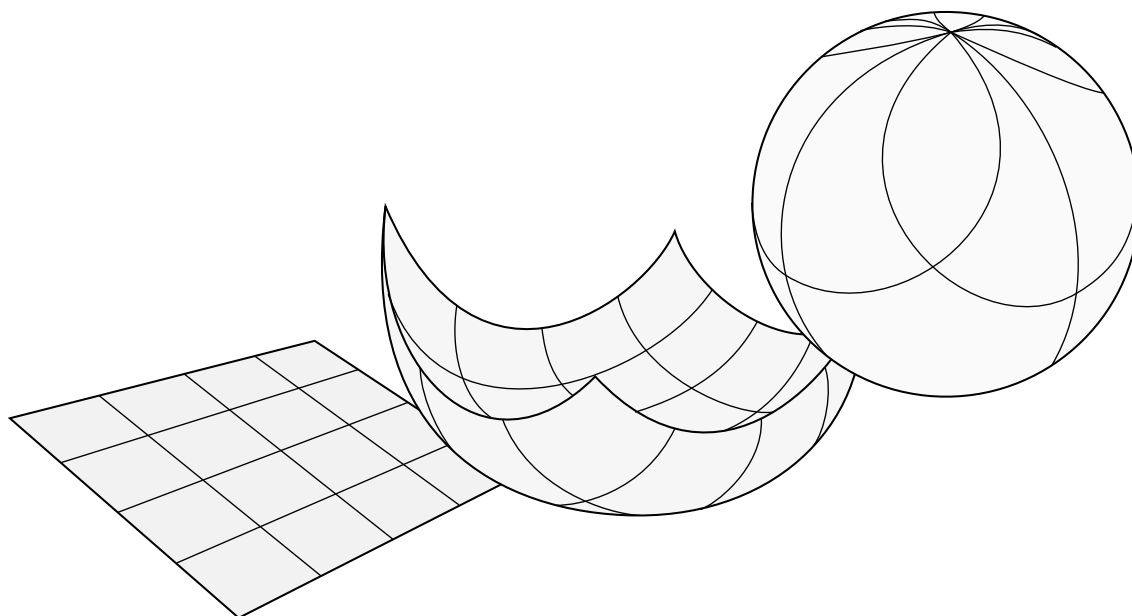




Om Gelfand-dualiteten

En introduktion till kommutativa Banach-algebror

Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers

Oscar Carlsson

Jack Thelin af Ekenstam

Magnus Fries

Erik Jansson

Om Gelfand-dualiteten

En introduktion till kommutativa Banach-algebror

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk fysik vid Chalmers

Oscar Carlsson Jack Thelin af Ekenstam Magnus Fries

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik vid Chalmers

Erik Jansson

Handledare: João Pedro Paulos
 Maria Roginskaya
Examinator: Marina Axelson-Fisk

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2018

Populärvetenskaplig presentation

Gelfand-translate: En översättning mellan topologi och algebra

På en väldigt grundläggande nivå utforskar matematiker världen genom att undersöka de matematiska egenskaperna hos objekt, samt hur olika objekt förhåller sig till varandra. Ett mycket viktigt verktyg i detta utforskande är att leta efter samband mellan något objekt man redan känner till och något, antingen helt eller delvis, okänt. Nedan presenteras två, till synes helt olika grenar av matematiken. Det finns överraskande nog en koppling mellan dessa. En slags "Gelfand translate". Dessa områden är topologi och algebra.

Topologin är en gren av den moderna matematiken som kan ses som en slags utvidgning av den klassiska geometrin. Istället för att studera avstånd och areor bryr man sig i topologin endast om egenskaper av kroppen som ska bevaras under kontinuerliga deformationer. Dessa deformationer kan förstås som att man får dra i kroppen men inte klippa eller riva sönder den.

Ett typiskt exempel är att det inom topologin inte är skillnad på en munk och en kaffekopp med ett öra. Antalet hål är exempel på något som man studerar inom topologin, inte just hur kroppen ser ut, men vilka egenskaper som bevaras då kroppen omformas, så kallade topologiska invarianter. Topologi kan framstå som något matematikerna i sitt elfenbenstorn drömt fram, men det visar sig att topologi har en mängd användningar inom allt från neurologi till att matematiskt beskriva hur ett spåravnät hänger ihop.

En annan, till synes annorlunda gren av matematiken är den moderna algebran. Denna algebra skiljer sig från grundskolealgebran i det avseendet att vi inte längre är intresserade av att räkna eller utveckla parenteser. Istället bryr vi oss nu om hur talen interagerar med varandra med hjälp av mer generella regler, så kallade axiom. Vi kan också lämna talen och studera hur mer abstrakta objekt med mer abstrakta operationer beter sig; till exempel kan vi matematiskt beskriva de olika sätten att rotera geometriska objekt.

Vi är alltså intresserade av hur element interagerar under operationer, och dessa element behöver alltså inte längre vara tal. Ett viktigt koncept inom modern algebra är också att vissa av dessa strukturer kommer vara olika sidor av samma mynt. Ett exempel på detta är att alla sätt rotera en kvadrat kommer att vara samma sak som att betrakta talen 0, 1, 2 och 3 på ett visst sätt. Man tänker då att 1 svarar mot 90° rotation kring kvadratens egen axel. På samma sätt motsvarar 2 och 3 rotation med 180° respektive 270° . Ifall vi utför flera rotationer efter varandra svarar detta mot en slags addition, exempelvis svarar $2 + 2$ mot rotation med $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$. Eftersom kvadraten då roteras ett helt varv 360° är detta samma sak som att inte rotera kvadraten alls! Här inför vi en speciell addition för 0, 1, 2 och 3, nämligen vi säger att om summan är jämt delbar med fyra så är den lika med noll. Detta kan verka ointuitivt men kan förstås som att rotera ett helt varv egentligen är samma sak som att inte rotera alls. Denna typ av likhet mellan strukturer, som i det ovannämnda exemplet, kallas för *isomorfi* och är ett ytterst viktigt begrepp inom all modern matematik. Faktum är att modern algebra är ett helt nödvändig fundament inom fysik, kemi och många grenar av tillämpad matematik.

Dessa två grenar av matematiken kan framstå som helt väsensskilda, men som vi kommer att se finns det gott om begrepp som påminner om varandra inom topologin och algebran. Det kan handla om att vissa saker som hör till den topologiska världen har en motsvarighet inom den algebraiska! Vi kan illustrera med en liknelse från språkens värld. Franska och engelska är två olika språk, men vi kan använda en ordbok eller översättningstjänst för att få engelska ord på franska och på ett liknande sätt kan man finna en slags matematisk ordbok mellan de två olika matematiska språken, vilket är vad detta arbete handlar om.

Ett exempel är *kompaktifiering*, vilket kan tänkas som att man fyller i vissa hålrum i det topologiska rummet, vilket som namnet antyder handlar om att göra rummet kompakt. Ett enkelt fall är att lägga till oändligheten till tallinjen! Kompaktifieringsbegreppet har sin algebraiska "översättning" i att lägga till element så att den roll ettan fyller under multiplikation med vanliga tal ($1 \cdot 2 = 2$), återfinns, detta kallas för *unitalisering* och kan ses som att lägga till det som kan liknas till en etta, ett så kallad enhetsselement. Att lägga till ett sådant element är av stor vikt för att kunna arbeta med strukturerna.

Sammanfattning

Detta kandidatarbete är en litteraturstudie inom matematik och specifikt i Gelfand-teori, som huvudsakligen berör kommutativa Banach-algebror. Inledningsvis introduceras notation för algebra och topologi. Därefter följer teoridelen, där spektrum, modulära ideal och multiplikativa linjära funktionaler studeras enskilt för att sedan relateras till varandra. Gelfand-transformen, som kan betraktas som en generalisering av Fouriertransformen, introduceras och kraven för att denna ska vara en, så kallad, isometrisk $*$ -isomorfi presenteras med tillhörande bevis. Resultatet kallas för Gelfand-dualiteten och leder till en koppling mellan C^* -algebror och lokalt kompakta Hausdorff- rum . Vid sidan av den rent teoretiska presentationen illustreras många resultat med hjälp av exempel.

Abstract

This bachelor's thesis is a literature study in mathematics, specifically in Gelfand theory which mainly concerns itself with commutative Banach algebras. Initially, important concepts in algebra and topology will be introduced, whereafter the theoretical presentation follows in which important concepts such as spectrum, modular ideals and multiplicative linear functionals are introduced and studied independently and then related to each other. This will lead to the main result of the text, the Gelfand duality, which can be thought of as a generalization of the Fourier transform. Conditions for the Gelfand transform to be a so called isometric $*$ -isomorphism are presented with a full proof. This result is known as the Gelfand duality and yields a connection between C^* -algebras and locally compact Hausdorff spaces. Alongside the theoretical presentation many results are illustrated by enlightening examples.

Innehåll

1	Introduktion	1
1.1	Topologi	1
1.2	Algebra	1
1.3	Banach-algebror	1
1.4	Gelfand-teori	2
1.5	Arbetets struktur	2
1.6	Matematiska förkunskaper	2
2	Matematiska grunder	3
2.1	Topologi	3
2.2	Banach-algebror	4
3	Gelfand-teori	7
3.1	Spektrum i Banach-algebror	7
3.2	Modulära ideal	10
3.3	Multiplikativa linjära funktionaler	12
3.4	Strukturrummet och Gelfand-representationen	14
3.5	Kommutativa C^* -algebror och Gelfand-dualiteten	16
3.6	Kompaktifiering och unitalisering	19
A	Grundläggande teori	I
A.1	Topologi	I
A.2	Avbildningar och abstrakt algebra	III
A.3	Metrisk rum	IV
A.4	Linjär algebra	IV
A.5	Kvotalgeror	V
A.6	Mer om unitalisation	VI
B	Kategoriteori och Dualitetsbegreppet	VIII
B.1	Introduktion till Kategorier	VIII
B.2	Gelfand-dualiteten formulerat i kategoriteori	X
B.3	Pontryagin-dualiteten formulerat i kategoriteori	X
C	Icke-kommutativa C^*-algebror	XI
D	Använda satser	XIII
E	Bevis av satser	XIV
E.1	Satser från Avsnitt 3.1	XIV
E.2	Satser från Avsnitt 3.2	XVI
E.3	Satser från Avsnitt 3.3	XVII
E.4	Satser från Avsnitt 3.4	XIX
E.5	Satser från Avsnitt 3.5	XXI
E.6	Satser från Avsnitt 3.6	XXI
F	Symbollista	XXII
	Litteraturförteckning	XXII

Förord

Vi vill tacka vår huvudhandledare João Pedro Paulos för projektidén, intressanta föreläsningar och stöd i bearbetning av materialet. Vi vill även tacka vår andra handledare Maria Roginskaya för god handledning och stöd i skrivprocessen.

Under arbetets gång har loggbok, som består av personliga tidsloggar och en gruppdagbok, förts. I gruppdagboken beskrivs översiktligt vad gruppen har gjort vecka för vecka medan de personliga tidsloggarna vidare preciserar varje gruppmedlems dagliga bidrag till projektet.

Ansvarsområden

Oscar Carlsson har ansvarat för skrivandet av den matematiska introduktionen i kapitel 2 (utom definitionen av ideal och kvotalgebra), avsnitt 3.6, appendix A.1, A.6 och E.6. Vidare har Oscar även ansvarat för att den använda mallen har önskat utseende.

Jack Thelin af Ekenstam har ansvarat för skrivandet introduktionen, sammanfattning, avsnitt 3.2 och 3.3, appendix A.2-4 samt definitionerna av ideal och kvotalgebra i 2.2. Vidare har Jack även ansvarat för att möten med gruppen såväl som handledare har bokats in.

Magnus Fries har ansvarat för skrivandet av avsnitt 3.4 och 3.5, samt appendix B.2, B.3, C, halva D och F. Vidare har Magnus ansvarat för att veckorapporterna har skrivits och skrivit dem tillsammans med Erik Jansson, ritat bilden till omslaget samt anpassat rapporten efter mallen.

Erik Jansson har ansvarat för skrivandet av den populärvetenskapliga presentationen, abstract, avsnitt 3.1, delar av appendix D, appendix B.1 och E.1 samt att tillsammans med Magnus Fries skriva veckorapporterna. Erik har även varit mycket involverad i rapportens språkliga struktur.

Etiska aspekter

Projektets resultat förväntas inte innebära några negativa etiska konsekvenser då vi inte har bidragit med ny kunskap till ämnet, utan enbart sammanfattat och gjort det enklare att tillgå. Projektrapporten kan bidra med en möjlighet för intresserade studenter att få insikt i ett avancerat ämne, vilket kan ses som positivt för studenters bildning. Materialet kommer troligen inte kunna användas för att påverka samhället negativt då kunskapsområdet i sig är långt från tekniska applikationer.

Kapitel 1 | Introduktion

Matematik består av en samling, till synes distinkta, förgreningar. Två av dessa är topologi och algebra. Översiktligt studeras mängder med ytterligare struktur, eller matematiska egenskaper, inom båda grenarna. Däremot skiljer sig topologisk struktur från algebraisk struktur.

1.1 Topologi

Inom topologi intresserar man sig för de egenskaper av topologiska rum som bevaras under kontinuerliga deformationer. I vissa fall kan delmängder av topologiska rum, med fördel, tolkas som geometriska objekt. Deformationerna av delmängderna kan då visualiseras för att förstås mer intuitivt.

En viktig klass av topologiska rum är metriska rum som studeras utförligt inom reell analys. Med en metrik kan alltid en topologi definieras som öppna bollar, centrerade i varje punkt av rummet, och unioner av dessa. Det sägs då att metriken inducerar en topologi.

Vid första anblick kan topologi framstå som abstrakt tankekonstruktion, men trots det utvecklas alltjämt tillämpningar inom exempelvis datalogi och fysik. Ett nutida exempel är teorin om topologiska fasövergångar som tilldelades nobelpris i fysik år 2016.

1.2 Algebra

Algebra kan översiktligt beskrivas som studiet av algebraiska strukturer. En algebraisk struktur är en mängd utrustad med ett ändligt antal operationer. Ett välkänt exempel är de reella talen med vanlig addition och multiplikation som utgör ett exempel på en så kallad kropp, en vanlig algebraisk struktur.

Ett viktigt område av algebra är linjär algebra, där vektorrum och linjära transformationer av dessa studeras. Den linjära strukturen har visat sig användbar inom både matematik och fysik. Exempelvis kan funktionalanalys och representationsteori betraktas som vidareutvecklingar av den linjära algebran. De ovannämnda nyttjas flitigt för att beskriva kvantmekaniska fenomen.

1.3 Banach-algebror

En algebra är ännu ett exempel på en algebraisk struktur. Det matematiska objektet som benämns *algebra* ska inte förväxlas med ämnet som har samma namn. Specifikt är en algebra ett vektorrum som är slutet under en ytterligare operation, vanligen kallad multiplikation. Värt att notera är att produkten av två element är ett element i algebran självt, till skillnad från hur exempelvis skalärprodukt beter sig. Huvudsakligen ligger intresset i normerade kompletta algebror, så kallade Banach-algebror. Den tillhörande normen inducerar då en topologi. Banach-algebror har därmed egenskaper som är intressanta ur ett algebraiskt, såväl som ett topologiskt perspektiv.

Metoder från topologi visar sig vara användbara för att undersöka diverse algebraiska egenskaper och även omvändningen gäller. Likaså uppstår användningsområden för tekniker och resultat som klassiskt tillhör den matematiska analysen. Detta illustrerar bredden av den matematiska teori som kommer till användning i studiet av Banach-algebror.

Viktiga exempel på Banach-algebror ges av mängder bestående av kontinuerliga komplexvärda avbildningar från topologiska rum. Att förstå dessa konstruktioner är en central del i att förstå teorin om kommutativa Banach-algebror.

1.4 Gelfand-teori

År 1943 presenterade Israel Gelfand en samling viktiga resultat rörande Banach-algebror. Ett av dessa resultat var Gelfand-dualiteten som fastslår kraven för att det ska existera en stark korrespondens, en så kallad dualitet, mellan vissa topologiska rum och Banach-algebror. Kravet kom att kallas för C^* -egenskapen, som utläses C -stjärne-egenskapen. Följaktligen benämns Banach-algebror med C^* -egenskapen som C^* -algebror.

Denna dualitet kan, likt en översättningstabell, omvandla ett påstående om topologi till ett motsvarande algebraiskt påstående. Exempelvis kommer vi se att en viss typ av C^* -algebror kan konstrueras från vissa topologiska rum. Man kan då kontempera huruvida algebran har ett identitetsselement, det visar sig att detta infaller exakt då det topologiska rummet är kompakt. På så vis kan man tolka existens av identitetsselement som den algebraiska motsvarigheten till kompakthet.

1.5 Arbetets struktur

Arbetet har huvudsakligen utförts som en litteraturstudie av *A Course in Commutative Banach Algebras*, av Eberhard Kaniuth, och *Topology*, av James R. Munkres. Vidare har arbetets författare även tagit del av föreläsningar som letts av João Pedro Paulos, doktorand på Matematiska vetenskaper. För att förtydliga teoriframställningen har arbetets författare försökt konstruera illustrativa exempel.

Rapportens syfte är att presentera den nödvändiga teorin som leder upp till Gelfand-dualiteten i avsnitt 3.5, för att sedan exemplifiera resultatets följder i avsnitt 3.6. Bevis för flera mindre centrala resultat har utelämnats från huvuddelen av texten. Författarnas förhoppning är att läsaren kan, med hjälp av huvuddelen, tillägna sig en förståelse för ämnet och sedan eventuellt fördjupa sig genom att studera bevisen i appendix.

1.6 Matematiska förkunskaper

I denna rapport utgår vi ifrån att läsaren är bekant med följande ämnen: *inledande reell analys; linjär algebra*, inklusive *linjära operatorer* och *fullständiga normerade rum*; *Fourieranalys*; samt *komplexanalys*.

Kunskap inom *abstrakt algebra* och *topologi* förutsätts inte. Rapporten introducerar de nödvändiga begreppen för att följa arbetet, men gör det kortfattat. För mer fullständiga definitioner, samt definitioner av relevant matematik som antas vara förkunskaper, hänvisas läsaren till Appendix A. I appendix återfinns även en symbollista över den använda notationen samt vidare läsning om exempelvis kategori-teori och icke-kommutativa C^* -algebror.

Kapitel 2 | Matematiska grunder

I detta kapitel introduceras de grundläggande matematiska begrepp inom topologi och algebra som resten av rapporten bygger på.

2.1 Topologi

En mycket central del av den matematiska analysen är begreppet kontinuerliga funktioner vars definitions-mängd ofta är en delmängd av $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$. Topologi låter oss utöka kontinuitetsbegreppet till funktioner mellan godtyckliga mängder, och som vi kommer se har de kontinuerliga funktionerna egenskapen att de bevarar topologisk struktur. Men för att komma dit behöver vi först definiera topologi, som i början kan te sig väldigt abstrakt men som ger mycket kraftfulla verktyg, samt några viktiga tillhörande koncept.

Definition 2.1.1 (Topologi på en mängd) Givet en mängd X definieras en *topologi* $\mathcal{T}_X$ på X enligt $\mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ där $\mathcal{P}(X)$ betecknar potensmängden av X . Topologin måste uppfylla följande:

1. $\emptyset \in \mathcal{T}_X$ samt $X \in \mathcal{T}_X$;
2. $\mathcal{T}_X$ är sluten under godtyckliga unioner;
3. $\mathcal{T}_X$ är sluten under ändliga snitt.

Vidare kallas delmängder $U \subseteq X$ öppna om $U \in \mathcal{T}_X$. När vi har utrustat en mängd X med en topologi kallar vi X kortfattat för ett topologiskt rum. Ibland skrivs ett topologiskt rum som $(X, \mathcal{T}_X)$.

Vi kan definiera en topologi på diverse olika sätt: en metod för ändliga mängder X är att helt enkelt lista delmängder av X och kontrollera att de uppfyller kriterierna, medan för obegränsade mängder är det vanligt att ge en regel som definierar vilka mängder som är öppna. Dessa illustreras med följande exempel. En annan metod är genom att konstruera en topologisk bas, denna definieras i appendix A.1.

Exempel 2.1.2: Givet mängden $X = \{1, 2, 3, 4\}$ är en möjlig topologi $\mathcal{T}_X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ medan $\mathcal{T}'_X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ inte är en topologi eftersom $\{1\} \cup \{3\} = \{1, 3\} \notin \mathcal{T}'_X$.

Exempel 2.1.3: Ett exempel på en regelgenererad topologi är *standardtopologin* på $\mathbb{R}^n$. Den definieras genom att de öppna mängderna fås från unioner av ”öppna” bollar i $\mathbb{R}^n$: $B_r(x_0) = \{x : \|x - x_0\| < r\}$, där $x_0 \in \mathbb{R}^n$ och $r > 0$. Här används begreppet ”öppen” i den mening som är känd från analysen, d.v.s. mängder vars gränspunkter inte är element i mängden.

När vi arbetar i $\mathbb{R}^n$ är det enkelt att avgöra om två punkter är separerade då vi kan beräkna avståndet mellan punkterna; i det generella topologiska fallet har vi dock inget koncept av avstånd men vill fortfarande kunna se om punkter är separerade. För att göra detta introducerar vi en s.k. Hausdorff-topologi enligt följande.

Definition 2.1.4 (Hausdorff-topologi) En topologi $\mathcal{T}_X$ kallas för en *Hausdorff-topologi*, eller kortare sagt att det topologiska rummet X är ett *Hausdorff-rum*, om vi kan separera två olika punkter i X med öppna mängder som inte delar någon punkt.

Ofta vill vi ha möjlighet att prata om avstånd mellan punkter och för detta introduceras en *metrik*, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$, och X kallas då ett *metriskt rum*. (Se appendix A.3 för mer detaljer.) Från en metrik kan vi inducera en topologi där de öppna mängderna fås från unioner av mängder på formen $B_r(x_0) = \{x : d(x, x_0) < r\}$ där $r > 0$, se exempel 2.1.3 där vi använder $d(x, y) = \|x - y\|$.

Då man har ett metriskt rum brukar man inom analysen definiera kontinuitet genom en så kallad $\varepsilon - \delta$ konstruktion, men inom topologi finns en mer allmän definition, vilken är den som används i rapporten.

Definition 2.1.5 (Kontinuerlig funktion) En funktion $\phi : X \rightarrow Y$ mellan två topologiska rum X och Y är *kontinuerlig* om det för alla $U \in \mathcal{T}_Y$ gäller att $\text{Urbild}_\phi(U) := \{x \in X : \phi(x) \in U\} \in \mathcal{T}_X$.

Observera att mängder är öppna om de är element i topologin i det topologiska rummet och från detta kan vi nu se att kontinuerliga funktioner är de som bevarar den topologiska strukturen av Y till X . Om båda topologierna på X och Y är inducerade av en metrik kommer den topologiska definitionen vara ekvivalent med den vanliga $\varepsilon - \delta$ definitionen.

Exempel 2.1.6: Låt $X = \mathbb{R}$ och $Y = \mathbb{R}$ samt definiera topologier $\mathcal{T}_X = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, kallad *den diskreta topologin*, och $\mathcal{T}_Y = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, kallad *den indiskreta topologin*. Då gäller att $\phi : X \rightarrow Y$ enligt $x \mapsto x$, d.v.s. identitesfunktionen, är kontinuerlig eftersom $\text{Urbild}_\phi(\{\emptyset\} \in \mathcal{T}_Y) = \{\emptyset\} \in \mathcal{T}_X$ och $\text{Urbild}_\phi(\{\mathbb{R}\} \in \mathcal{T}_Y) = \{\mathbb{R}\} \in \mathcal{T}_X$. Dock är $\psi : Y \rightarrow X$ enligt $x \mapsto x$ inte kontinuerlig; detta eftersom till exempel $\text{Urbild}_\psi(\{15\} \in \mathcal{T}_X) = \{15\} \notin \mathcal{T}_Y$.

För att nu kunna uttala oss om två topologiska rum har samma egenskaper eller inte, behöver vi ett koncept av likhet. Om vi har en kontinuerlig funktion $\phi : X \rightarrow Y$ kan vi, eftersom den är kontinuerlig, säga att den topologiska struktur som Y har finns i X , men inte tvärt om; men om ϕ har en kontinuerlig invers kommer även X 's topologiska struktur finnas i Y , och med detta ser vi att de är samma ur ett topologiskt perspektiv då de har samma topologiska struktur. Om en sådan funktion ϕ finns kallas den för en *homeomorfi* och X och Y kallas *homeomorfa*. Detta skrivs ibland $X \approx Y$.

Exempel 2.1.7: Som kommer beröras senare i rapporten är $\mathbb{R}$ med tillägget av en s.k. oändlighetspunkt $\{\infty\}$ homeomorf med cirkeln, även kallad S^1 , via den stereografiska projektionen.

Vidare är en intressant egenskap hos mängder om de är *kompakta*; en anledning för detta är att kontinuerliga funktioner över kompakta mängder måste vara begränsade, men detta stämmer inte för icke-kompakta mängder. För $\mathbb{R}^n$ med standardtopologin är kompakta mängder de som är slutna och begränsade. En full definition av kompakta mängder, som involverar topologin på mängden, kan hittas i appendix A.1 och kan ses som en generalisering av kompakthet för delmängder av $\mathbb{R}^n$. Även om en mängd inte är kompakt kan den vara *lokalt kompakt*, om varje punkt har en kompakt *omgivning*. Där en omgivning till en punkt är en mängd som tillåter att vi kan lägga en öppen mängd runt punkten och fortfarande vara i omgivningen.

Om mängden vi arbetar med inte är kompakt kan vi utföra en *kompaktifiering*. Om mängden X är ett lokalt kompakt Hausdorff-rum kan vi göra en så kallad *enpunktskompaktifiering*, betecknad X^∞ . Denna utförs genom att lägga till en *oändlighetspunkt* och anpassa topologin för att inkludera den. Resultatet kommer alltid vara ett kompakt Hausdorff-rum och vidare detaljer kan hittas i appendix A.1.

Exempel 2.1.8: $\mathbb{R}$ är inte kompakt i sig själv, men om vi lägger till oändlighetspunkten $\{\infty\}$ får vi en kompakt mängd $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ som noterades i exempel 2.1.7 är homeomorf med S^1 . Eftersom S^1 är kompakt och homeomorf med $\mathbb{R}^\infty$ är S^1 en kompaktifiering av $\mathbb{R}$. För mer detaljer se definition A.1.17 i appendix A.1.

2.2 Banach-algebror

Ett annat område av matematiken som används i stor utsträckning i rapporten är algebraiska strukturer där fokus ligger på vilken struktur och vilka egenskaper en så kallad *algebra* har. Det är också av intresse att se vilka algebror som har en ekvivalent struktur. För att få ett sådant koncept måste vi studera avbildningar mellan algebror. I detta avsnitt introduceras de grundläggande begreppen inom algebra som behövs för att läsa rapporten, och för den som önskar fler detaljer kan detta hittas i appendix A.2.

Definition 2.2.1 (Algebra och normerad algebra) Ett vektorrum A över en kropp K med en bilinjär produkt, $\odot : A \times A \rightarrow A$, kallas för en *algebra* över K . Om $K = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ kallas A för en reell respektive komplex algebra. Vidare kallas A *normerad* om det finns en norm, $\|\cdot\|_A : A \rightarrow \mathbb{R}$, som uppfyller att $\forall x, y \in A : \|xy\|_A \leq \|x\|_A \cdot \|y\|_A$. En sådan norm kallas *submultiplikativ*.

För att göra detta lite mer konkret följer här några exempel på ofta använda algebror.

Exempel 2.2.2: Låt $C(X)$ beteckna mängden av kontinuerliga funktioner från mängden X till $\mathbb{C}$. Med punktvis addition: $(f \oplus g)(z) := f(z) + g(z)$, och vanlig skalär multiplikation: $(\lambda \odot_s f)(z) := \lambda f(z)$ utgör detta ett vektorrum, men om strukturen av punktvis multiplikation introduceras: $(f \odot g)(z) := f(z) \cdot g(z)$ får vi en algebra. Vidare kan vi lägga på en norm, till exempel *supremumnormen*: $\|f\|_\infty := \sup_{z \in X} |f(z)|$. Denna uppfyller det submultiplikativa villkoret i definition 2.2.1 och gör algebran till en normerad algebra.

En algebra som kommer användas mycket i rapporten är $C_0(X)$ som definieras nedan.

Definition 2.2.3 (Algebran $C_0(X)$) Mängden som betecknas $C_0(X)$ definieras som mängden av alla funktioner som försvinner, d.v.s. är mindre än något godtyckligt $\varepsilon > 0$, på $X \setminus U$ för någon stängd och kompakt mängd $U \subset X$. Med punktvis addition och multiplikation samt multiplikation med komplexa skalärer är detta en algebra.

Exempel 2.2.4: Låt $X = (-1, 1)$, då är elementen i $C_0(X)$ funktioner f som uppfyller $|f(x)| \rightarrow 0$ då $|x| \rightarrow 1$. Om istället $X = \mathbb{R}$ har vi att $f \in C_0(X)$ om $|f(x)| \rightarrow 0$ då $|x| \rightarrow \infty$.

En mycket välstuderad typ av vektorrum är Banach-rum, se appendix A.4 för definition. Om vi lägger till en bilinjär produkt på ett Banach-rum får vi en *Banach-algebra* och för att generalisera görs följande definition.

Definition 2.2.5 (Banach-algebra) En *Banach-algebra* är en normerad algebra där multiplikationen är associativ, d.v.s. $a(bc) = (ab)c$, och där algebran dessutom är *fullständig* under den angivna normen.

Exempel 2.2.6: Både $C(X)$ och $C_0(X)$ ovan är Banach-algebror med supremumnormen.

För att göra det lättare att prata om egenskaperna hos en algebra introducerar vi lite terminologi.

Definition 2.2.7 (Terminologi för algebror) En algebra A sägs vara: *kommutativ* om $\forall x, y \in A : xy = yx$; *unitär* om det finns en multiplikativ identitet, d.v.s. $\exists e \in A : \forall a \in A : ae = ea = a$; *divisionsalgebra* om A är unitär och $\forall x \in A : x \neq 0 : \exists y \in A : xy = yx = e$, d.v.s. att varje nollskilt element har en multiplikativ invers.

Exempel 2.2.8: Ett exempel på en algebra som saknar identitet är $C_0(\mathbb{R})$ utrustad med punktvis addition och multiplikation. Detta eftersom identiteten skulle vara $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ enligt $x \mapsto 1$ och denna går inte mot noll då $|x| \rightarrow \infty$ eftersom den är konstant.

Tidigare nämndes det att det var intressant att studera hur algebrors struktur relaterar till varandra och för att underlätta detta introduceras följande terminologi.

Definition 2.2.9 (Terminologi för avbildningar) Givet två algebror A och B samt en avbildning $\phi : A \rightarrow B$ gäller att ϕ kallas för *homomorfi* om ϕ bevarar den algebraiska strukturen, d.v.s. $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ samt $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$; och *isomorfi* om ϕ är en inverterbar homomorfi, A och B kallas då algebraiskt isomorfa, detta skrivs ofta $A \approx B$.

Nedan följer lite exempel på olika algebror och hur deras struktur relaterar.

Exempel 2.2.10: Låt A vara algebran av reella $n \times n$ matriser, ofta betecknat $M_n(\mathbb{R})$, och $B = \{0\}$ vara ett reellt vektorrum med vanlig addition och multiplikation. Vi definierar nu $\phi : A \rightarrow B$ enligt $a \mapsto 0$. Detta är en homomorfi eftersom $\phi(a + b) = 0 = 0 + 0 = \phi(a) + \phi(b)$ samt $\phi(ab) = 0 = 0 \cdot 0 = \phi(a)\phi(b)$. Den är dock inte inverterbar och således inte en isomorfi.

Det gäller att *isomorfier* och *homeomorfier* är snarlika, och de har samma funktion men berör olika områden: isomorfier finns mellan algebror och bevarar den algebraiska strukturen medan homeomorfier finns mellan topologiska rum och bevarar den topologiska strukturen. Homeomorfier kan även kallas topologiska isomorfier. Detta illustreras i följande exempel.

Exempel 2.2.11: Låt $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{C}$ vara två topologiska rum med standardtopologin. Om vi nu definierar $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ enligt $(a, b) \mapsto a + ib$ kommer dessa vara homeomorfa eftersom de öppna mängderna i $\mathbb{R}^2$ avbildas på öppna mängder i $\mathbb{C}$ och vice versa. Låt oss nu introducera algebraiska strukturer på dessa. För att göra $\mathbb{C}$ till ett vektorrum använder vi oss av vanlig addition och skalär multiplikation med reella tal. Dessutom använder vi den vanliga (komplexa) multiplikationen för att göra den till en algebra. Vi låter $\mathbb{R}^2$ vara ett vektorrum med vanlig vektoraddition och skalär multiplikation med reella tal och definierar multiplikationen av två element som $(a, b) \odot (c, d) := (ac, bd)$. Med detta har vi att $\phi((a, b) + (c, d)) = \phi((a, b)) + \phi((c, d))$ medan $\phi((a, b) \odot (c, d)) = \phi((ac, bd)) = ac + ibd \neq (a + ib)(c + id) = \phi((a, b))\phi((c, d))$ och således är $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$ inte isomorfa med den definierade additionen och multiplikationen.

Om vi istället definierar multiplikationen för $\mathbb{R}^2$ som $(a, b) \odot (c, d) := (ac - bd, bc + ad)$ och behåller additionen som vanlig addition uppfylls både $\phi((a, b) \odot (c, d)) = \phi((a, b))\phi((c, d))$ och $\phi((a, b) + (c, d)) = \phi((a, b)) + \phi((c, d))$ och således är de då isomorfa.

Det är inte ovanligt att en algebra saknar multiplikativ identitet, d.v.s den är inte unitär. Detta kan göra bevisföring svårare då en unitär algebra ofta är lättare att arbeta med. I sådana fall kan man göra en unitalisering och ge algebran en identitet enligt processen nedan (det finns fler möjligheter, men denna är den vanligaste).

Definition 2.2.12 (Unitalisering) Givet en algebra A definierar vi *unitalisationen* av A som algebran $A_e := A \times \mathbb{C}$, där elementen är (x, λ) , med $x \in A$ och $\lambda \in \mathbb{C}$. Multiplikation och addition definieras enligt

$$\begin{cases} \mu(x, \lambda) := (\mu x, \mu \lambda) \\ (x, \lambda) \oplus_{A_e} (y, \mu) := (x + y, \lambda + \mu) \\ (x, \lambda) \odot_{A_e} (y, \mu) = (x, \lambda)(y, \mu) := (xy + \lambda y + \mu x, \lambda \mu). \end{cases}$$

Från detta ser vi att enhetselementet i A_e blir $e = (0, 1)$. Eftersom vi kan skriva ett godtyckligt element som $(x, \lambda) = (x, 0) + \lambda(0, 1)$, tillämpas ibland skrivsättet $(x, \lambda) = x + \lambda e$. Vidare finns en *inbäddning* $i : A \hookrightarrow A_e$, d.v.s. en funktion som avbildar A på en delmängd av A_e , som avbildar enligt $x \mapsto (x, 0)$ vilket utgör en isomorfi.

Detta innebär att vi kan bevisa saker för unitaliseringen A_e och om resultatet endast berör bilden, $i(A)$, gäller resultatet även för A eftersom i är en isomorfi. Det sägs då att A antas ha identitet. För exempel på unitalisering, se appendix A.6.

Exempel 2.2.13: Om X är kompakt gäller att $C_0(X) = C(X)$, och detta kan intuitivt tänkas som att oändlighetspunkten redan finns i X . Dessutom har vi att $C_0(X)$ saknar identitet om X inte är kompakt. Ett exempel på detta finns i exempel 2.2.8. Vidare går det att visa $(C_0(X))_e \approx C(X^\infty)$ då X är ett lokalt kompakt Hausdorff-rum.

Slutligen introduceras två algebraiska begrepp som kommer behövas för att formulera teorin om modulära ideal. En läsare som har erfarenhet av abstrakt algebra kan notera likheten av motsvarande definitioner inom ringteori.

Definition 2.2.14 (Ideal) Ett linjärt underrum I av en algebra A kallas för ett (tvåsidigt) *ideal* om

$$ix \in I \text{ och } xi \in I, \forall x \in A, \forall i \in I.$$

I sägs vara *maximalt* om I är propert, det vill säga en äkta delmängd av A , samt inte är en äkta delmängd av något propert ideal.

Exempel 2.2.15: Betrakta den komplexa algebran, $\mathbb{C}[x]$, som består av polynom över $\mathbb{C}$ med vanlig, också kallad punktvis, addition och multiplikation. Tag polynomet $x - \pi$ och definiera mängden

$$[x - \pi] = \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : \exists q(x) \in \mathbb{C}[x] : p(x) = (x - \pi)q(x)\},$$

det vill säga mängden av alla polynom $p(x)$ som har åtminstone en rot i $x = \pi$.

Om vi tar $p_1(x), p_2(x) \in [x - \pi]$, kan vi alltså skriva dessa som $p_1(x) = (x - \pi)q_1(x)$ och $p_2(x) = (x - \pi)q_2(x)$, för några $q_1(x), q_2(x) \in \mathbb{C}[x]$. Vidare tar vi $r(x) \in \mathbb{C}[x]$ och det följer då att

$$p_1(x) + p_2(x) = (x - \pi)(q_1(x) + q_2(x)) \text{ och } p_1(x)r(x) = (x - \pi)(q_1(x)r(x)).$$

$[x - \pi]$ är därmed ett ideal av $\mathbb{C}[x]$.

Definition 2.2.16 (Kvotalgebra) För en Banach-algebra A och ett slutet ideal I av A definieras sidoklassen av ett element $x \in A$ med avseende på I som $x + I = \{y \in A : y = x + i, i \in I\}$. Vidare låter vi A/I beteckna mängden sidoklasser $\{x + I : x \in A\}$ med operationerna

$$(x + I) + (y + I) = (x + y) + I \text{ och } (x + I)(y + I) = xy + I$$

samt multiplikation med skalär. Det går att visa att A/I , som utläses *kvotalgebran av A över I* , är en algebra samt att A/I , med normen

$$\|x + I\|_{A/I} = \inf_{i \in I} \|x + i\|_A,$$

är en Banach-algebra. Samtliga påståenden visas i appendix A.5.

Kapitel 3 | Gelfand-teori

I följande kapitel introduceras ytterligare begrepp som studeras utförligare för att studera samspelet mellan strukturen av ett lokalt kompakt Hausdorff- rum X och $C_0(X)$, samt vilka följder detta får.

3.1 Spektrum i Banach-algebror

I detta avsnitt kommer vi introducera termen *spektrumet av ett element*, samt bygga upp nödvändig teori för att bevisa en sats som ger att spektrum av element i vissa algebror är icke-tomma. Spektrum finns för element i komplexa algebror och kan ses som en analog till, eller en generalisering av, egenvärdesbegreppet för matriser.

Definition 3.1.1 Låt A vara en algebra över de komplexa talen med identitet e . Vi säger att ett element $x \in A$ är inverterbart om det existerar ett $y \in A$ sådant att

$$xy = yx = e.$$

Vi kan visa entydighet genom att helt enkelt anta att det finns två olika y , och därefter visa att de sammanfaller. y kallas inversen till x och betecknas x^{-1} . Vi säger att $x \in G(A)$ om $x \in A$ är inverterbart. $G(A)$ betecknar alltså mängden av alla inverterbara element i A . Vidare definierar vi mängden

$$\sigma_A(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \notin G(A)\}.$$

Denna mängd kallas för *spektrumet* av $x \in A$ och komplement av spektrumet, $\rho_A(x) = \mathbb{C} \setminus \sigma_A(x)$ kallas för *resolventmängden* av x . När A saknar identitet definierar vi istället spektrumet och resolventmängden som spektrumet och resolventmängden av elementen i den unitaliserade algebran A_e . Detta innebär kort sagt att om vi inte har ett enhetselement, så lägger vi till ett passande sådant för att därmed kunna använda spektrum-begreppet.

Exempel 3.1.2: Ett enkelt exempel på spektrum av en algebra är spektrumet av ett element X i den vanliga $\mathbb{C}^{n \times n}$ -algebran $M_n(\mathbb{C})$. I detta fall är det enkelt att lägga märke till att

$$\sigma(X) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - X \notin G(A)\}$$

är mängden av alla λ sådant att $\lambda I - X$ inte är inverterbart, det vill säga så att determinanten av matrisen är noll. Detta känns igen som egenvärdena av matrisen och utgör alltså spektrumet av ett element i denna algebra.

Exempel 3.1.3: Ett ytterligare åskådliggörande exempel är att betrakta funktionen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ som ges av $(x, y, z) \mapsto e^{1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Vi kan se denna funktion som ett element i algebran av kontinuerliga funktioner på $\mathbb{R}^3$ som avtar i oändligheten, även kallad för $C_0(\mathbb{R}^3)$. Vad är då spektrumet av detta element? Vi lägger först märke till att denna algebra saknar enhet, ty enhetsfunktionen försvinner inte i oändligheten, men om vi lägger till en enhetsfunktion till $\mathbb{C}$, $1(x, y, z)$ kan vi fortsätta utan problem. Då är det möjligt att använda definitionen av spektrum och se att vi söker alla $\lambda \in \mathbb{C}$ sådana att

$$\lambda 1(x, y, z) - e^{1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

inte är inverterbar. För att undersöka hur spektrumet av denna funktion ser ut så kan vi försöka konstruera inversen genom att först sätta $g(x, y, z) = \frac{f(x, y, z)}{\lambda - f(x, y, z)}$. Funktionen $g(x, y, z)$ är ett element i $C_0(\mathbb{R}^3)$ eftersom den också försvinner i oändligheten ty f gör det. Man ser lätt att $\lambda^{-1} (1 + g(x, y, z)) (\lambda - f(x, y, z)) = 1$, vilket innebär att vi har funnit inversen ifall g är väldefinierad. g är dock inte väldefinierad där $\lambda \in f(\mathbb{R}^3)$ och därmed är spektrumet alltså $f(\mathbb{R}^3) \cup \{0\}$, där nollan kommer av unitaliseringen.

Definition 3.1.4 Låt A vara en normerad algebra. Vi säger att för $x \in A$ så är

$$r_A(x) = \inf \left\{ \|x^n\|^{1/n} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

spektralradien av x . Vi kan notera att $r_A(x) \leq \|x\|$ (vilket inses lätt ty vi har infimum av en mängd där $\|x\|$ ingår), samt att $r_A(\lambda x) = |\lambda| r_A(x)$. Det går att visa att spektralradien också ges av $r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{1/n}$.

Vi har nu tillräckliga kunskaper för att kunna formulera satsen om spektrums icke-tomhet. För beviset av denna sats krävs det dock först en presentation av ytterligare några lemmen.

Sats 3.1.5 (Satsen om spektrums icke-tomhet) *Låt A vara en Banach-algebra och låt $x \in A$. Då gäller att $\sigma_A(x)$ är en icke-tom kompakt delmängd av $\mathbb{C}$ och att*

$$\max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(x)\} = r_A(x).$$

Denna sats ger oss möjligheten att forma en tydlig och enkel bild av vad spektralradien är i fallet med den vanliga algebran av komplexa kvadratisiska matriser. Det är nämligen det största egenvärdet till matrisen, vilket gör benämningen "radie" tydlig.

Sammanfattningsvis har vi nu introducerat begreppen spektrum samt spektralradie och därutöver presenterat ett antal resultat samt formulerat satsen om spektrums icke-tomhet. För att bevisa satsen är det bland annat nödvändigt att kunna avgöra när ett element i en Banach-Algebra är inverterbart. Följande lemma ger oss villkor för att garantera när det är fallet.

Lemma 3.1.6 *Låt A vara en Banach-algebra med identitet e och låt $x \in A$ vara sådant att $r(x) < 1$. Då gäller att $(e - x) \in G(A)$ och att*

$$(e - x)^{-1} = e + \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Lemma 3.1.7 *Låt A vara en normerad algebra med identitet e . Då gäller att*

1. *Om $x, y \in G(A)$ är sådana att $\|y - x\| \leq \frac{1}{2}\|x^{-1}\|$, då $\|y^{-1} - x^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^2\|y - x\|$. Det följer då att avbildningen $x \rightarrow x^{-1}$ är en homeomorfi av $G(A)$.*
2. *Antag att A är fullständig. Då gäller att $G(A)$ är öppen i A . Om $x \in A$ är sådan att $\|x - e\| < 1$, så gäller även att $x \in G(A)$.*

Bevisen av dessa lemmen återfinns i appendix E.1, men bygger i stort sett på att använda uttrycken och helt enkelt räkna fram resultaten. Vi har nu tillräckligt med teori för att kunna bevisa huvudsatsen.

Bevis: [Satsen om spektrums icke-tomhet]

Satsen säger som bekant tre saker, att spektrumet är icke-tomt, kompakt och att det finns ett enkelt uttryck för spektralradien.

För att visa icke-tomhet är idén att definiera en komplex funktion f sådan att vi kan använda Liouvilles sats, vilket leder till en motsägelse om man då antar att spektrumet är tomt. För att visa att spektralradien ges av $\max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(x)\} = r_A(x)$ kan man Laurentserieutveckla f , men denna del av beviset utlämnas till appendix E.1.

Låt oss börja med att konstruera f . Antag utan inskränkning att A har en identitet e . Vi kan använda lemma 3.1.7 och ser då att $G(A)$ är en öppen mängd, samt att $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ är Urbilden av mängden $G(A)$ med avseenden på avbildningen $\lambda \rightarrow \lambda - ex$. Alltså är spektrumet en sluten mängd eftersom Urbilden av en öppen mängd är öppen, och komplementet till en öppen mängd är sluten. Vidare gäller att om $|\lambda| > r(x)$ så är $r((1/\lambda)x) < 1$ och på så sätt är enligt lemma 3.1.6, $\lambda e - x = \lambda(e - (1/\lambda)x) \in G(A)$. Därmed ser vi att $\sigma(x)$ är innesluten i disken $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(x)\}$ och därmed begränsad. Vi har alltså visat att spektrumet är begränsat och slutet och därmed kompakt.

Fixera nu en godtycklig linjär funktional $l \in A^*$ (se A.4.6) och betrakta funktionen

$$f(\lambda) = l((\lambda e - x)^{-1}).$$

Det gäller för $\lambda, \mu \in \rho_A(x)$ att

$$\begin{aligned}(\lambda e - x)^{-1} &= (\lambda e - x)^{-1}(\mu e - x)(\mu e - x)^{-1} \\&= (\lambda e - x)^{-1}((\mu - \lambda)e + \lambda e - x)(\mu e - x)^{-1} \\&= ((\mu - \lambda)(\lambda e - x)^{-1} + e)(\mu e - x)^{-1} \\&= (\mu - \lambda)(\lambda e - x)^{-1}(\mu e - x)^{-1} + (\mu e - x)^{-1}\end{aligned}$$

och därmed då $\mu \neq \lambda$, får vi att

$$\frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} = -l((\lambda e - x)^{-1}(\mu e - x)^{-1}).$$

Eftersom l då är kontinuerlig och avbildningen $y \mapsto y^{-1}$ av $G(A)$ på sig självt (ty inversen av ett inverterbart element är självt inverterbart) också är kontinuerlig enligt lemma 3.1.7, så kan vi dra slutsatsen att f är en holomorf funktion på $\rho(x)$. För $|\lambda| \geq \|x\|$ har vi

$$(\lambda e - x)^{-1} = \left(\lambda \left(e - \frac{x}{\lambda} \right) \right)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left(e - \frac{x}{\lambda} \right)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} x^n$$

av vilket vi, enligt summationsformeln för en geometrisk summa, ser

$$\|(\lambda e - x)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\|x\|}{|\lambda|} \right)^n = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - |\lambda|^{-1}\|x\|}.$$

Uttrycket ovan går mot noll då $|\lambda| \rightarrow \infty$ och eftersom

$$|f(\lambda)| \leq \|l\| \|(\lambda e - x)^{-1}\|$$

så ser vi att $f(\lambda) \in C_0(\mathbb{C})$, ty resolventmängden är $\mathbb{C}$ eftersom vi antog att spektrumet var tomt. Detta innebär mer specifikt att f är begränsad. Antag nu att spektrumet är den tomma mängden. Då är f en begränsad hel funktion (ty holomorf på resolventmängden enligt ovan) och därmed konstant enligt Liouvilles sats (D.0.1), men eftersom $f \in C_0$ så är $f = 0$. På grund av att l är godtyckligt får vi nu att $l((\lambda e - x)^{-1}) = 0$ för varje $\lambda \in \rho(x)$. Detta motsäger Hahn-Banachs sats (D.0.2), från vilken det följer att det för varje y finns en linjär funktional F sådant att $F(y) = \|y\|$. Därför ser vi att om $l(y) = 0$ för varje l så gäller speciellt att $\|y\| = 0$, vilket medför att $y = 0$. I det fallet är $y = (\lambda e - x)^{-1}$, $\lambda \in \rho$, vilket är en motsägelse eftersom $(\lambda e - x)^{-1}$ skall vara inverterbart och noll inte är inverterbart.

Därmed ser vi att $\sigma_A(x)$ är icke-tom. Vi kan nu betrakta Laurentserien och använda en sats känd från komplexanalysen om dennas entydighet för att tillsammans med Banach-Steinhaus sats (D.0.3) visa formeln. Detta återfinns i appendix E.1 för den intresserade. ■

Exempel 3.1.8: Ett exempel på en algebra som inte uppfyller kraven för satsen ovan och vars element därför inte nödvändigtvis har ett icke-tomt spektrum är algebran av kvotkroppen av $\mathbb{C}[x]$, det vill säga kvotkroppen $\mathbb{C}(x)$ av ringen av komplexa polynom. Detta kan förstås som rationella funktioner av komplexa polynom, där vi har de vanliga operationerna med punktvis multiplikation. Vissa element av denna algebra har alltid ett tomt spektrum. Vi kan exempelvis betrakta ett komplext polynom $P(x)$ med grad större än noll och notera att $P(x)/1 \in \mathbb{C}(x)$ och att $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda 1(x) - P(x)/1$ inte kommer vara konstant noll, och varje nollskilt element i $\mathbb{C}(x)$ är inverterbart. Alltså är detta elements spektrum den tomma mängden.

Exempel 3.1.9: Med hjälp av satsen om spektrums icke-tomhet kan vi nu exemplifiera spektralradien av ett element i $M_n(\mathbb{C})$. Vi ser att det till belopp största elementet i spektrumet, som är mängden av alla egenvärden, sammanfaller med spektralradien.

Vi kan till sist formulera satsen som ofta kallas *Gelfand-Mazurs sats*.

Sats 3.1.10 (Gelfand-Mazur) *Låt A vara en komplex Banach-Algebra med enhetselement e och antag att för varje nollskilt $x \in A$ att $x \in G(A)$. Då gäller att A är algebraiskt isomorf med den komplexa tal kroppen.*

Bevis: Vi kan använda sats 3.1.5 och säga att det för varje $x \in A$ existerar ett $\lambda_x \in \mathbb{C}$ sådant att $\lambda_x e - x \notin G(A)$. Eftersom, enligt antagandet, $G(A) = A \setminus \{0\}$, så gäller det att $\lambda_x e = x$. Därmed gäller att λ_x är unikt. Detta kan enkelt ses om vi antar att det finns två sådana komplexa tal, λ_x, η_x , för vilka ekvationen gäller, så $\lambda_x e = \eta_x e \implies \lambda_x = \eta_x$. Därmed ser vi lätt att avbildningen $x \mapsto \lambda_x$ är en isomorfism från A till $\mathbb{C}$. ■

Denna sats säger alltså att en unitär Banach-algebra där varje element är inverterbart är isomorft med den komplexa talkroppen. Ett exempel på en Banach-algebra som inte uppfyller antagandena är $M_n(\mathbb{C})$, $n > 1$ med en tillräckligt snäll matrisnorm, eftersom alla matriser inte är inverterbara. Därför fungerar inte satsen på $M_n(\mathbb{C})$, $n > 1$, alltså är inte de komplexa kvadratiske matriserna isomorfa med den komplexa talkroppen. Vi kommer dock senare att betrakta algebror som verkligen uppfyller kraven för Gelfand-Mazur. Ett exempel, som återkommer i senare avsnitt är kvotalgebran mellan en Banach-algebra och ett av dess så kallade modulära maximala ideal. Det innebär att Gelfand-Mazurs sats är en av de mest centrala i detta avsnitt och viktig för att förstå den kommande teorin. Vi kan nu även studera ett mer ingående exempel.

Exempel 3.1.11: Låt $\mathbb{H}$ vara kvaternionerna, en slags utvidgning av de komplexa talen som används mycket inom bland annat fysikaliska beräkningar. En kvaternion skrivs $a + bi + cj + dk$ där det gäller att $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$ samt att $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, liksom de antikommutativa egenskaperna att $ij = k, jk = i, ki = j$. En fråga vi nu kan ställa oss är om $\mathbb{H}$ är isomorf med de komplexa talen, vilket givetvis inte är fallet. Att enbart betrakta dimensionen hos $\mathbb{H}$ borde övertyga, ty $\mathbb{H}$ har fyra reella dimensioner medan $\mathbb{C}$ har två reella dimensioner. Vi kan då undra var Gelfand-Mazurs sats inte fungerar, ty det kan vid en första anblick verka som att den skulle göra det.

Varje nollskilt element är inverterbart, med en invers som fungerar analogt som den hos de komplexa talen. Vi behöver alltså undersöka om $\mathbb{H}$ är en unitär Banach-algebra. Det går att visa att kvaternionerna är ett Banach-rum med en norm definierad som $q \in \mathbb{H}$, $\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

Vi har en produkt, Hamiltonprodukten, där elementen helt enkelt multipliceras ihop med varandra analogt med hur komplexa tal multipliceras. Vi har även ett enhetselement, 1. Det verkar alltså som att allt är uppfyllt, men det visar sig att Hamiltonprodukten inte är komplext bilinjär, och således kan inte heller $\mathbb{H}$ vara en algebra över de komplexa talen. Därför fungerar inte Gelfand-Mazurs sats!

Exempel 3.1.12: Ett exempel på en algebra som faktiskt uppfyller kraven är $\mathbb{R}^2$ med de vanliga operationerna bekanta från linjär algebra. Vi kan lägga på en produkt enligt $(a, b) \odot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$, och denna har en enhet, $(1, 0)$, och en invers för varje nollskilt element enligt $(a, b)^{-1} = \frac{(a, -b)}{a^2 + b^2}$. Under dessa operationer kommer $\mathbb{R}^2$ vara en unitär Banach-algebra med enhet, och enligt Gelfand-Mazur kommer denna algebra att vara isomorf med de komplexa talen. Se även andra halvan av exempel 2.2.11, för samma argument på ett annat sätt.

3.2 Modulära ideal

I följande avsnitt nyttjas teorin om ideal av algebror, vilken är analog med teorin om ideal av ringar. Vi kommer uteslutande att diskutera tvåsidiga ideal. Specifikt intresserar vi oss för modulära ideal, som definieras nedan. Dessa ideal visar sig vara av intresse på grund av den koppling som undersöks i sats 3.2.7.

Definition 3.2.1 (Modulärt ideal) Låt A vara en komplex algebra och I vara ett ideal av A . Vi säger att I är *modulärt* ifall kvotalgebran A/I har ett identitetselement. Ett ekvivalent villkor är att det existerar $u \in A$ så att mängderna

$$A(1 - u) := \{x - xu : x \in A\} \text{ och } (1 - u)A := \{x - ux : x \in A\}$$

är delmängder av I . Ett sådant u kallas *identitet modulo I* . I sägs vara ett *maximalt modulärt ideal* ifall det är modulärt och även är ett maximalt propert ideal.

Anmärkning 3.2.2: För att tydliggöra att villkoren är ekvivalenta kan vi först anta att $(1 - u)A$ är en delmängd av I . Det följer då för alla $x \in A$ att $x + I = (x - ux) + ux + I = ux + I$. För omvändningen antar vi att u är en identitet modulo I . Det gäller då för alla $x \in A$ att $x + I = ux + I \implies x - ux + I = I$. Beviset för $A(1 - u)$ är analogt.

Vi kan även notera att $u \notin I$ om I är propert. Sannerligen, om $u \in I$, gäller för alla $x \in A$ att $x = (x - ux) + ux \in I$ och alltså $I = A$.

Exempel 3.2.3: Betrakta algebran $C_0(\mathbb{R}^3)$, alltså funktioner $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ som försvinner i oändligheten med punktvis multiplikation och addition. Vi kan inledningsvis påminna oss om att identitetsavbildningen $x \mapsto 1$, $x \in \mathbb{R}^3$ inte är ett element i $C_0(\mathbb{R}^3)$, och att algebran således inte är unitär. Fortsättningsvis betecknar vi enhetssfären med $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$, där $\|\cdot\|$ är den euklidiska normen på $\mathbb{R}^3$, och definierar

$$I(S^2) = \{f \in C_0(\mathbb{R}^3) : f(x) = 0, \forall x \in S^2\}.$$

Detta är ett ideal av $C_0(\mathbb{R}^3)$. Ty, för $f, g \in I(S^2)$, $h \in C_0(\mathbb{R}^3)$ och $x \in S^2$ gäller

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0 \text{ och } (fh)(x) = f(x)h(x) = 0 \cdot h(x) = 0.$$

Vi definierar även $u(x) = \exp(1 - \|x\|)$. För $x \in S^2$ följer att

$$(f - uf)(x) = f(x) - u(x)f(x) = 0, \forall f \in C_0(\mathbb{R}^3),$$

eftersom $u(x) = 1$. $u \in C_0(\mathbb{R}^3)$ är därmed en identitet modulo $I(S^2)$. Vi kan notera att en identitet modulo $I(S^2)$ inte är unik, då det existerar fler funktioner $g \in C_0(\mathbb{R}^3)$ med $g(x) = 1$ för $x \in S^2$. Slutligen kan vi observera att $u \notin I(S^2)$, i enhet med anmärkningen ovan.

Relationen mellan den slutna mängden S^2 och idealet $I(S^2)$ kommer visa sig vara ett specialfall av ett allmänt samband mellan den topologiska strukturen av ett lokalt kompakt Hausdorff-rym X och den algebraiska strukturen av $C_0(X)$. Detta samband tydliggörs i sats 3.2.7.

Det kan visas att varje ideal som innehåller ett modulärt ideal också är modulärt. Följaktligen är ett ideal I av A ett maximalt modulärt ideal om och endast om det är maximalt inom mängden modulära propert ideal. Med den föregående observationen i åtanke kan man formulera följande lemma.

Lemma 3.2.4 *Varje propert modulärt ideal innehåller i ett maximalt modulärt ideal.*

I lemmats bevis konstrueras ett maximalt modulärt ideal genom tillämpning av Zorns lemma (D.0.8). Ett fullständigt bevis av lemmat återfinns i appendix (lemma E.2.1). Vi kommer fortsättningsvis beteckna mängden av maximala modulära ideal med $\text{Max}(A)$.

Anmärkning 3.2.5: Betrakta en kommutativ algebra A med identitet e . Ett element $x \in A$ har invers precis då $x \notin M$ för alla $M \in \text{Max}(A)$. Detta följer av att $x \notin G(A)$ om och endast om Ax är ett propert ideal (lemma E.2.2). Eftersom $e \in A$ är ett identitets-element är alla ideal modulära och $Ax \subseteq M$ för något $M \in \text{Max}(A)$, enligt föregående lemma. Sammanfattningsvis gäller alltså $x = ex \in Ax \subseteq M$ om och endast om $x \notin G(A)$.

Lemma 3.2.6 *Låt A vara en Banach-algebra och I ett propert modulärt ideal av A . Om $u \in A$ är en identitet modulo I , gäller*

$$I \cap \{x \in A : \|x - u\| < 1\} = \emptyset.$$

Av detta följer att $\bar{I}$ är ett propert ideal, och att varje $M \in \text{Max}(A)$ är slutet.

Beviset av det föregående lemma baseras på att $u - x \in I$ är invertibart om $\|u - x\| < 1$, enligt lemma 3.1.6. Detta leder antingen till att $e \in I$ eller $u \in I$, beroende på om A har identitets-element e eller inte. Det fullständiga beviset återfinns i appendix (lemma E.2.3).

Avsnittet avslutas med att formalisera kopplingen mellan delmängder av ett topologiskt rum X och ideal av algebran $C_0(X)$, som antyds i exempel 3.2.3.

Sats 3.2.7 *Låt X vara ett lokalt kompakt Hausdorff-rym och låt, för varje delmängd E av X ,*

$$I(E) := \{f \in C_0(X) : f(x) = 0, \forall x \in E\}.$$

Då är avbildningen $\Phi : E \mapsto I(E)$ en bijektion mellan de icke-tomma slutna delmängderna av X och de propert slutna idealen av $C_0(X)$. Dessutom är $I(E)$ modulärt om och endast om E är kompakt, och $I(E) \in \text{Max}(C_0(X))$ om och endast om E endast innehåller ett element.

Bevis: För att visa att Φ är bijektiv behöver vi visa att den är (1) väldefinierad, (2) injektiv och (3) surjektiv.

(1): Vi vill visa att $I(E)$ är ett propert slutet ideal när E är slutet och icke-tom. Vi noterar inledningsvis att $I(E)$ är ett ideal, vilket kan verifieras genom att utnyttja ett argument som är analogt med det som används i exempel 3.2.3.

För att visa att $I(E)$ är slutet noterar vi att

$$I(E) = \bigcap_{x \in E} z_x \text{ där } z_x := \{f \in C_0(X) : f(x) = 0\}.$$

Det kvarstår då att visa att alla z_x är slutna eftersom godtyckliga snitt av slutna mängder är slutna. Eftersom $C_0(X)$ är ett metriskt rum är z_x sluten omm z_x är fullständigt, enligt A.3.6. Om vi tar en Cauchy-följd $(f_n) \subseteq z_x$, med gräns $f \in C_0(X)$, och godtyckligt $\varepsilon > 0$ existerar $N \in \mathbb{N}$ s.a. $|f(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \leq \varepsilon + 0$, så $f(x) = 0$ och därmed $f \in z_x$. Det följer att z_x är fullständigt så att $I(E)$ är slutet.

För att visa att $I(E)$ är propert används Urysohns lemma (Lemma D.0.6). Om vi väljer en punkt $x \in E$ följer det direkt att det existerar en funktion $f \in C_0(X)$ med $f(x) \neq 0$, vilket implicerar $I(E) \neq C_0(X)$.

(2): För att visa att $E_1 \neq E_2 \implies I(E_1) \neq I(E_2)$ väljes $x \in E_1 \setminus E_2$. Det följer av Urysohns lemma att det existerar $f \in C_0(X)$ s.a. $f(x) \neq 0$ och $f|_{E_2} = 0$. Alltså $f \in I(E_2)$ men $f \notin I(E_1)$, så $I(E_1) \neq I(E_2)$.

(3): För att visa att Φ är surjektiv måste vi visa att alla propa slutna ideal I av $C_0(X)$ är på formen $I(E)$, för någon icke-tom sluten delmängd E av X . Ett fullständigt argument är långt och tekniskt; i mån om utrymme och läsbarhet placeras detta i appendix (sats E.2.4). Vi nöjer oss här med en sammanfattning.

Vi betraktar $E = \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in I\}$ och noterar att $I \subseteq I(E)$, per definition av $I(E)$. Vi vill nu visa att $I(E) \subseteq I$. Således betraktar vi delmängden av funktioner $g \in C_0(X)$ som endast är nollskilda på en kompakt delmängd av X med $g(x) = 0, \forall x \in E$. Vidare konstrueras funktionerna $h \in I$ och $f \in C_0(X)$ s.a. $g = fh \in I$ och vi visar sedan att g approximerar funktioner i $I(E)$ godtyckligt väl och det följer då att $I(E) \subseteq I$, och följaktligen är Φ en bijektion.

Fortsättningsvis noterar vi att om E är kompakt existerar $u \in C_0(X)$ s.a. $u(x) = 1, \forall x \in E$. Då gäller $C_0(X)(1-u) \subseteq I(E)$. För att visa omvändningen antar vi att $u \in C_0(X)$ är en identitet modulo $I(E)$, alltså $C_0(X)(1-u) \subseteq I(E)$. Då måste E vara kompakt, för annars gäller $u \notin C_0(X)$.

Slutligen visar vi att om $E_2 = \{x\}$, så gäller för alla E_1 där $E_2 \subsetneq E_1$, att $I(E_1) \subsetneq I(E_2)$. Detta påstående följer om vi tar $y \in E_1 \setminus E_2$ samt en öppen mängd $U \subseteq X : y \in U, x \notin U$, som existerar då X är Hausdorff. Urysohns lemma ger nu att det existerar en funktion $f \in C_0(X)$, sådan att f endast är nollskild på en delmängd av U och $f(y) = 1$. Vi har då att $f \notin I(E_1)$ men $f \in I(E_2)$. Samtidigt uppfyller alla funktioner i $g \in I(E_1)$ att $g|_{E_2} = 0$, då $E_2 \subseteq E_1$. Vi har alltså att $I(E_2) \in \text{Max}(C_0(X))$ ■

3.3 Multiplikativa linjära funktionaler

I avsnittet utvecklar vi teorin som kopplar multiplikativa linjära funktionaler på en algebra till idealen av algebran. En central anledning till att vi intresserar oss för funktionaler som är multiplikativa är att de bevarar algebrastrukturen, de är alltså homomorfier. För ett allmänt vektorrum är multiplikation av vektorer inte definierad och linjäritet är ett tillräckligt villkor för att vektorrumsstrukturen ska bevaras.

Definition 3.3.1 (Multiplikativ linjär funktional) En linjär funktional $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ på en komplex algebra A sägs vara *multiplikativ* om det $\forall x, y \in A$ gäller att $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

Exempel 3.3.2: Detta exempel syftar till att illustrera hur funktionaler kan bevara multiplikation trots att den bilinjära produkten på algebran inte är definierad som punktvis multiplikation. Samtidigt anknyter exemplet till Fouriertransformen, som vi i senare avsnitt kommer kunna förstå som ett specialfall av Gelfand-transformen.

Betrakta algebran $L^1(\mathbb{R})$ som består av funktioner, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, för vilka integralen $\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$ konvergerar. Två funktioner $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ är ekvivalenta om $\int_{\mathbb{R}} |f(t) - g(t)| dt = 0$. Operationerna är punktvis addition och konvolution $*$ som multiplikation. Vi betraktar även Fouriertransformen $\mathcal{F}$ samt $L^1(\mathbb{R})$ -normen.

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt, \quad \mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)dx, \quad \|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt.$$

Ifall vi fixerar $\xi \in \mathbb{R}$ är Fouriertransformen en linjär funktional $\mathcal{F}[\cdot](\xi) : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$. Vidare är följande samband känt från Fourieranalysen

$$\mathcal{F}[f * g](\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt dx = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(s+t)\xi} f(s)g(t)ds dt = \mathcal{F}[f](\xi) \cdot \mathcal{F}[g](\xi).$$

Detta betyder att den linjära funktional som avbildar en $L^1(\mathbb{R})$ -funktion f på värdet av Fouriertransformen i en punkt ξ är multiplikativ.

För att förtydliga detta en aning kan vi exempelvis välja att betrakta $L^1(\mathbb{R})$ -funktionerna $f(x) = x \exp(-x^2/2)$ och $g(x) = \chi_{|x| \leq 1}(x)$, där $\chi_{|x| \leq 1}$ är indikatorfunktionen (A.2.5), med Fouriertransformer

$\hat{f}(\xi) = -i\sqrt{2\pi}\xi \exp(-\xi^2/2)$ respektive $\hat{g}(\xi) = 2 \sin(\xi)/\xi$. Konvolutionen ges av

$$g * f(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-t)f(t)dt = \int_{x-1}^{x+1} te^{-t^2/2}dt = -e^{-(x+1)^2/2} + e^{-(x-1)^2/2},$$

och med hjälp av sambandet $\mathcal{F}[\exp(-x^2/2)] = \sqrt{2\pi} \exp(-\xi^2/2)$ samt skiftegenskapen erhålls

$$\mathcal{F}[g * f](\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\xi^2/2}(-e^{i\xi} + e^{-i\xi}) = \sqrt{2\pi}e^{-\xi^2/2}(-2i \sin \xi) = \hat{g}(\xi)\hat{f}(\xi)$$

Vi sammanfattar nedan några användbara egenskaper som är ekvivalenta med multiplikativitet. Ekvivalensen av egenskaperna bevisas i appendix (sats E.3.2).

Sats 3.3.3 *Låt A vara en Banach-algebra med identitet e . För en linjär funktional φ på A är följande påståenden ekvivalenta.*

1. φ är nollskild, alltså inte identiskt lika med noll, och multiplikativ
2. $\varphi(e) = 1$ och $\varphi(x) \neq 0, \forall x \in G(A)$
3. $\varphi(x) \in \sigma_A(x), \forall x \in A$

Fortsättningsvis låter vi $\Delta(A)$ beteckna mängden multiplikativa linjära funktionaler på A som inte är identiskt lika med noll. Normen på $\Delta(A)$ är operatornormen, alltså $\|\varphi\|_{\Delta(A)} = \sup_{x \in A} |\varphi(x)|$, där $\|x\|_A = 1$.

Anmärkning 3.3.4: Vi betraktar nu $\Delta(A_e)$ och undersöker hur den relaterar till $\Delta(A)$, för en Banach-algebra A . Linjäritet och sats 3.3.3, specifikt att $\psi(e) = 1$ för $\psi \in \Delta(A_e)$, leder till att

$$\psi(x + \lambda e) = \psi|_A(x) + \lambda, \quad x \in A, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

där $\psi|_A : A \rightarrow \mathbb{C}$ är restriktionen av ψ till A . Det följer att det existerar $\psi|_A \in \Delta(A)$, $\forall \psi \in \Delta(A_e)$ förutom då $\psi|_A = 0$. Men eftersom $\psi(e) = 1$ inträffar detta för exakt ett element av $\Delta(A_e)$, nämligen $\psi_\infty : (x + \lambda e) \mapsto (0 + \lambda \cdot 1)$.

Vi kan även utvidga $\varphi \in \Delta(A)$ till $\Delta(A_e)$ enligt $\tilde{\varphi}(x + \lambda e) = \varphi(x)$. $\Delta(A)$ kan därför ses som en delmängd av $\Delta(A_e)$ och vi har att $\Delta(A_e) = \Delta(A) \cup \{\psi_\infty\}$. Detta samband tillåter oss att betrakta multiplikativa funktionaler på A_e , istället för A , utan inskränkning.

Lemma 3.3.5 *Låt A vara en Banach-algebra. Varje $\varphi \in \Delta(A)$ är en begränsad linjär funktional på A och för alla $x \in A$ gäller $|\varphi(x)| \leq r_A(x)$. Specifikt gäller $\|\varphi\| \leq 1$ och $\|\varphi\| = 1$ om A har identitetsselement.*

Det föregående lemmat bevisas i appendix (lemma E.3.3) genom att tillämpa lemma 3.1.6.

Anmärkning 3.3.6: Om vi ignorerar multiplikation av vektorer och A betraktas som ett vektorrum över $\mathbb{C}$ implicerar föregående lemma att $\Delta(A)$ är en delmängd av dualen A^* (A.4.8), som är ett vektorrum. Däremot är $\Delta(A)$ inte ett underrum, vilket följer av att för $\varphi \in \Delta(A)$ och $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 1$ gäller $\lambda\varphi(xy) = \lambda\varphi(x)\varphi(y) \neq \lambda\varphi(x)\lambda\varphi(y)$, alltså $\lambda\varphi \notin \Delta(A)$. Detta kan tolkas som att $\Delta(A)$ inte besitter någon intressant linjär struktur. Vi kommer däremot, i följande avsnitt, visa att en topologi kan introduceras så att $\Delta(A)$ blir ett topologiskt rum.

Vi kan nu formulera den sats som, tillsammans med sats 3.2.7, ger upphov till en bijektion mellan ett lokalt kompakt Hausdorff-rum X och mängden $\Delta(C_0(X))$. Denna bijektion utgör en viktig komponent av Gelfand-dualiteten, sats 3.5.8.

Sats 3.3.7 *För en kommutativ Banach-algebra A , är avbildningen*

$$\Psi : \varphi \mapsto \text{Ker } \varphi := \{x \in A : \varphi(x) = 0\}$$

en bijektion mellan $\Delta(A)$ och $\text{Max}(A)$.

Bevis: Vi ska alltså visa att Ψ är (1) väldefinierad, (2) injektiv och (3) surjektiv.

(1): Inledningsvis visar vi att Ψ är väldefinierad, alltså att $\text{Ker } \varphi$ är ett maximalt modulärt ideal för $\varphi \in \Delta(A)$, där alltså $\varphi \neq 0$. För ett bevis av att $\text{Ker } \varphi$ är ett ideal hänvisas läsaren till appendix (lemma E.3.4). Vidare är bilden under φ endimensionell över de komplexa talen, vilket implicerar att $\text{Ker } \varphi$ har

kodimension 1 i A enligt Första isomorfitsatsen för vektorrum (sats A.4.9). Följaktligen är $\text{Ker } \varphi$ maximalt. Moduläriteten av $\text{Ker } \varphi$ följer av att $u = x/\varphi(x)$, $x \in A \setminus \text{Ker } \varphi$ uppfyller

$$\varphi(y - uy) = \varphi(y) - \varphi(u)\varphi(y) = \varphi(y) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)}\varphi(y) = 0, \quad \forall y \in A,$$

så att u är en identitet modulo $\text{Ker } \varphi$.

(2): För att visa att Ψ är injektiv väljes $\varphi_1, \varphi_2 \in \Delta(A)$ med $\text{Ker } \varphi_1 = \text{Ker } \varphi_2 =: I$. Låt u vara identitet modulo I . Eftersom I har kodimension 1 kan alla $x \in A$ skrivas på formen $x = y + \lambda u$, $y \in I$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Det följer att

$$\varphi_1(x) = \varphi_1(y) + \varphi_1(\lambda u) = \lambda = \varphi_2(y) + \varphi_2(\lambda u) = \varphi_2(x) \implies \varphi_1 = \varphi_2.$$

(3): Det kvarstår att visa att Ψ är surjektiv. Således betraktas något $M \in \text{Max}(A)$, med avsikt att visa att $M = \text{Ker } \varphi$, för något $\varphi \in \Delta(A)$. Eftersom M är ett maximalt ideal är A/M en Banach-divisionsalgebra (lemma E.3.5). Enligt Gelfand-Mazur (sats 3.1.10) är då A/M isomorf med $\mathbb{C}$. Vi definierar därmed en isomorfi $\phi : A/M \rightarrow \mathbb{C}$ och även avbildningen $\theta : A \rightarrow A/M$, $x \mapsto x + M$. Då är kompositionen $\psi = \phi \circ \theta : A \rightarrow \mathbb{C}$ en homomorfi med $\text{Ker } \psi = M$, vilket följer av att

$$\phi(x + M) = 0 \iff x + M = M \iff x \in M.$$

■

Exempel 3.3.8: Vi kan nu återigen betrakta algebran $C_0(\mathbb{R}^3)$ med avsikt att ta reda på vilka multiplikativa linjära funktionaler som verkar därpå.

Till en början kan vi nyttja sats 3.2.7, specifikt att alla maximala modulära ideal är på formen

$$I(E) = \{f \in C_0(\mathbb{R}^3) : f(x) = 0, \forall x \in E\},$$

där $E \subseteq \mathbb{R}^3$ består av en punkt. Vi låter $E_x = \{x\}$, $x \in \mathbb{R}^3$. Fortsättningsvis kan vi notera att alla $\psi \in \Delta(C_0(\mathbb{R}^3))$ har distinkta kärnor som är maximala modulära ideal, enligt sats 3.3.7. Således existerar ett unikt $x \in \mathbb{R}^3$ så att $\text{Ker } \psi = I(E_x)$, $\forall \psi \in \Delta(C_0(\mathbb{R}^3))$.

Att ta reda på vilka multiplikativa linjära funktionaler som verkar på $C_0(\mathbb{R}^3)$ har nu reducerats till att finna en multiplikativ linjär avbildning $\psi : C_0(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{C}$, vars kärna är $I(E_x)$. Vi betraktar därför φ_x , som verkar på en funktion f genom utvärdering i punkten x , det vill säga $\varphi_x(f) = f(x)$. Från definitionen av $I(E)$ kan vi försäkra oss om att φ_x avbildar f på 0 precis då $f \in I(E_x)$. Vidare kan det även verifieras att φ_x är linjär och multiplikativ, och vi har därmed karakteriserat alla $\psi \in \Delta(C_0(\mathbb{R}^3))$.

Ett helt analogt argument håller även ifall $\mathbb{R}^3$ ersätts med ett godtyckligt lokalt kompakt Hausdorff-rym.

3.4 Strukturrummet och Gelfand-representationen

Vårt mål är att skapa en koppling mellan algebra och topologi, därför behöver vi till att börja med ett topologiskt rum. Vi har redan sett i Sats 3.3.7 att $\Delta(A)$ samspelar med de algebraiska egenskaperna hos A , och vi kan även specificera $\Delta(A)$ som alla nollskilda algebraiska homomorfier från A till $\mathbb{C}$. Detta kan vi låta motivera införandet av en topologi på $\Delta(A)$.

Definition 3.4.1 (Gelfand-topologin) För en kommutativ Banach-algebra A , definieras *Gelfand-topologin* på $\Delta(A)$ som den svagaste topologin som gör att alla funktionaler $\Delta(A) \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto \varphi(x)$, $x \in A$ är kontinuerliga avbildningar. En omgivning av ett element $\varphi_0 \in A$ ges av

$$U(\varphi_0, x_1, \dots, x_n, \epsilon) = \{\varphi \in \Delta(A) : |\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \epsilon, 1 \leq i \leq n\}$$

där $\epsilon > 0$ och $x_1, \dots, x_n$ ett ändligt antal godtyckliga element i A . Tillsammans med Gelfand-topologin kommer $\Delta(A)$ att kallas för *strukturrummet*. Det finns dock andra namn.

Med Gelfand-topologin undersöker vi strukturrummets topologiska egenskaper. Bland annat visades i Anmärkning 3.3.4 att $\Delta(A_e) = \Delta(A) \cup \{\varphi_\infty\}$. Vi ska nu undersöka hur dessa relaterar ur en topologisk synvinkel.

Sats 3.4.2 För en kommutativ Banach-algebra A gäller

1. $\Delta(A)$ är ett lokalt kompakt Hausdorff-*rum*.
2. $\Delta(A_e) = \Delta(A) \cup \{\varphi_\infty\}$ är enpunktskompaktifikationen av $\Delta(A)$. För definition, se Appendix A.1.18.
3. $\Delta(A)$ är kompakt om A har identitet.

För bevis, se Appendix E.4.1.

Unitaliseringen av en algebra kan alltså ses som en kompaktifiering av strukturrummet, vilket för samman två begrepp från algebra och topologi. Vi kommer utforska mer av den kopplingen senare i avsnitt 3.6.

Då strukturrummet av en Banach-algebra är ett topologiskt rum, och $C_0(X)$ är en Banach-algebra för ett lokalt kompakt Hausdorff-*rum* X , kan vi knyt ihop Sats 3.2.7 och Sats 3.3.7 för att skapa en stark topologisk koppling. Notera att detta är samma avbildning som användes i Exempel 3.3.8.

Sats 3.4.3 Avbildningen $x \mapsto \varphi_x$, där $\varphi_x(f) = f(x)$, är en homeomorfi mellan ett lokalt kompakt Hausdorff-*rum* X och $\Delta(C_0(X))$.

Bevis: Låt X vara ett lokalt kompakt Hausdorff-*rum*. I Sats 3.2.7 identifierade vi alla maximala modulära ideal av $C_0(X)$ med ett element av X , samtidigt som vi i Sats 3.3.7 identifierade alla maximala modulära ideal av A med ett element av $\Delta(A)$. Eftersom $C_0(X)$ är en Banach-algebra får vi specifikt två bijektioner $X \rightarrow \text{Max}(C_0(X))$, $x \mapsto \{f \in C_0(X) : f(x) = 0\}$ och $\Delta(C_0(X)) \rightarrow \text{Max}(C_0(X))$, $\varphi \mapsto \text{Ker } \varphi = \{f \in C_0(X) : \varphi(f) = 0\}$ som vi kan koppla ihop till en bijektion som konstueras enligt

$$\phi : X \rightarrow \Delta(C_0(X)), \quad x \mapsto \varphi_x, \quad \text{där } \varphi_x(f) = f(x) \text{ för } f \in C_0(X).$$

Givet $x \in X$ och en öppen omgivning V av x , så ger Urysohns lemma (se D.0.6) en funktion $f \in C_0(X)$ så att $f(x) \neq 0$ och $f|_{X \setminus V} = 0$. Mängden $\{y \in X : |f(y) - f(x)| < |f(x)|\}$ är en omgivning av x eftersom f är kontinuerlig, och den avbildas på omgivningen $\{\varphi_y \in \Delta(C_0(X)) : |\varphi_y(f) - \varphi_x(f)| < |f(x)|\}$ av φ_x . Det gör ϕ^{-1} kontinuerlig eftersom omgivningen av φ_x utgör ett element i en delbas, se definition A.1.6. Samma gäller för omgivningen $\{\varphi_y \in \Delta(C_0(X)) : |\varphi_y(f) - \varphi_x(f)| < \epsilon\}$ av φ_x som avbildas på $\{y \in X : |f(y) - f(x)| < \epsilon\}$. Då är både ϕ och ϕ^{-1} kontinuerliga, vilket gör avbildningen $\phi : x \mapsto \varphi_x$ en homeomorfi. ■

Vi har nu definierat strukturrummet och konstruerat en avbildning som kopplar det till det algebraiska rummet $C_0(X)$. Den avbildningen är viktig för det stora resultatet i nästa avsnitt, men för att utöka den redan skapade kopplingen definierar vi två relaterade avbildningar som är viktiga inom Gelfand-teori.

Definition 3.4.4 Gelfand-transformen av $x \in A$, där A är en Banach-algebra, definieras som $\hat{x} : \Delta(A) \rightarrow \mathbb{C}$ som $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$, som är kontinuerlig enligt definitionen av topologin.

Definition 3.4.5 Gelfand-representationen av A är definierad enligt $\Gamma_A : A \rightarrow C_0(\Delta(A))$, där $x \mapsto \hat{x}$. Eftersom element av $\Delta(A)$ både bevarar multiplikation och är linjära, så blir Gelfand-representationen en homomorfi och den kallas därför även Gelfand-homomorfin.

Anmärkning 3.4.6: Det är inte självklart att målmängden av Gelfand-representationen är $C_0(\Delta(A))$, men så är fallet eftersom Sats 3.4.2 gav att $\Delta(A_e)$ är enpunktskompaktifikationen av $\Delta(A)$ och $\forall x \in A$ gäller att utvidgningen av Gelfand-transformen har egenskapen $\hat{x}(\varphi_\infty) = 0$.

Med hjälp av homeomorfin i Sats 3.4.3 mellan X och $\Delta(C_0(X))$ kan vi notera att Gelfand-homomorfin av $C_0(X)$ är en identitetsavbildning. Detta är en intressant koppling eftersom vi i nästa avsnitt ska se att Gelfand-homomorfin bevarar all algebraisk struktur hos vissa algebror, likt hur avbildningen i Sats 3.4.3 bevarade all topologisk struktur hos lokalt kompakta Hausdorff-*rum*.

Gelfand-transformation av ett element är som namnet föreslår en slags transform. I ästa exempel undersöker vi dess relation till en abstrakt form av Fouriertransform.

Exempel 3.4.7: Som nämns i Exempel 3.3.2 så är Gelfand-transformen en generaliserad form av Fouriertransformen. I detta exempel tar vi fram en abstrakt form av Fouriertransform för att i ett senare exempel introducera den vanligen använda Fouriertransformen över $\mathbb{R}$. Specifikt kallas Gelfand-transform för Fouriertransform om $A = L^1(G)$ där G är en lokalt kompakt abelsk grupp (se Appendix A.2 för definition av grupp). Vidare definieras *karaktärer* som kontinuerliga homomorfier $\alpha : G \rightarrow \mathbb{T}$, där $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ är cirkelgruppen med multiplikation. Mängden av alla karaktärer kallas *dualgruppen* och betecknas $\hat{G}$. Vidare går det att visa att avbildningen $\chi(f) \mapsto \int_G f(x) \overline{\chi(x)} dx$ är en homeomorfi mellan $\hat{G}$ och $\Delta(L^1(G))$.

Följande sats behövs i senare bevis och den kan även ses som en motivering till varför Gelfand-transformen är en avbildning som hjälper oss konstruera kopplingen mellan algebra och topologi, eftersom den kopplar ihop det algebraiska konceptet spektrum med det topologiska strukturrummet.

Sats 3.4.8 *Låt A vara en kommutativ Banach-algebra. För alla $x \in A$ gäller $\sigma_A(x) \setminus \{0\} \subseteq \hat{x}(\Delta(A)) \subseteq \sigma_A(x)$, specifikt är $\hat{x}(\Delta(A)) = \sigma_A(x)$ om A är unital.*

För bevis, se Appendix E.4.2.

Anmärkning 3.4.9: Sats 3.4.8 ger att $\|\hat{x}\|_\infty = r_A(x)$ och det gäller $r_A(x) \leq \|x\|$ vilket ger $\|\hat{x}\|_\infty \leq \|x\|$.

Sats 3.4.3 gav oss en koppling mellan två topologiska rum och vi ska nu se att de även svarar mot algebraiska rum, samt hur dessa kopplingar är ekvivalenta.

Sats 3.4.10 *Låt A och B vara kommutativa Banach-algebror. Om A och B är algebraiskt isomorfa, så är $\Delta(A)$ och $\Delta(B)$ homeomorfa.*

Bevis: Låt $\phi : A \rightarrow B$ vara en algebraisk isomorfi. Låt $\phi^* : \Delta(B) \rightarrow \Delta(A)$ vara dualavbildningen, alltså $\phi^*[\varphi](a) = \varphi(\phi(a))$, $a \in A$, $\varphi \in \Delta(B)$. Man kan visa att ϕ^* är bijektiv. Och om alla funktioner $\Delta(B) \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto \phi^*[\varphi](a)$, $a \in A$ är kontinuerliga, så är även ϕ^* kontinuerlig. Men att sådana funktioner är kontinuerliga följer från definitionen av ϕ^* samt Gelfand-topologin på $\Delta(B)$. På samma sätt kan det visas att $(\phi^*)^{-1}$ är kontinuerlig. ■

Korollarium 3.4.11. *För två lokalt kompakta Hausdorff-rum X och Y så är följande påståenden ekvivalenta*

1. $C_0(X)$ och $C_0(Y)$ är isomorfiskt isomorfa.
2. $C_0(X)$ och $C_0(Y)$ är algebraiskt isomorfa.
3. X och Y är homeomorfa.

Bevis: (1) $\implies$ (2) enligt definition, och (2) $\implies$ (3) följer från Sats 3.4.10 tillsammans med Sats 3.4.3. För att visa (3) $\implies$ (1), låt $\phi : X \rightarrow Y$ vara en homeomorfi, då är $C_0(Y) \rightarrow C_0(X)$, $f \mapsto f \circ \phi$ en isometrisk algebra-isomorfi. ■

Dessa ekvivalenser är starkt kopplade till Gelfand-dualiteten som är det stora resultatet i nästa avsnitt. Nedan följer ett exempel av satsens användning och sedan en fortsättning på exemplet om Fouriertransform.

Exempel 3.4.12: Om de två ändarna av en linje förs samman bildas en cirkel. Enpunktskompaktifieringen av $\mathbb{R}$ är homeomorf med S^1 , som är cirkeln med den vanliga topologin uppbyggd av öppna intervall, och är då ett kompakt Hausdorff-rum. Ett exempel på en homeomorfi är den stereografiska projektionen, vilket kan visas vara en homeomorfi genom att betrakta de öppna mängderna runt oändligheten på $\mathbb{R}^\infty$.

Då ger satsen att alla $C(\mathbb{R}^\infty)$ är isometriskt isomorfa med $C(S^1)$. Och eftersom $(C_0(X))_e \approx C(X^\infty)$ från Exempel 2.2.13, så kan alltså unitaliseringen av $C_0(\mathbb{R})$ ses som $C(S^1)$. Resultatet fungerar även generellt för lokalt kompakta Hausdorff-rum, om X^∞ är homeomorf med Y , då är $C(Y)$ unitaliseringen av $C_0(X)$, vilket kan vara användbart om Y är bekvämt att arbeta med.

Exempel 3.4.13: Vi fortsätter med Exempel 3.4.7 och beskriver den välbekanta Fouriertransform. Då används $G = \mathbb{R}$ med operationen addition. Karaktärerna för $\mathbb{R}$ blir funktioner $\chi_\xi(x) := e^{i\xi x}$. Avbildningen $\xi \mapsto \chi_\xi$ kan visas vara en homeomorfi och tillsammans med homeomorfin från Exempel 3.4.7 ges en avbildning $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \Delta(L^1(\mathbb{R}))$, $\xi \mapsto \varphi_\xi$ där $\varphi_\xi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx$. Då ger Korollarium 3.4.11 att $C_0(\Delta(L^1(\mathbb{R}))) \approx C_0(\mathbb{R})$ och Gelfand-transformen är en kontinuerlig funktion över $\mathbb{R}$ om man använder homeomorfin ϕ . Alltså gäller att $f \mapsto \hat{f} \circ \phi$ där $\hat{f} \circ \phi(\xi) = \hat{f}(\varphi_\xi) = \varphi_\xi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx$ är den avbildningen som vanligen används i Fourieranalys. Detta är då en homomorfi.

Notera att $\Gamma(A) \subseteq C_0(\Delta(A))$ är för Fouriertransform ekvivalent med det kända resultatet Riemann–Lebesgue lemma som säger att $|\hat{f}(\xi)| \rightarrow 0$, $|\xi| \rightarrow \infty$.

3.5 Kommutativa C^* -algebror och Gelfand-dualiteten

I detta avsnitt introducerar vi C^* -algebror. Målet är att komma fram till den omtalade kopplingen mellan topologi och algebra som ges av Gelfand-dualiteten. För att göra detta måste nödvändig teori introduceras.

Definition 3.5.1 (Involution) En *involution* är en avbildning $X \rightarrow X$, $x \mapsto x^*$ som uppfyller $(x^*)^* = x$, $(\mu x + \nu y)^* = \bar{\mu}x^* + \bar{\nu}y^*$ och $(xy)^* = y^*x^*$.

Exempel 3.5.2: En involution känd från linjär algebra är det Hermiteskt konjugatet på algebran av komplexvärda kvadratiske matriser $M_n(\mathbb{C})$. Motsvarande involution för $M_n(\mathbb{R})$ är det vanliga transponatet.

Exempel 3.5.3: Invers kan förefalla vara en involution, men så är inte fallet, ty invers är generellt inte linjär.

Definition 3.5.4 En algebra med involution kallas för en **-algebra*. En **-homomorfi* är en homomorfi som även bevarar involution, alltså $\phi(x^*) = (\phi(x))^*$. En **-isomorfi* definieras ekvivalent.

Definition 3.5.5 (*C**-algebra) En Banach-algebra A med involution kallas *C**-algebra om den uppfyller *C**-egenskapen, $\forall x \in A : \|x^*x\| = \|x\|^2$.

Från *C**-egenskapen och submultiplikativitet kan vi se att $\|x\| \leq \|x^*\|$ vilket ger $\forall x \in A : \|x\| = \|x^*\|$.

För en kommutativ Banach-algebra A , anta att Gelfand-homomorfien är en isometrisk isomorfi mellan A och $C_0(\Delta(A))$. Då existerar för varje $x \in A$ ett element $x^* \in A$ så att $\widehat{x^*} = \widehat{x}$. Avbildningen $x \mapsto x^*$ är då en involution. Likheten $\|x^*\| = \|\widehat{x^*}\|_\infty = \|\widehat{x}\|_\infty = \|x\|$ ger att $\|x^*x\| = \|\widehat{x^*x}\|_\infty = \|\widehat{x}\widehat{x}\|_\infty = \|\widehat{x^2}\|_\infty = \|x\|^2$ vilket gör A till en *C**-algebra. Det Gelfand-dualitetens säger är omvändningen, det förvånansvärda resultatet att en godtycklig kommutativ *C**-algebra A är isometriskt *-isomorf med $C_0(\Delta(A))$, via just Gelfand-homomorfien.

Innan vi går vidare ska vi bekanta oss lite mer med *C**-algebror. En av de mest bekanta *C**-algebrorna är komplexa kvadratiske matriser $M_n(\mathbb{C})$, men detta är inte en kommutativ *C**-algebra. Istället följer nu exempel på vanligt förekommande kommutativa *C**-algebror.

Exempel 3.5.6: För godtyckligt topologiskt rum är kontinuerliga begränsade funktioner $C_b(X)$ med supremumnormen $\|\cdot\|_\infty$ och involution som punktvis komplexkonjugat $f^*(x) = \overline{f(x)}$ en kommutativ *C**-algebra. Om X är ett lokalt kompakt Hausdorff-rum, så är specifikt $C_0(X)$ en *C**-delalgebra av $C_b(X)$, det vill säga en delmängd av en *C**-algebra som är stängd under addition, multiplikation och involution, vilket därmed också gör den till en *C**-algebra.

Man kan visa att om A är en *C**-algebra så är A_e med normen $\|a + \lambda e\| = \|a\| + |\lambda|$ en *-algebra, men generellt inte en *C**-algebra. Nästa sats identifierar en norm som gör det möjligt att, utan inskränkning anta identitet hos *C**-algebror.

Sats 3.5.7 Låt A vara *C**-algebra utan identitet. Då existerar det en norm $\|\cdot\|_0$ på A_e sådan att $\|a\|_0 = \|a\|$, $\forall a \in A$ och $(A_e, \|\cdot\|_0)$ är en *C**-algebra.

För bevis, se Appendix E.5.1.

Sats 3.5.8 (Gelfand-dualiteten) Låt A vara en kommutativ *C**-algebra. Då är Gelfand-homomorfien en isometrisk *-isomorfi från A till $C_0(\Delta(A))$.

Bevis: Beviset består av tre delar där vi visar en egenskap i taget hos Gelfand-homomorfien. (1) Γ är en *-homomorfi, (2) Γ är isometrisk och (3) Bilden av A är $C_0(\Delta(A))$.

(1): Vi vill visa att $\forall x \in A : \widehat{x^*} = \widehat{x}$, vilket är ekvivalent med $\forall \varphi \in \Delta(A)$, $\forall x \in A : \varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$. Låt $\varphi(x) = \alpha + i\beta$ och $\varphi(x^*) = \gamma + i\delta$, där $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

För att härleda en motsägelse, anta $\beta + \delta \neq 0$. Utan inskränkning kan vi med hjälp av Sats 3.5.7 anta att A har en identitet. Konstruera $y = (\beta + \delta)^{-1}(x + x^* - (\alpha + \gamma)e)$ vilken uppfyller $y^* = y$ och $\varphi(y) = i$. Då $\forall t \in \mathbb{R}$, gäller $\varphi(y + tie) = (1 + t)i$, och eftersom $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ så är $|1 + t| \leq \|y + tie\|$. Eftersom $y^* = y$ så ger *C**-egenskapen att

$$(t + 1)^2 \leq \|y + tie\|^2 = \|(y + tie)^*(y + tie)\| = \|y^2 + t^2e\| \leq \|y^2\| + t^2$$

vilket inte kan hålla för godtyckligt stora t . Detta är en motsägelse och vi får alltså att $\delta = -\beta$. På samma sätt, fast för ix istället för x , får vi att $\gamma = \alpha$ och därmed $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$.

(2): Vi vill visa $\forall x \in A : \|\widehat{x}\|_\infty = \|x\|$, och vi anmärker först att för alla $y \in A$ som uppfyller $y = y^*$ så är $\|y\|^2 = \|y^*y\| = \|y^2\|$ och då av induktion också $\forall n \in \mathbb{N} : \|y\|^{2^n} = \|y^{2^n}\|$. Det ger $r_A(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y^{2^n}\|^{1/2^n} = \|y\|$. Så för godtyckligt $x \in A$ gäller $r_A(x^*x) = \|x^*x\| = \|x\|^2$. Eftersom vi vet från (1) att $\widehat{x^*} = \widehat{x}$ och från Sats 3.4.8 kan vi få ut att $\|\widehat{x}\|_\infty = r_A(x)$ vilket tillsammans ger $\|\widehat{x}\|_\infty^2 = \|\widehat{x}\widehat{x}\|_\infty = \|\widehat{x^*x}\|_\infty = r_A(x^*x) = \|x\|^2$.

(3): Vi ska visa att $\Gamma(A) = C_0(\Delta(A))$. Från Anmärkning 3.4.6 så vet vi att $\hat{x} \in C_0(\Delta(A))$, och alltså $\Gamma(A) \subseteq C_0(\Delta(A))$. $\Gamma(A)$ är stängd, eftersom Γ är en isometri vilket ger att $\Gamma(A)$ är fullständig, och ett fullständigt Banach-rum är stängt. Det går att visa att $\Gamma(A)$ starkt separerar elementen i $\Delta(A)$, det vill säga $\forall \varphi \in \Delta(A)$, $\Gamma(A)(\varphi) \neq \{0\}$ och om $\varphi_1 \neq \varphi_2$ så $\hat{x}(\varphi_1) \neq \hat{x}(\varphi_2)$ för något $x \in A$. Då är $\Gamma(A)$ tät i $C_0(\Delta(A))$ enligt Stone-Weierstrass (se D.0.7). Att $\Gamma(A)$ är tät och fullständig ger att $\Gamma(A) = C_0(\Delta(A))$. ■

Exempel 3.5.9: Låt oss relatera Sats 3.5.8 till Exempel 3.4.13 där Fouriertransform beskrevs. Fouriertransform avbildar funktioner från $L^1(\mathbb{R})$ med konvolution och L^1 -normen till $C_0(\Delta(L^1(\mathbb{R}))) \approx C_0(\mathbb{R})$ med punktvis multiplikation och supremumnormen. Vi vill undersöka om $L^1(\mathbb{R})$ är en C^* -algebra, så låt oss undersöka en konkret funktion.

Definiera funktionen $f(x) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. För att undersöka om funktionen uppfyller C^* -egenskapen måste vi beräkna $\|(f^*) * f\|_{L^1}$. Med konvolution som operation innebär det att vi måste beräkna två integraler. Detta kan vi undvika genom att istället använda Sats 3.5.8.

Det satsen säger är att, om $L^1(\mathbb{R})$ är en kommutativ C^* -algebra, så skulle Fouriertransformen vara en isometrisk $*$ -isomorfi. Vi undersöker detta med vår funktion f , och ser om dess Fouriertransform $\hat{f}(\omega) = i\sqrt{2\pi}\xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$ har samma norm. Men

$$\|f\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right| dx = 2 \neq \sqrt{\frac{2\pi}{e}} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| i\sqrt{2\pi}\xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \right| = \|\hat{f}\|_{\infty}$$

vilket direkt visar att $L^1(\mathbb{R})$ inte är en kommutativ C^* -algebra. $L^1(\mathbb{R})$ är specifikt inte en C^* -algebra eftersom konvolution är kommutativ.

Genom att använda Sats 3.5.8 istället för att använda oss av C^* -egenskapen behövde vi beräkna en integral mindre och istället beräkna ett maxvärde, för att komma fram till samma resultat.

Notera att $\|f\|_{L^1} \leq \|\hat{f}\|_{\infty}$ vilket vi såg stämmer generellt för Gelfand-transform i Anmärkning 3.4.9.

För att åter visa på kopplingen till de topologiska strukturrummen ges följande ekvivalenta påståenden, som starkt liknar Korollarium 3.4.11.

Korollarium 3.5.10. För två kommutativa C^* -algebraer A och B så är följande påståenden ekvivalenta

1. A och B är isometrisk $*$ -isomorfa.
2. A och B är algebraiskt isomorfa.
3. $\Delta(A)$ och $\Delta(B)$ är homeomorfa.

Bevis: (1) $\implies$ (2) enligt definition, och (2) $\implies$ (3) såg vi stämde även för Banach-algebraer i Sats 3.4.10. För att visa (1) $\implies$ (2), låt $\phi : \Delta(A) \rightarrow \Delta(B)$ vara en homeomorfi, då är $C_0(\Delta(B)) \rightarrow C_0(\Delta(A))$, $f \mapsto f \circ \phi$ en isometrisk algebra isomorfi, som även uppfyller $\bar{f} \mapsto \overline{f \circ \phi}$ och är alltså även en $*$ -isomorfi. Men enligt Sats 3.5.8 så är A och B isometriskt $*$ -isomorfa med $C_0(\Delta(A))$ respektive $C_0(\Delta(B))$. Då följer det från att isomorfier är transitiva att A och B är isometriskt $*$ -isomorfa. ■

Vi har använt benämningen *Gelfand-dualiteten* för Sats 3.5.8, men inte förklarat varför det sägs vara en dualitet. Sats 3.5.8 gav den sista nödvändiga avbildningen, och den andra viktiga avbildningen gavs i Sats 3.4.3. Genom att undersöka Korollarium 3.4.11 och Korollarium 3.5.10 kan vi skapa följande diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta(C_0(X)) & \longrightarrow & \Delta(C_0(Y)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C_0(\Delta(A)) & \longrightarrow & C_0(\Delta(B)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & B \end{array}$$

där pilarna i det vänstra diagramet går mellan topologiska rum och betecknar homeomorfier, medan pilarna i det högra diagramet går mellan algebraer och betecknar isometriska $*$ -isomorfier. Dessa diagram gäller för X och Y som är lokalt kompakta Hausdorff-rum respektive för A och B som är kommutativa C^* -algebraer. Att man kan finna två sådana diagram, där pilarna ger samma element oavsett vilken väg man tar, beskriver en dualitet. Studierna av diagram och vad dessa diagram medför kallas *kategoriteori* och det ges en introduktion till detta i Appendix B.

Dualiteten ger alltså en översättning mellan algebra och topologi. Vi kan då se att vissa begrepp har en motsvarighet, som till exempel homeomorfi och isometrisk $*$ -isomorfi. I avsnitt 3.6 ser vi hur två andra begrepp kan översättas mellan ämnena.

Gelfand-dualiteten i Sats 3.5.8 är ett starkt resultat gällande kommutativa C^* -algebraer, och det blir naturligt att fråga om det finns liknande resultat för icke-kommutativa C^* -algebraer. Så är fallet och det ges en kort introduktion till detta i Appendix C.

3.6 Kompaktifiering och unitalisering

Om en mängd inte är kompakt går det att göra den kompakt genom en så kallad kompaktifiering. Senare kommer vi se att det finns en koppling mellan kompaktifieringar för mängder (topologiskt koncept) och unitaliseringar för algebraer (algebraiskt koncept) som återigen är ett exempel för dualiteten mellan algebra och topologi som nämnts i föregående avsnitt.

Innan vi kommer till definitionen av kompaktifiering behöver vi definiera vad det innebär för en mängd att vara tät i en annan.

Definition 3.6.1 (Tät) Ett topologiskt rum X är tät i ett topologiskt rum Y om $\forall V \subseteq Y$ öppna, gäller att $V \cap X \neq \emptyset$.

Definition 3.6.2 (Kompaktifiering) En kompaktifiering av ett topologiskt rum X är ett par (Y, i) sådan att följande krav är uppfyllda:

1. Y är ett kompakt Hausdorff-rum;
2. $i : X \rightarrow Y$ är en homeomorfi mellan X och $i(X) \subseteq Y$;
3. bilden $i(X)$ är tät i Y ; eller formulerat på annat sätt $\overline{i(X)} = Y$.

Värt att notera är att om X är kompakt kan vi göra den triviala kompaktifieringen genom att välja $i : X \rightarrow X$ enligt $x \mapsto x$ och då gäller att $X \approx i(X)$. Eftersom X är tät i sig själv är detta en kompaktifiering. Alla kompaktifieringar av kompakta mängder X är dock inte homeomorfa med X .

Det finns många sätt att kompaktifiera en mängd. Två exempel är den tidigare introducerade enpunkts-kompaktifieringen samt Stone-Čech kompaktifieringen som definieras nedan. Rent intuitivt kan enpunkts-kompaktifieringen tänkas som den minsta möjliga kompaktifieringen medan Stone-Čech är den största.

Definition 3.6.3 (Stone-Čech) Stone-Čech kompaktifieringen är ett par $(\beta X, \beta)$ där βX är en kompakt Hausdorff-mängd. Paret ska uppfylla att, givet en kompakt Hausdorff-mängd K kan varje kontinuerlig funktion $f : X \rightarrow K$ på ett entydigt sätt utvidgas till en kontinuerlig funktion $\beta f : \beta X \rightarrow K$.

För att bygga upp likheterna mellan topologi och algebra introducerar vi det algebraiska begreppet *essentiellt ideal* som behövs för att formulera en mer rigorös definition av unitalisering.

Definition 3.6.4 (Essentiellt ideal) Ett ideal $B \subseteq A$ kallas essentiellt om något av följande ekvivalenta villkor är uppfyllda:

1. om $a \in A$ är sådant att $aB = \{0\}$ så gäller att $a = 0$;
2. om varje icke-trivialt ideal $(I \subset A)$ är sådant att $I \cap B \neq \{0\}$.

D.v.s. att det essentiella idealet delar nollskillda element med samtliga andra icke-triviala ideal. I någon mån kan vi alltså tänka på essentiella ideal som att de innehåller det essentiella för idealen, därav namnet. För notation skriver vi $B \xrightarrow{ess} A$ om B är ett essentiellt ideal av A .

En bra observation här är att för alla algebraer A gäller att $A \xrightarrow{ess} A$. Vidare är det intressant att notera att för att X skall vara tät i Y har vi att för alla öppna $V \subseteq Y$ gäller $V \cap X \neq \emptyset$, medan för att $B \subseteq A$ skall kallas essentiellt ideal har vi att för alla icke-triviala ideal $I \subseteq A$ gäller $I \cap B \neq \{0\}$.

Nedan presenteras definitionen av unitalisering och notera speciellt likheterna med definitionen av kompaktifiering.

Definition 3.6.5 (Unitalisering) Givet en algebra A utan identitet kallas paret (B, i) för en unitalisering om följande är uppfyllt

1. B är en algebra med identitet;
2. i är en algebra-isomorfi mellan A och $i(A)$;

3. $i(A)$ är ett essentiellt ideal av B .

Värt att notera är att om A är unitär kan vi göra den triviala unitaliseringen genom att välja $i : A \rightarrow A$ enligt $a \mapsto a$ och då gäller att $A \approx i(A)$. Vidare, eftersom $A \xrightarrow{ess} A$ är detta en unitalisering. Alla unitaliseringar av unitära algebror A är dock inte isomorfa med A . Till exempel gäller att $A \not\approx A_e = A \times \mathbb{C}$, se definition 2.2.12.

Vi ser att det verkar finnas ett samband mellan kompaktifieringar och unitaliseringar, det sambandet vill vi formalisera. Specifikt kommer vi se att $[Y \text{ är en kompaktifiering av } X] \iff [C_0(X) \xrightarrow{ess} C(Y)]$. Intuitivt kan detta ses som att funktionerna i $C_0(X)$ försvinner i de punkter som läggs till för att skapa X 's kompaktifiering. För att bygga upp till detta gör vi följande observation, att det finns ett samband mellan ideal av $C_0(X)$ och stängda delmängder $E \subseteq X$ genom $I(E) := \{f \in C_0(X) : f|_E = 0\}$. Bevis av följande två lemma kan hittas i appendix E.6.

Lemma 3.6.6 Om X är lokalt kompakt Hausdorff och $X_0 \subseteq X$ är en öppen mängd så gäller att $C_0(X_0) \approx I(X \setminus X_0)$ är ett ideal till $C(X)$.

Lemma 3.6.7 För ett lokalt kompakt Hausdorff- X gäller att $[C_0(X_0) \xrightarrow{ess} C(X)] \iff [X_0 \text{ tät i } X]$. Slutligen har vi huvudpåståendet om kopplingen mellan kompaktifieringar och unitalisationer.

Sats 3.6.8 För ett lokalt kompakt Hausdorff- X och kompakt Hausdorff- Y gäller $[Y \text{ kompaktifiering av } X] \iff [C_0(X) \xrightarrow{ess} C(Y)]$.

Bevis: ($\implies$): Påståendet att Y är en kompaktifiering av X är ekvivalent med $\exists i : X \rightarrow Y : \overline{i(X)} = Y$, d.v.s. $i(X)$ är tät i Y . Enligt lemma 3.6.7 har vi nu att $C_0(i(X)) \xrightarrow{ess} C(Y)$. Vidare gäller att $X \approx i(X)$ och alltså har vi $C_0(i(X)) \approx C_0(X)$ vilket slutligen ger oss $C_0(X) \xrightarrow{ess} C(Y)$.

($\impliedby$): $C_0(X) \xrightarrow{ess} C(Y)$ ger att $C_0(X)$ är ett ideal i $C(Y)$. Vi kan då införa en inbäddning s.a. $i(C_0(X)) \approx C_0(X)$. Från sats 3.2.7 har vi en bijektion mellan ideal och öppna delmängder. Detta ger att för något $U \subseteq Y$ gäller $C_0(X) \approx i(C_0(X)) \approx I(X \setminus U) \approx C_0(U)$. Detta ger oss alltså $X \approx U \subseteq Y$. Låt U vara vår inbäddning av X i Y . Eftersom $C_0(X) \xrightarrow{ess} C(Y)$ gäller, enligt lemma 3.6.7, att X är tät i Y och därför gäller att bilden av X under inbäddningen, d.v.s. U , är tät i Y . Detta innebär att Y uppfyller alla krav för att vara en kompaktifiering av X . Detta avslutar beviset. ■

För att avrunda avsnittet presenteras tre exempel på denna sats. Det första rör något som vi har berört tidigare, men nu i ett nytt ljus. De sista två visar att det är rimligt att det finns en "största" och en "minsta" unitalisering utifrån att enpunktskompaktifieringen är den minsta kompaktifieringen och Stone-Čech-kompaktifieringen är den största kompaktifieringen.

Exempel 3.6.9: Sedan tidigare har vi etablerat att S^1 är homeomorf med enpunktskompaktifieringen av $\mathbb{R}$ och således kan ses som en kompaktifiering av $\mathbb{R}$ i sig. Med detta och ovanstående bevis har vi att $C_0(\mathbb{R})$ är ett essentiellt ideal av $C(S^1)$. $C_0(\mathbb{R})$ skulle kunna tolkas som de funktioner som försvinner i toppen av cirkeln som då utgör ett essentiellt ideal till alla kontinuerliga funktioner från S^1 till $\mathbb{C}$, se även exempel 3.4.12.

Exempel 3.6.10: Låt $Y = X^\infty$ vara enpunktskompaktifieringen av X . Enligt sats 3.6.8 gäller då att $C_0(X) \xrightarrow{ess} C(X^\infty)$. Vidare gäller att $C(X^\infty) \approx \widetilde{C_0(X)}$, där $\widetilde{C_0(X)}$ betecknar unitaliseringen av $C_0(X)$ som definieras i A.6.6. Detta kan ses genom att konstruera avbildningen $\phi : \widetilde{C_0(X)} \rightarrow C(X^\infty)$ enligt $(f, \lambda) \mapsto \tilde{f} + \lambda e$, där $\tilde{f}(x) = f(x)$ om $x \neq \infty$ och $\tilde{f}(x) = 0$ då $x = \{\infty\}$. Ur detta kan ses att unitaliseringen som introduceras i A.6.6 kan tänkas på som "den minsta unitaliseringen".

Exempel 3.6.11: Låt $Y = \beta X$ vara Stone-Čech kompaktifieringen av X . Då gäller enligt sats 3.6.8 att $C_0(X) \xrightarrow{ess} C(\beta X)$. Med detta och sats D.0.11 i appendix har vi att $C(\beta X) \approx C(\Delta(C_b(X)))$. Eftersom $C_0(X)$ är kommutativ gäller att $C_b(X) \approx M(C_0(X))$, där $M(C_0(X))$ betecknar multiplikatoralgebran introducerad i appendix A.6. Detta ger oss alltså $C(\beta X) \approx C(\Delta(M(C_0(X)))) \approx M(C_0(X))$ där den sista isomorfin ges av Gelfand-dualiteten, se sats 3.5.8. Sammanfattningsvis har vi att $C(\beta X) \approx M(C_0(X))$. Detta motiverar att vi kan kalla multiplikatoralgebran för "den största unitaliseringen".

Med dessa explicita exempel av korrespondens mellan strukturer i algebra och topologi avslutas rapporten. Författarna hoppas att läsaren genom rapporten har fått en insikt i denna korrespondens och har blivit inspirerad att fortsätta utforska denna intressanta del av matematiken.

Kapitel A | Grundläggande teori

A.1 Topologi

En del av definitionerna i topologiavsnittet var något kortfattade eller saknades helt och vissa detaljer påpekades inte således presenteras här mer utförliga och korrekta definitioner för dem som är intresserade.

Definition A.1.1 (Topologi på en mängd) På en mängd X kan vi definiera en topologi som en delmängd av X 's potensmängd enligt $\mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ om $\mathcal{T}_X$ uppfyller följande krav

- i) $\emptyset \in \mathcal{T}_X$ samt $X \in \mathcal{T}_X$;
- ii) $\mathcal{T}_X$ är sluten under godtyckliga unioner;
- iii) $\mathcal{T}_X$ är sluten under ändliga snitt.

Definition A.1.2 (Topologiskt rum) Paret $(X; \mathcal{T}_X)$ av X med sin topologi $\mathcal{T}_X$ kallas för ett topologiskt rum.

Definition A.1.3 (Öppen och stängd mängd) Givet ett topologiskt rum $(X, \mathcal{T}_X)$ definieras en mängd $U \subseteq X$ som öppen om $U \in \mathcal{T}_X$ och som stängd om $(X \setminus U) \in \mathcal{T}_X$.

Exempel A.1.4: Givet ett topologiskt rum $(X, \mathcal{T}_X)$ gäller att eftersom $\emptyset$ och X båda finns i topologin är de öppna. Vidare har vi att $X = (X \setminus \emptyset) \in \mathcal{T}_X$ vilket gör att X är stängd och liknande för den tomma mängden: $\emptyset = (\emptyset \setminus X) \in \mathcal{T}_X$. Således är både $\emptyset$ och X båda öppna och stängda samtidigt.

Ibland kan man inte introducera en topologi genom att explicit lista alla element i topologin, istället kan man i så fall använda en så kallad topologisk bas.

Definition A.1.5 (Bas för en topologi) En bas $\mathcal{B}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ för en topologi $\mathcal{T}_X$ på en mängd X är en samling mängder som uppfyller följande

- i) $\forall x \in X : \exists B \in \mathcal{B}_X : x \in B$;
- ii) givet $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_X$ gäller $x \in (B_1 \cap B_2) \rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}_X : (x \in B_3) \wedge (B_3 \subset (B_1 \cap B_2))$.

Topologin som genereras av basen är den vars element kan fås av unionen av element ur basen.

Vi kan även definiera en så kallad delbas.

Definition A.1.6 (Delbas för en topologi) En delbas S för en topologi på X definieras enligt $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ där $\bigcup S = X$. Topologin som genereras av S är den vars element kan fås från unioner av ändliga snitt av element i S . D.v.s. att S under ändliga snitt utgör en bas för topologin på X .

Nedan kommer den formella definitionen av en Hausdorff-topologi.

Definition A.1.7 (Hausdorff-topologi) En topologi $\mathcal{T}_X$ på en mängd X kallas för en Hausdorff-topologi om följande gäller $\forall x, y \in X : x \neq y : \exists U, V \in \mathcal{T}_X : (x \in U \wedge y \in V) \wedge (U \cap V = \emptyset)$. Om detta gäller kallas det topologiska rummet $(X, \mathcal{T}_X)$ för ett Hausdorff-rum eller Hausdorff-mängd.

En egenskap som liknar Hausdorff-egenskapen för topologiska rum är om ett topologiskt rum är regulärt. Men innan vi kan introducera detta behöver vi först definiera vad en omgivning är.

Definition A.1.8 (Omgivning) En omgivning till en punkt x i ett topologiskt rum $(X, \mathcal{T}_X)$ är en mängd U som uppfyller $x \in U$ samt $\exists V \in \mathcal{T}_X : V \subset U$.

Definition A.1.9 (Regulärt topologiskt rum) Ett topologiskt rum $(X, \mathcal{T}_X)$ kallas regulärt om för alla stängda mängder Ω , d.v.s. $(X \setminus \Omega) \in \mathcal{T}_X$, och för alla punkter $x \in (X \setminus \Omega)$ så finns det en omgivning U till x och en

omgivning V till Ω s.a. $U \cap V = \emptyset$.

Nästa definition är nödvändig för användande av sats D.0.11.

Definition A.1.10 (Totalt regulärt rum) Ett topologiskt rum $(X, \mathcal{T}_X)$ kallas totalt regulärt om det för alla stängda mängder U och för alla punkter $x \in (X \setminus U)$ finns en koninuerlig funktion $f : X \rightarrow [0, 1]$ s.a. $f(U) = \{0\}$ och $f(x) = 1$.

Följande definition krävs för att fullständigt klargöra definitionen av kontinuitet.

Definition A.1.11 (Avbildningen Urbild) Givet en funktion $\phi : A \rightarrow B$ definieras Urbilden för ϕ av en delmängd $U \subseteq B$ enligt $\text{urbild}_\phi(U) = \{a \in A : \phi(a) \in U \subseteq B\}$, d.v.s. Urbilden av en mängd U ger ut mängden av alla element som hamnar i U under funktionen ϕ .

Definition A.1.12 (Kontinuerlig funktion) Givet två topologiska rum $(X, \mathcal{T}_X)$ och $(Y, \mathcal{T}_Y)$ samt en funktion $\phi : X \rightarrow Y$ är ϕ kontinuerlig om följande gäller $\forall U \in \mathcal{T}_Y : \text{urbild}_\phi(U) \in \mathcal{T}_X$. Eller kortare sagt: öppna mängder avbildas på av öppna mängder.

Härnäst kommer vi till de definitioner som leder upp till kompaktitet.

Definition A.1.13 (Öppen täckning) En öppen täckning C är en samling öppna mängder, d.v.s. element i topologin, om $\bigcup C = X$.

Definition A.1.14 (Deltäckning) En samling mängder $\tilde{C} \subseteq C$ kallas en deltäckning av en mängd X om C är en täckning av X och $\bigcup \tilde{C} = X$.

Definition A.1.15 (Kompakt mängd) En topologiskt rum $(X, \mathcal{T}_X)$ kallas kompakt om varje täckning av X har en ändlig deltäckning.

Om en mängd inte är kompakt kan den fortfarande vara lokalt kompakt med följande definition.

Definition A.1.16 (Lokalt kompakt) Ett topologiskt rum $(X, \mathcal{T}_X)$ kallas lokalt kompakt om alla punkter i X har en kompakt omgivning.

När vi nu har definierat vad en kompakt mängd är kan vi definiera kompaktifieringen av ett topologiskt rum.

Definition A.1.17 (Kompaktifiering) En kompaktifiering av ett topologiskt rum X är ett par (Y, i) sådan att följande krav är uppfyllda:

- i) Y är kompakt och Hausdorff;
- ii) $i : X \rightarrow Y$ är en homeomorfi mellan X och $i(X) \subseteq Y$;
- iii) bilden $i(X)$ är tät i Y , d.v.s. $\overline{i(X)} = Y$.

En vanlig metod för att erhålla ett kompakt topologiskt rum är den s.k. enpunktskompaktifieringen.

Definition A.1.18 (Enpunktskompaktifiering) Låt $(X, \mathcal{T}_X)$ vara ett lokalt kompakt och Hausdorff topologiskt rum och definiera

$$X^\infty := X \cup \{\infty\}.$$

Topologin $\mathcal{T}_{X^\infty}^\infty$ på X^∞ definieras enligt

- i) $\mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_{X^\infty}^\infty$
- ii) För alla kompakta delmängder $C \subseteq X$ gäller att $U_C := (X \setminus C) \cup \{\infty\} \in \mathcal{T}_{X^\infty}^\infty$.

Vi avslutar de topologiska definitionerna med den topologiska definitionen för att en sekvens konvergerar.

Definition A.1.19 (Sekvens) Givet en mängd X definierar vi en sekvens som en funktion $s : \mathbb{N} \rightarrow X$.

Definition A.1.20 (Konvergens) Låt $(X, \mathcal{T}_X)$ vara ett topologiskt rum. Då sägs en sekvens s konvergera mot en gränspunkt x om $\forall U \in \mathcal{T}_X : x \in U \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : s(n) \in U$.

A.2 Avbildningar och abstrakt algebra

Definition A.2.1 (Avbildning) För mängder X och Y är $f : X \rightarrow Y$ en *avbildning* om $f(x) \in Y$, $\forall x \in X$. X kallas för *definitions mängd*, Y kallas *målmängd*, för en delmängd U av X kallas

$$f(U) := \{y \in Y : y = f(x), x \in U\}$$

kallas för *bilden av U under f* och

$$\text{Ker } f := \{x \in X : f(x) = 0\}$$

kallas för *kärna* eller *nollrum* (beteckningen Ker härstammar från engelskans "kernel").

Definition A.2.2 (Invers) För en funktion $f : X \rightarrow Y$ definieras *inversen av f* (om den existerar) $f^{-1} : Y \rightarrow X$ av $f^{-1}(f(x)) = x$, $\forall x \in X$ och $f(f^{-1}(y)) = y$, $\forall y \in Y$. Ifall f^{-1} existerar säger vi att f är inverterbar.

Definition A.2.3 (Injektiv, surjektiv och bijektiv) En avbildning $f : X \rightarrow Y$ är *injektiv* om $\forall x_1, x_2 \in X$

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

f är *surjektiv* om

$$\exists x \in X : y = f(x), \forall y \in Y.$$

Om f är både injektiv och surjektiv säger vi att f är *bijektiv*.

Sats A.2.4 För en avbildning $f : X \rightarrow Y$ mellan två mängder X och Y gäller

$$f \text{ är bijektiv} \iff f \text{ har invers.}$$

Definition A.2.5 (Indikatorfunktionen) För $a \in \mathbb{R}$, låter vi $\chi_{|x| \leq a} : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ beteckna *indikatorfunktionen*

$$\chi_{|x| \leq a}(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } |x| \leq a \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Definition A.2.6 (Kartesisk produkt) För mängder X och Y definieras den *Kartesiska produkten*, $X \times Y$, som mängden av ordnade par (x, y) , $x \in X$, $y \in Y$.

Definition A.2.7 (Binär operation) En *binär operation* på en mängd X är en avbildning $* : X \times X \rightarrow X$.

Definition A.2.8 (Grupp) En *grupp* är en mängd G tillsammans med en binär operation $*$ på G som uppfyller följande villkor.

1. Associativitet: $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in G$
2. Existens av identitet: $\exists e \in G : e * a = a * e = a$, $\forall a \in G$
3. Existens av invers: $\exists b \in G : b * a = a * b = e$, $\forall a \in G$

Anmärkning A.2.9: Vi säger ofta "gruppen G " om det framgår av kontext vilken den tillhörande operationen är. Vidare förkortas vanligen $a * b$ som ab .

Definition A.2.10 (Abelsk) Vi säger att en grupp G är *abelsk* eller kommutativ om den tillhörande operationen $*$ uppfyller att $ab = ba$, $\forall a, b \in G$

Definition A.2.11 (Kropp) En *kropp* är en mängd K , med operationer $+$ och $*$, som är en abelsk grupp med avseende på operationen $+$ som har identitets-element 0. Vidare är $K \setminus \{0\}$, med operationen $*$, en abelsk grupp. Operationerna uppfyller även den distributiva lagen

$$a * (b + c) = a * b + a * c, \quad a, b, c \in K.$$

Exempel A.2.12: De rationella talen $\mathbb{Q}$, de reella talen $\mathbb{R}$ och de komplexa talen $\mathbb{C}$ är kroppar (med vanlig addition och multiplikation).

A.3 Metriska rum

Definition A.3.1 (Metriskt rum) Ett *metriskt rum* är ett mängd X med en avbildning $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ kallad metrik. Metriken uppfyller, för $x, y, z \in X$, följande.

1. $d(x, y) = d(y, x)$
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Definition A.3.2 (Metriskt underrum) Ett delmängd Y av ett metriskt rum (X, d) kallas för ett *metriskt underrum* av (X, d) om Y är ett metriskt rum med avseende på metriken d .

Definition A.3.3 (Isometri) En avbildning $\phi : X \rightarrow Y$ mellan två metriska rum (X, d_X) och (Y, d_Y) kallas för en *isometri* om

$$d(x_1, x_2)_X = d(\phi(x_1), \phi(x_2))_Y, \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

Definition A.3.4 (Cauchy-följd) Låt (X, d) vara ett metriskt rum. En följd $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq X$ sägs vara en *Cauchy-följd* om

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : d(x_m, x_n) < \epsilon, \quad \forall m, n > N.$$

Definition A.3.5 (Fullständigt rum) Ett metriskt rum (X, d) sägs vara *fullständigt* om alla Cauchy-följder $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq V$ konvergerar till något element i V , det vill säga

$$\exists x \in X : \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \|x - x_n\| < \epsilon, \quad \forall n > N.$$

Sats A.3.6 För ett metriskt underrum (Y, d) av ett metriskt rum (X, d) gäller

$$Y \text{ är fullständigt} \iff Y \text{ är sluten delmängd (av } X \text{)}.$$

A.4 Linjär algebra

Definition A.4.1 (Vektorrum) Ett *vektorrum* V över en kropp K är en grupp, med avseende på operationen $+$. V är även slutet under multiplikation $\cdot$ med skalär, det vill säga $\lambda \in K, u \in V \implies \lambda \cdot u \in V$. För $u, v \in V$ och $\lambda, \mu \in K$ gäller följande.

1. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$
2. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$
3. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
4. $\exists 1 \in K : 1 \cdot u = u$

Definition A.4.2 (Linjärt underrum) Ett delmängd U av ett vektorrum V kallas för ett *linjärt underrum* av V om U är ett vektorrum med avseende på operationerna på V .

Definition A.4.3 (Normerat rum) Ett *normerat rum* är ett vektorrum V över en kropp K med en avbildning $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, kallad norm. Normen uppfyller, för $u, v \in V$ och $\lambda \in K$, följande.

1. $\|u\| \geq 0$
2. $\|u\| = 0 \iff u = 0$
3. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Definition A.4.4 (Banach-rum) Ett fullständigt normerat rum kallas *Banach-rum*.

Anmärkning A.4.5: För ett normerat rum $(V, \|\cdot\|)$ är avbildningen $d(x, y) := \|x - y\|$ en metrik på V . Följaktligen är alla normerade rum även metriska rum.

Definition A.4.6 (Linjär operator) Låt V och W vara vektorrum över en kropp K . En avbildning $T : V \rightarrow W$ kallas för en linjär operator om

1. $T(u + v) = T(u) + T(v), \quad \forall u, v \in V$

$$2. T(\lambda v) = \lambda T(v), \quad \forall v \in V, \quad \forall \lambda \in K$$

Definition A.4.7 (Operatornorm) För en begränsad linjär operator $T : V \rightarrow W$ mellan två normerade vektorrum $(V, \|\cdot\|_V)$ och $(W, \|\cdot\|_W)$, definieras *operatornormen* som något av följande ekvivalenta uttrycken.

$$\begin{aligned} \|T\| &:= \sup \left\{ \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} : v \in V, \|v\|_V \neq 0 \right\} \\ &= \sup \{\|Tv\|_W : v \in V, \|v\|_V = 1\} \\ &= \sup \{\|Tv\|_W : v \in V, \|v\|_V \leq 1\} \\ &= \inf \{c \geq 0 : \|Tv\|_W \leq c\|v\|_V, \forall v \in V\} \end{aligned}$$

Denna norm används vanligen för begränsade linjära operatorer som verkar på normerade rum och görs i denna text om inget annat anges.

Definition A.4.8 (Dual) För ett normerat vektorrum V över en kropp K definieras *dualen* V^* som mängden begränsade linjära funktionaler $\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}$. Med operatornormen är V^* ett Banachrum.

Sats A.4.9 (Första isomorfisatsen för vektorrum) Låt $\psi : V \rightarrow W$ vara en homomorfi mellan två vektorrum V och W över en kropp K . Då gäller

1. $\text{Ker } \psi$ är ett underrum av V
2. $\psi(V)$ är ett underrum av W
3. $\psi(V) \approx V/\text{Ker } \psi$ som vektorrum

Anmärkning A.4.10: Om vi låter $W = \mathbb{C}$ i sats A.4.9, följer det att den komplexa dimensionen av $\psi(V) \subseteq \mathbb{C}$ är 1 och därmed $\dim_{\mathbb{C}}(V/\text{Ker } \psi) = \dim_{\mathbb{C}}(\psi(V)) = 1$. Med andra ord är kodimension av $\text{Ker } \psi$, relativt V , lika med 1.

A.5 Kvotalgeror

Sats A.5.1 För en Banach-algebra A och ett slutet ideal I av A är A/I en normerad algebra

Bevis: Vi visar att (1) operationerna på A/I är väldefinierade, (2) $\|\cdot\|_{A/I}$ är en norm, (3) $\|\cdot\|_{A/I}$ är submultiplikativ och (4) $(A/I, \|\cdot\|_{A/I})$ är fullständigt

(1): Låt $x, y \in A$, $i, j \in I$ och $\lambda \in \mathbb{C}$, då gäller $x + I, y + I \in A/I$. Eftersom

$$(x + i) + (y + j) = (x + y) + (i + j) \text{ och } (x + i)(y + j) = xy + (xj + iy + ij),$$

gäller det för alla $i, j \in I$ följer det att $(x + I) + (y + I) = (x + y) + I$ och $(x + I)(y + I) = xy + I$.

(2): Låt nu $x + I \in A/I$. Vi har att

$$\|x + I\|_{A/I} = \inf_{i \in I} \|x + i\|_A = 0 \implies (-x) \in I \implies x \in I.$$

Alltså $\|x + I\|_{A/I} = 0 \iff x + I = 0_{A/I}$. Det gäller även att $\|x + I\|_{A/I} = \inf_{i \in I} \|x + i\|_A \geq 0$. Försättningsvis gäller $\|\lambda x + I\|_{A/I} = \inf_{i \in I} \|\lambda x + i\|_A = |\lambda| \inf_{i \in I} \|x + i/\lambda\|_A = |\lambda| \|x + I\|_{A/I}$. Slutligen har vi att

$$\begin{aligned} \|(x + I) + (y + I)\|_{A/I} &= \inf_{i \in I} \|x + y + i\|_A \\ &= \inf_{i, j \in I} \|x + y + i + j\|_A \\ &\leq \inf_{i, j \in I} (\|x + i\|_A + \|y + j\|_A) \\ &= \|x + I\|_{A/I} + \|y + I\|_{A/I}. \end{aligned}$$

Vi använder i andra steget ovan att $0_A \in I$. Detta visar att $\|\cdot\|_{A/I}$ är en norm på A/I .

(3): Låt nu $x + I, y + I \in A/I$. Då gäller

$$\begin{aligned} \|(x + I)(y + I)\|_{A/I} &= \|(xy + I)\|_{A/I} \\ &= \inf_{i \in I} \|xy + i\|_A \\ &= \inf_{i, j, k \in I} \|xy + i + xk + jy + jk - (xk + jy + jk)\|_A \\ &\leq \inf_{i, j, k \in I} (\|xy + xk + jy + jk\|_A + \|xk + jy + jk - i\|_A) \\ &= \|(x + I)\| \| (y + I) \|_{A/I} + 0 \end{aligned}$$

(4): Vi använder oss här av sats D.0.10 och visar att om $(x_n + I)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A/I$ är sådan att $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + I\|_{A/I}$ konvergerar, så konvergerar även $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + I)$. Vi har att $\|x_n + I\|_{A/I} = \inf_{i \in I} \|x_n + i\|_A$, vilket implicerar att $\exists j_n \in I : \|x_n + j_n\|_A \leq 2\|x_n + I\|_{A/I}, \forall n \in \mathbb{N}$. Om vi nu antar att $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + I\|_{A/I}$ konvergerar, följer det från olikheten att även $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + j_n\|_A$ konvergerar. Enligt sats D.0.10 konvergerar då $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + j_n)$ till något $x \in A$. Då gäller, $\forall \epsilon > 0$, att

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + I) - (x + I) \right\|_{A/I} = \inf_{i \in I} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + i_n) - x + i \right\|_A \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + j_n) - x \right\|_A < \epsilon.$$

Alltså konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + I)$ till $x + I$, av sats D.0.10 följer nu att A/I är fullständigt. ■

Anmärkning A.5.2: I beviset av sats A.5.1 bör man även visa att operationerna på A/I behåller de egenskaper som motsvarande operationer på A besitter, men beviset för denna proposition utelämnas.

A.6 Mer om unitalisation

Den fullständiga definitionen av unitalisationer finns i avsnitt 3.6 men upprepas här så att allt relevanta definitioner finns på samma ställe.

Definition A.6.1 (Essentiellt ideal) Ett ideal $B \subseteq A$ kallas essentiellt om något av följande ekvivalenta villkor är uppfyllda:

- i) om $a \in A$ är sådant att $aB = \{0\}$ så gäller att $a = 0$;
- ii) om varje icke-trivialt ideal ($I \subset A$) är sådant att $I \cap B \neq \{0\}$.

D.v.s. att det essentiella idealet delar nollskilda element med samtliga andra icke-triviala ideal. I någon mån kan vi alltså tänka på essentiella ideal som att de innehåller det essentiella för idealen, därav namnet. För notation skriver vi $B \xrightarrow{ess} A$ om B är ett essentiellt ideal av A .

Definition A.6.2 (Unitalisering) Givet en algebra A utan identitet kallas paret (B, i) för en unitalisering om följande är uppfyllt

- i) B är en algebra med identitet;
- ii) i är en algebra-isomorfi mellan A och $i(A)$;
- iii) $i(A)$ är ett essentiellt ideal av B .

Nu följer två specifika unitaliseringar, en som nämns i avsnitt 2.2 och en som endast introduceras här. I avsnitt 2.2 definierades följande unitalisation.

Definition A.6.3 (Unitalisering) Givet en algebra A definierar vi *unitalisationen* av A som algebran $A_e := A \times \mathbb{C}$, där elementen är (x, λ) , $x \in A$ och $\lambda \in \mathbb{C}$. Multiplikation och addition definieras enligt

$$\begin{cases} \mu(x, \lambda) := (\mu x, \mu \lambda) \\ (x, \lambda) +_{A_e} (y, \mu) := (x + y, \lambda + \mu) \\ (x, \lambda) \cdot_{A_e} (y, \mu) := (xy + \lambda y + \mu x, \lambda \mu). \end{cases}$$

Från detta ser vi att enhetselementet i A_e blir $e = (0, 1)$. Eftersom vi kan skriva ett godtyckligt element som $(x, \lambda) = (x, 0) + \lambda(0, 1)$, tillämpas ibland skrivsättet $(x, \lambda) = x + \lambda e$. Vidare finns en *inbäddning* $i : A \hookrightarrow A_e$,

d.v.s. en funktion som avbildar A på en delmängd av A_e , som avbildar enligt $x \mapsto (x, 0)$ vilket utgör en isomorfi.

Exempel A.6.4: Som exempel tar vi $C_0(\mathbb{R})$ som saknar identitet. Med definitionen ovan får vi att $C_0(\mathbb{R})_e = C_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}$ som har identiteten $(0, 1)$. Detta eftersom givet en funktion $f \in C_0(\mathbb{R})$ och $\lambda \in \mathbb{C}$ har vi, enligt definition, $(f, \lambda)(0, 1) = (f \cdot 0 + \lambda \cdot 0 + 1 \cdot f, \lambda \cdot 1) = (f, \lambda)$. Att i enligt definitionen är en algebrasomorfi kan ses genom följande: $i(f \cdot g) = (fg, 0) = (fg + 0 + 0, 0) = (f, 0)(g, 0) = i(f)i(g)$ enligt definitionen av produkten i unitalationen. För additionen har vi $i(f + g) = (f + g, 0) = (f + g, 0 + 0) = (f, 0) + (g, 0) = i(f) + i(g)$ där enligt definitionen av addition.

Vidare kan vi även definiera en specifik unitalation för C^* -algebror.

Definition A.6.5 (Algebran $\mathcal{L}(A)$) Algebran $\mathcal{L}(A)$ består av mängden av alla linjära begränsade operatorer från A till A . Produkten av operatorer definieras som deras komposition. En delmängd av $\mathcal{L}(A)$ är de operatorer som betecknas L_a och som opererar på ett element $b \in A$ enligt $L_a b := ab$. Värt att notera är att $\mathcal{L}(A)$ är unitär eftersom $e_{\mathcal{L}(A)} : A \rightarrow A$ enligt $e_{\mathcal{L}(A)}(a) = a$ är begränsad.

Definition A.6.6 (Unitalisering för C^* -algebror) Låt A vara en C^* -algebra och definiera inbäddningen $i : A \hookrightarrow \mathcal{L}(A)$ enligt $a \mapsto L_a$. Vi definierar nu $\tilde{A} := i(A) + \mathbb{C}e_{\mathcal{L}(A)} = \{i(a) + \lambda e_{\mathcal{L}(A)} : a \in A, \lambda \in \mathbb{C}\}$. Vi definierar även involutionen enligt $(i(a) + \lambda e_{\mathcal{L}(A)})^* := i(a^*) + \bar{\lambda} e_{\mathcal{L}(A)}$.

Observera att då $e_{\mathcal{L}(A)}$ är identiteten i $\mathcal{L}(A)$ är detta väldefinierat eftersom $\mathcal{L}(A)$ alltid är unitär. Vidare gäller att om A är unitär så kommer $i(e_A) = e_{\mathcal{L}(A)}$, vilket ger att $A = \tilde{A}$. Detta kan återigen ställas i kontrast till unitaliseringen som definieras i A.6.3 där $A_e \not\approx A$ oavsett om A är unitär eller inte.

Om A saknar identitet gäller dock att $\tilde{A} \approx A_e$ eftersom vi kan definiera en isomorfi $\phi : A_e \rightarrow \tilde{A}$ enligt $(a, \lambda) \mapsto i(a) + \lambda e_{\mathcal{L}(A)}$.

Som påpekas i avsnitt 3.6 finns det en koppling mellan kompaktifieringar och unitaliseringar. Ur denna aspekten motsvarar enpunktskompaktifieringen unitalisationen som ges i definition A.6.6 och detta kan ses som den minsta kompaktifieringen och unitaliseringen. Den största kompaktifieringen, Stone-Čech kompaktifieringen, motsvaras av en unitalisering av en algebra A som kallas multiplikatoralgebra och betecknas $M(A)$.

Definition A.6.7 (Viktiga egenskaper för multiplikatoralgebran $M(A)$) Vi beskriver inte dess konstruktion här, men vi ger två viktiga egenskaper.

1. Om A är kommutativ gäller att $M(A) \approx M(C_0(X)) \approx C_b(X)$
2. Om A är ett ideal till en C^* -algebra B så finns det en unik avbildning $f : B \rightarrow M(A)$ sådan att $f|_A(a) = a$, d.v.s. att när f begränsas till A är den identitetsavbildningen. Vidare gäller att f är injektiv om A är ett essentiellt ideal i B .

Kapitel B | Kategoriteori och Dualitetsbegreppet

Det är möjligt att beskriva rapportens huvudresultat, Gelfand-dualiteten, med hjälp av kategoriteori. För att kunna använda kategoriteorin på ett tillfredställande vis behöver vi först introducera ett betydande antal definitioner och resultat. Därefter introducerar vi begreppet dualitet i form av kategorier och tar upp Pontryagin-dualiteten samt en del av Gelfand-dualiteten som exempel.

B.1 Introduktion till Kategorier

Syftet med denna del är att ge en överblick över grundläggande kategoriteori och introducera de nödvändiga definitionerna för att sedan kunna återkoppla till rapporten.

Definition B.1.1 En kategori C består av två klasser, dels klassen $\text{ob}(C)$, som består av objekt, dels klassen $\text{hom}(C)$ som består av alla *morfier* mellan objekt i $\text{ob}(C)$. Vi måste också definiera komposition.

Komposition skall ta tre objekt i $\text{ob}(C)$, kalla dessa för a, b, c och kompositionen ges då av en binär operation $\times$, sådan att $\text{hom}(a, b) \times \text{hom}(b, c) \rightarrow \text{hom}(a, c)$. Om vi då har att $f : a \rightarrow b$ och $g : b \rightarrow c$, så skriver vi $gf : a \rightarrow c$.

Kompositionen skall vidare vara associativ och för varje objekt $x \in \text{ob}(C)$ skall det finnas en enhetsmorfism $1_x : x \rightarrow x$ (som också bevarar komposition).

Här används begreppen klass och morfi, vilket enkelt sett är generaliseringar av begreppen mängd och avbildning.

Efter denna definition kan det vara passande att betrakta ett exempel på en typ av kategorier. En typ av kategori som ligger nära till hands är de så kallade *konkreta kategorierna*, vilka löst sagt är alla kategorier där elementen är matematiska strukturer vilka vi *känner till*, exempelvis kategorin av topologiska rum eller kategorin av vektorrum, och morfierna är strukturbevarande avbildningar. Ett annat viktigt exempel är kategorin av mängder, som är nödvändig för att senare ge en rigorös definition av konkreta kategorier. Definitionen är enkel, elementen är mängder och morfierna är funktioner mellan mängderna. Komposition och enhetsavbildning definieras som förväntat. Kategorin av mängder betecknas **Set**.

Definition B.1.2 Givet en kategori C säger vi att C^{op} är den *motsatta kategorin*, och innebär att vi har en kategori med samma element som C , men där avbildningarna är de omvända. Notera att $C^{\text{op op}} = C$.

Definition B.1.3 För en kategori C och $A, B \in \text{ob}(C)$ kategoriserar vi avbildningarna enligt

1. En *monomorfi* är en avbildning $m : A \rightarrow B$ sådan att $mf = mg \implies f = g$.
2. En *epimorfi* är en avbildning $e : A \rightarrow B$ sådan att $fe = ge \implies f = g$.
3. En *isomorfi* är en avbildning $f : A \rightarrow B$ sådan att $\exists g : B \rightarrow A$, $gf = 1_A$, $fg = 1_B$.

Definition B.1.4 Låt C och D vara kategorier. En (kovariant) *funktor* F mellan C och D är en avbildning som

1. Associerar varje element $A \in \text{ob}(C)$ med ett element $F(A) \in \text{ob}(D)$.
2. Associerar varje $f \in \text{hom}(C)$ med en $F(f) \in \text{hom}(D)$, så att $F(fg) = F(f)F(g)$ och $F(1_A) = 1_{F(A)}$, det vill säga, en funktor bevarar komposition och enhetsavbildning.

Definition B.1.5 En *kontravariant funktor* är en funktor i alla avseenden bortsett från att komposition reverseras enligt $F(fg) = F(g)F(f)$.

Vi kan nu säga att en funktor inducerar en funktion mellan hom_C och hom_D enligt

$$F_{X,Y} : \text{hom}_C(X, Y) \rightarrow \text{hom}_D(F(X), F(Y)).$$

Definition B.1.6 En funktor F sägs vara:

1. *Trogen*, om $F_{X,Y}$ är injektiv.
2. *Hel*, om $F_{X,Y}$ är surjektiv.
3. *Helt trogen* om $F_{X,Y}$ är injektiv och surjektiv.

Vi kan nu ge en mer korrekt definition av konkreta kategorier.

Definition B.1.7 En *konkret kategori* C är en kategori sådan att det finns en trogen funktor mellan C och **Set**.

Nu kan vi ge några konkreta exempel av konkreta kategorier.

Exempel B.1.8:

1. **Top**, där objekten är topologiska rum och morfierna är kontinuerliga avbildningar.
2. **LCH**, där objekten är lokalt kompakta Hausdorff-rum och morfierna är kontinuerliga avbildningar.
3. **KHaus**, där objekten är kompakta Hausdorff-rum och morfierna är kontinuerliga avbildningar.
4. **Grp**, där objekten är grupper och morfierna är grupp homomorfier.
5. **LCA**, där objekten är lokalt kompakta abelska grupper och morfierna är kontinuerliga grupp homomorfier.
6. **Vect $_{\mathbb{K}}$** , där objekten är linjära vektorrum över $\mathbb{K}$ och morfierna är linjära avbildningar.
7. **Alg**, där objekten är algebror och morfierna är algebra homomorfier.
8. C^*_{alg} , där objekten är C^* -algebror och morfierna $*$ -homomorfier.
9. $C^*_{\text{alg}1}$, där objekten är unitära C^* -algebror och morfierna $*$ -homomorfier.
10. C^*_{com} , där objekten är kommutativa C^* -algebror och morfierna $*$ -homomorfier.
11. $C^*_{\text{com}1}$, där objekten är unitära kommutativa C^* -algebror och morfierna $*$ -homomorfier.

Vi kan också definiera en kategori av kategorier, exempelvis, kategorin av alla små kategorier, genom att låta objekten vara alla små kategorier och morfierna vara funktorer mellan de små kategorierna. Denna kallas för **Cat**.

När vi beskriver en kategori används oftast diagram, som kan se ut som

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & C \end{array}$$

där pilarna är morfierna. Ett diagrammet sägs *kommuttera* om oavsett valet av morfier för att komma från en visst start objekt till ett visst slut objekt inte spelar roll. I det här fallet innebär det att $g \circ f = h$. Begreppen motsatt kategori kan här tänkas som att pilarna byter riktning.

Definition B.1.9 Givet två kategorier C, D och $F, G : C \rightarrow D$ är två funktorer, så gäller att $\eta : F \rightarrow G$ är en naturlig transformation om det för varje $X \in \text{ob}(C)$ associeras en morfi $\eta_X : F(X) \rightarrow G(X) \in \text{hom}(D)$ samt att för varje sådant η_X gäller att $\forall f : X \rightarrow Y, \eta_Y[F(f)] = G(f)[\eta_X]$, alltså $f \in \text{hom}(C)$. Den sista likheten kan även illustreras med att följande diagram kommuterar:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \downarrow \eta_X & & \downarrow \eta_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

Om $\forall X \in \text{ob}(C)$, morfin η_X är en isomorfi i D sägs η vara en *naturlig isomorfi*.

Nu har vi tillräckligt med kunskap för att definiera ekvivalens mellan kategorier, och då även vad en dualitet är.

Definition B.1.10 Låt C och D vara två kategorier. En *ekvivalens av kategorier* består av två funktorer $F : C \rightarrow D$ och $G : D \rightarrow C$, samt två naturliga isomorfier $\epsilon : F \circ G \rightarrow \mathbb{1}_D$ och $\eta : G \circ F = \mathbb{1}_C$. C och D kan även sägas vara *ekvivalenta*.

Om funktorerna istället är kontravarianta så sägs det vara en *dualitet av kategorier* eller att det existerar en *dualitet* mellan C och D .

En dualitet är på så sättet en ekvivalens mellan $C \approx (D)^{\text{op}}$. Så för diagram så blir pilarna motriktade och behåller alla sina egenskaper. I kommande avsnitt ska vi undersöka två exempel av dualiteter. Först *Gelfand-dualiteten* som rapporten handlade om, och sedan en som relaterar till exemplen i rapporten som handlade om Fouriertransform, nämligen *Pontryagin-dualiteten*.

B.2 Gelfand-dualiteten formulerat i kategoriteori

Låt oss som exempel kolla på Gelfand-dualiteten. Om vi kollar på unitära och kompakta fallet är det ekvivalensen $(\mathbf{KHaus})^{\text{op}} \approx C_{\text{com}1}^*$. Här används de avbildningarna som tagits fram i rapporten och det går att uttrycka som att dessa två diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ \downarrow \epsilon_X & & \downarrow \epsilon_Y \\ \Delta(C(X)) & \xrightarrow{G(F(h))} & \Delta(C(Y)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C(\Delta(A)) & \xrightarrow{F(G(f))} & C(\Delta(B)) \\ \downarrow \eta_A & & \downarrow \eta_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

där h och $G(F(h))$ är kontinuerliga avbildningar, ϵ_X och ϵ_Y är homeomorfier från Sats 3.4.3, f och $F(G(f))$ är isometriska $*$ -isomorfier samt att η_X och η_Y är homeomorfier från Sats 3.5.8.

Tyvärr kan man inte säga $(\mathbf{LCH})^{\text{op}} \approx C_{\text{com}}^*$, men man kan skapa andra snarlika dualiteter.

B.3 Pontryagin-dualiteten formulerat i kategoriteori

I Exempel 3.4.7 skrevs det om kataktärer som är kontinuerliga homomorfier $\alpha : G \rightarrow \mathbb{T}$, där $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ är cirkelgruppen med multiplikation. Det går att visa $G \approx \widehat{\widehat{G}}$ är en grupp isomorfi, där $\widehat{\widehat{G}}$ är mängden av alla karaktärer av alla karaktärer av G . Detta är Pontryagin-dualiteten och i kategorier är detta ekvivalensen $(\mathbf{LCA})^{\text{op}} \approx \mathbf{LCA}$. Eftersom det är en dualitet mellan samma kategori så visas bara ett diagram

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{f} & H_2 \\ \downarrow \eta_{H_1} & & \downarrow \eta_{H_2} \\ \widehat{\widehat{H}}_1 & \xrightarrow{\widehat{G}(\widehat{f})} & \widehat{\widehat{H}}_2 \end{array}$$

där f och $\widehat{G}(\widehat{f})$ är kontinuerliga grupp homomorfier samt att $\eta_H : H \rightarrow \widehat{\widehat{H}}$, $x \mapsto \varphi_x$ där $\varphi_x(f) = f(x)$.

Kapitel C | Icke-kommutativa C^* -algebror

I avsnitt 3.5 såg vi den kraftfulla satsen om Gelfand-dualiteten, som går att formulera som att alla kommutativa C^* -algebror är isomorfa med $C_0(X)$, där X är något lokalt kompakt Hausdorff-rym. En naturlig fråga vid studier av C^* -algebror blir då om vi kan formulera något liknande för icke-kommutativa C^* -algebror. Och det kan vi.

I detta avsnitt formulerar vi den satsen och en liten början på ett bevis, där dock väldigt mycket utelämnas då det är för mycket bakomliggande teori.

Sats C.0.1 (Gelfand-Naimark teorem) *För godtycklig C^* -algebra A existerar en avbildning $A \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, där $\mathcal{H}$ är ett Hilbertrum, som är en isometrisk $*$ -isomorfi från A till bilden av A i $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

Det betyder alltså att alla C^* -algebror är isometriskt $*$ -isomorfa med en C^* -algebra av linjära operatorer på något Hilbertrum.

Innan vi går vidare med satsen så kollar vi på $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Eftersom vi jobbar med ett Hilbertrum så har vi en inreprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, och vi kan med hjälp av den definiera involutionen, och bevisa att den är existerar och är unik.

Definition C.0.2 $\forall T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \exists T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ som uppfyller $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle, \forall x, y \in \mathcal{H}$. T^* kallas *adjunkten* av T .

Bevis: Fixera $y \in \mathcal{H}$ och definiera $F(x) := \langle T(x), y \rangle$ som uppenbart är en linjär operator, och därmed ligger i dualen, $F \in \mathcal{H}^*$. Riesz representationssats (D.0.9) säger då att det finns ett unikt element $z_y \in \mathcal{H}$ så att $F(x) = \langle x, z_y \rangle, \forall x \in \mathcal{H}$, alltså $\langle T(x), y \rangle = \langle x, z_y \rangle$. Eftersom z_y beror på y kan vi definiera $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ så att $T^*(y) = z_y$. ■

Så som satsen föreslår så är alltså $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ en C^* -algebra tillsammans med den definierade involutionen och operator normen.

För att visa satsen är tanken att vi konstruerar isomorfin med så kallad *Gelfand-Naimark-Segal (GNS) konstruktion*, som kräver en hel del definitioner för att formulera.

Definition C.0.3

- Ett element $a \in A$ kallas *normalt* om det uppfyller $aa^* = a^*a$.
- En linjär funktional $\rho : A \rightarrow \mathbb{C}$ kallas *positiv* om $\rho(a^*a) \geq 0, \forall a \in A$
- En positiv linjär funktional kallas för ett *tillstånd* om $\|\rho\| = 1$
- Mängden av alla tillstånd för A betecknar vi E_A .

Det är möjligt att konstruera ett tillstånd associerat med ett normalt element i A , vilket visar att E_A inte är en tom mängd för en godtycklig C^* -algebra.

Definition C.0.4 Om $\pi : A \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ är en $*$ -homomorfi så kallas $(\mathcal{H}, \pi)$ för en *representation* av A .

För en mängd av Hilbertrum $\{\mathcal{H}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ så låter vi

$$\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{H}_\alpha$$

vara ett Hilbertrum med element $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ och den förväntade inre produkten

$$\langle (a_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, (b_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \rangle := \sum_{\alpha \in \Lambda} \langle a_\alpha, b_\alpha \rangle_\alpha$$

men restriktionen att alla element uppfyller $x_\alpha \neq 0$ för ett finit antal index $\alpha \in \Lambda$ och att

$$\|(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}\|^2 = \sum_{\alpha \in \Lambda} \|x_\alpha\|_\alpha^2 < \infty.$$

Definition C.0.5 (GNS konstruktion)

1. Fixera någon positiv linjär funktional $\rho \in A^*$ och definiera $L_\rho := \{a \in A : \rho(a^*a) = 0\}$. Det går att visa att L_ρ är en stängd vänster ideal i A . Definiera en inre produkt på A/L_ρ som

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho : A/L_\rho \times A/L_\rho \rightarrow \mathbb{C}, \quad (a + L_\rho, b + L_\rho) \mapsto \rho(b^*a).$$

Låt $\mathcal{H}_\rho$ beteckna stängningen av inre produktrummet $(A/L_\rho, \langle \cdot, \cdot \rangle_\rho)$ med inducerade normen från inre produkten.

2. För alla $a \in A$, definiera

$$\tau_\rho(a) : A/L_\rho \rightarrow A/L_\rho, \quad (b + L_\rho) \mapsto (ab + L_\rho)$$

som det går att visa är ett element i $\mathcal{L}(A/L_\rho)$. Kalla utvidgingen av $\tau_\rho(a)$ för $\pi_\rho(a) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\rho)$. Nu är $\pi_\rho : A \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_\rho)$, $a \mapsto \pi_\rho(a)$ en $*$ -homomorfi och därmed en representation, som kallas *GNS representationen*.

3. Ta nu mängden $\{(\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho)\}_{\rho \in E_A}$ och konstruera $(\mathcal{H}_u, \pi_u) := (\bigoplus_{\rho \in E_A} \mathcal{H}_\rho, \bigoplus_{\rho \in E_A} \pi_\rho)$.

Sats C.0.6 (Gelfand-Naimark teorem) För en godtycklig C^* -algebra A , så är

$$\pi_u : A \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_u), \quad a \mapsto \pi_u(a)$$

en isometrisk $*$ -isomorfism mellan A och någon C^* -subalgebra till $\mathcal{L}(\mathcal{H}_u)$.

Denna sats liknar Gelfand-dualiteten i Sats 3.5.8, förutom att bilden av avbildningen är okänd. Vi visar inte mer av denna sats.

Kapitel D | Använda satser

Sats D.0.1 (Liouvilles Sats) Låt f vara hel och begränsad. Då gäller att f också är konstant.

Sats D.0.2 (Hahn-Banachs sats) Låt E vara ett normerat rum och F ett linjärt underrum av E . Om nu f är en begränsad linjär funktional på F , så gäller det att det finns ett $g \in E^*$ så att $g(x) = f(x)$ för alla $x \in F$ och $\|g\| = \|f\|$.

Sats D.0.3 (Banach-Steinhaus sats) Låt E vara ett Banach-rum och låt F vara ett normerat rum, och låt $\{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ vara en familj av kontinuerliga linjära avbildningar från E till F . Antag vidare att $\{T_\lambda x : \lambda \in \Lambda\}$ är begränsad i F för varje $x \in E$. Då finns det en konstant $C \geq 0$ så att $\|T_\lambda\| \leq C$ för varje $\lambda \in \Lambda$.

Sats D.0.4 (Satsen om den slutna grafen) Denna sats tar sig många uttryck. Vi använder den på följande sätt: Låt E och F vara Banachrum och låt $T : E \rightarrow F$ vara en linjär avbildning då är de följande ekvivalenta

1. T är kontinuerlig.
2. Om $x_n \rightarrow 0$ i E och $Tx_n \rightarrow y$ i F så är $y = 0$.

Lemma D.0.5 (Urysohns lemma) X normal, F_1, F_2 stängda, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Då $\exists f : X \rightarrow [0, 1]$ kontinuerlig så att $f(F_1) = \{0\}$ och $f(F_2) = \{1\}$.

Som exempel så om X har en metrik d ($d(x, A) := \inf\{d(x, a), a \in A\}$) så kan vi lätt konstruera funktionen

$$f(x) = \frac{d(x, F_1)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}$$

En version av Urysohns lemma som är lättare att använda är

Lemma D.0.6 (Urysohns lemma: alternativ 2) X lokalt kompakt och Hausdorff, låt $K \subseteq X$ kompakt och V öppen så att $K \subseteq V \subseteq X$. Då $\exists f \in C_c(X)$, $f : X \rightarrow [0, 1]$ så att $f(K) = \{1\}$ och $\text{supp}(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\} \subseteq V$.

Sats D.0.7 (Stone-Weierstrass teorem) Låt X vara ett lokalt kompakt Hausdorff rum, och A en självadjungerad subalgebra av $C_0(X)$. Om A starkt separerar elementen av X , så är A likformigt tät i $C_0(X)$.

Lemma D.0.8 (Zorns lemma) Låt M vara en partiellt ordnad mängd. Om varje totalt ordnad delmängd av M har en övre begränsning, så har M minst ett maximalt element.

Sats D.0.9 (Riesz representationssats) $\forall f \in \mathcal{H}^*, \exists ! y \in \mathcal{H} : F(x) = \langle x, y \rangle, \forall x \in \mathcal{H}$.

Sats D.0.10 För ett normerat rum X gäller att X är ett Banach-rum om för en följd $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$, så implicerar $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ att $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergerar.

Sats D.0.11 Låt X vara ett totalt regulärt topologiskt rum. Låt vidare $Y = \Delta(C^b(X))$ och definiera $\beta : X \rightarrow Y$ enligt $x \mapsto \phi_x$ där $\phi_x(f) = f(x)$. Då gäller att paret (Y, β) utgör en Stone-Čech kompaktifiering av X .

Kapitel E | Bevis av satser

E.1 Satser från Avsnitt 3.1

Lemma E.1.1 Låt A vara en Banach-algebra med identitet e och låt $x \in A$ vara sådant att $r(x) < 1$. Då gäller att $e - x \in G(A)$ och att

$$(e - x)^{-1} = e + \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Bevis: Vi fixerar ett η sådant att $r(x) < \eta < 1$. Definitionen av spektralradie säger då att det existerar ett $N \in \mathbb{N}$ sådant att det för alla $n > N$ gäller att $\|x^n\| \leq \eta^n$. Då $\eta \leq 1$ gäller vidare att serien $\sum_{n=1}^{\infty} \|x^n\|$ konvergerar. Eftersom A är en Banach-algebra och därmed fullständig, så gäller att följderna av delsummor,

$$y_m = e + \sum_{n=1}^m x^n, \quad m \in \mathbb{N}$$

konvergerar i A med gränsvärdet $y = e + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Vi ser att $\|y - y_m\| = \|\sum_{n=m+1}^{\infty} x^n\| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \|x^n\|$. Varefter vi ser att

$$(e - x)y_m = (e - x)(e + \sum_{n=1}^m x^n) = e + \sum_{n=1}^m x^n - x - \sum_{n=2}^{m+1} x^n = e - x^{m+1} = y_m(e - x),$$

vilket gäller för alla $m \in \mathbb{N}$. Eftersom $y_m \rightarrow y$ och $x^m \rightarrow 0$ då $m \rightarrow \infty$ gäller att $(e - x)y = e$. Detta bevisar lemmat. ■

Lemma E.1.2 Låt A vara en normerad algebra med identitet e . Då gäller att

1. Om $x, y \in G(A)$ är sådant att $\|y - x\| \leq \frac{1}{2}\|x^{-1}\|$, då

$$\|y^{-1} - x^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^2\|y - x\|.$$

Det gäller också att avbildningen $x \rightarrow x^{-1}$ är en homeomorfi av $G(A)$.

2. Antag att A är fullständig. Då gäller att $G(A)$ är öppen i A . Om $x \in A$ är sådan att $\|x - e\| < 1$, så gäller även att $x \in G(A)$.

Bevis: Vi börjar med att bevisa (1). Om x, y är som i (1), så gäller att

$$\|y^{-1}\| - \|x^{-1}\| \leq \|y^{-1} - x^{-1}\| = \|y^{-1}(x - y)x^{-1}\| \leq \frac{1}{2}\|y^{-1}\|$$

varför $\|y^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|$ och därför

$$\|y^{-1} - x^{-1}\| \leq \|y^{-1}\| \|x - y\| \|x^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^2\|y - x\|.$$

Detta visar att bijektionen $x \mapsto x^{-1}$ är kontinuerlig och eftersom den är sin egen invers, också en homeomorfi. Nu skall vi bevisa det andra påståendet. Idén är att utnyttja lemma 3.1.6. Välj därför ett $x \in A$ sådant att $\|x - e\| < 1$. Då gäller att $r(e - x) < 1$ och därför att $x = e - (e - x) \in G(A)$. Om nu x är ett godtyckligt element i $G(A)$ och y är sådant att $\|y - x\| \leq \|x^{-1}\|^{-1}$ så gäller att

$$\|e - x^{-1}y\| \leq \|x^{-1}\| \|x - y\| < 1,$$

men från vad vi redan har sett så gäller att $x^{-1}y \in G(A)$ och därför $y \in G(A)$. $G(A)$ är alltså öppen i A . ■

Sats E.1.3 (Satsen om spektrumets icke-tomhet) Låt A vara en Banach-algebra och låt $x \in A$. Då gäller att $\sigma_A(x)$ är en icke-tom kompakt delmängd av $\mathbb{C}$ och att

$$\max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(x)\} = r_A(x).$$

Bevis: [Satsen om icke-tomt spektrum]

Satsen säger som bekant tre saker. För att visa icke-tomhet är idén att definiera en komplex funktion f sådan att vi kan använda Liouvilles sats, vilket leder till en motsägelse om man då faktiskt antar ett tomt spektrum. För att visa uttrycket för spektralradien kan man Laurentserieutvecklingen av f , men denna del av beviset utlämnas till appendix. Vi börjar då med att konstruera f . Antag utan inskränkning att A har en identitet e . Lägg märke till att $\sigma(x)$ är sluten. Vi kan använda lemma 3.1.7 och ser att $G(A)$ är en öppen mängd, och $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ är den inversa bilden av mängden $G(A)$ med avseenden på avbildningen $\lambda \rightarrow \lambda - ex$, vidare så gäller att om $|\lambda| > r(x)$ så $r((1/\lambda)x) < 1$ och på så sätt är enligt lemma 3.1.6 $\lambda e - x = \lambda(e - (1/\lambda)x) \in G(A)$. Därmed ser vi att $\sigma_A(x)$ innesluten i disken $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(x)\}$. Fixera nu ett godtyckligt $l \in A^*$ och betrakta funktionen

$$f(\lambda) = l((\lambda e - x)^{-1}).$$

Det gäller för $\lambda, \mu \in \rho_A(x)$ att

$$\begin{aligned} (\lambda e - x)^{-1} &= (\lambda e - x)^{-1}(\mu e - x)(\mu e - x)^{-1} \\ &= (\lambda e - x)^{-1}((\mu - \lambda)e + \lambda e - x)(\mu e - x)^{-1} \\ &= ((\mu - \lambda)(\lambda e - x)^{-1} + e)(\mu e - x)^{-1} \\ &= (\mu - \lambda)(\lambda e - x)^{-1}(\mu e - x)^{-1} + (\mu e - x)^{-1} \end{aligned}$$

och då, med $\mu \neq \lambda$, får vi att

$$\frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} = -l((\lambda e - x)^{-1}(\mu e - x)^{-1}).$$

Eftersom l då är kontinuerlig och avbildningen $y \mapsto y^{-1}$ av $G(A)$ på sig självt (ty inversen av ett inverterbart element är självt inverterbart) är kontinuerlig enligt lemma 3.1.7 så kan vi dra slutsatsen att f är en holomorf funktion på $\rho(x)$. För $|\lambda| \geq \|x\|$ har vi

$$(\lambda e - x)^{-1} = \left(\lambda \left(e - \frac{x}{\lambda} \right) \right)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left(e - \frac{x}{\lambda} \right)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} x^n$$

av vilket vi ser att

$$\|(\lambda e - x)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\|x\|}{|\lambda|} \right)^n = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - |\lambda|^{-1}\|x\|}$$

enligt summationsformeln för en geometrisk summa. Uttrycket ovan går mot noll då $|\lambda| \rightarrow \infty$, och eftersom

$$|f(\lambda)| \leq \|l\| \|(\lambda e - x)^{-1}\|$$

så ser vi att $f(\lambda) \in C_0$, vilket mer specifikt innebär att f är begränsad. Antag nu att spektrumet är den tomma mängden. Då är f en begränsad hel funktion (ty holomorf på resolventmängden enligt ovan) och därmed konstant enligt Liouvilles sats, men $f \in C_0$ så $f = 0$. På grund av att l är godtyckligt får vi nu att $l((\lambda e - x)^{-1}) = 0$ för varje $\lambda \in \rho(x)$. Detta motsäger något vid namn Hahn-Banachs sats eftersom denna ungefär säger att det för varje x finns en linjär funktional F sådant att $F(x) = \|x\|$. Därför ser vi att om $l(x) = 0$ för varje l så gäller speciellt att $\|x\| = 0$ vilket medför att $x = 0$. I det fallet är $x = (\lambda e - x)^{-1}$, $\lambda \in \rho$ men detta går inte, eftersom $(\lambda e - x)^{-1}$ skall vara inverterbart och noll typiskt inte är inverterbart. Vi ska nu visa formeln. Låt $s(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(x)\}$. Då gäller att $s(x) \leq r(x)$. Antag nu att $s(x) < r(x)$. Då kan vi välja ett μ sådant att $s(x) < \mu < r(x)$. Enligt vad vi visat i första delen av beviset gäller då att för

varje $l \in A^*$, är funktionen $f(\lambda) = l((\lambda e - x)^{-1})$ holomorf på $U = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > s(x)\}$ och då gäller att för $|\lambda| > \|x\|$,

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} l(x^n).$$

Detta är enbart Laurentserien för f på $|\lambda| > \|x\|$, och då f var holomorf på U , så följer från det faktum att Laurentserien är unik att serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} l(x^n) \mu^{-(n+1)}$$

konvergerar. Detta implicerar att $l(x^n \mu^{-(n+1)})$ går mot noll då n går mot oändligheten. Alltså gäller för varje $l \in A^*$ att

$$\{l(\mu^{-n-1}x^n), n \in \mathbb{N}\}$$

är begränsad. Vi kan nu använda Banach-Steinhaus sats för att se att det existerar ett $C > 0$ sådant att $\|\mu^{-n-1}x^n\| \leq C$ för varje naturligt tal. Det följer då att

$$r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (C\mu^{n+1})^{1/n} = \mu$$

vilket visar att $r(x) = s(x)$. ■

E.2 Satser från Avsnitt 3.2

Lemma E.2.1 *Varje propert modulärt ideal innehålls i ett maximalt modulärt ideal.*

Bevis: Låt I vara ett propert modulärt ideal och låt $u \in A$ vara en identitet modulo I . Låt $\mathcal{L}$ beteckna mängden ideal L av A s.a. $I \subseteq L$ och $u \notin L$. $\mathcal{L}$ är icke-tom eftersom $I \in \mathcal{L}$. Låt $\mathcal{L}$ ordnas enligt $L_1 \leq L_2 \iff L_1 \subseteq L_2$. Målet är att visa att $\mathcal{L}$ uppfyller Zorns lemma (Lemma D.0.8). Således låter vi $\mathcal{K}$ vara en totalt ordnad delmängd av $\mathcal{L}$ och definierar $K = \cup\{L : L \in \mathcal{K}\}$. $u \notin K$ och K är ett ideal eftersom $\mathcal{K}$ är totalt ordnad. Det följer att $K \in \mathcal{L}$ och att K är en övre begränsning till $\mathcal{K}$. Zorns lemma implicerar då existens av minst ett maximalt element av $\mathcal{L}$, kalla detta M . Antag nu att det existerar ett propert ideal J av A s.a. $M \subseteq J$, då $u \notin J$ för annars $x = (x - ux) + ux \in M + J = J$, $\forall x \in A$. Alltså $J \in \mathcal{L} \implies J \subseteq M \implies J = M$. Det följer att $M \in \text{Max}(A)$. ■

Lemma E.2.2 *Låt A vara en kommutativ algebra med identitet e . Då gäller*

$$x \in G(A) \iff Ax = A$$

Bevis: ($\Leftarrow$:) Vi antar alltså $Ax = A$. Det följer då att $e \in Ax$, det vill säga $\exists y \in A : yx = e \implies x \in G(A)$.
($\Rightarrow$:) Vi antar nu att $x \in G(A)$, så att det existerar $x^{-1} \in A$. Det följer att $e = x^{-1}x \in Ax$. Följaktligen gäller $y = y(x^{-1}x) = (yx^{-1})x \in Ax$, $\forall y \in A$, alltså $Ax = A$. ■

Lemma E.2.3 *Låt A vara en Banach-algebra och I ett propert modulärt ideal av A . Om $u \in A$ är en identitet modulo I , gäller*

$$I \cap \{x \in A : \|x - u\| < 1\} = \emptyset.$$

Av detta följer att $\bar{I}$ är ett propert ideal, och att varje $M \in \text{Max}(A)$ är slutet.

Bevis: Vi låter A' beteckna A om A besitter identitet, annars $A' = A_e$. Om $\|x - u\| < 1$, är $e - (u - x)$ inverterbart i A' enligt lemma 3.1.6. Låt $(e - (u - x))^{-1} = y + \lambda e$, där $y \in A$ och $\lambda \in \mathbb{C}$. Då följer

$$e = (y + \lambda e)(e - (u - x)) = y + \lambda e - yu + \lambda u + yx + \lambda x.$$

Vi antar att $x \in I$ för att visa att detta leder till en motsägelse. Om $e \in A$ följer

$$e = \lambda e - (\lambda e)u + y - yu + (y + \lambda e)x \in I \implies I = A,$$

vilket är en motsägelse. Om $e \notin A$ har vi istället att

$$(1 - \lambda)e = y - \lambda u - yu + x + yx \in A,$$

vilket tvingar $\lambda = 1$ så att $u = y - yu + x + yx \in I \implies I = A$. Vi har därmed funnit en motsägelse och $x \notin I$.

Att $\bar{I}$ är ett ideal följer av att om $x \in \bar{I}$ existerar $(x_n) \subseteq I$ s.a. $x_n \rightarrow x$. För godtyckligt $a \in A$ har vi då att $\|a(x - x_n)\| \leq \|a\| \cdot \|x - x_n\| \rightarrow 0$, så att $ax \in \bar{I}$. Det följer av lemmats första påstående att $\bar{I}$ är propert. ■

Sats E.2.4 Låt X vara ett lokalt kompakt Hausdorff-rym och låt, för varje delmängd E av X ,

$$I(E) := \{f \in C_0(X) : f(x) = 0, \forall x \in E\}.$$

Då är avbildningen $E \mapsto I(E)$ surjektiv från de icke-tomma slutna delmängderna av X till de proptra slutna idealen av $C_0(X)$.

Bevis: Vi låter I vara ett propert slutet ideal och $E := \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in I\}$. E är sluten eftersom

$$E = \bigcap_{f \in I} \text{Ker } f = \bigcap_{f \in I} f^{-1}(\{0\}),$$

där $f^{-1}(\{0\})$ är sluten för alla $f \in I$, då f är kontinuerlig och $\{0\}$ är sluten. Per definition gäller $I \subseteq I(E)$ och det kvarstår att visa att $I(E) \subseteq I$. Vi definierar således

$$J = \{g \in C_c(X) : E \cap \text{supp}(g) = \emptyset\}$$

med avsikt att visa $J \subseteq I$ och $\bar{J} = I(E)$, vilket implicerar $I(E) = \bar{J} \subseteq \bar{I} = I$, där den sista likheten följer av att I är sluten.

Vi låter nu C vara en kompakt delmängd av X s.a. $E \cap C = \emptyset$. För varje $x \in C$ existerar $h_x \in I$ s.a. $h_x(x) \neq 0$. Då gäller även $|h_x|^2 \in I$ och $|h_x|^2 \geq 0$. Eftersom C är kompakt existerar det en ändlig delmängd $F \subseteq C$ s.a.

$$h(y) = \sum_{x \in F} |h_x|^2(y), \quad y \in X$$

är strikt positiv på hela C , notera att $h \in I$.

Tag nu godtyckligt $g \in J$. Enligt konstruktionen ovan existerar $h(y) > 0, \forall y \in \text{supp}(g)$. Definiera nu $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ enligt $f(x) = 0$, för $x \in X \setminus \text{supp}(g)$ och $f(x) = g(x)/h(x), \forall x \in \text{supp}(g)$. Vi noterar att f är kontinuerlig och följaktligen $f \in C_0(X)$. Det följer att $g = fh \in I, \forall g \in J$ och $J \subseteq I$.

För att inse att $\bar{J} = I(E)$ fixeras $f \in I(E) \subseteq C_0(X)$, $\varepsilon > 0$ och $C = \{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$. Per definition är C kompakt och $E \cap C = \emptyset$. Än en gång kan Urysohns lemma tillämpas för att säkerställa existens av $h \in C_c(X)$ s.a. $h(X) \subseteq [0, 1]$, $h|_C = 1$ och $\text{supp}(h) \subseteq X \setminus E$. För $g = fh \in J$ gäller då $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon \implies f \in \bar{J}$. ■

E.3 Satser från Avsnitt 3.3

Lemma E.3.1 Låt A vara en komplex eller reell algebra med identitet e , och låt φ vara en linjär funktional på A som satisfierar

$$\varphi(e) = 1 \text{ och } \varphi(x^2) = \varphi(x)^2$$

för alla $x \in A$. Då är φ multiplikativ.

Bevis: Enligt antagande gäller

$$\begin{aligned} \varphi(x^2) + \varphi(xy + yx) + \varphi(y^2) &= \varphi(x^2 + xy + yx + y^2) \\ &= \varphi((x + y)^2) = (\varphi(x) + \varphi(y))^2 \\ &= \varphi(x^2) + 2\varphi(x)\varphi(y) + \varphi(y^2), \end{aligned}$$

och därav $\varphi(xy) + \varphi(yx) = \varphi(xy + yx) = 2\varphi(x)\varphi(y)$, $\forall x, y \in A$. Det kvarstår att verifiera att $\varphi(xy) = \varphi(yx)$ även om A inte är kommutativ. För godtyckliga $a, b \in A$ gäller

$$(ab - ba)^2 + (ab + ba)^2 = 2[a(bab) + (bab)a],$$

vilket implicerar

$$\begin{aligned}\varphi(ab - ba)^2 + 4\varphi(a)^2\varphi(b)^2 &= \varphi((ab - ba)^2) + \varphi((a + b)^2 - a^2 - b^2)^2 \\ &= \varphi((ab - ba)^2) + \varphi(ab + ba)^2 \\ &= \varphi((ab - ba)^2 + (ab + ba)^2) \\ &= 2\varphi(a(bab) + (bab)a) \\ &= 4\varphi(a)\varphi(bab)\end{aligned}$$

Om vi sedan tar $a = x - \varphi(x)e$, så att $\varphi(a) = 0$, och $b = y$ erhålls $\varphi(ay) = \varphi(ya) \implies \varphi(xy) = \varphi(yx)$. ■

Sats E.3.2 Låt A vara en Banach-algebra med identitet e . För en linjär funktional φ på A är följande påståenden ekvivalenta.

1. φ är nollskild, alltså inte identiskt lika med noll, och multiplikativ
2. $\varphi(e) = 1$ och $\varphi(x) \neq 0$, $\forall x \in G(A)$
3. $\varphi(x) \in \sigma_A(x)$, $\forall x \in A$

Bevis: Om påstående (1) antas, tag $x \in A$ s.a. $\varphi(x) \neq 0$ och $y \in G(A)$. Då gäller $\varphi(x) = \varphi(x)\varphi(e) \implies \varphi(e) = 1$ och $\varphi(e) = \varphi(y)\varphi(y^{-1})$. Därmed gäller påstående (2).

Vi visar nu att (2) $\implies$ (3). För godtyckligt $\lambda \in \rho_A(x)$, följer det att $0 \neq \varphi(x - \lambda e) = \varphi(x) - \lambda$. Alltså $\varphi(x) \in \sigma_A(x)$.

Vi antar nu påstående (3) och noterar att $\varphi(e)e - e = (\varphi(e) - 1)e \notin G(A)$. Om $\varphi(e) \neq 1$ är $(\varphi(e) - 1)^{-1}e$ en invers, vilket är en motsägelse. Därav följer $\varphi(e) = 1$. Vi visar nu att $\varphi(x^2) = \varphi(x)^2$, $\forall x \in A$ och använder sats E.3.1. För detta ändamål, låt $n \geq 2$ och definiera polynomet

$$p(\lambda) = \varphi((\lambda e - x)^n)$$

av grad n . Om rötterna betecknas $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, följer

$$0 = p(\lambda) = \varphi((\lambda_i e - x)^n) \in \sigma_A((\lambda_i e - x)^n).$$

Detta implicerar att $\lambda_i \in \sigma_A(x)$, och $|\lambda_i| \leq r_A(x)$. Vi har att

$$\prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = p(\lambda) = \lambda^n + n\varphi(x)\lambda^{n-1} - \binom{n}{2}\varphi(x^2)\lambda^{n-2} + \dots + (-1)^n\varphi(x^n).$$

Genom att jämföra koefficienter finner vi att

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = n\varphi(x) \text{ och } \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j = \binom{n}{2}\varphi(x^2).$$

Detta ger

$$(n\varphi(x))^2 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + n(n-1)\varphi(x^2).$$

Om vi kombinerar uttrycken ovan fås

$$n^2|\varphi(x)^2 - \varphi(x^2)| = \left| -n\varphi(x^2) + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right| \leq n(|\varphi(x^2)| + r_A(x)^2).$$

För att detta ska vara sant för godtyckligt stora n måste $\varphi(x^2) = \varphi(x)^2$, $\forall x \in A$. Det följer nu av lemma E.3.1 att φ är multiplikativ. ■

Lemma E.3.3 Låt A vara en Banach-algebra. Varje $\varphi \in \Delta(A)$ är en begränsad linjär funktional på A och för alla $x \in A$ gäller $|\varphi(x)| \leq r_A(x)$. Specifikt gäller $\|\varphi\| \leq 1$ och $\|\varphi\| = 1$ om A har identitetselement.

Bevis: Vi kan anta att A har identitet e , annars betraktas $\varphi \in \Delta(A_e)$. För $x \in A$ och $\lambda \in \mathbb{C}$ s.a. $|\lambda| > r_A(x)$ gäller $r_A((1/\lambda)x) < 1$. Det följer av lemma 3.1.6 att $\lambda e - x = \lambda(e - (1/\lambda)x)$ är inverterbar i A . Detta implicerar att $\varphi(x) \neq \lambda$ för alla sådana λ , så att $|\varphi(x)| \leq r_A(x) \leq \|x\|$. Detta implicerar att $\|\varphi\| \leq 1$, specifikt gäller $\|\varphi\| = 1$ om $e \in A$. ■

Lemma E.3.4 För en kommutativ Banach-algebra A och en multiplikativ linjär funktional $\varphi \in \Delta(A)$ är $\text{Ker } \varphi$ ett ideal av A .

Bevis: Låt $x, y \in \text{Ker } \varphi$, $z \in A$ och $\lambda \in \mathbb{C}$. Vi har då att

1. $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) = \lambda \cdot 0 = 0$,
2. $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) = 0 + 0 = 0$ och
3. $\varphi(xz) = \varphi(x)\varphi(z) = 0 \cdot \varphi(z) = 0$.

Alltså gäller $\lambda x, x + y, xz \in \text{Ker } \varphi$ och $\text{Ker } \varphi$ är ett ideal av A . ■

Lemma E.3.5 Låt A vara en kommutativ Banach-algebra och $M \in \text{Max}(A)$. Då är Banach-algebran A/M en Banach-divisionsalgebra.

Bevis: Vi behöver visa att det existerar multiplikativ invers för alla element $x + M \in A/M : x \in A \setminus M$ och antar därför motsatsen, $\exists y \in A \setminus M : y + M \notin G(A/M)$. Då är $A/M(y + M)$ ett propert ideal, som är icke-trivialt eftersom

$$M \neq y + M \in A/M(y + M).$$

Vi låter J beteckna mängden $\{j \in A : j + M \in A/M(y + M)\}$. Om vi visar att $J + M$ är ett propert ideal har vi funnit en motsägelse till att M är ett maximalt ideal, då $M \subsetneq J + M$.

Låt nu $j_1, j_2 \in J$, $m_1, m_2 \in M$ och $x \in A$. Eftersom

$$(j_1 + M) + (j_2 + M) = (j_1 + j_2) + M \in A/M(y + M),$$

gäller även att $(j_1 + m_1) + (j_2 + m_2) = (j_1 + j_2) + (m_1 + m_2) \in J + M$. Från

$$(x + M)(j_1 + M) = xj_1 + M \in A/M(y + M)$$

följer det att $x(j_1 + m_1) = xj_1 + xm_1 \in J + M$. Man kan på liknande sätt försäkra sig om att $J + M$ är slutet under skalärmultiplikation och $J + M$ är alltså ett ideal. Eftersom $A/M(y + M)$ är ett propert ideal av A/M är också $J + M$ ett propert ideal av A . Därmed har vi funnit en motsägelse och kan sluta oss till att det existerar multiplikativ invers för alla element $x + M \in A/M : x \in A \setminus M$ så att A/M är en Banach-divisionsalgebra. ■

E.4 Satser från Avsnitt 3.4

Sats E.4.1 För en kommutativ Banach-algebra A gäller

1. $\Delta(A)$ är ett lokalt kompakt Hausdorff-rym.
2. $\Delta(A_e) = \Delta(A) \cup \{\varphi_\infty\}$ är en punkts-kompaktifitionen av $\Delta(A)$.
3. $\Delta(A)$ är kompakt om A har identitet.

Bevis: För att se att $\Delta(A)$ är ett Hausdorff-rym, ta två olika element $\varphi_1, \varphi_2 \in \Delta(A)$. Då för något $x \in A$ så att $\delta = \frac{1}{2}|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| > 0$ gäller att

$$U(\varphi_1, x, \delta) \cap U(\varphi_2, x, \delta) = \emptyset$$

vilket är definitionen för Hausdorff.

För att $\Delta(A)$ är kompakt om A har en identitet, definiera rummet

$$C = \prod_{x \in A} \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|x\|\}$$

Med produkttopologin är C kompakt på grund av Tychonoffs teorem, som säger att alla produkter av kompakta rum är kompakt med produkttopologin. Eftersom $|\varphi(x)| \leq \|x\|$, $\forall \varphi \in \Delta(A)$ och $\forall x \in A$, så kan vi definiera avbildningen $\phi : \Delta(A) \rightarrow C$ som $\phi(\varphi) = (\varphi(x))_{x \in A}$, som är väldefinierad eftersom $\|\varphi\| \leq 1$, $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \|x\|$. Eftersom om $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, $\forall x \in A$ så gäller att $\varphi_1 = \varphi_2$, vilket ger att ϕ är injektiv, och med definitionen av Gelfand-topologin är ϕ också en homeomorfi från $\Delta(A)$ till sin bild $\phi(\Delta(A))$. Planen är att visa att $\phi(\Delta(A))$ är stängd, och då eftersom C är kompakt är $\phi(\Delta(A))$ också kompakt. Och eftersom ϕ^{-1} är kontinuerlig så är då $\Delta(A)$ kompakt.

Låt $\lambda = (\lambda_x)_{x \in A} \in C$ ligga i stängningen av $\phi(\Delta(A))$ och välj $x, y \in A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ och $\epsilon > 0$. Om $\varphi \in \Delta(A)$ uppfyller $|\varphi(a) - \lambda_a| \leq \epsilon$ för $\forall a \in \{x, y, xy, \alpha x + \beta y\}$ så

$$\begin{aligned} |\alpha \lambda_x + \beta \lambda_y - \lambda_{\alpha x + \beta y}| &\leq |\alpha \lambda_x - \varphi(\alpha x) + \beta \lambda_y - \varphi(\beta y) - \lambda_{\alpha x + \beta y} + \varphi(\alpha x + \beta y)| \\ &\leq |\alpha| |\lambda_x - \varphi(x)| + |\beta| |\lambda_y - \varphi(y)| + |\lambda_{\alpha x + \beta y} - \varphi(\alpha x + \beta y)| \\ &\leq \epsilon(|\alpha| + |\beta| + 1) \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} |\lambda_{xy} - \lambda_x \lambda_y| &\leq |\lambda_{xy} - \varphi(xy) - \varphi(y) \lambda_x + \varphi(x) \varphi(y) - \lambda_x \lambda_y + \varphi(y) \lambda_x| \\ &\leq |\lambda_{xy} - \varphi(xy)| + |\varphi(y)| |\lambda_x - \varphi(x)| + |\lambda_x| |\lambda_y - \varphi(y)| \\ &\leq \epsilon(1 + \|y\| + \|x\|) \end{aligned}$$

Eftersom $\epsilon > 0$ är godtycklig så är då $\psi : x \mapsto \lambda_x, A \rightarrow \mathbb{C}$ en homomorfi, och eftersom $\psi(e) = \lambda_e = 1$ så $\psi \in \Delta(A)$. Då är $\phi(\Delta(A))$ stängd och vi har visat kompakthet, och alltså påstående (3).

Nu när vi vet att $\Delta(A_e)$ alltid är kompakt, som vi kan använda för att visa att $\Delta(A)$ är lokalt kompakt. Beteckna omgivningarna i $\Delta(A)$ och $\Delta(A_e)$, U respektive U_e . Då gäller för $\varphi \in \Delta(A)$, $\epsilon > 0$ och finita delmängder $F \subset A$ att

$$U_e(\varphi, F, \epsilon) = \begin{cases} U(\varphi, F, \epsilon) \cup \{\varphi_\infty\} & \text{om } |\varphi(x)| < \epsilon, \forall x \in F, \\ U(\varphi, F, \epsilon) & \text{annars} \end{cases}$$

Det följer att Gelfand-topologin på $\Delta(A)$ sammanfaller med den inducerade Gelfand-topologin på $\Delta(A_e)$. Men enelements mängden $\{\varphi_\infty\}$ är stängd i $\Delta(A_e)$ vilket gör $\Delta(A)$ öppen i $\Delta(A_e)$ och därför lokalt kompakt, vilket visar påstående (1).

Sedan, för $x \in A$, $\epsilon > 0$ gäller

$$\begin{aligned} U_\epsilon(\varphi_\infty, x, \epsilon) &= \{\varphi_\infty\} \cup \{\varphi \in \Delta(A) : |\varphi(x)| < \epsilon\} \\ &= \Delta(A_e) \setminus \{\psi \in \Delta(A_e) : |\psi(x)| \geq \epsilon\} \end{aligned}$$

men mängderna $\{\psi \in \Delta(A_e) : |\psi(x)| \geq \epsilon\}$, $x \in A$, är stängda i $\Delta(A_e)$ och därför kompakta. Komplementet av en baselements omgivning av φ_∞ är en finit union av sådana kompakta mängder. Därför följer av definitionen att $\Delta(A_e)$ är enpunktskompaktifikationen av $\Delta(A)$, vilket var påstående (2). ■

Sats E.4.2 Låt A vara en kommutativ Banach-algebra. För $\forall x \in A$ gäller $\sigma_A(x) \setminus \{0\} \subseteq \hat{x}(\Delta(A)) \subseteq \sigma_A(x)$, specifikt är $\hat{x}(\Delta(A)) = \sigma_A(x)$ om A är unital.

Bevis: Anta först att A är unital. Då vet vi från Sats 3.3.3 att $\varphi(x) \in \sigma_A(x)$, $\forall \varphi \in \Delta(A)$. Vi vet även att om $\lambda \in \sigma_A(x)$ så är $I = (\lambda e - x)A$ ett äkta ideal i A . Enligt Lemma 3.2.4 alla äkta ideal ligger i något maximalt modulärt ideal, som i sin tur är lika med $\text{Ker}(\varphi)$ för något $\varphi \in \Delta(A)$ enligt Sats 3.3.7. Alltså, $x \in A$, $\varphi(\lambda e - x) = 0$ och då $\lambda = \varphi(x)$, vilket betyder att $\lambda \in \hat{x}(\Delta(A))$.

Om A inte är unital, med definitionerna $\sigma_A(x) = \sigma_{A_e}(x)$ och $\varphi_\infty(x) = 0$, $\forall x \in A$, gäller

$$\begin{aligned} \sigma_A(x) \setminus \{0\} &= \sigma_{A_e}(x) \setminus \{0\} = \hat{x}(\Delta(A_e)) \setminus \{0\} = (\hat{x}(\Delta(A)) \cup \{\hat{x}(\varphi_\infty)\}) \setminus \{0\} \\ &= \hat{x}(\Delta(A)) \setminus \{0\} \subseteq \hat{x}(\Delta(A)) \subseteq \hat{x}(\Delta(A)) \cup \{0\} \\ &= \hat{x}(\Delta(A)) \cup \{\hat{x}(\varphi_\infty)\} = \hat{x}(\Delta(A_e)) = \sigma_{A_e}(x) = \sigma_A(x) \end{aligned}$$

vilket skulle visas. ■

E.5 Satser från Avsnitt 3.5

Sats E.5.1 Låt A vara C^* -algebra utan identitet. Då existerar det en norm $\|\cdot\|_0$ på A_e så att $\|a\|_0 = \|a\|$, $\forall a \in A$ och $(A_e, \|\cdot\|_0)$ är en C^* -algebra.

Bevis: Låt $\|a + \lambda e\| := \|a\| + |\lambda|$ vara en norm på A_e , och definiera för $x \in A_e$, $L_x : A \rightarrow A, a \mapsto xa$. Submultiplikativitet ger då att L_x begränsad är $\|L_x\| \leq \|x\|$.

Vi påstår att $\|x\|_0 := \|L_x\|$ är en C^* -norm på A_e som utvidgar normen på A .

Först kollar vi att den utvidgar normen på A genom att ta $a \in A$ och

$$\|L_a(a^*)\| = \|aa^*\| = \|a^*\|^2 = \|a\| \|a^*\|$$

vilket ger $\|L_a\| \geq \|a\|$ och därför $\|L_a\| = \|a\|$.

För att $\|\cdot\|_0$ ska vara en giltig norm måste $L_x = 0 \implies x = 0$. För att visa detta, låt $x = a + \lambda e$, $a \in A$ och ett godtyckligt $y = b + \mu e$, $b \in A$. Då ska $0 = L_x(y) = ab + \mu a + \lambda b + \lambda \mu e$. Men A är sluten och $e \notin A$ ger att $\lambda \mu e = 0$, och μ är godtyckligt så $\lambda = 0$. Vidare $ab + \mu a = a(b + \mu e) = 0$ men $e \notin A$ ger att $b + \mu e \neq 0$ vilket ger $a = 0$ och alltså $x = 0$.

En algebra-norm måste vara submultiplikativ vilket visas av

$$\|xy\|_0 = \|L_x y\| = \|L_x \circ L_y\| \leq \|L_x\| \|L_y\| = \|x\|_0 \|y\|_0.$$

Kvar att visa är att den uppfyller C^* -egenskapen. Från

$$\|L_x(a)\|^2 = \|xa\|^2 = \|(xa)^*(xa)\| = \|a^*(x^*x)a\| \leq \|a^*\| \|L_{x^*x}(a)\| \leq \|a\|^2 \|L_{x^*x}\|$$

tillsammans med submultipliciteten får vi att $\|x\|_0^2 \leq \|x^*x\|_0 \leq \|x^*\|_0 \|x\|_0$ och då att $\|x\|_0 = \|x^*\|_0$. Då har vi att $\|x^*x\|_0 \leq \|x^*\|_0 \|x\|_0 \leq \|x\|_0^2$ vilket visat C^* -egenskapen. ■

E.6 Satser från Avsnitt 3.6

Lemma E.6.1 Om X är lokalt kompakt Hausdorff och $X_0 \subseteq X$ är en öppen mängd så gäller att $C_0(X_0) \approx I(X \setminus X_0)$ är ett ideal till $C(X)$.

Bevis: Låt $Y = X \setminus X_0$ och definiera avbildningen $\pi : C(X) \rightarrow C(Y)$ enligt $\pi(f)(y) = f(y)$. Då gäller att $\text{Ker } \pi := \{f \in C(X) : f|_{X \setminus X_0} = 0\} \approx C_0(X_0)$ som är mängden av funktioner som försvinner utanför X_0 . Detta eftersom vi kan skapa $\psi : \text{Ker } \pi \rightarrow C_0(X_0)$ enligt $f \mapsto f|_{X_0}$, d.v.s. f begränsas till X_0 och är noll utanför.

Först noterar vi att ψ är väldefinierad. Antag $\exists \varepsilon > 0 : \forall K \subseteq X_0$ kompakt : $|f(x)| \geq \varepsilon$ då $x \in (X_0 \setminus K)$ (om detta är uppfyllt gäller att $f \notin C_0(X_0)$) vilket ger att $f(X_0 \setminus K) \subseteq [\varepsilon, \infty)$. Men $X_0 \setminus K \cap Y \neq \emptyset$ om X_0 är öppen och f antar således nollskilda värden i Y . Detta ger en motsägelse eftersom $f \in \text{Ker } (\pi)$ och skall därför vara 0 i hela Y . I och med detta fås att $\nexists \varepsilon > 0$ så att $|f|_K \geq \varepsilon$, speciellt gäller att f är noll utanför X_0 vilket innebär att $f \in C_0(X_0)$.

Vidare ser vi att ψ är injektiv ty $f|_{X_0} = g|_{X_0} \implies f = g$ då båda är noll utanför X_0 ; och ψ är surjektiv ty om vi har $g \in C_0(X_0)$ given kan vi definiera $\tilde{g} \in \text{Ker } \pi$ sådan att $\tilde{g}(x) = g(x)$ om $x \in X_0$ och $\tilde{g}(x) = 0$ annars. Sammanfattningsvis gäller således att $\text{Ker } (\pi) \approx C_0(X_0) \leftrightarrow I(Y)$. Detta avslutar beviset. ■

Lemma E.6.2 För ett lokalt kompakt Hausdorff-rom X gäller att $[C_0(X_0) \xrightarrow{ess} C(X)] \iff [X_0 \text{ tät i } X]$.

Bevis: Vi börjar med att notera att lemmat kan skrivas om med definitionen av essentiellt ideal (definition 3.6.4) och definitionen av att vara tät (definition 3.6.1) till

$$\forall \text{ öppna } U \subseteq X \text{ gäller } [C_0(U) \cap C_0(X_0) \neq \{0\}] \iff [U \cap X_0 \neq \emptyset]$$

($\implies$):

Antag $U \cap X_0 = \emptyset$. Det ger att $(X \setminus U) \cup (X \setminus X_0) = X$. Enligt tidigare resonemang har vi då att $f \in (C_0(U) \cap C_0(X_0)) \iff f \in (I(X \setminus U) \cup I(X \setminus X_0))$. Detta ger alltså $f = 0$.

($\impliedby$):

Låt $z \in (U \cap X_0)$ och Urysohns lemma ger då att $\exists f \in C(X)$ s.a. $f(z) = 1$ och $f(X \setminus (U \cap X_0)) = 0$. Då gäller $f \in (C_0(X_0) \cap C_0(U))$ samt $f \neq 0$. Detta avslutar beviset. ■

Kapitel F | Symbollista

- $C(X)$ är kontinuerliga funktioner från X till $\mathbb{C}$.
- $C_0(X)$ är kontinuerliga funktioner från X till $\mathbb{C}$ som försvinner utanför X , så som i en oändlighetspunkt.
- $C_b(X)$ är kontinuerliga begränsade funktioner från X till $\mathbb{C}$.
- För $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ definieras *supremumnormen* som $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$.
- $L^p(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : \int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty\} / \sim$ där $f \sim g \iff \int_X |f(x) - g(x)|^p d\mu(x) = 0$
- L^n -normen, är $\|f\|_{L^p} := \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$.
- $\mathcal{L}(A, B)$ är begränsade linjära operatorer från A till B .
- $\mathcal{L}(A) := \mathcal{L}(A, A)$.
- För ett linjärt rum A kallas $A^* := \mathcal{L}(A, \mathbb{C})$ för *dualen* till A .
- X^∞ betecknar *enpunktskompaktifieringen* av X .
- $M_n(\mathbb{F})$ beteckna kvadratiske matriser med dimension $n \times n$ över kroppen $\mathbb{F}$.
- $A_e := \{(a, \lambda) : a \in A, \lambda \in \mathbb{C}\}$ är, tillsammans med avbildningen $i : A \rightarrow A_e, a \mapsto (a, 0)$, en unitalisering. $(0, 1)$ är identitetsselementet.
- $\Delta(A)$ är multiplikativa funktionaler $A \rightarrow \mathbb{C}$, även specificerat som homomorfier mellan A och $\mathbb{C}$. Tillsammans med Gelfand-topologin kallas $\Delta(A)$ för strukturrummet.
- $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$, som topologiskt rum så är det vanliga öppna mängder.
- $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ kallas *cirkelgruppen* och operationen är multiplikation.
- En *karaktär* är en kontinuerlig homomorfi mellan en lokalt kompakt abelsk grupp G och cirkelgruppen $\mathbb{T}$.
- Mängden av alla karaktärer betecknas $\hat{G}$ och kallas *dualgruppen* av G .
- $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ betecknar Fouriertransformen av f . Konventionen som används här är

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

- $\mathcal{P}(X)$ är *potensmängden*, vilket är mängden av alla delmängder av X .

Litteraturförteckning

- [J] Paulos, João Pedro. Doktorand vid Matematiskavetenskaper. Föreläsningar, Göteborg, 2018.
- [K] Kaniuth, Eberhard. *A Course in Commutative Banach Algebras*. New York, NY: Springer, 2009.
- [M] Munkres, James R. *Topology*. 2.th ed. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall, 2000.

