiO2 = darkelf(target='SiO2',filename='SiO2_mermin.dat')

# ----- FUNCTIONS TO CALCULATE GAMMA_L AND GAMMA_T -----

kappa = 1e-12

def gamma_T(omega, mv, eps, eps_reel, eps_im):
    eps = np.array(eps)
    eps_reel = np.array(eps_reel)
    eps_im = np.array(eps_im)
    term1_taljare = kappa**2*mv**4*eps_im
    term1_namnare = omega**3*np.abs(eps-1)**2
```

C. Appendix C

```
term2_taljare = 2*mv**2*(eps_reel-1)+mv**4
term2_namnare = omega**4*np.abs(eps-1)**2

term1 = term1_taljare/term1_namnare
term2 = 1 + term2_taljare/term2_namnare

return term1*term2**(-1)

def gamma_L(omega, mv, eps, eps_im):
    eps = np.array(eps)
    eps_im = np.array(eps_im)
    taljare = kappa**2*mv**2*eps_im
    namnare = omega*np.abs(eps)**2

    return taljare/namnare

def gamma_L_max(omega, mv): ### Lagt till själv
    taljare = kappa**2*mv**2
    namnare = omega

    return taljare/namnare

# ----- FUNCTIONS TO PLOT EPSILON, GAMMA, ELF -----

def plotter_epsilon(material, omega, xlim, ylim, method, namn):
    sns.set_style("darkgrid")
    fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(15, 6), sharex=True)
    fig.suptitle('$\epsilon$ som funktion av $\omega$ för materialet ' + str(namn),
    ↪ fontsize = 24)
    fig.subplots_adjust(wspace=0.30)

    ### Epsilon1
    re = [material.eps1(omi, omi) for omi in omega]
    axs[0].plot(omega, re, color='#fb5607', label= str(method))
    axs[0].set_yscale('linear')
    axs[0].set_xlim(xlim)
    axs[0].legend()
    axs[0].set_ylabel(r'Re($\epsilon$)', fontsize=18)
    axs[0].set_xlabel(r'$\omega$ [eV]', fontsize=16)

    ### Epsilon2
    im = [material.eps2(omi, omi) for omi in omega]
    axs[1].plot(omega, im, color='#ff006e', label= str(method))
    axs[1].set_yscale('log')
    axs[1].set_ylim(ylim)
    axs[1].set_xlim(xlim)
    axs[1].legend(loc='upper right')
    axs[1].set_ylabel(r'Im($\epsilon$)', fontsize=18)
    axs[1].set_xlabel(r'$\omega$ [eV]', fontsize=16)

    plt.show()

def plotter_gamma(material, omega, mv, xlim, namn, ylim=None):
    sns.set_style("darkgrid")
    fig, axs = plt.subplots(1,2, figsize=(15, 6), sharex=True)
    fig.suptitle('$\Gamma_{L}$ och $\Gamma_{T}$ som funktion av $\omega$ för materialet '
    ↪ + str(namn), fontsize = 24)

    re = [material.eps1(omi, omi) for omi in omega] ### Epsilon1
    im = [material.eps2(omi, omi) for omi in omega] ### Epsilon2
```

```

eps = [re[i] + im[i]*1j for i in range(len(omega))] ### Epsilon

color = ['#fb5607', '#ff006e', '#8338ec', '#3a86ff', '#003566', '#ffbe0b']

for i in range(len(mv)):
    gammaT = gamma_T(omega, mv[i], eps, re, im)
    gammaL = gamma_L(omega, mv[i], eps, im)

    axs[0].plot(omega, gammaL, color=color[i]) ### Plot GammaL
    axs[1].plot(omega, gammaT, color=color[i], label='$m_V = $' + str(mv[i]) + ' eV')
    ↪ ### Plot GammaT

### GammaL
axs[0].set_xlim(xlim)
axs[0].set_yscale('log')
axs[0].set_ylabel(r'$\Gamma_L$ [eV]', fontsize=18)
axs[0].set_xlabel(r'$\omega$ [eV]', fontsize=18)

### GammaT
axs[1].set_xlim(xlim)
axs[1].set_xlabel(r'$\omega$ [eV]', fontsize=16)
axs[1].set_yscale('log')
axs[1].set_ylabel(r'$\Gamma_T$ [eV]', fontsize=18)
axs[1].legend(bbox_to_anchor=(1.03, 1), loc='upper left')

plt.tight_layout()
plt.show()

def plotter_ELF(material1, material2, namn1, namn2, ylim):
    sns.set_style("darkgrid")
    fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(15, 6), sharey=True)
    fig.subplots_adjust(wspace=0.25)
    fig.suptitle('ELF för materialen ' + str(namn1) + ' och ' + str(namn2), fontsize=24)

    omvec = np.linspace(0, 100, 10000)

    ### ELF
    y1 = [material1.elf(omi, omi) for omi in omvec]
    axs[0].plot(omvec, y1, color='#8338ec')

    axs[0].title.set_text(str(namn1))
    axs[0].set_yscale('log')
    axs[0].set_ylim(ylim)
    axs[0].set_xlim([0, 100])
    axs[0].set_xlabel(r'$\omega$ [eV]', fontsize=16)
    axs[0].set_ylabel(r'ELF', fontsize=18)

    ### ELF
    y2 = [material2.elf(omi, omi) for omi in omvec]
    axs[1].plot(omvec, y2, color='#8338ec')

    axs[1].title.set_text(str(namn2))
    axs[1].set_yscale('log')
    axs[1].set_ylim(ylim)
    axs[1].set_xlim([0, 100])
    axs[1].set_xlabel(r'$\omega$ [eV]', fontsize=16)

    plt.show()

# ----- FUNCTION TO EVALUATE N -----

```

C. Appendix C

```

def integral(material,omega,f_T,f_L,start,slut):
    re = [material.eps1(omi, omi) for omi in omega] ### Epsilon1
    im = [material.eps2(omi, omi) for omi in omega] ### Epsilon2
    eps = [re[i] + im[i]*1j for i in range(len(omega))] ### Epsilon1 + Epsilon2

    gammaT = gamma_T(omega, 1, eps, re, im)
    gammaL = gamma_L(omega, 1, eps, im)

    g_T = interp1d(omega, gammaT)
    g_L = interp1d(omega, gammaL)

    integral_L = lambda x: x/np.sqrt(x**2 - 1**2) * (f_L(x) * g_L(x))
    integral_T = lambda x: x/np.sqrt(x**2 - 1**2) * (f_T(x) * g_T(x))
    integral = lambda x: x/np.sqrt(x**2 - 1**2) * (f_T(x) * g_T(x) + f_L(x) * g_L(x))

    N_L = integrate.quad(integral_L,start,slut, epsabs=1e-13, epsrel=1e-13)[0]*1e5/1.97327
    N_T = integrate.quad(integral_T,start,slut,epsabs=1e-13, epsrel=1e-13)[0]*1e5/1.97327
    N = integrate.quad(integral,start,slut,epsabs=1e-13, epsrel=1e-13)[0]*1e5/1.97327

    return N, N_L, N_T

# ----- EVALUATE AND PLOT N_MAX -----

### N_L Maximum integral
def integral_N_L_max(omega,f_L,start,slut):
    gammaL = gamma_L_max(omega, 1)
    g_L = interp1d(omega, gammaL)

    integral_N_L = lambda x: (x/np.sqrt(x**2 - 1**2) * g_L(x) * f_L(x))

    N_max_L = integrate.quad(integral_N_L,start,slut,epsabs=1e-13,
    ↪ epsrel=1e-13)[0]*1e5/1.97327

    return N_max_L

def plotter_N_L_max(materials,N_materials,N_opt,name,error):
    ratio = np.linspace(0,0,len(N_materials))
    optimal_line = np.ones(2*len(materials))

    material_location = np.arange(1,len(ratio)+1,1)

    for i in range(len(N_materials)):
        ratio[i] = N_opt/N_materials[i]

    data1 = {'index':material_location,
            'ratio': ratio,
            'material':materials}

    df1 = pd.DataFrame(data1)

    ### Plot
    sns.set_style("darkgrid")
    fig, axs = plt.subplots(figsize=(10, 8))

    colors = ['#ffbe0b', '#fb5607', '#f20089', '#be1e2d', '#8338ec', '#3a86ff', '#1b7ca5',
    ↪ '#003566']
    sns.set_palette(sns.color_palette(colors))

    for i in range(len(material_location)):

```

```

plt.errorbar(x=material_location[i],y=ratio[i],fmt='.', yerr=error[i], capsize =
↪ 5, color = colors[i])

line1, = plt.plot(optimal_line, label=name, color = '#3a86ff')
sns.scatterplot(data=df1, x='index', y='ratio', hue='material', s=100) # graph code

# ----- X-AXIS -----
plt.xlim(0,10)
plt.xticks([])
plt.xlabel(r'Material', fontsize=18)

# ----- Y-AXIS -----
plt.ylabel(r'$\overline{N}_{L}^{\text{opt}}$ \left/ \right.: \overline{N}_{L}$',
↪ fontsize=18)
plt.ylim(0.5, 3)

# ----- LABELLINES -----
labelLines([line1], xvals=(3,), align=True, fontsize=15)
line1.set_label('_nolegend_')

# ----- MISC -----
plt.grid(linestyle='--', which='both', axis='y', linewidth=1)

plt.legend(bbox_to_anchor=(1.03, 1), loc='upper left')

plt.tight_layout()
plt.show()

return ratio

def get_max_M(omega, f_L):
kappa = 1e-12
M = np.zeros(len(omega))

for i in range(len(omega)):
M[i] = kappa ** 2 * 1 ** 2 * (omega[i] / np.sqrt(omega[i] ** 2 - 1 ** 2)) *
↪ f_L(omega[i])

return max(M), list(omega)[list(M).index(max(M))]

def plot_max_M(omega, f_L):
M = np.zeros(len(omega))

for i in range(len(omega)):
M[i] = kappa ** 2 * 1 ** 2 * (omega[i] / np.sqrt(omega[i] ** 2 - 1 ** 2)) *
↪ f_L(omega[i])

tangent_max = np.linspace(max(M), max(M), len(omega))
# Format the value to display in scientific notation with 2 decimal places
formatted_value = "{:.2e}".format(max(M))

# Extract mantissa and exponent from the formatted value
mantissa, exponent = formatted_value.split('e')

# Construct the LaTeX formatted label
label = str(mantissa)+r"\cdot"+f"10^{{{int(exponent)}}}"

sns.set_style("darkgrid")
fig, axs = plt.subplots(1, figsize=(10, 8), sharex=True)

```

```

plt.plot(omega, M, label=r'M(\omega$)', color = '#fb5607')
plt.plot(omega, tangent_max, label=r"$" + label + "$", color = '#3a86ff' )

### X-AXIS
axs.set_xscale('log')
axs.set_xlim(min(omega), max(omega))
axs.set_xlabel(r'$\omega$ [eV]', fontsize=18)

### Y_AXIS
axs.set_yscale('log')
axs.set_ylabel(r'$M(\omega)$', fontsize=18)

### labelLines
xvals = [120, 600]
lines = plt.gca().get_lines()
labelLines(lines, align=True, xvals=xvals, fontsize=15)

plt.show()

```

C.2 Kod för all plottning

```

# ----- PACKAGES & STARTUP
↔ -----
from matplotlib import rc, rcParams
from functions import *

# Make use of TeX\useff
rc('text',usetex=False)
# Change all fonts to 'Computer Modern'
rc('font',**{'size':14, 'family':'serif', 'serif':['Times New Roman']})
rc('xtick.major', size=5, pad=7)
rc('xtick', labelsizes=15)
rc('ytick.major', size=5, pad=7)
rc('ytick', labelsizes=15)

omvec = np.linspace(0,80,1000)
omvec = np.delete(omvec,0)

# ----- PLOT EPSILON
↔ -----

plotter_epsilon(Si,omvec, [0,80], [1e-3,1e2], 'GPAW', 'Si')
plotter_epsilon(Ge,omvec, [0,80], [1e-3,1e2], 'GPAW', 'Ge')
plotter_epsilon(Al,omvec, [0,80], [1e-3,1e3], 'Mermin', 'Al')
plotter_epsilon(Al2O3,omvec, [0,80], [1e-3,1e2], 'Mermin', 'Al$_2$O$_3$')
plotter_epsilon(GaN,omvec, [0,80], [1e-4,1e1], 'Mermin', 'GaN')
plotter_epsilon(ZnS,omvec, [0,80], [1e-3,1e1], 'Mermin', 'ZnS')
plotter_epsilon(GaAs,omvec, [0,80], [1e-3,1e2], 'Mermin', 'GaAs')
plotter_epsilon(SiO2,omvec, [0,80], [1e-3,1e1], 'Mermin', 'SiO$_2$')

```

```

# ----- PLOT GAMMA -----
plotter_gamma(Si,omvec,[1,5,10],[0,80],'Si',[1e-34,1e-24])

plotter_gamma(Ge,omvec,[1,5,10],[0,80],'Ge')

plotter_gamma(Al,omvec,[1,5,10],[0,80],'Al')

plotter_gamma(Al2O3,omvec,[1,5,10],[0,80],'Al$_2$O$_3$')

plotter_gamma(GaN,omvec,[1,5,10],[0,80],'GaN')

plotter_gamma(ZnS,omvec,[1,5,10],[0,80],'ZnS')

plotter_gamma(GaAs,omvec,[1,5,10],[0,80],'GaAs')

plotter_gamma(SiO2,omvec,[1,5,10],[0,80],'SiO$_2$')

# ----- PLOT ELF -----

plotter_ELF(Si,Ge,'Si','Ge',[3e-5,7e0])

plotter_ELF(Al,Al2O3,'Al','Al$_2$O$_3$',[1e-3,1e2])

plotter_ELF(GaN,ZnS,'GaN','ZnS',[1e-3,1e1])

plotter_ELF(GaAs,SiO2,'GaAs','SiO$_2$',[1e-3,1e1])

```

C.3 Kod för att interpolera $d\Phi/d\omega$

```

# -----PACKAGES &
↳ STARTUP-----
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import rc, rcParams
from scipy.interpolate import interp1d

# Make use of TeX\useff
rc('text',usetex=False)
# Change all fonts to 'Computer Modern'
rc('font',**{'size':14, 'family':'serif', 'serif':['Times New Roman']})
rc('xtick.major', size=5, pad=7)
rc('xtick', labelsz=15)
rc('ytick.major', size=5, pad=7)
rc('ytick', labelsz=15)

# %%
# ----- FLUX -----

##Phi L
filename_L = '/Users/emmachan/Desktop/DarkELF-main/kod/data/flux_L_interpolation_2.txt'

x_L = []
y_L = []

for lines in open(filename_L, 'r'):
    line = lines.split(',')
    x_L.append(float(line[0]))
    y_L.append(float(line[1].strip()))

```

```
interp_func_L = interp1d(x_L,y_L) ### function for flux_L

## Phi T
filename_T = '/Users/emmachan/Desktop/DarkELF-main/kod/data/flux_T_interpolation_2.txt'

x_T = []
y_T = []

for lines in open(filename_T, 'r'):
    line = lines.split(',')
    x_T.append(float(line[0]))
    y_T.append(float(line[1].strip()))

interp_func_T = interp1d(x_T,y_T) ### function for flux_T
```

C.4 Kod för att beräkna \bar{N} för alla ämnen samt plottning av resultatet för den analytiska delen

```
from flux import *
from functions import *
from felanalys import errors

omvec = np.linspace(0,80,10000)
omvec = np.delete(omvec,0)

###
# ----- Integral -----

# Si
N_Si = integral(Si,omvec,interp_func_T,interp_func_L,1,80)

# Ge
N_Ge = integral(Ge,omvec,interp_func_T,interp_func_L,1,80)

# GaN
N_GaN = integral(GaN,omvec,interp_func_T,interp_func_L,1,80)

# ZnS
N_ZnS = integral(ZnS,omvec,interp_func_T,interp_func_L,1,80)

# GaAs
N_GaAs = integral(GaAs,omvec,interp_func_T,interp_func_L,1,80)

# SiO2
N_SiO2 = integral(SiO2,omvec,interp_func_T,interp_func_L,1,80)

# Al
N_Al = integral(Al,omvec,interp_func_T,interp_func_L,1,80)

# Al2O3
N_Al2O3 = integral(Al2O3,omvec,interp_func_T,interp_func_L,1,80)

###
# ----- Evaluating N_max for all materials
↳ -----
```

```

# N_L
N_max_L = integral_N_L_max(omvec,interp_func_L,1,80)
optimal_line_name = 'Teoretisk optimala gränsen'
N_materials = np.array([N_Si[1], N_Ge[1], N_GaN[1], N_ZnS[1], N_GaAs[1], N_SiO2[1],
↪ N_Al2O3[1], N_Al[1]])
materials =
↪ np.array(['r'Si',r'Ge',r'GaN',r'ZnS',r'GaAs',r'SiO$_{2}$',r'Al$_{2}$O$_{3}$',r'Al'])

omvec1 = np.linspace(1,2500,10000)
omvec1 = np.delete(omvec1,0)

M_function = get_max_M(omvec1,interp_func_L)
N_max_plot = plot_max_M(omvec1,interp_func_L)

N_opt_L = ((np.pi/2) * M_function[0])*1e5/1.97327

ratio = plotter_N_L_max(materials,N_materials,N_opt_L,optimal_line_name,errors[0])

```

C.5 Kod för alla felanalys funktioner

```

from flux import*
from functions import*

#%

omvec = np.linspace(0,80,1000)
omvec = np.delete(omvec,0)

def add_error(mätning, mätfel, n = 1000):
    return np.array(mätning) + mätfel*np.random.normal(size=n)

def error(values):
    mean = sum(values)/len(values)
    sigma = np.sqrt(sum((values-mean)**2)/len(values))
    return mean, sigma

error_L_list = []
for i in y_L:
    if i < 1e6:
        error_L_list.append(add_error(i,0.05 * i))
    elif i > 1e11:
        error_L_list.append(add_error(i, 0.2 * i))
    else:
        error_L_list.append(add_error(i,0.1 * i))

error_T_list = []
for i in y_T:
    if i < 1e6:
        error_T_list.append(add_error(i,0.01 * i))
    elif i > 1e11:
        error_T_list.append(add_error(i, 0.12 * i))
    else:
        error_T_list.append(add_error(i,0.08 * i))

def error_analys(material,n):
    N = []
    for i in range(1000):

```

```
    interp_func_L = interp1d(x_L, np.array(error_L_list)[:, i])
    interp_func_T = interp1d(x_T, np.array(error_T_list)[:, i])
    N.append(integral(material, omvec, interp_func_T, interp_func_L, 1, 80))

err = error(np.array(N)[:, n])

return err

def error_analys_optimal(materials):
    omega = np.linspace(1, 2500, 10000)
    omega = np.delete(omega, 0)
    ratio1 = []
    max_M = []
    for i in range(10):
        interp_func_L = interp1d(x_L, np.array(error_L_list)[:, i])
        interp_func_T = interp1d(x_T, np.array(error_T_list)[:, i])

        M_function = get_max_M(omega, interp_func_L)
        max_M.append(M_function[0])
        N_opt = ((np.pi / 2) * M_function[0]) * 1e5 / 1.97327

        list1 = []
        for i in materials:
            N_i = integral(i, omvec, interp_func_T, interp_func_L, 1, 80)[1]
            list1.append(N_opt/N_i)
        ratio1.append(list1)

    err = []
    for i in range(len(materials)):
        err.append(error(np.array(ratio1)[:, i])[1])

    max_M_error = error(np.array(max_M))[1]

    return err, max_M_error
```

C.6 Kod för att beräkna felanalys

```
from felanalys_funktioner import *

# ----- FELANALYS N -----

err_Si_N = error_analys(Si,0)

err_Ge_N = error_analys(Ge,0)

err_GaN_N = error_analys(GaN,0)

err_ZnS_N = error_analys(ZnS,0)

err_GaAs_N = error_analys(GaAs,0)

err_SiO2_N = error_analys(SiO2,0)

err_Al_N = error_analys(Al,0)

err_Al2O3_N = error_analys(Al2O3,0)
```

```
# ----- FELANALYS N_L -----  
  
err_Si_NL = error_analys(Si,1)  
err_Ge_NL = error_analys(Ge,1)  
err_GaN_NL = error_analys(GaN,1)  
err_ZnS_NL = error_analys(ZnS,1)  
err_GaAs_NL = error_analys(GaAs,1)  
err_SiO2_NL = error_analys(SiO2,1)  
err_Al_NL = error_analys(Al,1)  
err_Al2O3_NL = error_analys(Al2O3,1)  
  
# ----- FELANALYS N_T -----  
  
err_Si_NT = error_analys(Si,2)  
err_Ge_NT = error_analys(Ge,2)  
err_GaN_NT = error_analys(GaN,2)  
err_ZnS_NT = error_analys(ZnS,2)  
err_GaAs_NT = error_analys(GaAs,2)  
err_SiO2_NT = error_analys(SiO2,2)  
err_Al_NT = error_analys(Al,2)  
err_Al2O3_NT = error_analys(Al2O3,2)  
  
# ----- FELANALYS OPTIMAL N -----  
  
mat = [Si, Ge, GaN, ZnS, GaAs, SiO2, Al2O3, Al]  
N_max_L = integral_N_L_max(omvec,interp_func_L,1,80)  
  
errors = error_analys_optimal(mat)
```


D

Appendix D

Nedan visas koden som användes med den andra metoden på den numeriska analysen för att beräkna och plotta absorptionshastigheten samt beräkna händelsefrekvensen för aluminium. Anledningen till att koderna för de andra ämnena inte lades in beror på att det var väldigt mycket kod per ämne. Koderna för varje ämne är däremot ganska identiska med bara några mindre skillnader. Här visas koden för aluminium:

```
import sys, os
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.ticker
from matplotlib import rc, rcParams
import matplotlib.cm as cm
from mpl_toolkits.axes_grid1 import make_axes_locatable
import scipy.integrate as integrate
from scipy.interpolate import interp1d

# Make use of TeX\ufeff
rc('text',usetex=False)
# Change all fonts to 'Computer Modern'
rc('font',**{'size':14, 'family':'serif', 'serif':['Times New Roman']})
rc('xtick.major', size=5, pad=7)
rc('xtick', labelszize=15)
rc('ytick.major', size=5, pad=7)
rc('ytick', labelszize=15)

# uses matplotlib-label-lines, see for example
↪ https://github.com/cphyc/matplotlib-label-lines
from labellines import labelLine, labelLines

# this needs to point to the folder where darkelf.py is stored
work_dir = os.getcwd()
sys.path.append(work_dir+"/..")
plotdir=work_dir+"/plots/"

from darkelf import darkelf, targets

Al = darkelf(target='Al',filename="Al_mermin.dat")

fig, axs = plt.subplots(2,2,figsize=(12, 8),sharex=True)
fig.subplots_adjust(wspace=0.25)

omvec = np.linspace(1.01,80,200) #omega

#Epsilon Re
```

D. Appendix D

```
y2_Re = [Al.eps1(omi,omi) for omi in omvec]
#y2 = [Si_mermin.eps1(omi,omi) for omi in omvec]
axs[0][0].plot(omvec,y2_Re,color='MediumBlue',linestyle='--',label='Al, theory')

axs[0][0].set_yscale('linear')
axs[0][0].set_xlim([0,0.2])
axs[0][0].legend(loc='upper right')
axs[0][0].set_xlabel(r'$\omega$ [eV]')
axs[0][0].set_ylabel(r'$\epsilon_1$',fontsize=16)

#Epsilon Im
y2_Im = [Al.eps2(omi,omi) for omi in omvec]
axs[0][1].plot(omvec,y2_Im,color='MediumBlue',linestyle='--',label='Al, theory')

axs[0][1].set_yscale('log')
axs[0][1].set_ylim([1e-3,1e2])
axs[0][1].set_xlim([0,40])
axs[0][1].legend(loc='upper right')
axs[0][1].set_ylabel(r'$\epsilon_2$',fontsize=16)

GammaL, GammaT, kappa, m_v1, m_v2, m_v3 = [], [], 10**-12, 1, 5, 10
GammaL5eV, GammaT5eV, GammaL10eV, GammaT10eV = [], [], [], []

for i in range(len(y2_Re)): #Beräknar Gamma_L för 1 eV, 5 eV och 10 eV
    a = ((kappa**2)*(m_v1**2)*y2_Im[i])/(omvec[i]*abs(y2_Re[i]+y2_Im[i]*1j)**2)
    b = ((kappa**2)*(m_v2**2)*y2_Im[i])/(omvec[i]*abs(y2_Re[i]+y2_Im[i]*1j)**2)
    c = ((kappa**2)*(m_v3**2)*y2_Im[i])/(omvec[i]*abs(y2_Re[i]+y2_Im[i]*1j)**2)
    GammaL.append(a)
    GammaL5eV.append(b)
    GammaL10eV.append(c)
g_L = interp1d(omvec, GammaL)
g_L_5eV = interp1d(omvec, GammaL5eV)
g_L_10eV = interp1d(omvec, GammaL10eV)

for j in range(len(y2_Re)): #Beräknar Gamma_T för 1 eV, 5 eV och 10 eV
    d = (((kappa**2)*(m_v1**4)*y2_Im[j])/((omvec[j]**3)*abs(y2_Re[j] + y2_Im[j]*1j -
    ↪ 1)**2)) *
    ↪ (1+((2*(m_v1**2)*(omvec[j]**2)*(y2_Re[j]-1)+(m_v1**4)))/((omvec[j]**4)*abs(y2_Re[j]
    ↪ + y2_Im[j]*1j - 1)**2))**-1
    e = (((kappa**2)*(m_v2**4)*y2_Im[j])/((omvec[j]**3)*abs(y2_Re[j] + y2_Im[j]*1j -
    ↪ 1)**2)) *
    ↪ (1+((2*(m_v2**2)*(omvec[j]**2)*(y2_Re[j]-1)+(m_v2**4)))/((omvec[j]**4)*abs(y2_Re[j]
    ↪ + y2_Im[j]*1j - 1)**2))**-1
    f = (((kappa**2)*(m_v3**4)*y2_Im[j])/((omvec[j]**3)*abs(y2_Re[j] + y2_Im[j]*1j -
    ↪ 1)**2)) *
    ↪ (1+((2*(m_v3**2)*(omvec[j]**2)*(y2_Re[j]-1)+(m_v3**4)))/((omvec[j]**4)*abs(y2_Re[j]
    ↪ + y2_Im[j]*1j - 1)**2))**-1
    GammaT.append(d)
    GammaT5eV.append(e)
    GammaT10eV.append(f)
g_T = interp1d(omvec, GammaT)
g_T_5eV = interp1d(omvec, GammaT5eV)
g_T_10eV = interp1d(omvec, GammaT10eV)

axs[1][0].plot(omvec,GammaT,color='Green',linestyle='--',label='Al, 1 eV')
axs[1][0].plot(omvec,GammaT5eV,color='Blue',linestyle='--',label='Al, 5 eV')
axs[1][0].plot(omvec,GammaT10eV,color='Red',linestyle='--',label='Al, 10 eV')
axs[1][0].set_yscale('log')
axs[1][0].set_ylim([1e-29,1e-21])
axs[1][0].set_xlim([0,100])
```

```

axs[1][0].legend(loc='upper right')
axs[1][0].set_ylabel(r'$\Gamma T$', fontsize=16)

axs[1][1].plot(omvec, GammaL, color='Green', linestyle='--', label='A1, 1 eV')
axs[1][1].plot(omvec, GammaL5eV, color='Blue', linestyle='--', label='A1, 5 eV')
axs[1][1].plot(omvec, GammaL10eV, color='Red', linestyle='--', label='A1, 10 eV')
axs[1][1].set_yscale('log')
axs[1][1].set_ylim([1e-29, 1e-20])
axs[1][1].set_xlim([0, 100])
axs[1][1].legend(loc='upper right')
axs[1][1].set_ylabel(r'$\Gamma L$', fontsize=16)

print(f'GammaL: {GammaL}')
print(f'GammaT: {GammaT}')

filename_L = '/Users/Isak/OneDrive/Desktop/DarkELF-main/lux_L_interpolation.txt'

x_L, y_L = [], []

for lines in open(filename_L, 'r'):
    line = lines.split(',')
    x_L.append(float(line[0]))
    y_L.append(float(line[1].strip()))

f_L = interp1d(x_L, y_L)
filename_T = '/Users/Isak/OneDrive/Desktop/DarkELF-main/lux_T_interpolation.txt'

x_T, y_T = [], []

for lines in open(filename_T, 'r'):
    line = lines.split(',')
    x_T.append(float(line[0]))
    y_T.append(float(line[1].strip()))

f_T = interp1d(x_T, y_T)

V, T, Br = 1, 1, 1
N, N_L, N_T = [], [], []
for omega in omvec:
    y1 = (omega/abs(np.sqrt(omega*omega - m_v1*m_v1))) * (f_L(omega)*g_L(omega) +
    ↪ f_T(omega)*g_T(omega))
    y2 = (omega/abs(np.sqrt(omega*omega - m_v1*m_v1))) * (f_L(omega)*g_L(omega))
    y3 = (omega/abs(np.sqrt(omega*omega - m_v1*m_v1))) * (f_T(omega)*g_T(omega))
    N.append(y1)
    N_L.append(y2)
    N_T.append(y3)

Händelsefrekvens = V*T*Br*integrate.trapz(N, omvec)
Händelsefrekvens_L = V*T*Br*integrate.trapz(N_L, omvec)
Händelsefrekvens_T = V*T*Br*integrate.trapz(N_T, omvec)
print(Händelsefrekvens*(1/(1.973e-5)))
print(Händelsefrekvens_L*(1/(1.973e-5)))
print(Händelsefrekvens_T*(1/(1.973e-5)))

plt.show()

```

INSTITUTIONEN FÖR FYSIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg, Sverige
www.chalmers.se



GÖTEBORGS
UNIVERSITET



CHALMERS