

Topologi och geometri för allmän relativitetsteori

En introduktion till matematiska metoder för modern fysik

Institutionen för Fundamental Fysik, Chalmers

Handledare: Per Salomonson

Examinator: Christian Forssén

Jens Nordmark

Georg Treuter

Peter Lindgren Lauritzson

Linnea Wikman

Jacek Sordyl

24 augusti 2011

Abstract

This report is a literature study in geometry, topology and physics, produced with the intention to prepare for studies in general relativity. It has the character of a textbook and its intended audience are persons with knowledge equivalent to a bachelor of science degree in applied physics, applied mathematics, or related subjects. The main focus is on the mathematical methods of general relativity and the prerequisites for understanding these methods. The text is concluded with some introductory examples from general relativity, which demonstrate some of the concepts developed earlier. The report is written on an introductory level with the primary purpose of providing overview and motivation for further studies.

Sammanfattning

Denna rapport är en litteraturstudie i geometri, topologi och fysik, skriven med avsikten att förbereda för studier i allmän relativitetsteori. Den har karaktären av en lärobok och dess målgrupp är personer med kunskaper likvärdiga med en kandidatexamen i teknisk fysik, teknisk matematik eller liknande. Rapportens fokus ligger på matematiska metoder för allmän relativitetsteori och förkunskaper nödvändiga för att förstå detta. Texten avslutas med några inledande exempel på allmän relativitet som demonstrerar några av begreppen som avhandlas i rapporten. Rapporten behandlar sitt ämne på en inledande nivå och dess främsta syfte är att ge en överblick och en motivation för fortsatta studier.

Lista över symboler

För de begrepp där vi inte hittat något allmänt vedertaget svenskt ord har vi gjort egna översättningar som samlats i ordlistan, Appendix A.

e enhetsselement

$\mathcal{F}(M)$ Rummet av glatta funktioner på M

$\mathcal{X}(M)$ Rummet av vektorfält på M

$\mathcal{L}$ Liederivata

g Metrik

δ Kröneckerdelta eller Riemannmetrik

Δ Laplaceoperatör

∇ Konnektion eller nablaoperator

$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ Konnektionskoefficient

η Minkowskimetriken

ϵ Levi-Civita symbolen

$\Omega^r(M)$ Mängden av r -former på M

V^{μ} Kontravariant vektor

V_{μ} Kovariant vektor

$R_{\nu\kappa\lambda}^{\mu}$ Riemanns kurvaturtensor

T_{ν}^{μ} Torsionstensor

S^n Den n -dimensionella sfären

T^2 Torusen av genus ett

Σ_g Torusen av genus g

$\mathbb{R}$ De reella talen

$\mathbb{C}$ De komplexa talen

$\mathbb{N}$ De naturliga talen, $0 \notin \mathbb{N}$

$\mathbb{Q}$ De rationella talen

$\mathbb{K}$ Om inget annat anges, godtycklig kropp

$\otimes$ Direkt produkt

$\oplus$ Direkt summa

$\times$ Cartesisk produkt

$\wedge$ Kilprodukt

Innehåll

I	Förkunskaper	9
1	Grupper	10
1.1	Begreppet grupp	10
1.2	Viktiga begrepp	11
1.2.1	Isomorfi	11
1.2.2	Homomorfi	12
1.2.3	Cykliska grupper och generatorer	13
1.2.4	Sidoklasser och kvotgrupper	13
1.2.5	Fundamentala homomorfisatsen	14
1.3	Fysikaliskt viktiga grupper	14
1.3.1	Heltalsgrupper	14
1.3.2	Permutationsgrupper	14
1.3.3	Matrisgrupper	15
1.4	Avslutning	15
2	Tensorer	16
2.1	Tensorer och tensorprodukt	17
2.2	Fler tensordefinitioner	20
2.3	Lite kort om typer samt manipulationer av tensorer	21
2.3.1	Manipulationer	22
3	Topologi	23
3.1	Grundläggande topologiska begrepp	23
3.1.1	Topologiska rum	23
3.1.2	Homeomorfismer	26
3.1.3	Topologiska invarianter	26
3.2	Några viktiga ytor	27
II	Huvuddel	30
4	Homologi	31
4.1	Eulerkaraktistik	32
4.2	Simplex	35

4.2.1	Homologigrupper	37
4.2.2	Homologigruppen	38
4.2.3	Sätt att beräkna homologigrupperna på olika kroppar	39
5	Mångfalder	41
5.1	Avbildningar mellan mångfalder	43
5.1.1	Differentierbara avbildningar och diffeomorfism	43
5.2	Vektorer, tangentvektorer och tangentplan	44
5.2.1	Tangentplan: Vektorrum	44
5.2.2	Kurvor och funktioner i mångfalden	46
5.2.3	Duala vektorrum och enformer	49
5.2.4	Vektorer och vektorfält	51
5.2.5	Tensorfält	51
5.2.6	Inducerade avbildningar	53
5.3	Flöden och Liederivatan	55
5.3.1	Regler och samband för Liederivatan	59
5.3.2	Geometrisk tolkning av Liederivatan	62
5.4	Differentialformer och integration av mångfalder	64
5.4.1	Inledning till differentialformer	64
5.4.2	Randen	66
5.4.3	Differentialformer och kilprodukter: Allmänna definitioner	67
5.4.4	Differentialformer och kilprodukter uttryckta i baser som tensorer	71
5.4.5	Kilprodukt och differentialformer på basform	72
5.4.6	Intern derivata och Lie-derivatan på former	76
5.4.7	Integration av differentialformer	78
5.5	Liegrupper och Liealgebra	80
5.5.1	Allmän definition av en Liealgebra	81
5.5.2	Enparameter delgrupp	86
5.5.3	Liegruppernas verkan på mångfalder.	90
6	De Rham kohomologigrupper	94
6.1	De Rham Kohomologigrupper och integraler på mångfalder	94
6.1.1	Stokes sats	96
6.1.2	Sluten och exakt form	97
6.1.3	Poincarés lemma	98
6.2	Exempel på integration av r-former.	99
6.3	Dualitet mellan homologi och kohomologigrupper-de Rhams teorem	103
6.3.1	Poincarés dualitet	106
6.4	De Rham kohomologigrupper och deras struktur.	106
6.4.1	Kohomologiseringar	107
6.4.2	Künneths formel	108

7	Riemanngeometri	109
7.1	Metriker	109
7.1.1	Inledande exempel på metriker	110
7.1.2	Inbäddningar och inducerade metriker	111
7.2	Konnektion	112
7.2.1	Motivering och definition	112
7.3	Parallellförflyttning	114
7.3.1	Geodetisk linje	114
7.4	Torsionstensorn	115
7.5	Levi-Civita-konnektionen	116
7.5.1	Geodeter	117
7.6	Riemanns kurvaturtensor	117
7.6.1	Exempel på Riemanns kurvaturtensor	119
7.7	Holonomi, isometri och Killingvektorfält	120
7.7.1	Holonomigruppen	120
7.7.2	Isometri	121
7.7.3	Konforma avbildningar	122
7.7.4	Killingvektorfält	124
7.8	Icke-koordinatbasen	124
7.8.1	Definition av basvektorerna	125
7.8.2	Transformation av objekt till icke-koordinatbasen	125
7.9	Hodgeteori	127
7.9.1	Hodgestjärnan	127
7.9.2	Adjunkten till externa derivatan	128
7.9.3	Elektromagnetism	129
7.9.4	Laplaceoperatorn	131
8	Tillämpningar i allmän relativitetsteori	134
8.1	Vakuumlösningar	135
8.2	Friedmann–Robertson–Walker-lösningen	136
8.3	Härledning av Friedmann-ekvationerna	138
III	Bilagor	144
A	Ordlista	145
A.1	Engelsk-svensk	145
A.2	Svensk-engelsk	146
B	Algebraiska objekt och mängdlära	148
B.1	Mängder och relationer	148
B.2	Grupper	149
B.2.1	Additiv och multiplikativ notation	149
B.3	Ringar	150

B.4	Integritetsområden	151
B.5	Kroppar	151
C	Utelämnade bevis	153
C.1	Tensorer.	153
C.2	Mångfalder	153
D	Projektets arbetsgång	155
D.1	Bidagsrapport	155
D.2	Gruppmöten	155
D.3	Fackspråkshandledning	156
D.4	Organisation	156

Inledning

Denna rapport är resultatet av ett kandidatarbete anordnat av institutionen för fundamental fysik vid Chalmers tekniska högskola, vars syfte är att deltagarna ska tillgodogöra sig kunskaper inom matematiska metoder vilka är användbara inom teoretisk fysik.

Syfte

Rapporten syftar till att på ett intresseväckande sätt förmedla grundläggande kunskaper inom modern matematik och fysik. Nivån är lagd så att tredjeårsstudenter inom teknisk fysik och matematik utan större ansträngning skall kunna följa resonemanget. De ämnen som behandlas i rapporten har en tendens att framställas på betydligt mer avancerad nivå i litteraturen som nästan uteslutande är skriven på engelska. Texten är skriven mer ledigt än vad som kanske är brukligt inom rapportskrivning, vilken vanligen har en mer akademisk karaktär. Detta är ett medvetet val för att läsaren inte skall uppfatta texten som alltför torr eller svårläst. Tanken är att man skall vara förberedd för fortsatta studier inom allmän relativitetsteori samt vara bekant med ämnen inom modern matematik.

Huvudsakligen ligger Mikio Nakaharas bok *Geometry, topology and physics* (kapitel 2-7) till grund för rapporten, men även annan litteratur har använts för att täcka de förkunskaper som Nakahara förutsätter och för att fördjupa intressanta avsnitt. Förhoppningen är att texten kan användas som ett intresseväckande läromedel om man vill få övergripande kunskaper inom topologi och geometri.

Ämne

Geometri och topologi är centrala i fysik, vilken utspelar sig i rummet. Vad "rummet" är för något har dock blivit en alltmer komplicerad fråga under 1900-talet och den geometri som fysiken använder är inte längre euklidisk. Krökta ytor finns i klassisk fysik, men i den moderna fysiken är även rummet krökt, detta på ett sätt som varierar med massfördelningen i universum.

Rummet omfattar numera inte bara de tre rumsdimensionerna, utan tiden är sammanflätad med rummet varför det talas om rumtid.

Detta leder till en matematiskt mer avancerad beskrivning av massiva föremåls rörelse, och ämnet för denna text är de matematiska grundverktyg som behövs för att börja förstå rumtiden. Den matematik som här behandlas har främst utvecklats under andra halvan av 1800-talet fram till första halvan av 1900-talet, vilket överlappar med utvecklingen av relativitetsteorin. Geometris betydelse för fysiken begränsar sig dock inte till teorier om gravitationen, utan symmetrier har en central betydelse i standardmodellen för partikelfysiken som utvecklades under 1970-talet.

Texten börjar med en kortfattad förkunskapsdel där nödvändiga begrepp inom grupp teori, topologi och tensorer presenteras. Dessa hör inte till textens huvudtema men är oundgängliga förkunskaper för den fortsatta läsningen. Grupp teori är ett ämne som handlar om att identifiera strukturer av olika slag. Det utvecklades parallellt ur flera matematikområden, vilka ursprungligen inte tycktes ha så mycket gemensamt, men blev sedan ett språk som fått stor utbredning inom matematik och fysik. Ytterligare bakgrundmaterial finns i bilagorna.

Topologi är ett omfattande ämne som beskriver abstrakta egenskaper hos så kallade topologiska rum. Topologiska rum är ett generellt begrepp och de mest kända är de tvådimensionella figurer som kan beskrivas topologiskt som till exempel möbiusband och torus. Typiska egenskaper som topologin studerar hos sådana objekt är huruvida de har "hål" samt om de är sammanhängande eller inte.

Huvuddelen av rapporten börjar med att tillämpa den topologiska och algebraiska begreppsapparaten på geometriska objekt i godtyckligt antal dimensioner, och identifiera en gruppstruktur som gör det möjligt att klassificera dessa objekt utifrån specifika egenskaper.

Efter detta kapitel börjar det matematiskt mer komplicerade problemet att beskriva generella icke-euklidiska rum. Begreppet mångfalder möjliggör en beskrivning av rum som inte kan beskrivas av ett globalt koordinatsystem. Man inför då lokala, överlappande koordinatsystem vilka kan betraktas som euklidiska. Globalt kan alltså mångfalder skilja sig från klassiska euklidiska rum medan de lokalt kan approximeras med sådana. Det kanske enklaste exemplet är sfären, där antipoden till origo alltid är odefinierad, varför man måste låta två koordinatsystem överlappa om alla punkter ska kunna tilldelas väldefinierade koordinater. Här införs även de viktiga differentiella formerna som behövs för att integrera över allmänna rum.

Vi återgår därefter till homologigrupperna och tillämpar differentialformernas formalism på dem, innan vi fortsätter till Riemanngeometri, den allmänna relativitetsteoris matematiska formalism. Genom att införa ett avståndsbegrepp på mångfalder gör vi det möjligt att konkret räkna på dem och då kommer tensornotationen till användning. I det sista kapitlet studerar vi Einsteins fältekvation och några av dess analytiska lösningar.

Del I

Förkunskaper

Kapitel 1

Grupper

Den algebraiska strukturen som fått namnet **grupper** har visat sig sammanfalla med ett flertal strukturer inom naturvetenskapen, framförallt inom fysiken. Det fanns redan tidigt starka kopplingar mellan gruppteori och geometri eftersom geometri var ett av de områden ur vilken gruppteorin växte fram. Det är därför naturligt att grupper förekommer i fysiken. Ett annat område ur vilket gruppteorin växte fram var algebran, vilket skapade nya kopplingar mellan algebra och geometri. Redan Lagrange studerade grupper inom teorin för algebraiska ekvationer, men det var först under mitten av 1800-talet som gruppteori började bli en självständig teori med kopplingar till många olika områden. Därefter har utveckling skett kontinuerligt under senare halvan av 1800-talet och hela 1900-talet, en utveckling som fortsätter än idag. De algebraiska strukturer som inte är lika oumbärliga för huvudtexten, exempelvis ringar och kroppar, avhandlas i appendix B. Att gruppteori återfinns i flera andra matematikområden beror på att grupper är en abstrakt struktur, alltså en relation mellan allmänna objekt. Teorin för grupper och andra abstrakta strukturer kallas abstrakt algebra.

1.1 Begreppet grupp

Mängder och relationer är allmänna begrepp vilket betyder att man ofta behöver avgränsa sig till specifika mängder och relationer inom det aktuella området. De reella talen och de operationer vi använder på dem är ett konkret exempel på en avgränsning man kan göra vilket ändå ger upphov till en omfattande teori. Ett generellt begrepp som visat sig vara användbart är grupper.

Definition 1.1 (Grupp). En grupp $\{G, *\}$ är en mängd G och en binär operation¹ $* : G \times G \rightarrow G$ som uppfyller följande villkor:

¹En binär operation på en mängd M är en avbildning som till varje ordnat par av element i M ordnar ett element i M . Mängden av alla ordnade par av en mängd M kallas

- $*$ är associativ
- det existerar ett **identitetselement** e så att $e * a = a * e = a \quad \forall a \in G$
- det existerar ett **inverst element** a_{-1} så att $a * a_{-1} = a_{-1} * a = e \quad \forall a \in G$

Det är lätt att verifiera att heltalen, $\mathbb{Z}$, bildar en grupp under addition. Detta gäller inte för de naturliga talen vilka saknar inverser och identitetselement under addition. Under multiplikation saknar både de naturliga talen och heltalen inverser. De rationella såväl som de reella talen bildar grupper under addition, och mängderna $\mathbb{Q} \setminus 0$ samt $\mathbb{R} \setminus 0$ bildar grupper under multiplikation. Observera att gruppoperationen i allmänhet inte är kommutativ och därför benämns grupper som har en kommutativ operation för kommutativa grupper. Dessa brukar ofta kallas **abelska** grupper efter den norske matematikern Niels Henrik Abel. Delmängder av grupper bildar i allmänhet inte nya grupper under gruppoperationen, men man är ofta intresserad av de specialfall som gör det:

Definition 1.2 (Delgrupp). En delmängd $G' \subseteq G$ som bildar en grupp under samma gruppoperation som G kallas för en **delgrupp** till G .

De rationella talen bildar en grupp under addition och är därför en delgrupp av $\{\mathbb{R}, +\}$.

1.2 Viktiga begrepp

Det finns en mängd olika relationer mellan grupper och vi skall ta upp de viktigaste för den fortsatta läsningen.

1.2.1 Isomorfi

En **isomorfi** är en avbildning mellan två grupper definierad enligt

Definition 1.3 (Isomorfi). Låt G vara en grupp under operationen $*$ och låt H vara en grupp under operationen $\cdot$. En isomorfism från G till H är en bijektion $\Theta : G \rightarrow H$ sådan att $\Theta(a * b) = \Theta(a) \cdot \Theta(b) \quad \forall a, b \in G$. Om det existerar en isomorfism från G till H så sägs G och H vara **isomorfa**, vilket betecknas $G \cong H$.

Villkoret på Θ kan beskrivas som att isomorfismer bevarar gruppoperationen. Att en isomorfism är en bijektion innebär också att båda grupperna har

den kartesiska produkten av M med M och betecknas $M \times M$. För två olika mängder kan man på motsvarande sätt bilda en kartesisk mängdprodukt $M \times N$ som består av alla ordnade par (m, n) sådana att $m \in M$ och $n \in N$. Se appendix B för en mer utförlig behandling av mängdlära och utelämnade algebraiska begrepp.

samma antal element vilket vidare innebär att två isomorfa grupper har samma struktur och skiljer sig egentligen bara i notation. Det finns inget matematiskt skäl att skilja dem åt. En isomorfism bevarar alla relevanta egenskaper hos grupperna, såsom egenskapen att vara abelsk. Ett exempel på isomorfa grupper kan vara mängderna $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ och $\{zero, \pm one, \pm two, \dots\}$ under addition.

Exempel 1.1 (Logaritmen). Logaritmfunktionen med bas tio $\log_{10}(x)$ är definierad för positiva reella x som lösningen till $10^{\log_{10} x} = x$. Den avbildar x mindre än ett på ett negativt reellt tal, $x = 1$ på noll och $x > 1$ på positiva reella tal. Den är surjektiv och injektiv med exponentialfunktionen av bas tio som invers, och alltså är den en bijektion. Notera att kardinaliteten av $\mathbb{R}$ är densamma som för $\mathbb{R}^+$, som vi förutsade ovan.

Vi avbildar nu en produkt i $\mathbb{R}^+$ på $\mathbb{R}$ med logaritmen. $10^{\log_{10} xy} = xy$, men $10^{\log_{10} x} = x$ och $10^{\log_{10} y} = y$ ger $10^{\log_{10} xy} = xy = 10^{\log_{10} x} 10^{\log_{10} y} = 10^{\log_{10} x + \log_{10} y}$. Gruppoperationen bevaras och vi har visat att logaritmen är en isomorfi mellan $\{\mathbb{R}^+, \cdot\}$ och $\{\mathbb{R}, +\}$. Detta gör att multiplikation kan ersättas med addition av logaritmer, som kan samlas i tabeller. En särskilt kompakt logaritmtabell är räknestickan, som var utbredd förr när det var bättre.

1.2.2 Homomorfi

Begreppet **homomorfi** liknar isomorfi men har svagare krav. En homomorfi bevarar operationen men behöver varken vara injektiv eller surjektiv. Isomorfismer är specialfall av homomorfismer och definitionen är snarlik:

Definition 1.4 (Homomorfi). Låt G vara en grupp under operationen $*$ och låt H vara en grupp under operationen $\cdot$. En homomorfism från G till H är en avbildning $\Theta : G \rightarrow H$ sådan att $\Theta(a * b) = \Theta(a) \cdot \Theta(b) \forall a, b \in G$.

Många egenskaper hos isomorfismer gäller även för homomorfismer:

- $\Theta(e_G) = e_H$
- $\Theta(a^{-1}) = (\Theta(a))^{-1}$
- $\Theta(a^k) = \Theta(a)^k$

Eftersom en homomorfism inte behöver vara bijektiv, kan mer än ett element ur G avbildas på samma element i H . De element som avbildas på enhetselementet är särskilt viktiga och har fått ett eget namn.

Definition 1.5 (Kärnan). Låt $\Theta : G \rightarrow H$ vara en homomorfism. Mängden av alla element $a \in G$ sådana att $\Theta(a) = e_H$ kallas **kärnan** av Θ och betecknas $\ker \Theta$.

En av kärnans viktiga egenskaper är att den är en normal delgrupp av H , enligt följande definition:

Definition 1.6 (Normal delgrupp). Om H är en delgrupp till G och $ghg^{-1} \in H \forall h \in H, g \in G$ så kallas H en **normal delgrupp** till G . Detta betecknas $H \triangleleft G$

1.2.3 Cykliska grupper och generatorer

Om G är en grupp och $a \in G$ så betecknar vi mängden av alla heltalsmultipler av a med $\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$. $\langle a \rangle$ bildar i sig en delgrupp till G eftersom $a^0 = e$ ger identitets-elementet och a^{-m} ger inversen till elementet a^m . Detta kallas för att $\langle a \rangle$ **genereras** av a och en grupp som genereras av ett enda element kallas för en **cyklisk grupp**. En grupp G som på motsvarande sätt genereras av ett ändligt antal element $a_1, a_2, a_3, \dots, a_i$, där varje $a \in G$ kan skrivas på formen $a = a_1^{n_1} * a_2^{n_2} * \dots * a_i^{n_i}$, kallas för en **fri abelsk grupp** av rang i . För en beskrivning av multiplikativ respektive additiv notation, se appendix B.

Exempel 1.2. $\{\mathbb{Z}, +\}$ är en cyklisk grupp som genereras av 1.

1.2.4 Sidoklasser och kvotgrupper

Låt G vara en grupp och H en delgrupp till G . Låt relationen $\sim$ vara definierad av:

$$a \sim b \iff ab^{-1} \in H$$

Detta är en **ekvivalensrelation**², och dess ekvivalensklasser kallas för **högersidoklasserna** till H i G . Dessa skrivs:

$$Hg = \{hg : h \in H\}$$

Vänstersidoklasser kan definieras på motsvarande sätt. Om H är en normal delgrupp till G kommer mängden av alla sidoklasser av H i G att bilda en grupp, som definieras:

²En relation $*$ på en mängd M är en ekvivalensrelation om den uppfyller tre villkor:

- Symmetri, $a * a$
- Reflexivitet, $a * b \iff b * a$
- Transitivitet, $a * b \ \& \ b * c \Rightarrow a * c$

Två element som uppfyller en ekvivalensrelation sägs tillhöra samma ekvivalensklass och sådana ekvivalensklasser bildar en partition av mängden. Alla element i mängden tillhör någon av ekvivalensklasserna, eftersom alla element åtminstone tillhör sin egen klass. Transitivitet gör att ett element inte kan tillhöra mer än en ekvivalensklass, ty om två ekvivalensklasser skulle överlappa så skulle de vara samma ekvivalensklass. Se även appendix B.

Definition 1.7 (Kvotgrupp). Låt $H \triangleleft G$, och låt G/H vara mängden av alla högersidoklasser till H i G . Låt multiplikation av två element $(Hg_1), (Hg_2) \in G/H$ definieras $(Hg_1)(Hg_2) = H(g_1g_2)$. G/H bildar under denna operation en grupp som kallas **kvotgruppen** av G med H .

Kvotgrupper har ett viktigt samband med homomorfi som vi kommer använda senare.

1.2.5 Fundamentala homomorfisatsen

Sats 1.1 (Fundamentala homomorfisatsen). Låt G och H vara grupper, och låt $\Theta : G \rightarrow H$ vara en homomorfism från G till H . Låt även $K = \text{Ker}(\Theta)$. Låt nu en avbildning $\theta : G/K \rightarrow H$ definieras av $\theta(Ka) = \Theta(a)$. Denna avbildning är en isomorfism från G/K till H . Alltså gäller $G/K \cong H$.

1.3 Fysikaliskt viktiga grupper

Vi avser inte att repetera den litteratur av karaktären definitionslista som finns inom området gruppteori, utan nöjer oss med en kortfattad genomgång av de grupper vi kommer stöta på längre fram.

1.3.1 Heltalsgrupper

Som tidigare nämnts bildar heltalen $\mathbb{Z}$ en grupp med avseende på addition. n antal heltal kan inte bilda en grupp under addition men dock under operationen addition modulo n . Formellt definierar man en ekvivalensrelation $a \equiv b \pmod{n}$ och tar mängden av ekvivalensklasserna $[a]$ med operationen $\oplus$ som uppfyller $[a] \oplus [b] = [a + b]$. Denna grupp betecknas $\mathbb{Z}_n$. Det visar sig att topologiska rum kan karakteriseras med hjälp av produkter av abelska heltalsgrupper. Även mängden som bara innehåller elementet noll bildar en grupp under addition, och dyker bland annat upp i samband med homologigrupper.

1.3.2 Permutationsgrupper

Permutationer av en mängd S är bijektiva avbildningar av mängden S på sig själv. Man kan välja funktionssammansättning som operation och det är lätt att verifiera att mängden av samtliga permutationer är en grupp med avseende på sammansättningen. Gruppen av samtliga permutationer på mängden S kallas för den **symmetriska gruppen** på S och betecknas $\text{Sym}(S)$. Då S utgörs av de n första heltalen betecknas symmetrigruppen av dessa S_n . Delmängden av S_n bestående av de jämna permutationerna bildar i sin tur en grupp, den **alternerande gruppen** av grad n , betecknad A_n .

1.3.3 Matrisgrupper

Matrismängder kan bilda grupper under matrismultiplikation men generellt måste determinanten vara skild ifrån noll för att det ska finnas inverser till alla element. $GL(n, \mathbb{R})$ och $GL(n, \mathbb{C})$ betecknar grupperna av $n \times n$ -matriser med nollskild determinant och med reella respektive komplexa element. GL står för **General Linear**. En annan användbar matrisgrupp är $SL(n, \mathbb{R})$ och $SL(n, \mathbb{C})$ där SL står för **Special Linear** vilka är grupperna av matriser med determinant lika med ett.

Den **ortogonala gruppen** $O(n, \mathbb{K})$ är gruppen av ortogonala $n \times n$ -matriser med element ur kroppen³ $\mathbb{K}$. Analogt med GL och SL kan man definiera den speciella ortogonala gruppen $SO(n, \mathbb{K})$ som är de element i motsvarande ortogonala grupp som har determinanten ett. I fallet $n = 3, \mathbb{K} = \mathbb{R}$ representerar dessa grupper symmetrioperationer på sfären, respektive rotationer av sfären.

En generalisering av de ortogonala grupperna är den **unitära gruppen** vilket är gruppen av alla $n \times n$ -matriser som lämnar längden av en komplex vektor invariant. Denna egenskap är ekvivalent med att konjugatet av transponatet är lika med inversen. Vi har precis som tidigare en $SU(n, \mathbb{C})$ där alla element har determinanten ett och en $U(n, \mathbb{C})$ där determinanten är skild från noll.

1.4 Avslutning

Detta kapitel har presenterat de begrepp ur gruppteori som är oundgängliga för den fortsatta texten. För läroböcker i gruppteori hänvisar vi till det inledande häftet av Brzezinski[5], den mer omfattande boken av Durbin[2] och den avancerade boken av Simon[3].

³Begreppet kropp inkluderar de reella talen $\mathbb{R}$ och de komplexa talen $\mathbb{C}$ samt en mängd andra strukturer, begreppet förklaras i appendix B

Kapitel 2

Tensorer

Stora delar av den moderna fysiken formuleras med tensorer, dessa gör notationen betydligt mer kompakt och är en naturlig fortsättning på begrepp vi redan känner till. Innan vi börjar med definitioner och formella tolkningar, låt oss betrakta några exempel på tensorer för att få en känsla för vad det handlar om. Lägg märke till att varje tensor specificeras med två tal (k, l) . Här kommer några exempel:

- En $(0, 0)$ -tensor är en skalär, dvs ett element i en kropp.
- En $(1, 0)$ -tensor är en vektor.
- En $(2, 0)$ -tensor är en bivektor, dvs ett geometriskt objekt som är skilt från vektorer och skalärer, och bivektorn av två vektorer a, b har samma absolutbelopp som arean av parallelogrammet som spänns upp av de två vektorerna.
- En $(0, 1)$ -tensor är en linjär funktional, även kallad kovektor.
- En $(0, N)$ -tensor är en determinant.
- En $(1, 2)$ -tensor är en kryssprodukt.
- En $(1, 1)$ -tensor är en linjär avbildning.

Det framgår här att en $(0, k)$ -tensor är något som 'omvandlar' k stycken vektorer till en skalär. De exempel som tagits upp är också linjära i varje argument, och vi kan nu försöka konkretisera vad en $(0, k)$ -tensor egentligen är:

En $(0, k)$ -tensor är en funktion som är linjär i varje argument och är definierad mellan¹ V^k och $\mathbb{R}$.

¹ $V^k = V \times V \times \dots \times V$, k gånger

Låt oss nu undersöka $(k, 0)$ -tensorer lite närmare. De ser ut att vara generaliseringar av vektorer till högre dimensioner, så kallade multivektorer, men kan vad mer kan utläsas? En $(1, 2)$ kan vara till exempel en kryssprodukt, vilken ur två vektorer skapar en tredje. Detta tyder på att man kan se en (m, n) -tensor som en funktion som tar in n stycken vektorer och ger ut m vektorer.

Vidare fungerar denna idé även för en $(1, 1)$ -tensor eftersom en linjär avbildning från ett vektorrum till ett annat tar en vektor från första rummet och producerar en vektor i det andra. Dessa observationer leder oss till vår första tensordefinition. Det finns flera olika definitioner av tensorbegreppet och här nedan kommer vi att gå igenom flera för att verkligen få förståelse för vad en tensor är. Vår första definition borde nu kännas naturlig:

Definition 2.1 (Tensordefinition 1). En (k, l) -tensor är en multilinjär funktion $T : V^l \rightarrow V^k$.

En multilinjär funktion är en funktion som är linjär i alla argument. Dock är linjära funktioner i allmänhet enklare att hantera än de multilinjära. Detta kommer att leda till andra tensordefinitioner men låt oss först formalisera multilinearitet. Vi väljer att börja med bilinearitet eftersom detta är det enklaste fallet och vi kan därefter analogt utvidga begreppet. Fortsättningsvis kommer alla skalärer antas tillhöra $\mathbb{R}$.

Definition 2.2 (Bilinearitet). Låt X, Y, Z vara vektorfält, och $\phi : X \times Y \rightarrow Z$ en **bilinjär** avbildning. Detta innebär:

- $\phi(x_1 + x_2, y) = \phi(x_1, y) + \phi(x_2, y)$
- $\phi(x, y_1 + y_2) = \phi(x, y_1) + \phi(x, y_2)$
- $\phi(cx, y) = \phi(x, cy) = c\phi(x, y)$

En bilinjär avbildning är alltså en avbildning som är linjär i båda argumenten.

Innan vi går vidare är det viktigt att poängtera att vektorrummen vi rör oss i då vi behandlar mångfalden är tangentrummen $T_P M$ och att en (n, m) -tensor då rör sig från $T_P M^m$ till $T_P M^n$. Begreppen mångfalden och tangentrum kommer att tas upp senare i texten, se kapitel 5.

2.1 Tensorer och tensorprodukt

I detta avsnitt kommer vi att ta upp fler tensordefinitioner och binder ihop dem med den definition vi redan har lagt. Läsare som har en god förståelse för tensorer kan hoppa över detta avsnitt. Här kommer vi att fördjupa oss i ett för många av vår målgrupp nytt begrepp.

Innan vi fortsätter behöver vi definiera något som kallas tensorprodukt, och detta för att tensorprodukten är den mest generella bilinjära operationen. Vad som menas med detta kommer att bli klarare efter definitionen nedan. Med hjälp av tensorprodukten kan vi linjärisera våra multilinjära avbildningar, något som gör dessa lättare att behandla.

Definition 2.3. Tensorprodukten av två vektorrum V, W är ett vektorrum T och en bilinjär avbildning $\rho : V \times W \rightarrow T$ sådan att för varje vektorrum Z och varje bilinjär avbildning $\phi : V \times W \rightarrow Z$ existerar en och endast en homomorfism $f : T \rightarrow Z$ sådan att $f\rho = \phi$. Vektorrummet som bildas kallas tensorproduktrummet av V och W och betecknas $V \otimes W$.

Lägg märke till att $\dim(V \otimes W) = \dim(V) \cdot \dim(W)$.

Det är lätt att göra en analog definition för trilinjära och multilinjära avbildningar (byt ut bilinjär mot multilinjär och låt avbildningarna vara från fler vektorrum) för att få en generell definition av tensorprodukt². Viktigt att lägga märke till är att en bilinjär definition av tensorprodukt använder sig av två vektorrum, en trilinjär av tre, och så vidare . . .

En annan intressant egenskap hos den allmänna definitionen av tensorprodukten för ett godtyckligt antal vektorrum är att tensorprodukten av rummen $V_1, \dots, V_k$, dvs $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ är isomorf med $((V_1 \otimes V_2) \otimes V_3) \dots \otimes V_k$. Det betyder att det räcker med den bilinjära definitionen då det sedan går att iterera över de skapade tensorproduktrummen för att få fram den multilinjära definitionen.

Något att tänka på är om det faktiskt existerar ett vektorrum och en bilinjär avbildning som uppfyller kraven ovan. Vi bevisar inte detta, men existensen av tensorprodukt kan bevisas genom direkt konstruktion, se till exempel Brzezinski [6], s. 59, (4.7).

Låt oss studera om en tensorprodukt som uppfyller ovanstående egenskaper faktiskt linjäriserar en bilinjär avbildning mellan två vektorrum. Det kan inses genom följande isomorfismer. Låt $\text{Lin}(X, Y)$ och $\text{Bil}(X, Y)$ beteckna mängden av alla linjära respektive bilinjära avbildningar mellan X och Y . Låt även (T, ρ) vara tensorprodukten av M och N . För ett godtyckligt vektorrum P gäller nu:

$$\text{Lin}(T, P) \cong \text{Bil}(M \times N, P) \cong \text{Lin}(M, \text{Lin}(N, P))$$

Detta betyder att för varje bilinjär avbildning mellan $V \times W$ och Z induceras en unik linjär avbildning från $V \otimes W$ till Z , och mer generellt kan vi genom tensorprodukten gå från multilinjära avbildningar till linjära avbildningar, vilket var vårt mål.

En sista anmärkning är att man kan tänka sig två tensorprodukter T och T' för samma vektorrum M och N , till exempel genom $\rho' = A\rho$ för någon matris A med nollskild determinant. På detta sätt kan man finna många

²Den allmänna definitionen finns i C

tensorprodukter för samma vektorrum, men det kommer inte att inverka eftersom alla tensorprodukter av samma vektorrum är isomorfa, något som kan ses på följande sätt:³

Låt (T, ρ) , (T', ρ') vara två tensorprodukter av vektorrummen M och N . Det betyder att det existerar en isomorfism $f : T \rightarrow T'$, så att $f\rho = \rho'$

Definition 2.4 (Tensordefinition 2). En (n, m) -tensor är en linjär avbildning från $\otimes^n V^* \otimes^m V$ till $\mathbb{R}$.

Även här ser vi att vi får ut en n -vektor av en (n, m) -tensor, eftersom en n -vektor är dualen till en n -form (duala vektorrummet till ett dualt vektorrum är isomorft med vektorrummet). Detta betyder att en n -vektor verkan- des på en n -form bildar en skalär. Mer specifikt är en tensor T som är en linjär funktion från $V^* \rightarrow \mathbb{R}$ en vektor, vilket styrker att denna definition är ekvivalent med vår första tensordefinition.

Observera att vektorrummen vi rör oss i då vi behandlar mångfalder är som alltid $T_p^* M$ och $T_p M$, och att en (n, m) -tensor alltså rör sig från $\otimes^n T_p^* M \otimes^m T_p M$ till $\mathbb{R}$. Vi tar upp detta mer i kapitel 5.

Låt oss innan vi går vidare beskriva hur man byter bas för en tensor. Vi ser på exemplena i inledningen av detta avsnitt att en tensor är ett geometriskt objekt, och därför blir uttryckt olika i olika baser. Vi vet även sedan tidigare hur vektorkoefficienterna ändras i olika baser, nu ska vi visa vad som händer med tensorkoefficienterna. Då vi visat basbyte för tensorer kan vi utnyttja det för vektorer - vektorer är som vi nu vet specialfall av tensorer.

Låt $e_1, \dots, e_n$ och $e^1, \dots, e^n$ vara våra ursprungliga baser för V och V^* respektive. Detta betyder att $e_i e^j = \delta_{ij}$. Säg även att $e_{1'}, \dots, e_{n'}$ och $e^{1'}, \dots, e^{n'}$ är våra nya baser för V och V^* respektive. Vidare låt $P = [p_i^j]$ vara övergångsmatrisen mellan vektorrumsbaserna. Då är det uppenbart att: $e_{i'} = p_{i'}^j e_j$ (av definitionen för övergångsmatris).

Detta ger, med $P^{-1} = [p_j^{i'}]^t$ att $e^{i'} = p_j^{i'} e^j$. Lägg märke till var i' är, vi använder inversen till P vid basbyte för den duala basen.

Sats 2.1. Låt T vara en (k, l) -tensor. Då har vi:

$$T = a_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_l} = a_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} p_{i_1}^{i'_1} e_{i_1} \otimes \dots \otimes p_{i_k}^{i'_k} e_{i_k} \otimes p_{j_1}^{j'_1} e^{j_1} \otimes \dots \otimes p_{j_l}^{j'_l} e^{j_l}$$

$$\text{Dvs } a_{j'_1 \dots j'_l}^{i'_1 \dots i'_k} = p_{i_1}^{i'_1} \dots p_{i_k}^{i'_k} a_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} p_{j'_1}^{j_1} \dots p_{j'_l}^{j_l}$$

Vi ser att en vektor (dvs en $(1, 0)$ -tensor) ändrar sina koordinater i basbyte genom multiplikation med P^{-1} , vilket vi kallar kontravariant. En kovektor däremot ändrar sina koordinater genom multiplikation med P , vilket vi kallar kovariant. Transformationslagarna vi tagit fram ovan betyder att om en bas transformeras på ett visst sätt kommer en vektor transformeras med

³Brzezinski [6]

inversen till basen - roterar en bas åt ett håll roterar vektorkoordinaterna åt andra hållet, vilket motiverar namnet kontravariant. Motsatsen gäller för kovektorer, därav namnet kovariant. Mer allmänt säger vi att en (k, l) -tensor är k -kontravariant och l -kovariant.

2.2 Fler tensordefinitioner

Låt M_T beteckna matrisen med koordinaterna för tensorn T , då har vi:

$$M'_T = P^{-1} M_T P. \quad (2.1)$$

Detta leder oss in på nya sätt att tensorer. Det går nämligen att definiera tensorer som ett objekt vilket vid basbyte transformeras enligt ekvationen (2.1) ovan. Den formella formuleringen följer.

Definition 2.5 (Tensordefinition 3). Låt $\mathbb{B}(V)$ vara mängden av alla baser i ett vektorrum V .

Då säger vi att en (k, l) -tensor är en funktion T ,

$$T : \mathbb{B}(V) \rightarrow \mathbb{R}^N, \{e_i\} \mapsto (a_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k})$$

där $N = n^{k+l}$, $n = \dim(V)$, sådan att för vilka två baser som helst kommer motsvarande vektorer $(a_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k})$ och $(a_{j'_1 \dots j'_l}^{i'_1 \dots i'_k})$ att uppfylla $a_{j'_1 \dots j'_l}^{i'_1 \dots i'_k} = p_{i_1}^{i'_1} \dots p_{i_k}^{i'_k} a_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} p_{j_1}^{j'_1} \dots p_{j_l}^{j'_l}$

Detta är en bekväm definition, eftersom en tensor nu är ett objekt som transformeras på specifika sätt. Det är alltså ett sätt att påvisa hur användningen av tensorer inom matematik sker, och många egenskaper kan härledas från dessa transformationslagar. En fördel med denna definition är att man från själva definitionen tvingar tensorer att vara geometriska objekt som i grunder är desamma i olika baser, de har bara olika representation i olika baser. En vektor är en viss riktning och sträcka oavsett bas, men själva riktningen och sträckan beskrivs olika beroende på bas. Nackdelen med denna definition är att det kan vara svårt att tolka vad den betyder. Detta är en anledning till varför vi inte väljer tensordefinition 3 som vår huvuddefinition, men den är bland annat populär hos ingenjörer och fysiker.

Definition 2.6 (Tensordefinition 4). En (k, l) -tensor är ett element i tensorprodukten $\otimes^k V \otimes^l V^*$.

Detta är en kort och koncis definition, det gäller dock att förstå tensorprodukten.

Definition 2.7 (Tensordefinition 5). En (k, l) -tensor är en linjär avbildning $\otimes^l V \rightarrow \otimes^k V$.

Denna definition utnyttjar att tensorproduktrummet $\otimes V^k \otimes^l V^*$ är isomorft med rummet av alla linjära avbildningar från $\otimes^l V$ till $\otimes^k V$. Detta borde kännas naturligt, eftersom rummet av alla linjära avbildningar från $\otimes^l V$ till $\otimes^k V$ är isomorft med rummet av alla multilinjära avbildningar V^l till V^k . Vår första definition var just att en (k,l) -tensor är en multilinjär funktion $T_l^k : V^l \rightarrow V^k$.

Vi har nu gått igenom flertalet olika definitioner av tensorbegreppet och härfter kommer några korta punkter vi vill belysa lite extra. En tensor är ett geometriskt begrepp, vilket visas genom dess transformationsregler. En tensor är också en generalisering av tidigare kända begrepp och sist så ser vi att det finns många synsätt att se på samma objekt.

2.3 Lite kort om typer samt manipulationer av tensorer

Detta avsnitt är till för att ge mer inblick i tensorer och vi kommer att återkomma till mycket av innehållet här i senare delar av denna rapport. Vi har redan tagit upp kovarianta och kontravarianta tensorer, vilka är $(k,0)$ -tensorer och $(0,l)$ -tensorer respektive. Låt oss se några andra användbara och vanliga klassificeringar av tensorer.

Definition 2.8. En **symmetrisk** tensor är en tensor som är invariant under permutationer av dess vektorargument, dvs om $T_{i_1 i_2 \dots i_k} = T_{i_{\sigma 1} i_{\sigma 2} \dots i_{\sigma k}}$, där σ betecknar en permutation.

En symmetrisk tensor är alltså en tensor som är likadan oavsett ordning på sina index. Detta är en smidig egenskap eftersom det då är möjligt att kasta om index i uttryck utan att ändra uttrycken i fråga, vilket kan underlätta uträkningar. Ett exempel på en symmetrisk tensor är metriktensorn - avståndet är samma oavsett i vilken ordning det skrivs. Metriktensorn är en $(0,2)$ -tensor.

Precis som för matriser går det att diagonalisera en symmetrisk tensor av rank 2, med det menar vi att det är möjligt att skriva en symmetrisk tensor T av rank 2 definierad på $\otimes^2 V$ som:

$$T = \sum_i \pm v_i \otimes v_i$$

där $v_i \in V$.

Definition 2.9. En **antisymmetrisk**, även kallad **alternerande**, tensor på två argument i_n och i_{n+1} är en tensor som byter tecken då i_n och i_{n+1} byter plats:

$$T_{i_1 i_2 \dots i_n i_{n+1} \dots i_k} = -T_{i_1 i_2 \dots i_{n+1} i_n \dots i_k}$$

Exempel på detta är elektromagnetiska tensorn.

Definition 2.10. En **totalt antisymmetrisk** tensor är en tensor som är antisymmetrisk över alla sina argument.

Här har vi ett klassiskt exempel i Levi-Civita-tensorn, vilken är definierad enligt

$$\epsilon^{abc\dots} = \begin{cases} 1 & \text{om } a \ b \ c \ \dots \text{ är en jämn permutation} \\ -1 & \text{om } a \ b \ c \ \dots \text{ är en udda permutation} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Precis som för symmetri är antisymmetri en egenskap som ofta underlättar uträkningar.

2.3.1 Manipulationer

Spåret av en tensor är, i full analogi med linjär algebra, skalären som bildas genom att summera elementen på diagonalen

$$\text{tr}(T) = T_{ii}.$$

Notera att definitionen ovan gäller för tensorer av rank 2. Det är möjligt att definiera spåret av en tensor med rank > 2 , men det kommer vi inte att göra här.

Vi kan även transformera om tensorer från kovarianta till kontravarianta, och vice versa, vilket ses genom att index höjs och sänks. För att göra detta använder vi metriktensorn. Låt A vara en $(1, 1)$ -tensor, och g^{ij} vara inversen till metriktensorn g_{ij} .

$$\begin{aligned} A_{ca} &= g_{cb} A_a^b \\ A^{db} &= g^{da} A_a^b \end{aligned}$$

Kapitel 3

Topologi

Topologi handlar om att studera de rumsliga egenskaperna av olika objekt vilka sedan kan klassifieras utifrån dessa. Det har visat sig att om man deformerar ett objekt på ett kontinuerligt sätt är alla intressanta egenskaper oförändrade. Denna invarians under kontinuerliga deformationer utgör grunden för stora delar av topologin och mycket handlar om att hitta egenskaper som är invarianta under sådana deformationer. Om två olika objekt skiljer sig med avseende på en viss egenskap, kan dessa inte deformeras till varandra på ett kontinuerligt sätt och därför så är det meningsfullt att klassifiera olika objekt utifrån deras topologiska invarianter.

3.1 Grundläggande topologiska begrepp

Den inledande beskrivningen här ovan har varit oprecis. Objekt, deformationer och egenskaper är oklart definierade begrepp, men topologin skulle inte vara en vetenskap om inte dessa begrepp kunde göras matematiskt precisa vilket är det vi ska göra i detta avsnitt.

3.1.1 Topologiska rum

Det mest allmänna objektet som studeras i topologin är det topologiska rummet.

Definition 3.1 (Topologiskt rum A). Ett **topologiskt rum** är ett par (X, T) , där X är en mängd och T en mängd delmängder av X , sådana att X och T uppfyller följande:

- (i) Nollmängden och X är i T .
- (ii) Unionen av varje godtycklig mängd element i T är i T .
- (iii) Snittet av varje godtycklig ändlig mängd element i T är i T .

T säges ge en topologi till X och varje mängd X kan ges olika topologier. Paren (X, T) är då olika topologiska rum. Elementen i T kallas öppna mängder, och detta skall ses som en definition av begreppet öppen mängd. Om

den specifika topologin är underförstådd, eller inte är viktig i sammanhanget, brukar det topologiska rummet lite slarvigt bara beteckas med X .

En ekvivalent definition av vad som är ett topologiskt rum kan göras med hjälp av matematiskt symbolspråk. Vi ger denna definition också och läsaren bör jämföra båda definitionerna (3.1) och (3.2) med varandra för att få en full förståelsen av dessa.¹

Definition 3.2 (Topologiskt rum B). Ett **topologiskt rum** är ett par (X, T) , där X är en mängd och $T = \{U_i | U_i \subset X, i \in I\}$, där I är en mängd tal $\in \mathbb{N}$, så att X och T uppfyller följande:

- (i) $\emptyset, X \in T$.
- (ii) $\forall J : \cup_{j \in J} U_j \in T$, där J är en mängd tal $\in I$.
- (iii) $\forall K : \cap_{k \in K} U_k \in T$, där K är en ändlig mängd tal $\in I$.

Låt oss ta ett enkelt exempel för att illustrera begreppet 'topologiskt rum'. Betrakta mängden $X = \{A, B, C\}$. För att skapa ett topologiskt rum ur X måste vi hitta en mängd delmängder T som ger X en topologi. Det första kravet på T är att det innehåller både X och nollmängden. Om vi väljer $T = \{\emptyset, X\}$ ser vi att både krav (ii) och (iii) är uppfyllda, och denna topologi brukar kallas för den triviala topologin. Det finns dock fler topologiska rum som kan skapas ur X . X 's möjliga delmängder är $\emptyset, A, B, C, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}$ och X .² Om T är mängden av alla dessa delmängder så ger T också en topologi åt X (kallad den diskreta), men i andra fall måste vi se upp:

$T = \{\emptyset, X, A, B\}$ ger inget topologiskt rum eftersom $A \cup B = \{A, B\} \notin T$
 $T = \{\emptyset, X, \{A, B\}, \{B, C\}\}$ ger inget topologiskt rum eftersom
 $\{A, B\} \cap \{B, C\} = B \notin T$
 $T = \{\emptyset, X, A, \{A, B\}\}$ ger däremot ett topologiskt rum (X, T)

Mängden av alla reella tal, $\mathbb{R}$, eller mängden av alla n -tupler av reella tal, $\mathbb{R}^n$, är ett vektorfält, men vi kan ändå ge det olika topologier och göra topologiska rum av det. En vanlig topologi är mängden av alla öppna områden $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$, för $\mathbb{R}$ de öppna intervallen (a, b) , och deras unioner. Topologin som ges på detta sätt kallas för den vanliga topologin. I allmänhet så går det bra att tänka på $\mathbb{R}^n$ och olika delmängder därav som topologiska rum, där den vanliga topologin är underförstådd.

Notera att vi i det tredje villkoret i definitionen för topologiskt rum (3.1) kräver en ändlig mängd element. Låt oss studera varför det är viktigt. Om vi till exempel tar talmängden $\mathbb{R}$, så skulle ett snitt av en oändlig mängd element av typen $(-\frac{1}{n} + a, \frac{1}{n} + a)$, $n \in \mathbb{N}$, där a är ett konstant reellt tal, bli talet a . För den vanliga topologin innebär detta att den måste innehålla alla

¹Det finns flera sätt att definiera topologiska rum på. Den intresserade läsaren uppmuntras till att jämföra de definitioner som ges här med dem i Nakahara [1] och Armstrong [7].

²Observera att nollmängden $\emptyset$ ingår i varje mängd.

delmängder av $\mathbb{R}$, annars går det alltid att ta ett oändligt snitt så att vi får ett element som inte är del av topologin. Den vanliga topologin skulle bli till den diskreta och då få andra egenskaper än de vi vill.

Topologiska rum är allmänna och därför vill vi ofta introducera ytterligare strukturer i rummet. Detta är något som vi gör efterhand. I kapitlet "Mångfalder" (kapitel 5) kommer vi att kräva att det topologiska rummet har en viss struktur som lokalt ser ut som $\mathbb{R}^m$, och dessutom att övergången mellan dessa lokala strukturer är glatt. Vi får en struktur - en differentierbar mångfald - som tillåter att vi generaliserar många begrepp från analysen, som integraler och derivator. I avsnittet "Riemanngeometri" (kapitel 7) lägger vi till ännu en struktur, en typ av avståndsfunktion kallad metrik, vilken tillåter oss att definiera avståndsrelaterade begrepp som till exempel längd. Topologiska rum i sig innehåller dock redan tillräckligt mycket struktur för att vi skall kunna tala om 'rumsliga' begrepp som närhet, kontinuitet, kompaktitet och att rummen är sammanhängande.

Med definitionen av det topologiska rummet är det nu möjligt att ge en allmän definition av kontinuitet.

Definition 3.3 (Kontinuitet). En avbildning f från det topologiska rummet (X, T_X) till det topologiska rummet (Y, T_Y) kallas **kontinuerlig** om den inversa bilden av varje öppen mängd i Y är en öppen mängd i X . Det vill säga om $f^{-1} : U \rightarrow V$, $U \in T_Y$ och $V \in T_X$.

Denna definition är i vissa avseenden naturligare än $\epsilon - \delta$ - definitionen som brukar användas i inledande analyskurser. Till exempel så blir det självklart att en funktion som är sammansatt av två kontinuerliga funktioner är kontinuerlig. Om f och g är kontinuerliga innebär det att inversa bilden av varje öppen mängd är en öppen mängd. Det måste då även gälla $f \circ g$.

Låt oss ta upp två definitioner av andra begrepp som vi kommer att behöva i följande kapitel.

Definition 3.4 (Omgivning). Givet ett topologiskt rum (X, T) så kallas N för en **omgivning** till punkten $x \in X$ om $N \subset X$ och $\exists U_i \in T : x \in U_i \wedge U_i \subset N$. Det skall alltså gå att hitta en delmängd av X som innehåller en öppen mängd, vilken i sin tur innehåller x .

Definition 3.5 (Hausdorffrum). Ett topologiskt rum (X, T) kallas för **Hausdorffrum** om det för varje två godtyckliga punkter $x, x' \in X$ går att hitta omgivningar som inte överlappar.

De flesta topologiska rum som betraktas längre fram är Hausdorffrum och topologiska rum måste vara Hausdorffrum för att gränsvärden skall vara entydigt definierade.

3.1.2 Homeomorfismer

De kontinuerliga deformationerna som det talades om i inledningen till detta kapitel kallas homeomorfismer.

Definition 3.6 (Homeomorfism). En **homeomorfism** är en injektiv (ett-till-ett), surjektiv (på), kontinuerlig avbildning mellan två topologiska rum som har en kontinuerlig invers. Två topologiska rum säges vara homeomorfa om det finns en homeomorfism mellan dem.

Notera att en homeomorfism är en ekvivalensrelation och inom topologin betraktar vi alltså alla topologiska rum som ekvivalenta om de är homeomorfa. Detta innebär i sin tur att vi betraktar två topologiska rum som ekvivalenta om det ena kan transformeras kontinuerligt till det andra. Det topologiska begreppet homeomorfism bör inte förväxlas med det algebraiska begreppet homomorfism.

Ett enkelt exempel på en homeomorfism är homeomorfism mellan det öppna intervallet $(0,1)$ och $(0,10)$ i $\mathbb{R}$ med den vanliga topologin.

Exempel 3.1. Låt (I_1, T_1) och (I_2, T_2) vara topologiska rum, där $I_1 = \{x|x \in (0,1)\}$, $I_2 = \{x|x \in (0,10)\}$, T_1 och T_2 är mängden av alla öppna intervaller i I_1 respektive I_2 och deras unioner. En homeomorfism ges av $f : I_1 \rightarrow I_2$ med $f(x) = 10x$. Den avbildar I_1 på hela I_2 , samtidigt som varje element i I_1 avbildas på exakt ett element i I_2 . Dess invers, $f^{-1}(x) = \frac{1}{10}x$, är kontinuerlig. Detta betyder att I_1 är homeomorft med I_2 .

3.1.3 Topologiska invarianter

I inledningen till detta avsnitt nämndes olika egenskaper som är invarianta under homeomorfism, dessa benäms **topologiska invarianter**. Intressant är att topologiska invarianter kan vara en rad vida skilda egenskaper, till exempel komplicerade begrepp som kompakthet eller enkla tal som Eulerkarakteristiken. Det är svårt att visa att två topologiska rum är homeomorfa och ofta krävs det att man hittar en explicit homeomorfism, men för att visa att två topologiska rum inte är homeomorfa räcker det med att hitta en topologisk invariant rummen inte delar. Vi känner inte till alla topologiska invarianter vilket betyder att även om två topologiska rum har samma invarianter kan vi inte säga om de är homeomorfa. Vi kommer här att ta upp några topologiska invarianter som behövs för studiet av den matematik vi behandlar här.

För att definiera det topologiska begreppet kompakthet, behöver vi först en del andra begrepp. Låt (X, T) vara ett topologiskt rum. En mängd delmängder av X kallas för täcke av X om unionen av dessa delmängder täcker X . Om alla delmängderna i täcket tillhör topologin T , kallar vi täcket för ett öppet täcke.

Definition 3.7 (Kompakthet). Vi säger att ett topologiskt rum (X, T) är **kompakt** om alla dess öppna täcken har ett ändligt deltäcke. Formellt är detta att alla mängder $\{U_i | i \in I\}$ som uppfyller $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ och $\forall i : U_i \in T$ har en ändlig delmängd J av I sådan att $\{U_j | j \in J\}$ uppfyller $\bigcup_{j \in J} U_j = X$.

Definition 3.8 (Sammanhängande). Ett topologiskt rum är **sammanhängande** om det inte kan skrivas som snittet av två öppna mängder vilkas union är den tomma mängden.

Definition 3.9 (Bågvis sammanhängande). Ett topologiskt rum (X, T) är **bågvis sammanhängande** om det om det för alla punkter x och y går att hitta en kontinuerlig avbildning $f : [0, 1] \rightarrow X$ som börjar i x , $f(0) = x$, och slutar i y , $f(1) = y$.

Dessa topologiska invarianter kan användas för att enkelt och formellt göra uttalanden om vilka topologiska rum som inte är homeomorfa med varandra. Till exempel så kan ett slutet intervall $[a, b]$ (i $\mathbb{R}$ med den vanliga topologin) inte vara homeomorft med ett öppet intervall (a, b) eftersom det ena är kompakt och det andra inte.

3.2 Några viktiga ytor

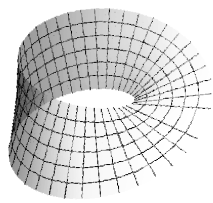
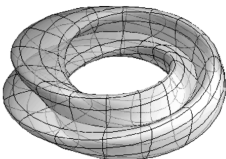
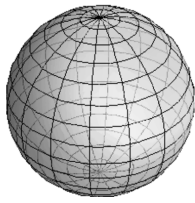
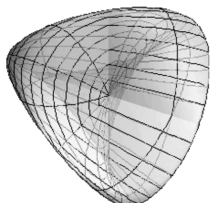
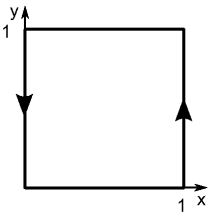
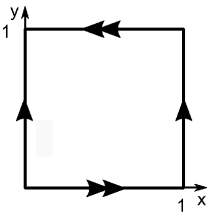
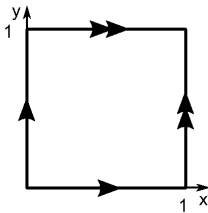
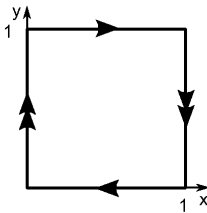
Ytor är vanliga objekt som studeras inom topologin. Vi ger här en formell definition av begreppet yta:³

Definition 3.10 (Yta och sluten yta). En **yta** är ett Hausdorffrum där varje punkt har en omgivning som är homeomorft med $\mathbb{R}^2$. En yta kallas **sluten** om den är kompakt, sammanhängande och inte har någon rand.

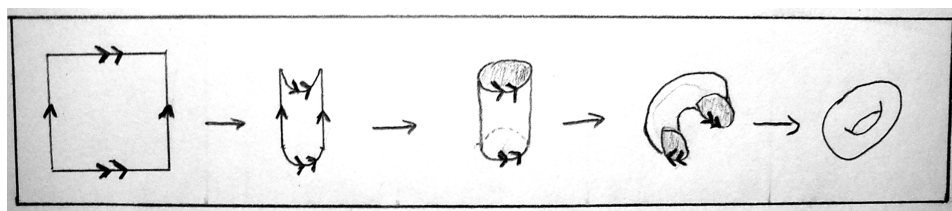
Inom topologin dyker det upp fem ytor som man bör känna till, vilka är torusen, sfären, möbiusbandet, kleinflaskan och det projektiva planet. Figur (3.2) visar exempel på hur de kan avbildas i $\mathbb{R}^2$ och hur de kan erhållas ur en kvadrat. Sidor med samma antal pilar skall limmas ihop i så att pilarna pekar åt samma håll. I figur (3.2) visas hur det går till för en torus. Alla dessa ytor kan definieras matematiskt genom att identifiera olika sidor i en kvadrat $X = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ (vanlig topologi) med hjälp av olika ekvivalensrelationer, men att föreställa sig dessa är ofta svårare. Figur (3.2) och (3.2) bör betraktas samtidigt som den kommande texten läses.

Torusen är enklast, den är lika med kvotrummet $T = X / \sim$, där X ges ovan och ekvivalensrelationen $\sim$ ges av $(0, y) \sim (1, y)$ för $0 \leq y \leq 1$ och $(x, 0) \sim (x, 1)$ för $0 \leq x \leq 1$. Detta innebär att vi identifierar mittemotliggande sidor i kvadraten med varandra.

³Jämför med kapitel (5) - en yta är en tvådimensionell mångfald.

Möbiusband	Kleinflaska	Sfär	Projektivt plan
			
			

Figur 3.1: Några viktiga ytor.



Figur 3.2: Identifikation av sidorna i en kvadrat till en torus.

Möbiusbandet är $M = X / \sim$, där $\sim$ ges av $(1-x, 0) \sim (x, 1)$ för $0 \leq x \leq 1$. Detta innebär att vi vänder en sida och identifierar den med den mittemotliggande.

Kleinflaskan är $K = X / \sim$, där $\sim$ ges av $(0, y) \sim (1, y)$ för $0 \leq y \leq 1$ och $(x, 0) \sim (1-x, 1)$ för $0 \leq x \leq 1$. Detta innebär en identifikation av båda paren av mittemotliggande sidor, där ett av paren är vänt.

Sfären är $S = X / \sim$, där $\sim$ ges av $(0, y) \sim (y, 0)$ för $0 \leq y \leq 1$ och $(x, 1) \sim (1, x)$ för $0 \leq x \leq 1$. Vi identifierar intilliggande sidor med varann.

Projektiva planet är $P = X / \sim$, där $\sim$ ges av $(1-x, 0) \sim (x, 1)$ för $0 \leq x \leq 1$ och $(0, y) \sim (1, 1-y)$ för $0 \leq y \leq 1$. Vi vänder mittemotliggande sidor och identifierar dem med varandra.

Del II

Huvuddel

Kapitel 4

Homologi

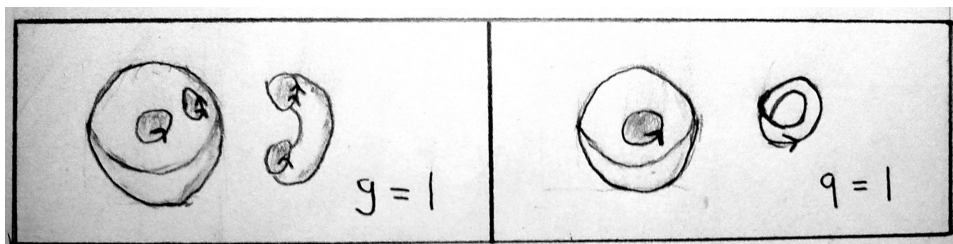
Den större delen av detta avsnitt ägnas åt att studera en viss typ av topologiska invarianter kallade **homologigrupper**, vilka vi kommer definiera längre fram. Dessa är som namnet antyder grupper, konstruerade så att de ger information om det tillhörande topologiska rummets struktur. Homologigrupper är av stort intresse inom flera områden eftersom de kan beräknas på ett systematiskt sätt som enkelt låter sig datoriseras, för ett stort antal olika typer av topologiska rum.

Homologi handlar intuitivt om klassifiering av olika rum efter hur många hål av olika dimension de har. Hur detta går till kommer att bli klart efter hand, men för att motivera läsaren så tar vi här upp ett resultat som tillåter en fullständig klassifiering av alla slutna ytor.

Sats 4.1 (Om klassifiering av slutna ytor). Varje sluten yta är homeomorf med antingen

- (i) sfären med genus $g \geq 0$.
- (ii) sfären med q korshuvor $q \geq 1$.

Satsen ovan innebär att om vi beräknar homologigrupper för ovanstående ytor har vi beräknat dem för alla slutna ytor, eftersom dessa antingen har samma homologigrupper som sfären med genus g (en allmän orienterbar sluten yta) eller sfären med q korshuvor (en allmän icke-orienterbar sluten yta). Det har nu tillkommit en del begrepp att förklara. En sfär med genus g är en sfär där man har slagit ut $2g$ hål och förbundit hålens kanter med varandra parvis. En sfär med genus ett är till exempel en torus. Notera att när vi säger att det är en torus menar vi att sfären med genus ett är homeomorf med en torus, vilket är allmänt topologiskt ordbruk. En sfär med q korshuvor är en sfär i vilken man har slagit q hål på vilka man har 'sytt' var sitt möbiusband längs dess kant. Resultatet är en sluten yta eftersom Möbiusbandet bara har en sida, som har formen av en sluten linje. Figur (4) förtydligar vad som menas.



Figur 4.1: En sfär med genus ett och en sfär med en korshuva.

För att bäst förklara vad homologigrupper är och hur de beräknas börjar vi från grunden. Homologigrupper är en generalisering av något som kallas Eulerkarakteristik, varför vi börjar med att förklara den.

4.1 Eulerkarakteristik

Definition 4.1 (Eulerkarakteristiken till en månghörning). **Eulerkarakteristiken** till en månghörning P är $\chi(P) = V - E + F$ där V är antalet hörn, E är antalet kanter och F är antalet sidor i månghörningen.

Eulerkarakteristiken ger ett sätt att mäta på vilket sätt en månghörning är kan byggas upp av trianglar, detta eftersom om man tar bort en triangel från en månghörning förändras inte dess eulerkarakteristik. Trots att eulerkarakteristiken enbart mäter en månghörnings uppbyggnad är den användbar därför att man inom topologin ofta undersöker samband mellan olika kroppar, och då med avseende på deras topologiska egenskaper. Eulerkarakteristiken ändras inte under homeomorfismer, vilket betyder att om två kroppar har olika χ skiljer sig deras topologiska egenskaper från varandra.

Sats 4.2 (Eulers formel). Alla **konvexa**¹ månghörningar har Eulerkarakteristik 2.

Det betyder att alla konvexa månghörningar är lika med avseende på eulerkarakteristiken. Här kommer ett illustrativt bevis².

Bevis 4.1. Vi tänker oss att vi har en konvex månghörning. Satsen säger att för denna godtyckliga månghörning gäller efter uppenbar omskrivning $E = V + F - 2$.

Vi föreställer oss att månghörningen är en planet som svävar i rymden. Vi förvränger den så att hörnen sticker ut som berg, bucklar in sidorna ordentligt, och gör kanterna olika höga. Detta kommer inte påverka dess χ eftersom

¹En konvex mängd är en mängd sådan att varje rak linje mellan två punkter i mängden ligger i mängden

²För de intresserade finns det en hemsida med 19 olika bevis [4]

den kommer ha lika många hörn, kanter och sidor efter förvrängningen som före. Vi sätter en sjö i mitten av varje sida.

Vi låter det nu börja regna på planeten, och detta regnet fortsätter tills alla kanter är under vatten och det enda som ses är hörnen. Vi betänker nu hur detta påverkar våra vatten- och landmassor. Vid start har vi F sjöar och en landmassa.

Varje gång en kant försvinner under vattnet har antingen två sjöar gått ihop (vilket innebär att antalet sjöar går ner med ett), eller en sjö gått ihop med sig själv och skapat en ö (så antalet landmassor går upp med ett).

Till slut är det en vattenmassa och V landmassor kvar.

Detta betyder att det har varit $F - 1$ översvämningar som minskat antalet sjöar, och $V - 1$ översvämningar som har skapat landmassor. Men det var totalt E översvämningar. Detta betyder att $E = (F - 1) + (V - 1) = F + V - 2$. QED.

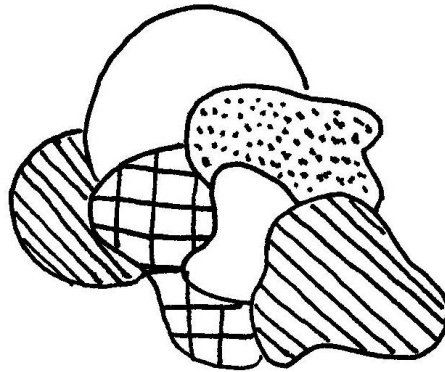
Eulerkarakteristiken kan sammanfattas med att den beskriver ett topologiskt rums struktur oavsett hur rummet böjs vilket vi ser genom vårt illustrativa bevis för satsen ovan. Vi definierar nu en allmän kropps eulerkarakteristik som eulerkarakteristiken av en månghörning den är homeomorf med. Benämnen en kropp K och en månghörning X , där månghörningen är homeomorf med kroppen. Då gäller $\chi(K) \equiv \chi(X)$. Detta kommer inte att bero på valet av månghörning³, vilket följer vår intuition om att ett topologiskt rums form måste vara samma genom homeomorfismer. Låt oss ta ett exempel på hur eulerkarakteristiken kan användas för att lösa en fråga om fyrfärgsteoremet.

Exempel 4.1 (Fyrfärgsteoremet och eulerkarakteristik). Fyrfärgsteoremet säger att varje karta med olika (sammanhängande) områden kan färgläggas med mest fyra färger sådant att inga områden som gränsar till varandra har samma färg. En gräns får inte vara en punkt vilket betyder att en uppdelning av en cirkel i tårtbitar inte är något motexempel.

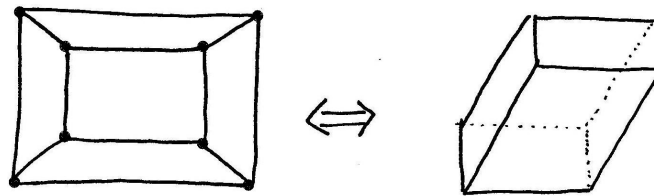
Efter att ha tänkt lite kan man fråga sig varför man inte kan skapa en karta med fem områden som alla gränsar till varandra. Även om vi kan visa att detta inte är möjligt har vi dock inte bevisat fyrfärgsteoremet, utan bara bevisat att ett specifikt motexempel inte fungerar.

Bevis 4.2 (Motsägelsebevis). Antag att vi kan rita en sådan karta. Låt oss sätta ut en punkt i varje område, i analogi till kartan kan punkterna vara städer i områdena. Varje par av områden gränsar till varandra och alltså kan

³Om vi kan visa att Eulerkarakteristiken är en topologisk invariant är vi färdiga. Detta eftersom om kroppen K är homeomorf med månghörningarna K_1 och K_2 måste de vara homeomorfa med varandra. Ett standardsätt att visa att χ är topologiskt invariant är genom att använda satsen som knyter samman den med bettitalen, eftersom homologi är topologiskt invariant.



Figur 4.2: Exempel på en karta med fyra färger



Figur 4.3: En plan graf som symboliserar en kub, där punkterna är hörn, linjerna är kanter, och ytorna är sidor.

vi dra streck mellan alla punkter utan att något av strecken skär varandra. Detta ger oss en plan graf⁴.

Varje plan graf har eulerkaraktistik 2, eftersom vi ur varje plan graf kan skapa en konvex månghörning. Se bild för ett exempel. Lägg märke till att vi har en sida mellan de fyra yttre hörnen på grafen också.

Eftersom vi har tio kanter och fem hörn, måste antalet sidor vara sju. Varje sida i grafen begränsas av minst tre kanter, och varje kant är (del-)rand till två sidor. Eftersom vi har tio kanter ($\sum_{i=1}^4 i = 10$) kan det som mest finnas sex sidor. Detta har vi precis visat är omöjligt vilket betyder att en sådan graf inte uppfyller att eulerkaraktistiken av den är två, och då kan det inte vara en plan graf.

Sats 4.3 (Eulerkaraktistiken för produktrummet är produkten av eulerkaraktistiken för rummen).

$$\chi(M \times N) = \chi(M) \cdot \chi(N)$$

där $M \times N$ är produktrummet av M och N .

⁴En plan graf är en graf som kan ritas på ett papper utan att någon av linjerna skär varandra

Detta är ett intressant resultat eftersom det hjälper oss beräkna χ för mer komplicerade kroppar om vi kan se dem som produkter av delkroppar. Låt oss ta ett exempel.

Exempel 4.2 (Eulerkarakteristik av ett produktrum). En torus, T , kan skrivas som produktrummet av två cirklar: $T = S_1 \times S_2$, alltså gäller $\chi(T) = 2 \cdot \chi(S) = 2 \cdot 0 = 0$

Som ett smakprov kommer vi här att ta upp satser som kräver matematik som kommer senare i texten. När vi har homologigrupper kan vi definiera bettitalen som dimensionen av homologigruppen, $b_n(M) = \dim(H_n(M))$ där M är vår mångfald. Låt oss först ge en generell definition av eulerkarakteristiken för kroppar av högre dimension.

Definition 4.2 (Allmän definition). $\chi(M) \equiv \sum_i (-1)^{(i)} n_i(M)$, där n_k är antalet k -dimensionella simplex i mångfalden M .

Genom att låta kroppen inbäddas i $\mathbb{R}^3$ (om det är möjligt) inser vi snabbt att den övre definitionen överrensstämmer med vår gamla i tidigare fall. Det kan ibland vara lättare att räkna på homologigrupperna än antalet simplex i en mångfald, varav satsen under är till stor hjälp.

Sats 4.4 (Samband mellan eulerkarakteristiken och bettital). Genom att använda definitionen ovan kan vi visa följande likhet $\chi \equiv \sum_i (-1)^{(i)} n_i(M) = \sum_0^\infty (-1)^{(i)} b_i(M)$, där b_i är i :te bettinumret ⁵

För att visa styrkan i denna sats beräknar vi eulerkarakteristiken av en torus genom den.

Exempel 4.3 (Eulerkarakteristik genom bettital). Låt T vara en torus. Det 0-te bettinumret berättar för oss hur många delar torusen är i, och eftersom en torus är sammanhängande gäller $b_0(T) = 1$ (hade vi kollat på två separata torusar blir $b_0(T \cup T) = 2$, med $\cup$ som den disjunkta unionen).

Det 1-ta bettinumret berättar antalet hål T har. En torus har ett hål i mitten samt cylindertunneln, alltså $b_1(T) = 2$. Det andra bettinumret berättar analogt hur många ihåligheter torusen har, vilket är en - tunneln i cylindern är inte bara ett hål utan även en ihålighet, $b_2(T) = 1$. Eftersom torusen är tre-dimensionell är resterande bettinummer noll.

Detta ger att $\chi(T) = 1 - 2 + 1 = 0$, som ovan.

4.2 Simplex

Definition 4.3 (n-simplex). Ett **n-simplex** är $n + 1$ st punkter, $p_0 p_1 \dots p_n$ sådana att punkterna är geometriskt oberoende ⁶.

⁵För bevis, se Euler-Poincaré Thorem, s. 118, i Nakahara [1]

⁶Geometriskt oberoende betyder att det får inte finnas något $(n-1)$ -hyperplan som innehåller alla $n+1$ punkter

I $\mathbb{R}^n$ finns den evivalenta tolkningen att ett simplex är $n+1$ st punkter $p_0 p_1 \dots p_n$ sådana att $p_1 - p_0, \dots, p_n - p_0$ är linjärt oberoende. Från grafteori har vi också tolkningen att ett n -simplex är den kompletta grafen med $n+1$ hörn.

Ovan är olika formuleringar som säger samma sak - ett n -simplex är en n -dimensionell triangel. Ett 0-simplex är en punkt, ett 1-simplex är en linje, ett 2-simplex är en triangel, ett 3-simplex är en tetraeder, osv. Ett n -simplex är den mest grundläggande n -dimensionella kroppen, i den mening att ingen av punkterna som bygger upp den är överflödiga.

Ett n -simplex kommer vi härnäst alltid anta är orienterat vilket betecknas med $(p_0 \dots p_n)$. Eftersom det är orienterat vet vi att $(p_{j_1} \dots p_{j_n}) = -(p_{u_1} \dots p_{u_n})$ där jk och uk visar på jämn respektive udda permutation av $0, 1, \dots, n$.

Precis som enhetscirkeln och enhetskuben är enkla standardfigurer finns det något som kallas standard n -simplex vilket används av samma skäl.

Definition 4.4 (Standard n -simplex). **Standard n -simplex** i $\mathbb{R}^n$ är $\bar{\sigma}_n = (p_0 p_1 \dots p_n)$, där $p_i = (0_1, 0_2, \dots, 1_i, 0_{i+1}, \dots, 0_n)$

Ett standard n -simplex är ett n -simplex där koordinaterna för hörnen beskrivs av basortsvektorerna. Standard n -simplex skulle kunna heta n -enhetssimplexet.

Definition 4.5 (Simplicellt komplex). Om K är en ändlig mängd av simplex i $\mathbb{R}^M$, och K uppfyller att:

- i Varje sida till ett simplex i K tillhör K .
- ii För varje par av simplex i K är snittet mellan dem antingen tomt eller en gemensam sida. Formellt: $\forall \sigma, \sigma' \in K$, gäller att $\sigma \cap \sigma' = \emptyset$ eller att $\sigma \cap \sigma' \leq \sigma$ och $\sigma \cap \sigma' \leq \sigma'$

Ett simplicellt komplex kan tänkas genom att man tar simplex av olika dimension och sammanfogar dem. Genom detta kan man bygga upp vilken månghörning som helst genom att ta unionen över alla simplex i det simplicella komplexet som bygger upp månghörningen. Låt oss formalisera.

Unionen av alla simplex i ett simplicellt komplex K betecknas $|K|$ och kallas för polyedern $|K|$ av det simplicella komplexet K . Viktigt att lägga märke till att $|K|$ är en kropp medan komplexet är en mängd av simplex. Med de krav vi har på simplicella komplex kan vi se att om det simplicella komplexet har dimension k har även polyedern dimension k . Vi ser även att unionen måste vara en månghörning vilket berättigar namnet.

Till exempel kan K vara alla hörn, kanter och sidor i en kub, vilket betyder att polyedern, $|K|$, är själva kuben.

Definition 4.6 (Triangulering av ett topologiskt rum). Om X är ett topologiskt rum ⁷ och det existerar ett simplicellt komplex K med en homeo-

⁷se kap.4 för definition av ett topologiskt rum

morfism $f : |K| \rightarrow X$, så sägs X vara triangulerbart och paret (K, f) kallas en **triangulering** av X .

Det första vi behöver lägga märke till är att det för triangulerbara topologiska rum inte finns unika trianguleringar. Ordet triangulering är välbefogat eftersom en triangulering av ett topologiskt rum är en uppdelning av rummet i simplex. Eftersom två topologiska rum är lika om de är homeomorfiska betyder detta att mångfalden i fråga kan beskrivas som sin triangulering. Det är positivt eftersom flera av de topologiska invarianterna är lättare att beräkna på polyedern istället för det ursprungliga rummet.

4.2.1 Homologigrupper

Homologigruppen till ett rum ska betrakta alla områden av en viss dimension som inte är rand till ett annat område i rummet och inte heller har en rand inom rummet. Det är vad vi vill att det ska betyda, men hur gör vi det mer matematiskt?

Låt oss innan vi går in djupare på det knyta ihop homologigrupper med eulerkarakteristiken. På ett liknande sätt som Eulerkarakteristiken beskriver ett topologiskt rums form och till viss mån dess struktur tar homologigrupperna och visar det topologiska rummets uppbyggnad och ytterligare struktur. Eftersom homologigruppen visar uppbyggnaden är den också en topologisk invariant. Kom även ihåg att eulerkarakteristiken kan beräknas med hjälp av bettitalen, vilka beror på homologigrupperna till ett rum.

För en matematisk definition av homologigrupp behöver vi veta vad vi menar med en rand.

Kedjor och randoperatören

Definition 4.7 (Randens). **Randen**, ∂ till ett underrum U av det topologiska rummet X definieras som snittet mellan det slutna höljet och det slutna höljet av komplementmängden till U i X : $\partial U = \overline{U} \cap \overline{X \setminus U}$

Vi ser att randen till ett k -simplex är en linjärkombination av $(k-1)$ -simplex och vår intuitiva uppfattning av randen gäller fortfarande. Ett sätt att se på randen till en mängd är alla punkter sådana att varje omgivning till punkterna innehåller minst en punkt som tillhör mängden och en punkt som inte tillhör mängden. Vi kommer senare att definiera en randoperator som beräknar randen till en linjärkombination av simplex, detta för att vi ska kunna skapa de grupper som behövs för att definiera homologigrupperna.

Vi behöver även veta vad kedjor är för att kunna angripa homologigrupper väl.

Definition 4.8 (n-kedja). En **n-kedja**, är en linjärkombination av n-simplex: $c = \sum_1^N c_i \sigma_{n,i}$ där $\sigma_{n,i}$ denoterar det i:te n-simplexet.

Vi skapar en n -kedja genom att länka ihop flera n -simplex, möjligen flera av samma n -simplex, vilket berättigar namnet.

Definition 4.9 (n -kedjegruppen). **n -kedjegruppen** C_n definieras som mängden av alla n -kedjor: $C_n(X) = \{y : y \text{ är en } n\text{-kedja på topologiska rummet } X\}$ med den uppenbara gruppstrukturen.

Det är viktigt att vi nu har en grupp, vilket betyder att vi kan börja närma oss målet att finna en homologigrupp. Detta eftersom vi kan skapa delgrupper till vår kedjegrupp som uppfyller de krav vi vill använda. Efter det kan vi definiera en kvotgrupp består av ekvivalensklasserna av områden som inte är rand till något, och inte heller har någon rand. För att nå det målet behöver vi kunna skapa en randgrupp och en cykelgrupp (där element i cykelgruppen är randlösa - de består av en cykel).

Låt oss därför definiera **randoperatorn** ∂ .

Definition 4.10 (Randoperatorn). $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X) : (\sigma : [p_0, \dots, p_n] \rightarrow X) \mapsto (\partial_n \sigma = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma([p_0, \dots, p_{k-1}, p_{k+1}, \dots, p_n])$

Vi ser att sammansättningen av följande randoperatorer alltid är noll, $\partial \circ \partial_{n+1} = 0$, vilket betyder att randen till ett område aldrig själv har en rand. Till exempel är randen till en ifylld cirkel en sluten kurva, omkretsen, som inte har några randpunkter. Detta är en fortsättning på vår tidigare randdefinition, vilken behåller idén om rand men tillåter oss att kräva vissa mönster av randen till ett område - och då kan vi utnyttja randen för att skapa undergrupper till våra kedjegrupper.

4.2.2 Homologigruppen

Vi börjar närma oss målet med att ta fram alla områden som inte är rand till något annat område och inte heller har en rand. För att göra det formellt behöver vi hitta alla områden som inte är en rand till ett annat område, och sedan sätta att två sådana områden är ekvivalenta om de två tillsammans är rand till ett annat område.

Ta som exempel två olika cirklar runt om en cylinder. Dessa två cirklar är var för sig inte rand till något område på cylindern, men tillsammans är de rand till området mellan dem. Detta betyder att vi betraktar dessa två cirklar som ekvivalenta med avseende på homologigruppen⁸.

Gruppteoretiskt vill vi skapa mängden av områden som inte har en rand, och sedan bilda kvotgruppen mellan den och de områden av en högre dimension som har en rand.

Definition 4.11 (Cykelgrupp och randgrupp). $Z_n(X) = \ker(\partial_n)$, $B_n(X) = \text{im}(\partial_{n+1})$

⁸Se exempel 5.4

Här har Z_n (n-cykelgruppen) betydelsen som mängden av alla områden som inte har en rand, eftersom bilden av randoperatoren är noll. B_n ⁹ (n-randgruppen) å andra sidan är bilden av mängden av (n+1)-dimensionella områden genom randoperatoren, det vill säga alla n-dimensionella områden som är rand till ett högre dimensionellt område.

Nu kan vi ta fram homologigruppen formellt.

Definition 4.12 (Homologigrupp). $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$

(n:te) Homologigruppen definieras formellt som kvotgruppen mellan Z_n och B_n , vilket betyder att vi har nått det vi pratade om i början av detta avsnitt - vi har en ren matematisk definition av homologigruppen. Tolkningen är samma som vi skrivit ovan - alla områden som inte har rand och inte är rand till något annat. Lägg även märke till att vi rör oss inom en kvotgrupp och alltså är två områden samma element i homologigruppen om de tillsammans är randen till ett område.

Hur kan vi beräkna homologigrupperna?

Även då vi kan beräkna Z_n och B_n systematiskt blir det ofta långa beräkningar, vilket gör samband intressanta.

4.2.3 Sätt att beräkna homologigrupperna på olika kroppar

Sats 4.5 (Egenskap hos sammanhängande kroppar). H_0 är isomorf med $\mathbb{Z}$ om kroppen är sammanhängande.

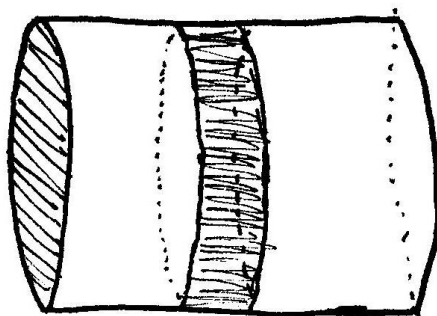
Det är för att två punkter är ekvivalenta om de kan vara randen till samma område, eller trivialt om de är samma område. Vi har att punkt p_i och punkt p_k är ekvivalenta om vi kan bilda en kurva med punkterna som start och slutpunkt respektive. Då kroppen är sammanhängande är detta alltid möjligt, vilket betyder att $H_0 \cong \mathbb{Z}$.

Exempel 4.4 (Första homologigruppen på ett cylinderskal). Genom samma resonemang som för H_0 på en sammanhängande mängd kan man ta fram H_1 för skalet till en cylinder. Vi visar:

H_1 hos ett cylinderskal är alla kurvor som varken har rand eller är rand till ett område på cylinderskalet, med dessa kurvor ekvivalenta om de tillsammans innesluter ett område av cylinderskalet.

Det är uppenbart att alla slutna kurvor som inte går runt cylindern inte är med i H_1 , eftersom de innesluter ett område på ytan. Vi ser även att icke slutna kurvor inte finns med i H_1 eftersom de då har en startpunkt och en slutpunkt - en rand.

⁹B står för boundary.



Figur 4.4: Två cirklar på en cylinder är ekvivalenta eftersom de tillsammans innesluter ett område

Vi har att H_1 är kurvor som går runt cylindern. Men alla dessa kurvor är ekvivalenta med valfri kurva som går runt cylindern, eftersom två cirklar runt cylindern (som inte är samma cirkel) innesluter ett område runt cylindern.

vi har nu kommit fram till att $H_1 \cong \mathbb{Z}$

Exempel 4.5 (Beräkning av första homologigruppen av en linje). Ett avslutande exempel. Låt oss beräkna $H_1(K)$ av $K = \{p_0, p_1, (p_0p_1)\}$, alltså det simplicieella komplexet över en linje mellan två punkter.¹⁰

Vi har att kedjegrupperna är linjärkombinationer av simplex, alltså är $C_0 = \{ap_0 + bp_1\}$ och $C_1 = c(p_0p_1)$ där $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. (p_0p_1) är inte rand till något simplex i K , vilket betyder att $B_1(K) = \{0\}$. Detta medför att den första homologigruppen för vår kropp är ekvivalent med första cykelgruppen för kroppen, $H_1(K) = Z_1(K)$.

Låt nu z vara ett element i $Z_1(K)$, dvs $z = n(p_0p_1)$ för något heltal n . Då vi tar randen på z får vi $\partial z = n\{p_1 - p_0\} = np_1 - np_0$, men vi vet också att $\partial z = 0$. Alltså måste n vara noll, och vi får resultatet

$$H_1(K) = 0$$

¹⁰Vi följer resonemanget givet på s. 108 i [1]

Kapitel 5

Mångfalder

Mångfalder¹ är ett bra och konkret exempel på att den abstrakta matematiken är väsentlig för att förstå den moderna fysiken. Inom allmän relativitetsteori är mångfalder ett ypperligt verktyg för att förenkla fysiken eftersom man jobbar med lokala koordinatsystem som överlappar varandra istället för ett globalt för hela systemet. Einsteins allmänna relativitetsteori använder en fyrdimensionell mångfald för att beskriva rumtiden och andra moderna teorier tillämpar mångfalder av ännu högre dimension. Vi kommer att beskriva mångfalder med generell struktur och begränsar oss därför inte till en viss dimension. En mångfald är ett topologiskt rum, som kan delas in i ”lappar” (patches) vilka lokalt liknar ett rum i $\mathbb{R}^m$. Detta gör att man kan ge en punkt p på mångfalden M ett lokalt koordinatsystem. Sfären är ett enkelt exempel på en mångfald där man lokalt över små områden betraktar koordinataxlarna som kartesiska vilket egentligen är en approximation som inte fungerar för hela klotet!

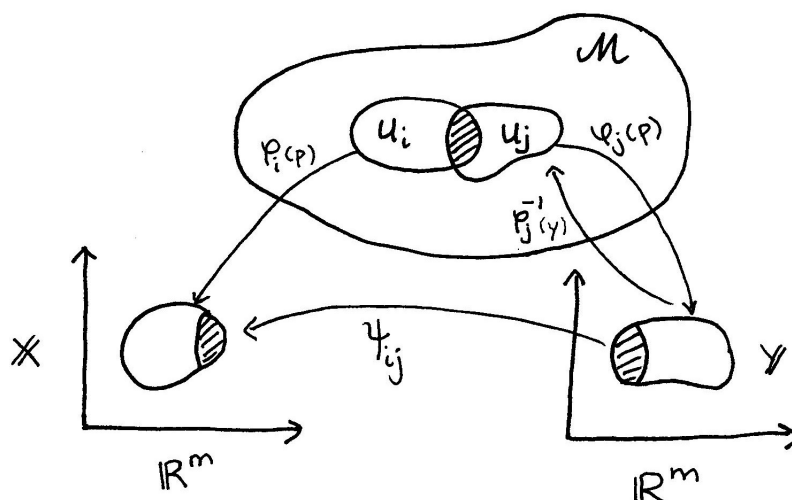
Vad har vi mer för krav på en mångfald, förutom att det skall vara ett topologiskt rum?² Nedan följer en kort lista på villkor vi måste ställa på en mångfald

- i) Närliggande punkter skall ha närliggande koordinater i minst ett koordinatsystem.
- ii) Varje punkt på mångfalden måste ha unika koordinater i varje koordinatsystem som innehåller punkten.
- iii) När två koordinatsystem överlappar varandra måste de vara relaterade med en glatt (oändligt differentierbar) funktion.

Varför är dessa tre krav så viktiga? Det vi vill uppnå är att täcka ett mer eller mindre komplicerat topologiskt rum med ”lappar” där man i princip kan

¹För ytterligare information om mångfalder än vad som ges här se Abraham [16], Penrose [17] eller Flanders [18]

²I detta kapitel (och alla efterföljande) är det underförstått att alla topologiska rum är Hausdorffrum.



Figur 5.1: Mångfald med områden som avbildas på $\mathbb{R}^m$ med hjälp koordinatfunktionerna φ_i och φ_j .

approximera lappen med ett lokalt rum i $\mathbb{R}^n$. Detta gör att vi kan använda oss av vår kända matematiska analys på $\mathbb{R}^n$. Den matematiska strukturen vi bygger upp skall dessutom vara oberoende av valet av koordinatsystem, vilket aldrig är entydigt. Utan dessa villkor kan vi inte arbeta med differentierbara, eller ens kontinuerliga avbildningar från mångfalden till exempel $\mathbb{R}^n$. I linje med detta ges nu den formella definitionen:

Definition 5.1 (*m-dimensionell differentierbar mångfald*). Vi säger att ett topologiskt rum M , eller mer exakt (M, T) , är en **differentierbar mångfald** av dimension m om M kann tillordnas en samling par (U_i, φ_i) så att:

- i) $\{U_i\}$ är en samling öppna mängder vilka täcker M , det vill säga $U_i \in T$ och $\cup_i U_i = M$.
- ii) φ_i är en homeomorfism från U_i till en öppen delmängd av $\mathbb{R}^m$.
- iii) För varje U_i och U_j som överlappar, det vill säga $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, är avbildningen $\psi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ från $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ till $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ oändligt differentierbar.³

I figur 5.1 ser vi två områden på mångfalden betecknade U_i och U_j . (U_i, φ_i) kallas för en karta och $\{(U_i, \varphi_i)\}$ kallas en atlas

³Om detta sista krav inte är uppfyllt har vi inte en differentierbar mångfald, utan bara en mångfald.

U_i är **koordinatomgivning** och $\varphi_i(p)$ är koordinatfunktionen vilken explicit kan skrivas för en punkt $p \in U_i$ som

$$x(p) = [x^1(p), x^2(p), \dots, x^m(p)] \quad (5.1)$$

det vill säga φ_i utgörs av m stycken funktioner och $x^\mu(p)$ är koordinaterna för punkten p . Vi har alltså, för två områden som överlappar varandra ($U_i \cap U_j \neq \emptyset$), två koordinatfunktioner φ_i och φ_j som beskriver samma område $U_i \cap U_j$ vilket vidare innebär att vi får två koordinater för varje punkt $p \in U_i \cap U_j$. Axiom 4 garanterar oss dessutom att övergången från φ_i till φ_j är glatt. Vi kan utan problem behandla olika områden på mångfalden med vår vanliga analys genom att välja passande koordinatfunktioner. Vi väljer nu en punkt $p \in U_i \cap U_j$ med koordinater x^μ i φ_i -systemet och koordinater y^μ i φ_j -systemet ($1 \leq \mu \leq m$). Funktionen $\psi_{ij} = \varphi_i \circ (\varphi_j)^{-1}$ definierar nu en koordinattransformation (se figur 1):

$$\psi_{ij} : \{[y^\mu]\} \mapsto \{[x^\mu]\} \quad (5.2)$$

det vill säga funktioner $x^\mu = x^\mu(y)$. Koordinattransformationen är dessutom differentierbar eftersom varje $x^\mu(y)$ är differentierbar med avseende på varje y^μ . Detta betyder att när vi rör oss på mångfalden M så kommer övergången från ett koordinatsystem till ett annat vara glatt då vi rör oss från en lapp till en annan. Vi kan nu studera avbildningar från en mångfald M till en annan N .

5.1 Avbildningar mellan mångfalder

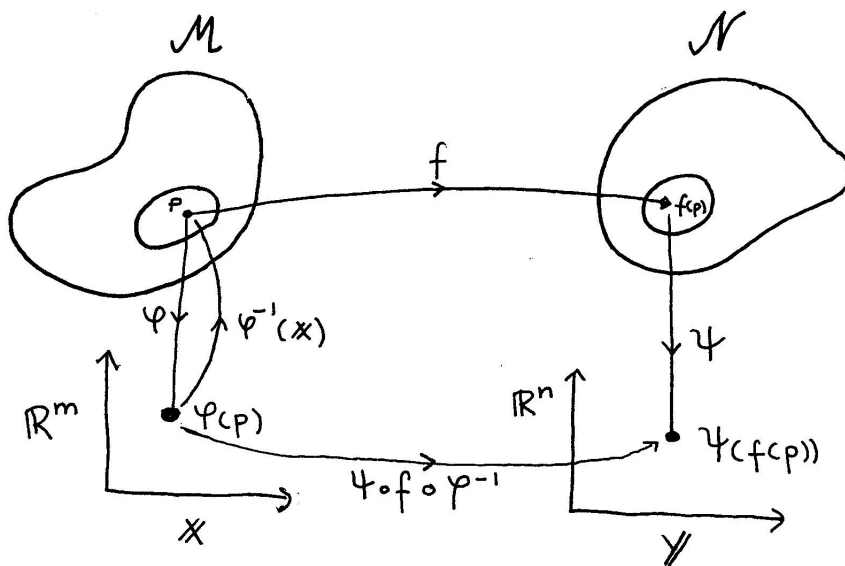
5.1.1 Differentierbara avbildningar och diffeomorfism

Vi skall nu studera avbildningar mellan mångfalder. Givet två mångfalder M och N med tillhörande koordinatsystem i $\mathbb{R}^m$ respektive $\mathbb{R}^n$ kan vi nu definiera en avbildning $f : M \rightarrow N$ med hjälp av de lokala koordinatsystemen på lapparna $U \in M$ och $V \in N$

Från figur 5.2 har vi direkt att f 's motsvarighet i koordinatsystemen $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ blir $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Vi kan som tidigare skriva $\varphi(p) = \{x^\mu\}$ i $\mathbb{R}^m$ och $\psi(f(p)) = \{y^\mu\}$ varför vi får $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$ (förkortat brukar detta skrivas $y^\mu = f^\mu(x^\mu)$). Om $y \in C^\infty$ sägs f var differentierbar i punkten p . Vidare följer det nu att f 's differentierbarhet är oberoende av koordinatsystemet. Ett bevis följer här:

Differentierbarhet är oberoende av koordinatsystem. Låt $p \in U_1 \cap U_2$ vars olika koordinater ges av φ_1 i $\{x_1^\mu\}$ och φ_2 i $\{x_2^\mu\}$. Vi skall betrakta $\psi \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ vilken alltså är differentierbar med avseende på $\{x_1^\mu\}$ och visa att $\psi \circ f \circ \varphi_2^{-1}$ också är differentierbar. Man kan skriva

$$\psi \circ f \circ \varphi_2^{-1} = \psi \circ f \circ \varphi_2^{-1}(\varphi_1 \circ \varphi_1^{-1}) = \psi \circ f \circ (\varphi_2^{-1} \varphi_1) \circ \varphi_1^{-1} \quad (5.3)$$



Figur 5.2: Avbildning mellan mångfalderna: $f : M \rightarrow N$

Nu är villkoret att $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ är $C^\infty \Rightarrow \psi \circ f \circ \varphi_2^{-1} \in C^\infty$. Helt analogt gäller detta även för ψ_1 och ψ_2 . $\square$

Diffeomorfism

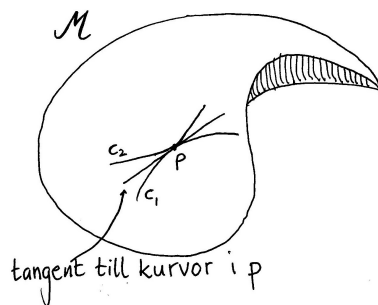
Det är viktigt att arbeta med avbildningar som har en invers. Avbildningen ovan $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ via $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ har en invers och då kallas f en **diffeomorfism**. Mer formellt skriver vi definitionen

Definition 5.2 (Diffeomorfism). Om $f : M \rightarrow N$ är en homeomorfism och om $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ har en invers, det vill säga att det finns en avbildning $\varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}$ samt båda är C^∞ kallas f en diffeomorfism. M och N sägs då vara vara **diffeomorfa**. Observera att $\dim M = \dim N$

5.2 Vektorer, tangentvektorer och tangentplan

5.2.1 Tangentplan: Vektorrum

Vi skall försöka konstruera något som är analogt med tangentplanet i en punkt på en yta för en godtycklig mångfald vilken är inbäddad i något $\mathbb{R}^n$ rum. En inbäddad mångfald innebär att den ligger i ett rum av högre men godtycklig dimension som till exempel planet i ett $\mathbb{R}^3$ -rum. Vi vet att 'tangentplan' för kurvor i $\mathbb{R}^2$ och ytor i $\mathbb{R}^3$ både speglar ytans struktur och



Figur 5.3: Tangenten till två kurvor c_1 och c_2 på mångfalden M

approximerar ett område kring en punkt. Till exempel kan en yta approximeras till ett plan $z = f(x, y)$ kring en punkt x_0, y_0 :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{\partial f(y)}{\partial y} \Big|_{y=y_0} (y - y_0) = z - z_0. \quad (5.4)$$

Vidare bildar tangentrummet i p ett naturligt vektorrum med basen $\{\partial/\partial x^\mu\}$ där $\{x^\mu\}$ är det lokala koordinatsystemet i en omgivning till p . Vektorerna $\{x^\mu \partial/\partial x^\mu\}$ applicerade på en funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bildar dess riktningsderivata utmed vektorn x^μ i vektorrummet på tangentplanet. Dessutom uttrycks ett vektorfält ξ på mångfalden som

$$\xi = \xi^\mu(x) \partial/\partial x^\mu. \quad (5.5)$$

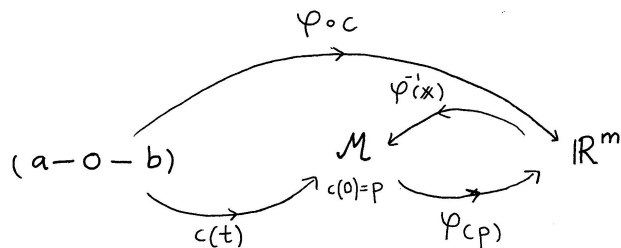
Analogt med tangentplanet i en punkt på en yta (mångfalden inbäddad i $\mathbb{R}^{m+1}$) bildar vi först en kurva genom p och därefter söker vi tangenten till denna, se figur 5.3.

Det gäller alltså att bilda en koordinatfri definition av en kurva på M . Detta kan fås direkt om vi väljer ett öppet intervall $I_{ab} \in \mathbb{R}$ där $a < t < b$, och $t, 0 \in (a, b) = I_{ab}$ och fordrar att avbildningen $(a, b) \rightarrow M$ uppfyller villkoren i diagrammet i figur 5.4 med $c(0) = p \in M$.

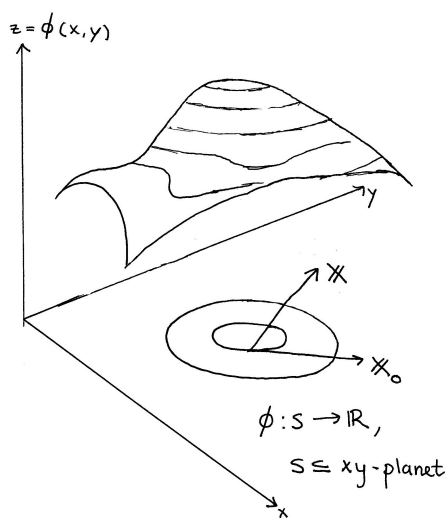
Då intervallet (a, b) är endimensionellt blir bilden av (a, b) på mångfalden en endimensionell kurva $c(t)$. Denna är alltså helt koordinatberoende.

Två kurvor på mångfalden är ekvivalenta om de har samma tangent i p ($c_1 \sim c_2$) och vi kan därmed definiera tangentvektorn som ekvivalensklassen av alla kurvor med samma tangent i en punkt p . Man kan jämföra detta med definitionen av en vektor som ekvivalensklassen av lika långa och lika riktade sträckor i ett euklidiskt rum.

Exempel 5.1 (Vektorfält och tangentplan). I detta exempel är mångfalden M inbäddad i ett $\mathbb{R}^3$ -rum, se figur 5.5. En punkt p kan då "ärva" koordinater från detta rum. Om M inte är inbäddat i något $\mathbb{R}^n$ måste vi istället skaffa en



Figur 5.4: Diagram över avbildningarna mellan $\mathbb{R}$, M och $\mathbb{R}^m$



Figur 5.5: Bild till exempel 5.1 och ??.

avbildning $\varphi_i \in \mathbb{R}^n$ av ett område $U_i \in M$, $p \in M$ till ett koordinatsystem i $\mathbb{R}^n$ där $\dim M = \dim \mathbb{R}^n$.

5.2.2 Kurvor och funktioner i mångfalden

Definition 5.3 (Öppen kurva). En kontinuerlig avbildning från ett öppet intervall $I_{ab} = (a, b) \in \mathbb{R}$ till mångfalden M ; $c: (a, b) \rightarrow M$ kallas en öppen kurva på mångfalden.

Två punkter på intervallet får ej ha samma bild. Det är detsamma som att säga att kurvan ej skär sig själv på mångfalden. På en karta (U, φ) har en kurva $c(t)$ en koordinatrepresentation $x = \varphi \circ c$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$. En funktion på mångfalden är en glatt avbildning $M \rightarrow \mathbb{R}$. På en karta (U, φ) får vi nu koordinatrepresentationen $f \circ \varphi^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ det vill säga en reellvärd funktion i m variabler. Mängden av alla sådana funktioner skrivs $\mathcal{F}(M)$

Riktningsderivata

Vi bildar nu funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nämligen $f(c(t)) : (a, b) \xrightarrow{c} M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ där kurvan $c(t)$ på M , $t \in (a, b)$ och $c(0) = p \in M$. Vi antar att f är differentierbar. Det är nu klart att $f \circ c$ är oberoende av lokala koordinater på M samt att den är differentierbar.

Då vi har en differentierbar funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kan vi alltså bilda en derivata för denna i punkten $t = 0$:

$$\frac{df(c(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \quad (5.6)$$

där $\{x^\mu\}$ är de lokala koordinaterna för p . Derivatan av $f(c(t))$ blir alltså

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \right|_{t=0} \quad (5.7)$$

Detta kan vi även skriva som en operator på f , kalla den $\mathbb{X}$

$$\mathbb{X} = X^\mu \partial / \partial x^\mu \quad (5.8)$$

där komponenterna är

$$X^\mu = \left. \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \right|_{t=0}. \quad (5.9)$$

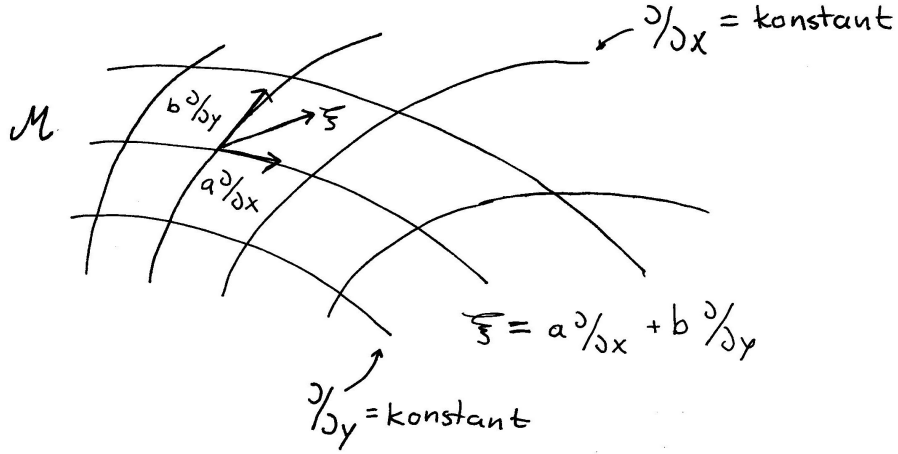
Exempel 5.2 (Riktningsderivata). ϕ är en funktion på mångfalden $S \in \mathbb{R}^2$, se figur 5.5. Här är $\mathbb{R}^2$ xy -planet. $\mathbb{x} = a\partial/\partial x + b\partial/\partial y$ är ett vektorfält och uttrycket $d\phi = udx + vdy$ känner vi igen från flervariabelanalysen och kommer senare att kallas kovektorfältet. $\mathbb{x}(\phi)$ är riktningsderivatan i en punkt p längs $\mathbb{x}$. Observera att $\mathbb{x}_0(\phi) = 0$ då ϕ är konstant vilken utgör nivålinjer i $\mathbb{R}^3$, dvs i grafen av ϕ . Nu skall det gälla att

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{x}(\phi) &= d\phi \cdot \mathbb{x} \\ \mathbb{x}(\phi) &= a \frac{\partial \phi}{\partial x} + b \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ d\phi \cdot \mathbb{x} &= au + bv \end{aligned} \right\} \Rightarrow u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

alltså $d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy$.

I exemplet är ϕ en funktion av punkterna (x, y) på mångfalden $S \in \mathbb{R}^2$ där vi kan ha samma koordinatsystem för alla punkter. Lite mer allmänt kan vi ha en mångfald som en yta, se figur 5.6. För vektorn $\xi = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$ tänker man sig komponenterna a och b i två riktningar utmed

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\text{som pekar längs } y = \text{konstant} \\ \frac{\partial}{\partial y} &\text{som pekar längs } x = \text{konstant.} \end{aligned} \right.$$



Figur 5.6: Lokala koordinater. Observera att koordinataxlarna definieras av att alla andra koordinater är konstanta. Detta generaliseras enkelt till högre dimensionella mångfalder

Definition 5.4 (Tangentvektor). Nu definierar vi **tangentvektorn** $X = X^\mu \partial / \partial x^\mu$ med basvektorerna $\{e_\mu\} \equiv \{\partial / \partial x^\mu\}$. Ekvivalensrelationen mellan två kurvor uttrycks nu som

- i $c_1(0) = c_2(0)$
- ii $\frac{dx^\mu(c_1(t))}{dt} = \frac{dx^\mu(c_2(t))}{dt}$ för $t = 0$

Vi kan nu bilda tangentplanet för M i p vilket betecknas $T_p M$. $T_p M$ spänns av basvektorerna $e_\mu = \partial / \partial x^\mu$, se figur 5.6. En vektor v i tangentplanet skrivs som $v = v^\mu e_\mu$. Ovan har vi sett att

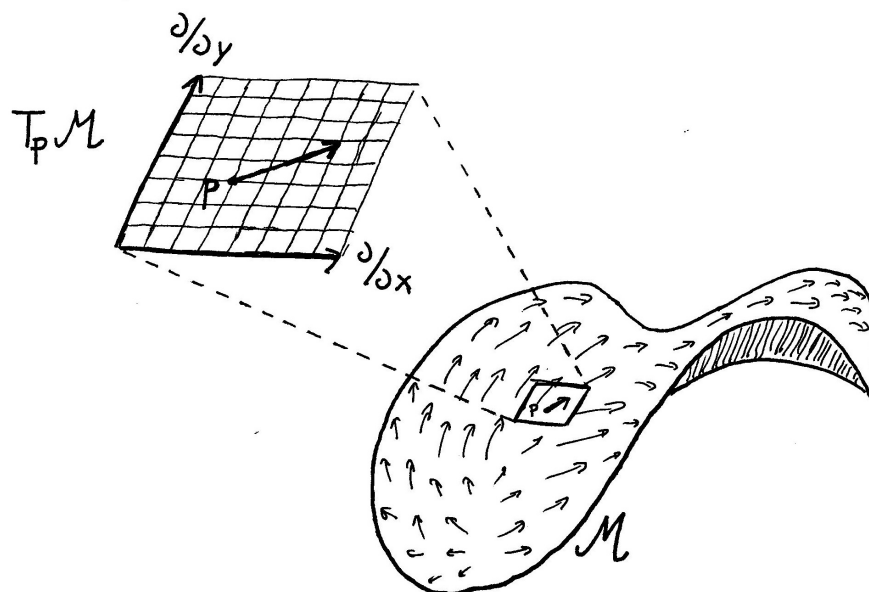
$$\left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0} = X[f] \quad (5.10)$$

varav det framgår att en vektor x är oberoende av ett visst koordinatsystem. Har vi två överlappande koordinatsystem $p \in U_i \cap U_j$; $x = \varphi_1(p)$ och $y = \varphi_2(p)$ ger två uttryck för x :

$$X = X^\mu \partial / \partial x^\mu = \tilde{X}^\mu \partial / \partial y^\mu \quad (5.11)$$

Låt nu X verka på y^ν . Vi får

$$X^\mu \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} = \tilde{X}^\nu \delta_\nu^\mu = \tilde{X}^\mu. \quad (5.12)$$



Figur 5.7: En mångfald där vi lokalt kan approximera ytan med tangentplanet $T_p M$ och på så sätt uttrycka en vektor i baserna $\partial/\partial x$ och $\partial/\partial y$.

5.2.3 Duala vektorrum och enformer

Mängden linjära avbildningar på ett vektorrum V från $V \rightarrow \mathbb{R}$, bildar ett annat vektorrum V^* . Det nya vektorrummet V^* kallas för det **duala vektorrummet** eller kovektorrummet och är isomorft med V . Således är $\dim V = \dim V^*$. På dessa två vektorrum V och V^* kan man vidare definiera en inre produkt (se nedan) och välja baser $\{e_j\}$ respektive $\{e^{*i}\}$ sådana att $e^{*i}(e_j) \equiv e^{*i} \cdot e_j = \delta_j^i$. Vi studerar nu detta närmare:

Givet basen $\{e_j\}$ för V kan man skriva en godtycklig linjär avbildning $f \in V^*$ som $f(v) = f(v^j e_j) = v^j f(e_j)$. Det räcker alltså att känna till $f(e_j)$ för att få f 's verkan på en godtycklig vektor i V . Det viktiga är att mängden av alla linjära avbildningar $V^* : V \rightarrow \mathbb{R}$ i sin tur bildar ett vektorrum. Detta ser vi direkt om vi bildar linjärkombinationen $af + bg$ för två godtyckliga avbildningar f och g och låter verka på en vektor v :

$$(af + bg)(v) = af(v) + bg(v) \quad (5.13)$$

det vill säga $af + bf \in V^*$.

Detta medför att vi kan finna en bas för de linjära funktionerna i V^* , kalla den $\{e^{*i}\}$ där alltså varje e^{*i} är en linjär funktion från $V \rightarrow \mathbb{R}$. Denna bas definieras så att $e^{*i}(e_j) = \delta_j^i$. Observera att detta entydigt bestämmer e^{*i} .

Nu kan vi skriva en godtycklig linjär avbildning $f = f_i \mathfrak{e}^{*i}$ och

$$f(\mathfrak{v}) = f \mathfrak{e}^{*i} (v^j \mathfrak{e}_j) = f_i v^j \mathfrak{e}^{*i} (\mathfrak{e}_j) = f_i v^i \quad (5.14)$$

Man kan alltså betrakta f på $\mathfrak{v}$ som en inre produkt mellan f_i och v^i .

Enformer

I ett tidigare avsnitt lyckades vi skapa ett tangentrum $T_p M$ för varje p i en koordinatomgivning U . En tangentvektor $\mathfrak{v} \in T_p M$ fick vi genom att identifiera operatoren $\mathfrak{v} = v^\mu \partial / \partial x^\mu$ som en vektor med koordinaterna v^μ i $T_p M$ med basvektorerna $\{\partial / \partial x^\mu\}$.

Hur skall vi nu beskriva det duala vektorrummet till $T_p M$. Tidigare såg vi att det duala vektorrummet utgörs av linjära avbildningar från $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$. En ledning får man genom att observera att $v^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \in \mathbb{R}$, det vill säga

$$\mathfrak{v}(f) = v^\mu \partial / \partial x^\mu (f) \in \mathbb{R}. \quad (5.15)$$

Vi skulle nu vara klara om vi kunde definiera en linjär avbildning

$$w(\mathfrak{v}) = v^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \quad (5.16)$$

Men denna blir automatiskt linjär vilket inses genom att sätta in $a\mathfrak{v}_1 + b\mathfrak{v}_2$ i höger- respektive vänster led. Det framgår även att w måste bero på f då högerledet gör det. Det enklaste valet vi nu kan göra är att definiera

$$w \equiv df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu \Leftrightarrow \quad (5.17)$$

$$df(\mathfrak{v}) = df \cdot \mathfrak{v} = v^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \quad (5.18)$$

Detta är alltså en linjär avbildning från $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$. En naturlig bas för w blir $\{dx^\mu\}$, vilket man ser genom att välja $df = dx^\mu \in \mathbb{V}$ och sätta in i definitionen ovan. Detta ger

$$df(\mathfrak{v}) = dx^\mu (\partial / \partial x^\nu) = \frac{dx^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (5.19)$$

vilket innebär att $\{dx^\mu\}$ är en dualbas. Vi kallar w en **en-form**.

Nu när vi har basen $\{dx^\mu\}$ kan vi skriva en godtycklig en-form som en linjärbildning $w = w_\mu dx^\mu$ samt

$$w(\mathfrak{v}) = w \cdot \mathfrak{v} = \langle w_\mu dx^\mu, v^\nu \partial / \partial x^\nu \rangle = w_\mu v^\nu \delta_\nu^\mu = w_\mu v^\mu \quad (5.20)$$

Den inre produkten måste vara oberoende av val av koordinatsystem. Betrakta två olika koordinatsystem för $p \in U_i \cap U_j$ med koordinatfunktionerna $\mathfrak{x} = \varphi_i(p)$ och $\mathfrak{y} = \varphi_j(p)$. Koordinatsystemen för $T_p^* M$ och $T_p M$ blir

$$\{dx^\mu\}, \quad \{\partial / \partial x^\mu\} \quad \text{respektive} \quad (5.21)$$

$$\{dy^\nu\}, \quad \{\partial / \partial y^\nu\} \quad (5.22)$$

Vi byter koordinatsystem

$$\varphi_i(p) \rightarrow \varphi_j(p) \Rightarrow \quad (5.23)$$

$$w = w_\mu dx^\mu = \tilde{w}_\mu dy^\mu \quad (5.24)$$

Låt nu w verka på $\partial/\partial y^\nu$. Vi får då från sambandet (5.24)

$$w_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} = \tilde{w} \delta_\nu^\mu = \tilde{w}_\nu \quad (5.25)$$

det vill säga vi har fått koordinaterna uttryckte i de gamla koordinaterna.

5.2.4 Vektorer och vektorfält

Antag att vi har en familj kartor på M med tillhörande koordinatsystem. Vi har nu definierat en glatt funktion $f : M \mapsto \mathbb{R}^m$ på varje koordinatomgivning U_i , dvs en glatt funktion i m koordinater till $\mathbb{R}$. Detta är en skalärfunktion (eller ett skalärfält). Man kan nu gå vidare och definiera ett vektorfält V på M med den geometriska tolkningen som en mängd pilar. V är en storhet som verkar på varje skalärfält f på M och som genererar ett nytt skalärfält.

Låt nu V verka på skalärfunktionen $f : V[f]$. Denna skall då ordna en vektor till varje punkt på M . Vi vet sedan tidigare att riktningensderivatan för en funktion (skalär) längs en viss riktning $(x^1, x^2, \dots, x^m)$ definierad av $x^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$ ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$). Detta ger oss en god ledning för definition och tolkning av vektorfält. Analogt kan vi nu definiera tensorfält.

5.2.5 Tensorfält

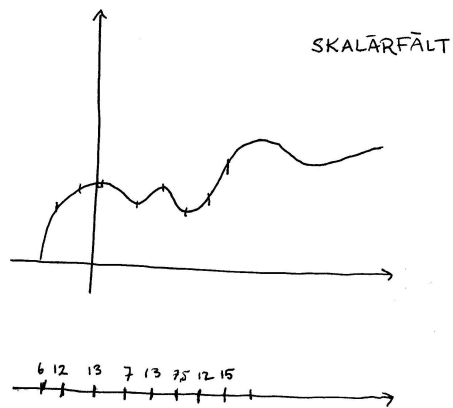
Precis som med skalärfält och vektorfält kan man bilda **tensorfält**. Ett skalärfält ger en skalär till varje punkt på vår mångfald - ett exempel på detta är en höjdkarta. Till varje punkt på jordytan ger den ett tal som anger till exempel hur högt över havet punkten befinner sig.

Definition 5.5. Ett **skalärfält** på ett område U är en distribution $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Ibland begränsar man sig till funktion enbart, och man kan tillåta komplexvärda distributioner också.

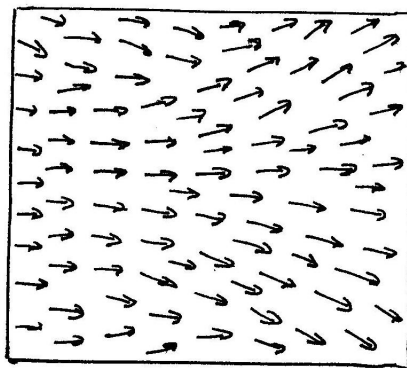
Analogt är ett vektorfält något som för varje punkt på en mångfald ger en vektor, vilket i linje med förklaringen av skalärfält ger oss exemplet radarbild vilken för varje punkt visar vindriktning och styrka med en pil.

Definition 5.6. Ett **vektorfält** på en mångfald M är en avbildning X som tilldelar varje punkt på mångfalden en vektor. $X : M \rightarrow T_p M, \forall p \in M$.

Viktigt att observera är att vi har inga krav på differentierbarhet. Ett k -gångs differentierbart vektorfält sägs till exempel vara ett C^k -vektorfält. Med detta sagt kommer vi härnäst enbart att beröra glatta tensorfält



Figur 5.8: Ett skalärfält. Lägg märke till att vi vanligtvis representerar det som en graf, men vi skulle lika gärna kunna skriva ett tal vid varje punkt på x-axeln



Figur 5.9: Exempel på vektorfält, detta skulle kunna vara vindstyrkan i en vindtunnel

vilka är definierade på en glatt mångfald. Ett tensorfält är något som för varje punkt på vår mångfald ger en tensor. Detta är mer generellt än vektorfält och skalärfält eftersom både skalärer och vektorer är specialfall av tensorer. Tensorer som ett geometriskt begrepp är oberoende av basrepresentationen, vilket vidare även gäller för tensorfält.

Definition 5.7. Ett **(k,l)-tensorfält** på en mångfald M är en avbildning T som tilldelar varje punkt på mångfalden en tensor. $T : M \rightarrow \otimes^k T_p M \otimes^l T_p M^*$

Om ett exempel på skalärfält är en höjdkarta och ett exempel på vektorfält är en radarbild över vindhastighet, finns det något trevligt geometriskt exempel på tensorfält?

Ett exempel på ett tensorfält är metriktensorfältet över en mångfald. [Anm. Alla mångfalder har inte en metrik, nu berör vi ett exempel på en mångfald som har det.] Metriktensorfältet visar hur avstånd varierar över mångfalden, och metriktensorfältet kan då visualiseras som ett exempel på hur mångfalden sträcks ut och dras ihop.

Vi representerar (k,l) -tensorfältet på M som $T_l^k(M)$. Det finns särskilt tre tensorfält av stor vikt, och det är $T_0^0(M) = \mathcal{F}(M)$ (mängden av alla glatta funktioner på M), $T_0^1(M) = TM$ (mängden av alla vektorfält på M) och $T_1^0 = \Omega^1$ (mängden av 1-former, det vill säga mängden av alla duala vektorfält).

Exempel 5.3. Låt $\delta_j^i(M)$ vara tensorfältet som för varje punkt på M ger oss Kroeneckers delta. Detta är ett $(1,1)$ -tensorfält. Vi vet att en $(1,1)$ -tensor omvandlar en vektor till en annan vektor ⁴, låt oss utforska hur detta tensorfältet transformerar vektorer. $\delta_j^i(M)$ kommer i varje punkt på M att ha n^2 element, med $n = \dim(T_p M)$. Om vi sätter dessa element i en matris ser vi att det är identitetsmatrisen, alltså är detta identitetstransformationen.

5.2.6 Inducerade avbildningar

En glatt funktion $f : M \rightarrow N$ inducerar en annan funktion $f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ som kallas **differentialavbildningen**. Frågan är nu hur f_* egentligen ser ut?

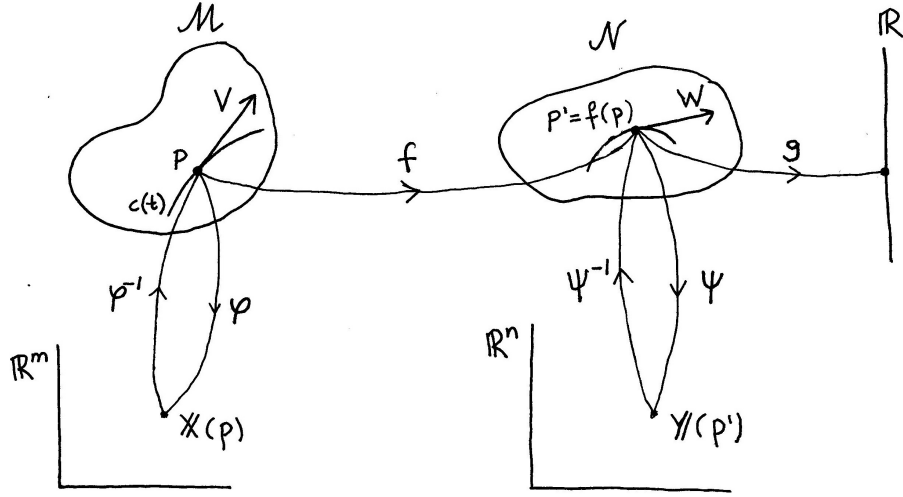
För att få fram detta kan vi studera hur en vektor på $T_p M$ transformeras. Det är naturligt att välja vektorn som en riktningsderivata

$$X^\mu \partial / \partial x^\mu \equiv V \quad (5.26)$$

(basen är alltså $\partial / \partial x^\mu \equiv e_\mu$).

Vi skall alltså undersöka

$$f_* V = W \in T_{f(p)} N \quad (5.27)$$



Figur 5.10: Inducerad avbildning: $f^*V = W$

Vi behöver en skalär funktion som V och W verkar på. Inför därför $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ som därmed definierar skalärfunktionen $g \circ f$ från $M \rightarrow \mathbb{R}$. V och W kan nu verka på dessa skalärfunktioner. Från figur 5.10 har vi att

$$f(\varphi^{-1}(x)) = \psi^{-1}(y). \quad (5.28)$$

Låt nu $f_*(\mathbb{V}) = W$ verka på g

$$f_*(\mathbb{V})[g \circ \psi^{-1}(y)] = \mathbb{V}[g \circ f \circ \varphi^{-1}(x)]. \quad (5.29)$$

Vänsterledet kan skrivas som

$$f_*(\mathbb{V})[g \circ \psi^{-1}(y)] = W^\mu \partial / \partial y^\mu [g \circ \psi^{-1}(y)]. \quad (5.30)$$

eller förkortat

$$f_*\mathbb{V} = W^\alpha \partial / \partial y^\alpha. \quad (5.31)$$

På motsvarande sätt har vi för högerledet

$$\mathbb{V}[g \circ f \circ \varphi^{-1}(x)] = V^\mu \partial / \partial x^\mu [g \circ f \circ \varphi^{-1}(x)]. \quad (5.32)$$

vilket förkortad skrivs

$$\mathbb{V} = V^\mu \partial / \partial x^\mu. \quad (5.33)$$

⁴Se kapitel 2

Nu har vi fått

$$W^\mu \partial / \partial y^\mu [g \circ \psi^{-1}(y)] = V^\mu \partial / \partial x^\mu [g \circ f \circ \varphi^{-1}(x)]. \quad (5.34)$$

Observera att $g \circ \psi^{-1}(y)$ betyder g uttryckt i koordinater. g kan vi välja hur vi vill och vi väljer den nu till att vara just en av y 's koordinater, säg $g = y^\alpha$, vilket ger

$$\text{V.L: } W^\alpha \partial y^\alpha / \partial y^\alpha = W^\alpha \quad (5.35)$$

$$\text{H.L: } V^\mu \partial y^\alpha / \partial x^\mu \Leftrightarrow W^\alpha = V^\mu \frac{\partial y^\alpha(x)}{\partial x^\mu} \quad (5.36)$$

Notera att $\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}$ är en Jakobian.

Pullback

En generell teknik som är användbar vid två avbildningar $\mathbb{V} \xrightarrow{f} \mathbb{W} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $\mathbb{V}$ och $\mathbb{W}$ är här vektorrum och f och g linjära avbildningar. Låt $g : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en linjär funktion på $\mathbb{W}$, det vill säga $g \in \mathbb{W}^*$. Då både f och g linjära, blir även sammansättningen $g \circ f$ en linjär funktion på $\mathbb{V}$ ($g \circ f \in \mathbb{V}^*$) och vi kallar den $h = g \circ f$. Men andra ord: givet en funktion $g \in \mathbb{W}^*$ har avbildningen f inducerat en avbildning $h \in \mathbb{V}^*$. Vi har alltså fått en avbildning

$$f^* : \mathbb{W}^* \rightarrow \mathbb{V}^* , \quad f^*(g) = h \quad (5.37)$$

h kallas för **pullback** av g genom f^* . Observera riktningarna:

$$\mathbb{V} \xrightarrow{f} \mathbb{W} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \quad (5.38)$$

$$\mathbb{V}^* \leftarrow \mathbb{W}^* \quad (5.39)$$

$$(g \circ f) \xleftarrow{f^*} g \quad (5.40)$$

5.3 Flöden och Liederivatan

En kurva genom en punkt $p \in M$ definieras som tidigare som en avbildning från $I_{ab} \in \mathbb{R}$:

$$I_{ab} \xrightarrow{c} M \quad (5.41)$$

där $0 \in I_{ab}$ och $c(0) = p$. Man kan då tillordna varje punkt på kurvan $c(t)$ en tangentvektor $\frac{dc(t)}{dt} = c'(t)$. Vi kan nu definiera och studera en kurva som går "längs" ett vektorfält $\tilde{X}$, dvs kurvans tangent pekar hela tiden i vektorfältets $\tilde{X}$'s riktning.

Definition 5.8 (Integralkurva). Låt M vara en mångfald och $\tilde{X} \in X(M)$ vara ett vektorfält på M . En **integralkurva** genom $p \in M$ är en kurva genom punkten p sådan att $c'(t) = \tilde{X}(c(t))$, $\forall t \in I_{ab}$. Speciellt är $c(0) = p$.

Vidare gäller det att uttrycka en integralkurva i ett lokalt koordinat-system. Antag att $\dim M = m$ och inför ett lokalt koordinatsystem på en karta (U, φ) , $p \in U$:

$$\varphi(p) \rightarrow \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \quad (5.42)$$

Vi kan nu skriva kurvan $c(t)$:

$$c(t) \rightarrow (x^1(t), \dots, x^m(t)) = \mathbf{x}(t) \quad (5.43)$$

$$p \rightarrow c(0) \rightarrow (x_0^1, \dots, x_0^m) = \mathbf{x}_0 \quad (5.44)$$

och uttrycka i basvektorerna

$$\{\mathbf{e}_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\} \text{ dvs} \quad (5.45)$$

$$\tilde{X} = \tilde{X}^1 \mathbf{e}_1 + \dots + \tilde{X}^m \mathbf{e}_m = \tilde{X}^\mu \mathbf{e}_\mu \quad (5.46)$$

Observera att varje komponent $\tilde{X}^\mu$ i allmänhet är en funktion av $(x^1, \dots, x^m)$. Vi skriver

$$\tilde{X} = X^\mu(x^1(t), \dots, x^m(t)) \mathbf{e}_\mu \quad (5.47)$$

men vi ser att själva $\tilde{X}$ är oberoende av t . Vi kan nu skriva en integralkurva på ett mer användbart sätt:

$$c'(t) = \tilde{X}(c(t)) \quad (5.48)$$

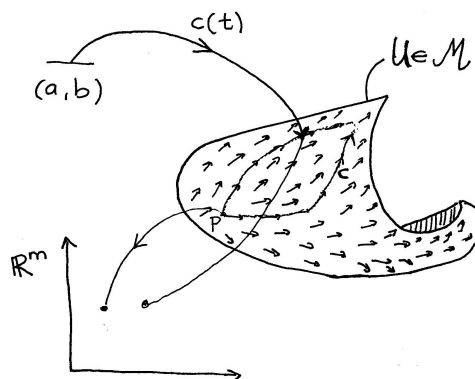
och på komponentform

$$\begin{aligned} \frac{dx^1(t)}{dt} &= \tilde{X}^1(x^1(t), \dots, x^m(t)) \\ &\vdots \\ \frac{dx^m(t)}{dt} &= \tilde{X}^m(x^1(t), \dots, x^m(t)) \end{aligned} \quad (5.49)$$

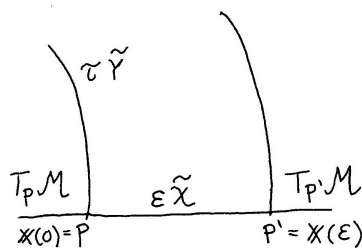
$$(5.50)$$

Detta är som känt ett system av ordinära differentialekvationer vilket har en entydig lösning med $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ som begynnelsevillkor. En uppsättning av sådana integralkurvor för olika begynnelsevillkor dvs genom olika punkter $\mathbf{x}_0$ kallas för ett flöde och betecknas $\sigma(t, \mathbf{x}_0)$. Ovanstående ekvationssystem kan skrivas kortfattat som

$$\frac{dx^\mu}{dt} = \tilde{X}^\mu(\mathbf{x}(t)) \quad (5.51)$$



Figur 5.11: Ett vektorfält som beskriver ett flöde på en karta $U \in M$. För varje givet begynnelsevärde fås en integralkurva vilken bestäms av vektorfältet. Notera att $t = 0$ avbildas på p .



Figur 5.12: En infinitesimal tidsutveckling läng $\tilde{X}$

Härledning av Liederivatan

Liederivatan är en operation som anger hur en viss storhet, säg Q på en mångfald M varierar längs ett vektorfält $\tilde{X}$, dvs längs en integralkurva vilken är bestämd av vektorfältet. Man betecknar liederivatan med $\mathcal{L}_{\tilde{X}}Q$. Vi ska nu se hur $\mathcal{L}_{\tilde{X}}Q$ ser ut då Q är ett annat vektorfält $\tilde{Y}$. En intressant egenskap som liederivatan $\mathcal{L}_{\tilde{X}}\tilde{Y}$ har att denna i sin tur bildar ett nytt vektorfält.

Det gäller att studera hur ett vektorfält $\tilde{Y}$ förändras från en punkt p till en annan punkt p' då den färdas längs ett annat vektorfält $\tilde{X}$ eller rättare sagt längs $\tilde{X}$'s flöde genom p till p' . Notera att vektorfälten alltid ligger i tangentplanet $T_p M$ för varje punkt.

Vi inför koordinaterna $p = x(0)$. Då vi rör oss längs $\tilde{X}$, se figur 5.12, får

vi för en infinitesimal tidsutveckling $t = \epsilon$

$$p' = \mathbf{x}(\epsilon) = \mathbf{x}(0) + \epsilon \tilde{X} = \mathbf{x}' \quad (5.52)$$

Nu skall vi undersöka hur $\tilde{Y}$ förändras från $\tilde{Y}(p)$ till $\tilde{Y}(p')$ längs $\tilde{X}$. Vi skall alltså bestämma $\tilde{Y}(\mathbf{x}) \rightarrow \tilde{Y}(\mathbf{x} + \epsilon \tilde{X})$ i p' . Observera att $\tilde{Y}(p')$ blir uttryckt i $T_{p'}M$. Eftersom $\tilde{Y}$ är differentierbar kan vi approximera $\tilde{Y}(\mathbf{x} + \epsilon \tilde{X})$ med $\tilde{Y}(\mathbf{x}) + \epsilon d\tilde{Y} \cdot \tilde{X}$ där $d\tilde{Y} \cdot \tilde{X}$ betecknar riktningsderivatan av $\tilde{Y}$ längs $\tilde{X}$. Mer precist blir detta uttryckt på komponentform

$$\tilde{Y}^\mu(\mathbf{x}') = \tilde{Y}^\mu(\mathbf{x}) + \epsilon \tilde{X}^\nu \cdot \left. \frac{\partial \tilde{Y}^\mu}{\partial x^\nu} \right|_{\mathbf{x} + \epsilon \tilde{X}} \quad (5.53)$$

vilken då är μ -komponenten för $e_\mu \in T_{p'}M$. Ett problem vi har nu är att $\tilde{Y}(p')$ (i andra termen) är uttryckt i ett annat koordinatsystem än det vi hade i punkten p där $\tilde{Y}(p)$ var uttryckt i basen som ligger i T_pM . För att lösa detta skall vi använda en avbildning $T_{p'}M \rightarrow T_pM$, där $p' = \mathbf{x} + \epsilon \tilde{X} = \mathbf{x}'$. Vi skriver detta istället som $\mathbf{x} = \mathbf{x}' - \epsilon \tilde{X}$ där $\mathbf{x}'$ är de "gamla" koordinaterna och $\mathbf{x}$ är de "nya". På komponentform har vi alltså avbildningen $x^\mu \rightarrow x^\mu - \epsilon \tilde{X}^\mu$ i basen $e_\mu = \partial/\partial x^\mu$. Vi får sambandet

$$\left. \frac{\partial \tilde{Y}^\nu}{\partial x^\mu} \right|_{\mathbf{x} + \epsilon \tilde{X}} \partial/\partial x^\nu = \frac{\partial(x^\nu - \epsilon \tilde{X}^\nu)}{\partial x^\mu} \partial/\partial x^\nu = \left[\delta_\mu^\nu - \epsilon \frac{\partial \tilde{X}^\nu(\mathbf{x})}{\partial x^\mu} \right] \partial/\partial x^\nu. \quad (5.54)$$

Detta insättes nu i (5.53) vilket ger

$$\left[\tilde{Y}^\mu(\mathbf{x}) + \epsilon \tilde{X}^\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{Y}^\mu(\mathbf{x})}{\partial x^\rho} \right] \left[\delta_\mu^\nu - \epsilon \frac{\partial \tilde{X}^\nu(\mathbf{x})}{\partial x^\mu} \right] \partial/\partial x^\nu \quad (5.55)$$

Vi multiplicerar ihop termerna, noterar att $\epsilon \tilde{X}^\rho \frac{\partial \tilde{Y}^\mu}{\partial x^\rho} \delta_\mu^\nu = \epsilon \tilde{X}^\rho \frac{\partial \tilde{Y}^\nu}{\partial x^\rho}$ och byter ut ρ mot μ för att få på komponentform

$$\tilde{Y}^\mu + \epsilon \left[\tilde{X}^\mu \frac{\partial \tilde{Y}^\nu}{\partial x^\mu} - \tilde{Y}^\mu \frac{\partial \tilde{X}^\nu}{\partial x^\mu} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.56)$$

Nu kan vi beräkna skillnaden mellan $\tilde{Y}^\mu(\mathbf{x}')$ och $\tilde{Y}^\mu(\mathbf{x})$ för en infinitesimal förflyttning

$$\frac{1}{\epsilon} \left[\tilde{Y}^\mu(\mathbf{x}') - \tilde{Y}^\mu(\mathbf{x}) \right] = \tilde{X}^\mu \frac{\partial \tilde{Y}^\nu}{\partial x^\mu} - \tilde{Y}^\mu \frac{\partial \tilde{X}^\nu}{\partial x^\mu} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (5.57)$$

Om vi låter ϵ gå mot noll, så får vi exakt **liederivatan**, vilken skrivs

$$\mathcal{L}_{\tilde{X}} \tilde{Y} = (\tilde{X}^\mu \partial_\mu \tilde{Y}^\nu - \tilde{Y}^\mu \partial_\mu \tilde{X}^\nu) e_\nu \quad (5.58)$$

där $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$.

5.3.1 Regler och samband för Liederivatan

Liederivatan kan enklast skrivas som

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = [\tilde{X}, \tilde{Y}]f = \tilde{X} [\tilde{Y}[f]] - \tilde{Y} [\tilde{X}[f]] \quad (5.59)$$

där $\tilde{Y}[f]$ och $\tilde{X}[f]$ alltså är skalära funktioner. Detta visas enkelt om vi skriver

$$\tilde{X} = \tilde{X}^\mu \partial / \partial x^\mu \quad (5.60)$$

$$\tilde{Y} = \tilde{Y}^\mu \partial / \partial x^\mu \quad (5.61)$$

Låt nu $\tilde{X}$ verka på $\tilde{Y}[f]$ och vice versa:

$$\begin{aligned} \tilde{X} [\tilde{Y}[f]] &= \tilde{X}^\mu \partial / \partial x^\mu [\tilde{Y}^\nu \partial f / \partial x^\nu] \\ \tilde{Y} [\tilde{X}[f]] &= \tilde{Y}^\mu \partial / \partial x^\mu [\tilde{X}^\nu \partial f / \partial x^\nu] \\ \Rightarrow [\tilde{X}, \tilde{Y}]f &= \tilde{X}^\mu \frac{\partial \tilde{Y}^\nu}{\partial x^\mu} \partial f / \partial x^\nu + \tilde{X}^\mu \tilde{Y}^\nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \tilde{Y}^\mu \frac{\partial \tilde{X}^\nu}{\partial x^\mu} - \tilde{X}^\mu \tilde{Y}^\nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \\ &= \left(\tilde{X}^\mu \frac{\partial \tilde{Y}^\nu}{\partial x^\mu} - \tilde{Y}^\mu \frac{\partial \tilde{X}^\nu}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \end{aligned} \quad (5.62)$$

Härav ser vi att Liederivatan är ett vektorfält med koordinaterna

$$\tilde{X}^\mu \frac{\partial \tilde{Y}^\nu}{\partial x^\mu} - \tilde{Y}^\mu \frac{\partial \tilde{X}^\nu}{\partial x^\mu} \quad (5.63)$$

i en bas $e_\nu = \frac{\partial f}{\partial x^\nu}$. För ett godtyckligt vektorfält gäller att

$$\tilde{X}[hk] = h\tilde{X}[k] + \tilde{X}[h]k$$

där h och k är funktioner. Alltså differentierar $\tilde{X}$ den funktion man låter den verka på.

Exempel 5.4.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{f\tilde{X}} \tilde{Y} &= [f\tilde{X}, \tilde{Y}] = f\tilde{X} [\tilde{Y}] - \tilde{Y} [f(\tilde{X})] = \\ &= f\tilde{X}[\tilde{Y}] - f\tilde{Y}[\tilde{X}] - \tilde{Y}[f][\tilde{X}] = f[\tilde{X}, \tilde{Y}] - \tilde{Y}(f)[\tilde{X}] \end{aligned} \quad (5.64)$$

Här har regeln för differentiering av produkt använts.

Exempel 5.5.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{X}}[f\tilde{Y}] &= [\tilde{X}, f\tilde{Y}] = \tilde{X}[f\tilde{Y}] - f\tilde{Y} [\tilde{X}] = \\ &= f\tilde{X}[\tilde{Y}] + \tilde{X}[f]\tilde{Y} - [\tilde{Y}[\tilde{X}]] = f[\tilde{X}, \tilde{Y}] + \tilde{X}[f]\tilde{Y} \end{aligned} \quad (5.65)$$

Själva formen på liederivatan

$$\mathcal{L}_{\tilde{X}}\tilde{Y} = (X^\mu\partial_\mu\tilde{Y} - \tilde{Y}\partial_\mu\tilde{X})\partial/\partial x^\mu \quad (5.66)$$

visar att den i sin tur genererar ett vektorfält. Vi skall nu ge några enkla regler och samband för Liederivatan. Vi börjar med att bilda $\mathcal{L}_X f$ där f är en vanlig skalärfunktion. $\mathcal{L}_X f$ bör betyda hur f förändras då man förflyttar f från p längs $\tilde{X}$ (dvs längs en integralkurva). Vi kan som tidigare skriva detta som

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [f(\mathbf{x} + \epsilon\tilde{X}(x)) - f(\mathbf{x})] = \tilde{X}[f] = df \cdot \tilde{X} \quad (5.67)$$

vilket är detsamma som riktningsderivatan av f längs $\tilde{X}$ vilken även skrivs $\langle df, \tilde{X} \rangle$. Vi har nu fått det första sambandet för Liederivatan

$$\mathcal{L}_{\tilde{X}}f = \tilde{X}[f] \quad (5.68)$$

Detta kan vi nu använda för att teckna för en speciell skalärfunktion som är en skalärprodukt, nämligen

$$\langle w, \tilde{Y} \rangle \quad (5.69)$$

vilket är skalärprodukten mellan enformen w och vektorfältet $\tilde{Y}$. Vi bildar

$$\mathcal{L}_{\tilde{X}}\langle w, \tilde{Y} \rangle \quad (5.70)$$

och nu gäller alltså

$$\mathcal{L}_{\tilde{X}}\langle w, \tilde{Y} \rangle = \tilde{X}\langle w, \tilde{Y} \rangle \quad (5.71)$$

enligt samband (5.68). Då $\mathcal{L}_{\tilde{X}}$ är ett vektorfält är det naturligt att kunna definiera $\mathcal{L}_{\tilde{X}}w$ så att vi har likheten

$$\mathcal{L}_{\tilde{X}}\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle = \langle \mathcal{L}_{\tilde{X}}w, \tilde{Y} \rangle + \langle w, \mathcal{L}_{\tilde{X}}\tilde{Y} \rangle \quad (5.72)$$

enligt differentiering av skalärprodukt och med (5.71) har vi detta ekvivalent med

$$\langle \mathcal{L}_{\tilde{X}}w, \tilde{Y} \rangle = \tilde{X}\langle w, \tilde{Y} \rangle - \langle w, \mathcal{L}_{\tilde{X}}\tilde{Y} \rangle \quad (5.73)$$

Vänsterled innehåller uttrycket $\mathcal{L}_{\tilde{X}}w$ som vi nu vill definiera så att vi får V.L.=H.L. $\mathcal{L}_{\tilde{X}}w$ är extra instressant eftersom den tolkas som liederivatan på en dualvektor. Denna likhet skall gälla för godtyckliga vektorfält $\tilde{Y}$ eftersom $\mathcal{L}_{\tilde{X}}w$ måste vara oberoende av $\tilde{Y}$. Vi väljer därför $\tilde{Y}$ konstant, dvs oberoende av x

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{Y}^\nu}{\partial x^\mu} = 0, \quad \forall \nu, \mu \quad (5.74)$$

Vidare ger detta

$$\begin{aligned}\tilde{X}\langle w, \tilde{Y} \rangle &= \tilde{X}(w_\mu \tilde{Y}^\mu) = \tilde{X}^\nu \frac{\partial(w_\mu \tilde{Y}^\mu)}{\partial x^\nu} = \\ &= \tilde{X}^\nu \tilde{Y}^\mu \frac{\partial w_\mu}{\partial x^\nu} = \left(\frac{\partial w_\mu}{\partial x^\nu} \tilde{X}^\nu \right) \tilde{Y}^\mu\end{aligned}\quad (5.75)$$

eftersom alla partiella derivator av $\tilde{Y}^\nu$ försvinner. Det kvarstår då termen

$$\langle w, \mathcal{L}_X \tilde{Y} \rangle = \{ \tilde{Y} \text{konstant} \} = \langle w, \tilde{X}[\tilde{Y}] - \tilde{Y}[\tilde{X}] \rangle = \langle w, \tilde{X}[\tilde{Y}] \rangle - \langle w, \tilde{Y}[\tilde{X}] \rangle \quad (5.76)$$

Nu skriver vi $\tilde{Y}[\tilde{X}]$ på indexform:

$$\tilde{Y}[\tilde{X}] = [\tilde{Y}^\mu \partial / \partial x^\mu][\tilde{X}^\nu \partial / \partial x^\nu] = \tilde{Y}^\mu \frac{\partial \tilde{X}^\nu}{\partial x^\mu} \cdot \partial / \partial x^\nu + \tilde{Y}^\mu \tilde{X}^\nu \partial^2 / \partial x^\mu \partial x^\nu \quad (5.77)$$

Helt analogt får vi

$$\begin{aligned}\tilde{X}[\tilde{Y}] &= \tilde{X}^\mu \frac{\partial \tilde{Y}^\nu}{\partial x^\mu} \partial / \partial x^\nu + \tilde{X}^\mu \tilde{Y}^\nu \partial^2 / \partial x^\mu \partial x^\nu = \{ \tilde{Y} \text{konstant} \} = \\ &= \tilde{X}^\mu \tilde{Y}^\nu \partial^2 / \partial x^\mu \partial x^\nu\end{aligned}\quad (5.78)$$

Vi har då att

$$\begin{aligned}\tilde{X}[\tilde{Y}] - \tilde{Y}[\tilde{X}] &= \tilde{X}^\mu \tilde{Y}^\nu \partial^2 / \partial x^\mu \partial x^\nu - \left[\tilde{Y}^\mu \frac{\partial \tilde{X}^\nu}{\partial x^\mu} \cdot \partial / \partial x^\nu + \tilde{Y}^\mu \tilde{X}^\nu \cdot \partial^2 / \partial x^\mu \partial x^\nu \right] = \\ &= -\tilde{Y}^\mu \frac{\partial \tilde{X}^\nu}{\partial x^\mu} \partial / \partial x^\nu\end{aligned}\quad (5.79)$$

Sammantaget har vi nu:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}_X w, \tilde{Y} \rangle &= \left(\frac{\partial w_\mu}{\partial x^\nu} \cdot \tilde{X}^\nu \right) \tilde{Y}^\mu + \langle w, \tilde{Y}^\mu \frac{\partial \tilde{X}^\nu}{\partial x^\mu} \rangle = \\ &= \left(\frac{\partial w^\mu}{\partial x^\nu} \tilde{X}^\nu \right) \tilde{Y}^\mu + w^\mu \tilde{Y}^\mu \frac{\partial \tilde{X}^\nu}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial w_\mu}{\partial x^\nu} \tilde{X}^\nu + w^\mu \frac{\partial \tilde{X}^\nu}{\partial x^\mu} \right) \tilde{Y}^\mu\end{aligned}\quad (5.80)$$

Då $\mathcal{L}_X w$ i skalärprodukten måste tillhöra dualrummet måste det gälla att

$$\mathcal{L}_X w = \frac{\partial w^\mu}{\partial x^\nu} \tilde{X}^\nu + w^\mu \frac{\partial \tilde{X}^\nu}{\partial x^\mu} \quad (5.81)$$

Vi kan skriva upp Jacobiidentiteten för Liederivator

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0 \quad (5.82)$$

Jacobiidentiteten för Liederivator. Det finns 6 permutationer av X, Y och Z . Betrakta en godtycklig, exempelvis $[X][Y][Z]$. Från $[[X, Y], Z]$ har vi $[X][Y][Z]$ och från $[[Y, Z], X]$ har vi $-[X][Y][Z]$. Några fler termer med denna permutation finns inte, vilket ger oss ett nollbidrag. På grund av total symmetri med avseende på alla permutationer av X, Y och Z måste alla termer försvinna. $\square$

5.3.2 Geometrisk tolkning av Liederivatan

I en mångfald som är ett euklidiskt rum kan man flytta en vektor längs en godtycklig linje utan att vektorn förändras, vilket bland annat beror på att vi kan ha samma basvektorer, det vill säga samma koordinatsystem över hela rummet. Detta är något som vi sett ej fungerar för en generell mångfald. Vi är istället tvungna att arbeta med lokala koordinatsystem på varje karta (U_i, φ_i) vilket ju vidare betyder att basvektorernas riktning förändras från punkt till punkt på mångfalden. Det vi vill undersöka är något som är analogt med en förflyttning enligt ett **parallelogram** enligt den vanliga vektoralgebran.

Om vi har två vektorfält definierade på M är det naturligt att röra sig utmed de linjer som integralkurvorna bildar, dvs utmed vektorfältets riktningar. Det gäller alltså att undersöka vad som händer i en motsvarighet till parallelogram då vi rör oss längs med dessa vektorfält. Vi utför en parallellförflyttning längs integralkurvorna:

Vi börjar i en punkt $\mathbf{x}_0$ och jämför två vägar: först rör vi oss längs med vektorfältet $\tilde{X}$ till punkten $\mathbf{x}_1$. Vägen som har förflyttats betecknar vi $\epsilon\tilde{X}$. Nu förflyttas vi vidare till punkten $\mathbf{x}_2$ av vektorfältet $\tilde{Y}$ och denna väg betecknar vi med $\delta\tilde{Y}$. Nu gör vi hela förflyttningen fast i omvänd ordning: Först låter vi vektorfältet $\tilde{Y}$ förflytta oss till en punkt $\mathbf{x}_3$ via vägen $\delta'\tilde{Y}$ för att sedan transporteras av $\tilde{X}$ till $\mathbf{x}_4$ längs vägen $\epsilon'\tilde{X}$. Som vi ser i figur 5.14 sluts inte detta "parallelogram". Detta beror, som tidigare nämnts, på att basvektorerna förändras då vi förflyttar oss på mångfalden.

För att få lite enklare beteckningar på detta skriver vi en kort repetition av tidigare stycken:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, f \text{ differentierbar} \quad (5.83)$$

Vi har då i en omgivning till $\mathbf{u}$

$$f(\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{e}) \simeq f(\mathbf{u}) + \epsilon Df(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{e} \quad (5.84)$$

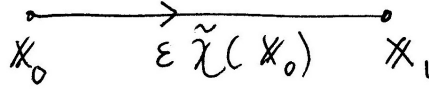
där $Df(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}$ är riktningsderivatan för $\mathbf{e} = x^1 \mathbf{e}_1 + \dots + x^n \mathbf{e}_n$ och $f(\mathbf{u})$ på komponentform:

$$f^\nu(\mathbf{u}) \equiv f^1(\mathbf{u})_\nu f^m(\mathbf{u}) \quad (5.85)$$

Detta blir helt analogt på till exempel vektorfältet $\tilde{Y}(\mathbf{x}_0)$ längs vektorn $\tilde{X}(\mathbf{x}_0) = \tilde{X}^1 \mathbf{e}_1 + \dots + \tilde{X}^n \mathbf{e}_n$ som alltså bestäms av $\tilde{X}(\mathbf{x})$. Vi har

$$\tilde{Y}(\mathbf{x}_0 + \epsilon \tilde{X}(\mathbf{x}_0)) \simeq \tilde{Y}(\mathbf{x}_0) + \epsilon D\tilde{Y}(\mathbf{x}_0) \cdot \tilde{X}(\mathbf{x}_0) \text{ och helt analogt} \quad (5.86)$$

$$\tilde{X}(\mathbf{x}_0 + \delta \tilde{Y}(\mathbf{x}_0)) \simeq \tilde{X}(\mathbf{x}_0) + \delta D\tilde{X}(\mathbf{x}_0) \cdot \tilde{Y}(\mathbf{x}_0) \quad (5.87)$$



Figur 5.13: Bild till avsnitt Steg 1

Steg 1

Studera nu en integralkurva $\mathbf{x}(t)$ genom en punkt $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ i ett lokalt koordinatsystem på mångfalden M med avseende på ett vektorfält $\tilde{X}(\mathbf{x})$. För små ϵ kan man då skriva

$$\mathbf{x}_1(\epsilon) = \mathbf{x}(0) + \epsilon \frac{d\mathbf{x}}{dt}\bigg|_{t=0} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.88)$$

Nu är $\mathbf{x}(t)$ en integralkurva, dvs riktad längs ett vektorfält $\tilde{X}(\mathbf{x})$ i punkten $\mathbf{x}_0$. Detta ger oss

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}\bigg|_{t=0} = \tilde{X}(\mathbf{x}_0) \quad (5.89)$$

enligt definition. Vi ser även från figur 5.13 att

$$\Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \epsilon \tilde{X}(\mathbf{x}_0) \quad (5.90)$$

Steg 2

Nu undersöker vi geometrin när man bildar motsvarigheten till parallelogram. De två riktningarna i parallelogrammet kan då definieras med avseende på två olika vektorfält, utgående från punkten $\mathbf{x}_0$. Se figur 5.14. Vi går två vägar

$$\text{Väg 1: } \mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2 \quad (5.91)$$

$$\text{Väg 2: } \mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4 \quad (5.92)$$

och bildar skillnaden $(\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2)$ som blir ett mått på hur stort "gapet" i det ofullständiga parallelogrammet blir. Väg 1: Först går vi från $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1$. Enligt (5.90) ovan har vi

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \epsilon \tilde{X}(\mathbf{x}_0)$$

Därefter $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2$ längs $\tilde{Y}(\mathbf{x}_1)$, dvs $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \delta \tilde{Y}(\mathbf{x}_1)$. Sätt in $\mathbf{x}_1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_0 + \epsilon \tilde{Y}(\mathbf{x}_0) + \delta \tilde{Y}[\mathbf{x}_0 + \epsilon \tilde{X}(\mathbf{x}_0)] = \{\text{enligt (5.86) ovan}\} = \\ &= \mathbf{x}_0 + \epsilon \tilde{X}(\mathbf{x}_0) + \delta[\tilde{Y}(\mathbf{x}_0) + \epsilon D\tilde{Y}(\mathbf{x}_0) \cdot \tilde{X}(\mathbf{x}_0)] \end{aligned} \quad (5.93)$$

Vi har nu fått

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_0 + \epsilon \tilde{X}(\mathbf{x}_0) + \delta \tilde{Y}(\mathbf{x}_0) + \delta \epsilon D\tilde{Y}(\mathbf{x}_0) \cdot \tilde{X}(\mathbf{x}_0) \quad (5.94)$$

Väg 2: Först går vi $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_3$. analogt med (5.90) har vi $\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_0 + \delta \tilde{Y}(\mathbf{x}_0)$ längs $\tilde{Y}(\mathbf{x}_0)$. Därefter $\mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4$ längs $\tilde{X}(\mathbf{x}_3)$.

$$\mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_3 + \epsilon \tilde{X}(\mathbf{x}_3) \quad (5.95)$$

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_0 + \delta \tilde{Y}(\mathbf{x}_0) \quad (5.96)$$

insättes i

$$\mathbf{x}_0 + \delta \tilde{Y}(\mathbf{x}_0) + \epsilon [\tilde{X}(\mathbf{x}_0 + \delta \tilde{Y}(\mathbf{x}_0))] \Rightarrow \quad (5.97)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_4 &= \mathbf{x}_0 + \delta \tilde{Y}(\mathbf{x}_0) + \epsilon [\tilde{X}(\mathbf{x}_0) + \delta D\tilde{X}(\mathbf{x}_0) \cdot \tilde{Y}(\mathbf{x}_0)] = \\ &= \mathbf{x}_0 + \delta \tilde{Y}(\mathbf{x}_0) + \epsilon \tilde{X}(\mathbf{x}_0) + \epsilon \delta D\tilde{X}(\mathbf{x}_0) \cdot \tilde{Y}(\mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (5.98)$$

Bilda nu skillnaden ($\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4$)

$$\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4 = \epsilon \delta [D\tilde{Y}(\mathbf{x}_0) \cdot \tilde{X}(\mathbf{x}_0) - D\tilde{X}(\mathbf{x}_0) \cdot \tilde{Y}(\mathbf{x}_0)] \quad (5.99)$$

Vi har nu fått Liederivatan innanför hakparenteserna i (5.99)

$$(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4) = D\tilde{Y}(\mathbf{x}_0) \cdot \tilde{X}(\mathbf{x}_0) - D\tilde{X}(\mathbf{x}_0) \cdot \tilde{Y}(\mathbf{x}_0) \quad (5.100)$$

eller på komponentform

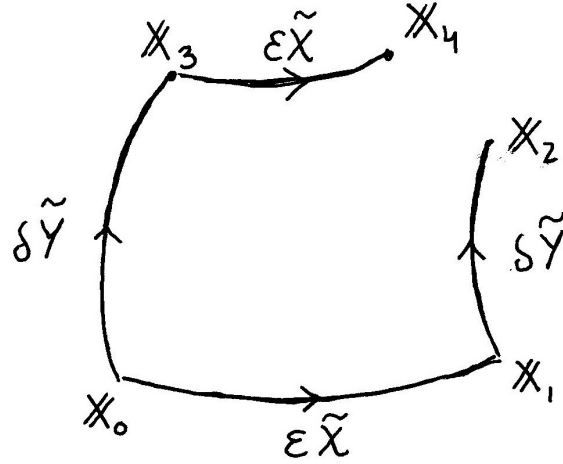
$$\left(\frac{\partial \tilde{Y}^\nu}{\partial x^\mu} \cdot \tilde{X}^\mu - \frac{\partial \tilde{X}^\nu}{\partial x^\mu} \cdot \tilde{Y}^\mu \right) (\mathbf{x}_0) \quad (5.101)$$

Skillnaden mellan punkterna $\mathbf{x}_4$ och $\mathbf{x}_2$ fås alltså direkt ur Liederivatan. Denna skillnad beror på att $D\tilde{X} \cdot \tilde{Y}$ och $D\tilde{Y} \cdot \tilde{X}$ inte kommuterar och skillnaden blir av storleksordning $\mathcal{O}(\epsilon\delta) = \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

5.4 Differentialformer och integration av mångfalder

5.4.1 Inledning till differentialformer

Vårt mål är nu att konstruera en motsvarighet till integralen i ett $\mathbb{R}^n$ -rum som gäller för allmänna mångfalder. Den enklaste och endimensionella integralen skriver man som $\int_\gamma f(x)dx$ där kurvan γ är en endimensionell mångfald och x en reelvärd variabel. Vi kallar nu $f(x)dx$ en 1-form. Från analysen vet vi att ett variabelbyta $x \rightarrow x'$ lämnar $f(x')dx'$ oförändrad i bemärkelsen



Figur 5.14: Liederivatans motsvarighet till parallelogram

att $\int_{\gamma} f(x')dx'$ ger samma resultat efter variabelbytet. Från analysen i $\mathbb{R}^3$ har vi några mer allmänna integralformer

$$\int (A_x dx + B_y dy + C_z dz) \quad (5.102)$$

en linjeintegral med 1-formen $Adx + Bdy + Cdz$ (A , B och C i allmänhet glatta funktioner i x , y respektive z), samt ytintegraler av typ

$$\iint (P_{yz} dydz + Q_{zx} dzdx + R_{xy} dxdy) \quad (5.103)$$

Vi kallar $P_{yz} dydz + Q_{zx} dzdx + R_{xy} dxdy$ för en 2-form. I $\mathbb{R}^3$ har vi slutligen volymintegralen

$$\iiint G_{xyz} dxdydz \quad (5.104)$$

med 3-formen $G_{xyz} dxdydz$. Man kan lite förenklat betrakta $\{dx, dy, dz\}$ som en bas för en 1-form och analogt $\{dydz, dzdx, dxdy\}$ som basen för en 2-form samt $\{dxdydz\}$ som basen för en 3-form i $\mathbb{R}^3$. Dimensionen för dessa baser är

$$\binom{3}{1} = 3, \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \text{respektive} \quad \binom{3}{3} = 1 \quad (5.105)$$

Vi vet också att dessa integraler är över orienterbara områden: en kurva har två riktningar, en yta är orienterbar etc. Vi har även kända samband mellan integraler, såsom Stokes sats (2 dimensioner):

$$\int_{\partial S} (A_x dx + B_y dy) = \int_S \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy. \quad (5.106)$$

Vår önskan är att finna motsvarigheter till sådana samband i högre dimensioner som dessutom går att använda för allmänna mångfalder. Innan vi går vidare kan vi försöka gissa oss till några egenskaper som borde ingå generaliseringen. Vi studerar ovanstående integraler: Produkten av typ $dx dx$ förekommer inte vilket indikerar att $dx dx = 0$. Detta i sin tur gäller för produkter som är antisymmetriska, dvs vi kan förvänta oss en definition av en produkt i stil med $dx \cdot dy = -dy \cdot dx$. Man skulle till exempel kunna skriva

$$\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy \quad (5.107)$$

som

$$\frac{\partial B}{\partial x} A dx \cdot dy + A \frac{\partial B}{\partial y} dy \cdot dx. \quad (5.108)$$

För att gå händelserna lite i förväg kommer vi att kalla en sådan produkt för en kil-produkt och teckna den som

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx. \quad (5.109)$$

Slutligen vill vi kunna definiera en invers till integralen, dvs en differentiering bör att kunna få en motsvarighet bland annat till differential/integralkalkylens teorem

$$\int_a^b \frac{df(x)}{dx} dx = f(b) - f(a) \quad (5.110)$$

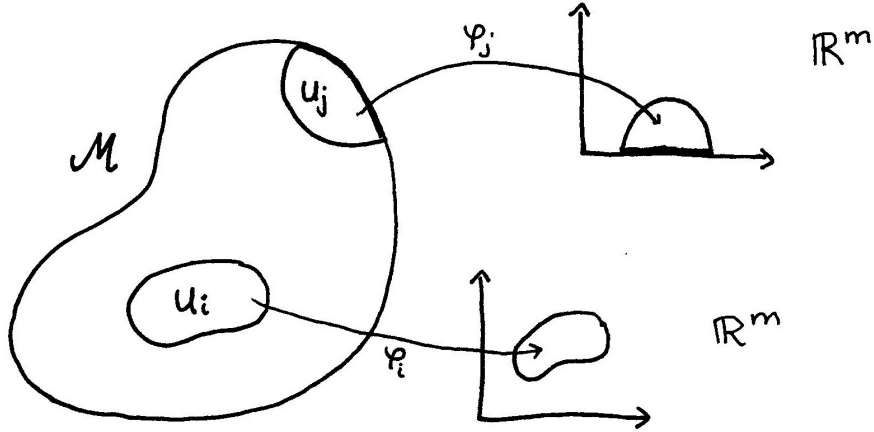
där $\{a, b\}$ är randen till en kurva mellan a och b . Vi kommer att få se en generalisering av detta på formen

$$\int_{\mathcal{R}} dw = \int_{\partial \mathcal{R}} w \quad (5.111)$$

där w betecknar en så kallad r -form.

5.4.2 Randen

Innan vi går närmare in på dessa så kallade r -former och integration av sådana behöver vi definiera en **rand** på en mångfald. I ett senare avsnitt kommer vi att se att en r -form w på en orienterbar mångfald ger upphov till den allmänna Stokes satsen.



Figur 5.15: Randen av en mångfald M . $\{U_i\}$ täcker M . Alla U_i homeomorfa till öppna mängder $H^m \equiv \{(x^1, x^2, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m | x^m \geq 0\}$. Den punktmängd som avbildas på $x^m = 0$ kallas för randen till M och betecknas ∂M . ∂M har alltså dimension $(m - 1)$.

$$\int_M \partial w = \int_{\partial M} w$$

Här ser vi att randen till mångfalden M blir väsentlig. Man behöver därför en lämplig definition av randen på en mångfald. En heltäckande formell definition är relativt teknisk och vi kommer därför att ge en mer skissartad definition. De huvudsakliga begreppen i en formell definition bygger på följande:

Områden på M indelas i två kategorier där den ena innehåller M 's inre $\text{Int}M$ och den andra M 's rand ∂M . Här är $\text{Int}M = \bigcup U_i \varphi_i^{-1}$ på $\text{Int}\varphi_i(U_i)$ vilken är en öppen delmängd i $\mathbb{R}^m$. M 's rand är $\partial M = \bigcup U_i \varphi_i^{-1}(\partial\varphi_i(U_i))$ där $\partial\varphi_i(U_i)$ är en rand i $\mathbb{R}^m$ och har alltså dimension $(m - 1)$. Observera att vi endast tar koordinatavbildningen som går på övre halvplanet, se figur 5.15. M 's rand blir då naturligt definierad som den delmängd vilken avbildas så att den beskrivs av koordinaterna $x_1, \dots, x_{m-1}, 0$ där alla $x_1, \dots, x_{m-1} > 0$

5.4.3 Differentialformer och kilprodukter: Allmänna definitioner

Målet är att bygga upp en matematisk struktur som diskuterades i inledningen ovan. Nyckelbegreppen i detta avsnitt kommer att vara r -former och

kilprodukten. Vi kommer även att definiera differentiering av r -former. Vi utgår ifrån vektorrummet för ett tangentplan $T_p M$ med dimensionen m : $\{v_1, \dots, v_m\}$. Detta vektorrum har ett dualrum, även kallat kotangentrum, som utgörs av alla linjära avbildningar från $T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Detta dualrum kallade vi tidigare $T_p^* M$ men vi döper nu om det till $\Omega_0^1(M)$ samt kallar vektorn $w \in \Omega_0^1$ en en-form. Under avsnittet en-former 5.2.3 såg vi att $\{dx^1, \dots, dx^m\} \equiv \{dx^\mu\}$ utgör en dualbas för w . Man har alltså $\langle dx^\mu, \partial/\partial x^\nu \rangle = \delta_\nu^\mu$ och $w = w_\mu dx^\mu$ där w kallas en differentialform.

Koordinatoberoende definition för r-former och kilprodukter

Vi utgår nu från det m -dimensionella rummet $\Omega_0^1(M)$. För varje r bildar vi ett nytt vektorrum som kallas Ω_0^r som skrivs som en speciell produkt av r stycken Ω_0^1 . Vektorrummet Ω_0^r består av element av typen

$$w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_r \quad (5.112)$$

där w_i är en godtycklig en-form. Uttrycket $w_1 \wedge \dots \wedge w_r$ är en **kilprodukt** som uppfyller följande regler:

i Linjäritet med avseende på varje komponent w_i :

$$\begin{aligned} w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge (w_i = aw' + bw'') \wedge w_{i+1} \dots \wedge w_r = \\ = aw_1 \wedge \dots \wedge w' \wedge w_{i+1} \dots \wedge w_r + bw_1 \wedge \dots \wedge w'' \wedge w_{i+1} \wedge \dots \wedge w_r \end{aligned} \quad (5.113)$$

ii $w_1 \wedge \dots \wedge w_r$ byter tecken för varje ombyte av två index $i \leftrightarrow j$. Då varje permutation $P(1, 2, \dots, r)$ består av antingen ett jämt eller udda antal sådana byten kan man skriva

$$w_{p(1)} \wedge \dots \wedge w_{p(r)} = (\text{sgn} P) w_1 \wedge \dots \wedge w_r \quad (5.114)$$

Från (5.114) följer att om $w_i = w_j$ för något $i \neq j$ blir

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_r = 0 \quad (5.115)$$

Sådana kilprodukter och deras linjärkombinationer bildar så kallade r -former som i ett senare avsnitt även ses som **antisymmetriska tensorer**, då på basform. Nu tar vi en bas för w : $\{dx^1, \dots, dx^m\}$ dvs $w = w_\mu dx^\mu$. Observera att till skillnad från indexeringen ovan så är w_μ nu koordinater. För att undvika sammanblandning i beteckningarna skriver vi nu $\alpha(i) \in \Omega_0^1$

$$\alpha(i) = \sum \alpha_\mu(i) dx^\mu \quad (5.116)$$

och bildar kilprodukten i Ω_0^1 :

$$\alpha(1) \wedge \alpha(2) \dots \wedge \alpha(r) \quad (5.117)$$

som blir en summa

$$\sum_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r}^r \alpha_{\mu_1}(1) \alpha_{\mu_2}(2) \dots \alpha_{\mu_r}(r) dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad (5.118)$$

Vi omordnar nu kilprodukten enligt (5.114):

$$p(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r) = (n_1 n_2 \dots n_r) \quad (5.119)$$

där $n_1 < n_2 < \dots < n_r$ och alltså är $\{n_i\}$ en ordnad mängd. Summan blir då på formen

$$\sum \alpha_N dx^{n_1} \wedge \dots \wedge dx^{n_r} \quad (5.120)$$

där N betecknar den ordnade mängden $\{n_i\}$

Här ser man att alla sådana uppsättningar av r stycken kilprodukter bildar bas för Ω_0^r eftersom varje kilprodukt $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$ är en permutation av någon sådan ordnad produkt $dx^{n_1} \wedge \dots \wedge dx^{n_r}$, $n_1 < n_2 < \dots < n_r$. Vidare ser vi att det finns $\binom{m}{r}$ delmängder och för r stycken element ur m får vi dimension $\dim \Omega_0^r = \binom{m}{r}$. Vi får en enkel tabell över möjliga Ω_0^r , $0 \leq r \leq m$

r -form	bas	dimension
$\Omega^0(M)$	$\{1\}$	1
$\Omega^1(M) = T_p^* M$	dx^μ	m
$\Omega^2(M)$	$dx^{n_1} \wedge dx^{n_2}$	$m(m-1)/2$
$\Omega^r(M)$	$dx^{n_1} \wedge \dots \wedge dx^{n_r}$	$\binom{m}{r}$
Ω^m	$dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m$	1

Vi ser att $\dim \Omega^r(M) = \dim \Omega^{m-r}(M)$ vilket gör att det går att bilda en isomorfi mellan dessa rum. Om man inför en metrik på mångfalden kan man via denna bilda en specifik isomorfi. Vi kommer se mer av detta i ett senare avsnitt som behandlar metriker.

Multilinjära avbildningar uttryckta i basform

Tensorer är, som tidigare nämnts, en generalisering av linjära avbildningar $L(\mathfrak{v})$ på en vektor $\mathfrak{v}$ till ett annat (vektor)rum. Vi skall hålla oss till $L(\mathfrak{v}) \rightarrow \mathbb{R}$ och dess utvidgning. Generaliseringen innebär att man bildar **multilinjära avbildningar**:

$$T(\mathfrak{v}_1 \otimes \mathfrak{v}_2 \dots \otimes \mathfrak{v}_q) \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.121)$$

där $\mathfrak{v}_1 \otimes \mathfrak{v}_2 \dots \otimes \mathfrak{v}_q$ tillhör produktrummet bestående av den direkta produkten av q stycken kopior av V vilket skrivs

$$V \otimes V \otimes \dots \otimes V \equiv \overset{q}{\otimes} V$$

T verkar nu linjärt på varje $\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}_1) \otimes \dots \otimes (a\mathbf{v}' + b\mathbf{v}'') \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_q = \\ = aT(\mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}' \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_q) + bT(\mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}'' \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_q) \end{aligned} \quad (5.122)$$

Man kan gå ytterligare ett steg i generaliseringen och bilda produktrum även på duala vektorrum:

$$V^* \otimes \dots \otimes V^* \equiv \bigotimes^r V^* \quad (5.123)$$

och även sammansättningar av typ

$$V^* \otimes \dots \otimes V^* \otimes V \otimes \dots \otimes V \equiv \bigotimes^r V^* \otimes^q V \quad (5.124)$$

Vi skall nu tillämpa det viktigaste sambandet mellan V och V^* , vilket vi numera är välbekantade med, nämligen att de linjära avbildningarna på V bildar det duala vektorrummet V^* . Vi har basen $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ för V och basen $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ för V^* . Varje $\mathbf{e}^i$ är alltså en linjär avbildning som precis som tidigare gäller att $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i$. Något som kanske inte påpekats tidigare är att V och V^* är helt symmetriska. Detta ser vi genom att bilda dualen till V^* :

$$(V^*)^* \equiv V^{**} \quad (5.125)$$

vilken man sedan kan identifiera med V :

$$V^{**} \equiv V$$

I så fall kan man betrakta det som att det inte spelar någon roll i vilken ordning man utför produkten mellan baserna

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_j(\mathbf{e}^i) = \delta_j^i \quad (5.126)$$

Vi betraktar nu en multilinjär avbildning $T^r : \bigotimes^r V \rightarrow \mathbb{R}$. Det gäller nu att

Sats 5.1. Om $\{\mathbf{e}^j\}$ är en bas i V samt $\{\mathbf{e}_j\}$ en bas för V^* så är $\{\mathbf{e}^{\mu_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{\mu_r}\}$ en bas för T^r . Här betecknar $\{\mathbf{e}^{\mu_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{\mu_r}\}$ en viss permutation av r stycken utvalda basvektorer i V^*

Bevis 5.1. Antag att $\{\mathbf{e}^{\mu_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{\mu_r}\}$ är linjärt beroende. Det finns då en summa

$$T^r = \sum t_{\mu_1 \dots \mu_r} \mathbf{e}^{\mu_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{\mu_r} = 0 \quad (5.127)$$

där inte alla $t_{\mu_1 \dots \mu_r} = 0$. Låt nu T^r verka på $\{\mathbf{e}_{\nu_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{\nu_r}\}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow T^r(\mathbf{e}_{\nu_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{\nu_r}) = \\ = t_{\mu_1 \dots \mu_r} (\mathbf{e}^{\mu_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{\mu_r})(\mathbf{e}_{\nu_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{\nu_r}) = \\ = t_{\mu_1 \dots \mu_r} \delta_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_r} = t_{\mu_1 \dots \mu_r} = 0 \end{aligned} \quad (5.128)$$

vilket är en motsägelse.

Vi övergår nu till att arbeta med vektorrummen V med basen $\{\partial/\partial x^1 \dots \partial/\partial x^m\}$, samt dualrummet V^* med basen $\{dx_1 \dots dx_m\}$ där en tensor T^r är uttryckt i basen enligt ovan.

$$T^r = \sum T^{\mu_1 \dots \mu_r} dx_{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx_{\mu_r} \quad (5.129)$$

vilken verkar multilinjärt: $T^r(\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_r) \rightarrow \mathbb{R}$

Detta kan utvidgas ytterligare för att gälla även produktrummet över duala vektorrum.

$$V^* \otimes \dots \otimes V^* \otimes V \otimes \dots \otimes V \quad (5.130)$$

med den självförklarande beteckningen $\overset{q}{\otimes} V^* \overset{p}{\otimes} V$.

Vi vet att en tensor T^r är en multilinjär avbildning på produktrummet $V \otimes V \otimes \dots \otimes V \rightarrow \mathbb{R}$, dvs $T^r(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \dots \otimes \mathbf{v}_r) \rightarrow \mathbb{R}$. Om vi har basen $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r\}$ i V så har det duala vektorrummet V^* den duala basen $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^r\}$ och som vanligt gäller att $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i$. Vi skriver två viktiga samband:

$$\text{i } \mathbf{v} = \sum \mathbf{e}^j(\mathbf{v}) \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{v} \in V$$

$$\text{ii } \mathbf{w} = \sum \mathbf{w}(\mathbf{e}_i) \mathbf{e}^i, \quad \mathbf{w} \in V^*$$

för vilka symmetrin direkt bygger på (5.126). Då T^r är linjär på varje plats i $V \otimes \dots \otimes V$ kan man utveckla T^r i $\otimes$ -produkter av ovanstående basvektorer $\mathbf{e}^i$ och motsvarande för det duala vektorrummet V^*

5.4.4 Differentialformer och kilprodukter uttryckta i baser som tensorer

Innan vi går in på tensorformerna behöver vi ett par användbara konstruktioner i form av **symmetriska** och **antisymmetriska** tensorer.

Symmetriska och antisymmetriska operatorer

På en tensor av typ $w \in T_r^0(M)$ kan man utföra en permutation med hjälp av en **permutationoperator** P ; $Pw(V_1, V_2, \dots, V_r) = w(V_{P(1)}, \dots, V_{P(r)})$. För en allmän tensor av typ (q, r) utför man permutationer på q - och r -index var för sig. För differentialformer behöver vi två användbara konstruktioner för en tensor $w \in T_r^0$. Av en godtycklig w bildar vi en helt symmetrisk tensor med hjälp av operatoren $\mathcal{S}$ på w :

$$\mathcal{S}w = \frac{1}{r!} \sum_{P \in S_r} Pw \quad (5.131)$$

där summan är tagen över alla permutationer S_r av r element. Det är inte svårt att se att en godtycklig permutation på w , $P'w$ ger

$$\mathcal{S}P'w = \frac{1}{r!} \sum_{P \in S_r} P(P'w) = \frac{1}{r!} \sum_{P'' \in S_r} P''w = \frac{1}{r!} \sum_{P \in S_r} Pw \quad (5.132)$$

eftersom summan innehåller samma termer, dvs $\mathcal{S}$ är oförändrad. Härav inses varför $\mathcal{S}w$ kallas symmetrisk då varje omordning av index lämnar tensorn w invariant. På analogt sätt bildar man nu en så kallad antisymmetrisk tensor för $w \in T_r^0$

$$\mathcal{A}w = \frac{1}{r!} \sum_{P \in \mathcal{S}_r} (\text{sgn } P) Pw \quad (5.133)$$

Låt nu två index i och j på $w(V_1, \dots, V_i, V_{i+1}, \dots, V_{i+n}, \dots, V_r)$ byta plats $V_{i+n} = V_j$. Detta gör vi genom att flytta V_i n steg till V_j . Varje steg kastar om ordningen $V_{i+k}, V_{i+k+1} \rightarrow V_{i+k+1}, V_{i+k}$. För varje steg får vi alltså $\text{sgn } P \rightarrow (-1)\text{sgn } P$. Totalt får vi n steg åt höger och därmed $(n-1)$ steg åt vänster då vi flyttar V_j till V_i 's plats. Detta betyder alltså att varje term multipliceras med $(-1)^{2n+1} = (-1)$ för alla n . Det framgår nu varför $\mathcal{A}w$ kallas antisymmetrisk: varje byte av plats mellan två index medför att $\mathcal{A}w' = -\mathcal{A}w$. Detta medför även att om $V_i = V_j \Leftrightarrow \mathcal{A}w = -\mathcal{A}w \Leftrightarrow \mathcal{A}w = 0$. Vidare är varje permutation resultatet av antingen ett jämt antal eller udda antal sådana steg: säg att vi utför en permutation P' på w :

$$\mathcal{A}(P'w) = (\text{sgn } P')\mathcal{A}w \quad (5.134)$$

Både $\mathcal{S}w$ och $\mathcal{A}w$ innehåller faktorn $\frac{1}{r!}$. Anledningen är att om w är

- i helt symmetrisk så får vi $Pw = w$, dvs $\mathcal{S}w = \frac{1}{r!} \sum_{P \in \mathcal{S}_r} Pw = \frac{1}{r!} r! w = w$ vilket vi bör ha.
- ii helt antisymmetrisk: $Pw = (\text{sgn } P)w$ dvs $\mathcal{A}w = \frac{1}{r!} \sum_{P \in \mathcal{S}_r} (\text{sgn } P) Pw = \frac{1}{r!} \sum_{P \in \mathcal{S}_r} (\text{sgn } P)^2 w = \frac{1}{r!} r! w = w$ vilket vi förväntat oss.

Vidare kan en godtycklig tensor $w_{\mu\nu}$ skrivas som summan av en symmetrisk och en antisymmetrisk tensor:

$$w_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(w_{\mu\nu} + w_{\nu\mu}) - \frac{1}{2}(w_{\mu\nu} - w_{\nu\mu}) \quad (5.135)$$

Om man redan har en antisymmetrisk tensor w gäller som tidigare nämnts $\mathcal{A}w = w$. Härav följer för ett godtyckligt w att $\mathcal{A}(\mathcal{A}w) = \mathcal{A}w$

5.4.5 Kilprodukt och differentialformer på basform

Man kan nu bilda en speciell tensor som är uttryckt i sådana basvektorer i $\overset{r}{\otimes} V^* \equiv \overset{r}{\otimes} T^*(M)$.

Definition 5.9 (Kilprodukt av r en-former). **Kilprodukten** av r en-former definieras som den antisymmetriska tensorprodukten av r en-former:

$$dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = \sum_{P \in \mathcal{S}^r} (\text{sgn } P) dx^{\mu_{P(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_{P(r)}}. \quad (5.136)$$

Vi ser direkt att denna tensor är antisymmetrisk: den växlar tecken för varje ombyte av plats mellan två dx^i .

Låt oss återgå till att uttrycka den allmänna tensorn i produktformen:

$$T^r = [T_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_r}] \quad (5.137)$$

Vi omvandlar nu denna till en antisymmetrisk form med hjälp av operatören $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}T^r = \frac{1}{r!} \sum_{P \in S^r} (\text{sgn } P) P T^r \quad (5.138)$$

Notera att om den redan är antisymmetrisk får vi tillbaka T^r vilket vi såg ovan. Sätt $\mathcal{A}T^r = w$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}T = w &= \frac{1}{r!} \sum_{P \in S^r} (\text{sgn } P) P(w_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_r}) = \\ &= \frac{1}{r!} w_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \end{aligned} \quad (5.139)$$

där vi har satt in uttrycket för kilprodukten. Detta är en definition av den allmänna r -formen $w(\mathbb{v}_1) \dots \mathbb{v}_r$ som alltså är antisymmetrisk.

Vi skall nu bilda kilprodukten mellan två differentialformer: en q -form $w \in \Omega^q(M)$ och en r -form $\xi \in \Omega^r(M)$. Denna produkt kallas också extern produkt.

$$w \wedge \xi(v_1, v_2, \dots, v_{q+r}) = \frac{1}{q!r!} \sum_{P \in S_{q+r}} \text{sgn } (P) w(v_{p(1)} \dots v_{p(q)}) \xi(v_{p(q+1)} \dots v_{p(q+r)}) \quad (5.140)$$

Observera här att från början är permutationer mellan w :s och ξ :s vektorer ej blandade. För varje val av q första v_j finns det $q!$ permutationer för w att verka på samt $r!$ för ξ . Här av får vi faktorn $(r!q!)^{-1}$. Man kan även skriva (5.140) med hjälp av den antisymmetriska operatören:

$$w \wedge \xi = \frac{(q+r)!}{q!r!} \mathcal{A}(w \otimes \xi) \quad (5.141)$$

Vi skriver nu den formella definitionen av den **externa produkten** i en bas $\{dx^1, \dots, dx^n\}$

Definition 5.10 (Extern produkt). $w \wedge \xi = \frac{1}{q!r!} w_{\mu_1 \dots \mu_q} \xi_{\mu_{q+1} \dots \mu_{q+r}} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{q+r}}$

Vi har tre användbara samband för kilprodukten:

- i $\xi \wedge \xi = 0$
- ii $\xi \wedge \eta = (-1)^{qr} \eta \wedge \xi$
- iii $(\xi \wedge \eta) \wedge w = \xi \wedge (\eta \wedge w)$

Extern derivata

För att kunna införa motsvarigheten av integration på en mångfald måste vi kunna bilda ett uttryck av typen

$$\int_{\partial R} w \quad (5.142)$$

och vidare vill vi kunna defiera en omvänd operationen till integrering som till exempel används i sambandet

$$\int_{\partial R} w = \int_R dw \quad (5.143)$$

Vi ger därför nu den formella definitionen av den **externa derivatan** på en r -form w , betecknad $d_r w$:

Definition 5.11 (Extern derivata). Om

$$w = \frac{1}{r!} w_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad (5.144)$$

så är

$$d_r w = \frac{1}{r!} (\partial/\partial x^\nu w_{\mu_1 \dots \mu_r}) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \quad (5.145)$$

Man ser att operationen d_r på en r -form producerar en $(r+1)$ -form. Det finns tre viktiga samband:

- i) $d(\xi + \eta) = d\xi + d\eta$ två r -fomer
- ii) $d(\xi \wedge \eta) = d\xi \wedge \eta + (-1)^r \xi \wedge d\eta$
- iii) $d(d\xi) = 0$

där $\xi \in \Omega^r(M)$, $\eta \in \Omega^q(M)$.

Bevis 5.2 (ii).

$$\begin{aligned} d(\xi \wedge \eta) &= d(\xi_{i_1 \dots i_r} \eta_{j_1 \dots j_q}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} = \\ &= \left(\frac{\partial \xi_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^i} \eta_{j_1 \dots j_q} + \xi_{i_1 \dots i_r} \frac{\partial \eta_{j_1 \dots j_q}}{\partial x^i} \right) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} \end{aligned} \quad (5.146)$$

där första termen blir

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial \xi_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^i} dx^i dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \eta_{j_1 \dots j_q} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} = \\ &= d\xi \wedge \eta \end{aligned} \quad (5.147)$$

då vi har flyttat in $\eta_{j_1 \dots j_q}$ framför den kilprodukten som η verkar på. För den andra termen $\xi_{i_1 \dots i_r} \frac{\partial \eta_{j_1 \dots j_q}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$ kan vi flytta $\frac{\partial \eta_{j_1 \dots j_q}}{\partial x^i} dx^i \wedge$ r

steg åt höger. Vi byter då tecken r gånger och vi får faktorn $(-1)^r$ framför denn term som då blir

$$\begin{aligned} & (-1)^r \xi_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \wedge \frac{\partial \eta_{j_1 \dots j_r}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_r} = \\ & (-1)^r \xi \wedge \eta \end{aligned} \quad (5.148)$$

Och därmed har vi visat (ii)

Bevis 5.3 (iii). Tag $w = \frac{1}{r!} w_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$. Då d^2 verkar på w får vi direkt

$$d^2 w = \frac{1}{r!} \frac{\partial^2 w_{\mu_1 \dots \mu_r}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} dx^\lambda \wedge dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad (5.149)$$

Eftersom $\frac{\partial^2 w_{\mu_1 \dots \mu_r}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} = \frac{\partial^2 w_{\mu_1 \dots \mu_r}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}$ och samtidigt

$$dx^\lambda \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\lambda \quad (5.150)$$

försviner alla termer, det vill säga uttrycket $= 0$

Extern derivata av f^*x

I avsnittet "Inducerade avbildningar" såg vi att en avbildning $f : M \rightarrow N$ inducerar en annan avbildning $f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ gällande tangentplanen i respektive mångfald. f_* verkar alltså på vektorer $V \in T_p M$ enligt

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} \mathbb{R} \quad (5.151)$$

$$(f_* V)(g) = V[g \circ f] \quad (5.152)$$

där $g \circ f$ är en skalär funktion. De duala vektorrummen $T_p^*(M)$ och $T_p^*(N)$ är alltså linjära avbildningar från $T_p(M)$ respektive $T_p(N)$. Om således en linjär avbildning $T_p(N) \rightarrow \mathbb{R}$ är definierad så ger $f : M \rightarrow N$ upphov till en linjär avbildning från $T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dvs vi har fått avbildningen $T_p^*(N) \rightarrow T_p^*(M)$ som går motsatt håll till f . Vi definierar f^* som

$$\langle f^* w, V \rangle = \langle w, f_* V \rangle \quad (5.153)$$

Om nu $w \in \Omega^r(N)$ så har vi för $f^* : \Omega_{f(p)}^r(N) \rightarrow \Omega_p^r(M)$

$$f^*(w)(x_1, \dots, x_r) \equiv w(f_* x_1, \dots, f_* x_r) \quad (5.154)$$

där $x_i \in T_p M$. Vi har sambanden

$$\text{i } d(f^* w) = f^*(dw)$$

$$\text{ii } f^*(\xi \wedge w) = f^*(\xi) \wedge f^*(w)$$

Bevis 5.4 (i). Enligt (5.153) har vi

$$\langle f^*w, V \rangle = \langle w, f_*V \rangle \quad (5.155)$$

Differentiera nu båda leden. Denna likhet gäller nu för alla V . Välj speciellt $V = \text{konstant}$ som då ger V.L. = $\langle df^*w, V \rangle + \langle f^*w, dV \rangle = \langle df^*w, V \rangle$ eftersom $dV = 0$. Helt analogt fås H.L. = $\langle dw, f_*V \rangle$ eftersom $df_*V = 0$. Men enligt definition har vi $\langle dw, f_*V \rangle = \langle f^*dw, V \rangle$ det vill säga $\langle df^*w, V \rangle = \langle f^*dw, V \rangle$. Denna likheten är en identitet vilken är helt oberoende av V . Man kan därför identifiera $df^*w = f^*dw$

de Rham komplexet

de Rham komplexet är en viss serie avbildningar

$$\Omega_0^p(M) \xrightarrow{f_p} \Omega_0^{p+1}(M) \xrightarrow{f_{p+1}} \Omega_0^{p+2}(M) \quad (5.156)$$

där bilden $\text{Im } f_p(\Omega^p(M))$ av Ω^p i Ω^{p+1} i sin tur är $\ker$ i $f_{p+1}(\Omega_0^p(M))$. Detta innebär att

$$f_{p+1}(f_p(\Omega_0^p(M))) = 0 \quad (5.157)$$

Väljer vi nu $f_p = d_p$ gäller det att

$$d_p d_{p+1}(\Omega^p(M)) = 0 \quad (5.158)$$

eftersom $d_p d_{p+1} = 0 \quad \forall p$ de Rham komplexet återkommer i kapitlet 6 där vi behandlar kohomologiteori och differentiella former.

5.4.6 Intern derivata och Lie-derivatan på former

Den externa derivatan d_r på Ω^r kunde definieras som en avbildning från $\Omega^r \rightarrow \Omega^{r+1}$ genom att antalet basvektorer i Ω^r utökades med en till: $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \rightarrow dx^{\nu} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$. Man kan konstruera en omvänd avbildning som vi kallar i_x :

$$i_x : \Omega^r \rightarrow \Omega^{r-1} \quad (5.159)$$

där man mskar antalet produktbasvektorer med ett. Detta innebär att vi får

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \rightarrow dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad (5.160)$$

Denna reduktion får man genom att utnyttja en inre produkt mellan vektorn $\tilde{X} \in T^m(M)$ och en-formen $dx^{\mu_1} \in T^{m*}(M)$.

Hamiltonska vektorfält - mekanik

Vi utgår från fas-rummet (q^μ, p_μ) och definiera tvåformen

$$w = dp_\mu dq^\mu \quad (5.161)$$

vilken kallas den symplektiska tvåformen. Vi bildar nu enformen $\theta = q^\mu dp_\mu$ och därefter $d\theta = d(q^\mu dp_\mu) = dq^\mu \wedge dp_\mu$, $d^2 p_\mu = 0$. Man skriver därför

$$w = d\theta \quad (5.162)$$

Om vi har en funktion $f(q, p)$ i fasrummet definieras Hamiltonska vektorfältet som

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \partial / \partial q^\mu - \frac{\partial f}{\partial q^\mu} \partial / \partial p_\mu \quad (5.163)$$

Låter vi nu den inre derivatan i_{x_f} verka på w får vi

$$\begin{aligned} i_{X_f}(dp_\mu \wedge dq^\mu) &= \left(\frac{\partial f}{\partial p_\mu} \partial / \partial q^\mu - \frac{\partial f}{\partial q^\mu} \partial / \partial p_\mu \right) (dp_\mu \wedge dq^\mu) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \frac{dp_\mu}{dq^\mu} dq^\mu - \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \frac{dq^\mu}{dq^\mu} dp_\mu - \frac{\partial f}{\partial q^\mu} \frac{dp_\mu}{dp_\mu} dq^\mu + \frac{\partial f}{\partial q^\mu} \frac{dq^\mu}{dp_\mu} dp_\mu \end{aligned} \quad (5.164)$$

men vi har att $\frac{dp_\mu}{dp_\mu} = \frac{dp_\mu}{dq^\mu} = 0$ då både q^μ och p_μ är oberoende variabler. Vi har nu fått

$$i_{X_f} = -\frac{\partial f}{\partial p_\mu} dp_\mu - \frac{\partial f}{\partial q^\mu} dq^\mu = -df \quad (5.165)$$

Hamiltons rörelseekvationer är

$$\frac{dq^\mu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \quad (5.166)$$

$$\frac{dp_\mu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^\mu} \quad (5.167)$$

insätter vi nu detta i (5.163) får vi

$$X_H = \frac{dq^\mu}{dt} \partial / \partial q^\mu + \frac{dp_\mu}{dt} \partial / \partial p_\mu = d/dt \quad (5.168)$$

som då gäller för en lösning (q^μ, p_μ) . Genom att använda likheten

$$\mathcal{L}_{\tilde{X}}(w) = (di_{\tilde{X}} + i_{\tilde{X}}d)w \quad (5.169)$$

för $\tilde{X} = X_H$ får man

$$\mathcal{L}_{X_H} w = d(i_{X_H} w) + i_{X_H}(dw) = d(i_H w) = d(-dH) = -d^2 H = 0 \quad (5.170)$$

Omvändningen är viktig:

Om det finns $\mathcal{L}_X w = 0$ så existerar en hamiltonian så att de hamiltonska rörelseekvationerna satisfieras av flödet som egenereras av $\tilde{X}$. Detta ses från ovanstående då $\mathcal{L}_X w = d(i_X w) = 0$, $\Rightarrow$ Poincaré's lemma det finns ett H ; $H(q, p)$

$$i_X w = -dH \quad (5.171)$$

5.4.7 Integration av differentialformer

Integration av en differentialform över en mångfald förutsätter att mångfalden är **orienterbar**. Därför måste vi först definiera orienterbarhet. Vi har en m -dimensionell mångfald M (som är sammanhängande). Antag att $p \in M$ och vi har två överlappande kartor U_i, U_j så att $p \in U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Kalla koordinaterna för tangentplanet $T_p M$ för $x\{x^\mu\}$ och $y\{y^\mu\}$ med respektive basvektorer $\{\partial/\partial x^\mu\}$ och $\{\partial/\partial y^\mu\}$, som lokala koordinatsystem. Då vi övergår från koordinatsystemet x^μ till y^μ får vi en ändring av basen som skrivs $\mathfrak{e}_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \mathfrak{e}_\mu$. Om $\det|\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}| > 0$ definieras baserna att ha samma orientering. Vi känner igen $\det|\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}|$ som Jacobianen J . Om vi istället har $J < 0$ definieras baserna till att olika orientering.

Definition 5.12 (Orienterbarhet). M är sammanhängande och täcks av $\{U_i\}$. M är orienterbar om det för alla U_i, U_j , $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, finns lokala koordinatsystem $\{x^\mu\}$ för U_i , $\{y^\mu\}$ för U_j sådana att $J = \det|\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}| > 0$

Det följer av definitionen att om M ej är orienterbar kan J ej vara positiv i alla $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Ett exempel på detta är möbiusbandet som endast har en sida och då man förflyttar sig ett varv får man motsatt riktning för de lokala basvektorerna dx, dy

Sats 5.2 (Existens av volymelement). Om M är orienterbar och $\dim M = m$, finns det en m -form w som ej försvinner någonstans.

Denna m -form kallas ett **volymelement** och motsvarar ett mått w så man integrerar en funktion över M . Måtten w och w'' är ekvivalenta om det finns en positiv funktion $h \in \mathcal{F}(M)$ så att $w = hw'$. Om $h < 0$ ger detta en icke ekvivalent orientering. Vidare kan man då dela in w i olika klasser: de för vilka $h > 0$ och de för vilka $h < 0$. Vi har då två icke ekvivalenta orienteringar. Den positiva kallas högerorienterad och den negativa kallas vänsterorienterad. Välj en m -form w ($\dim M = m$), $p \in M$

$$w = h(p)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \quad (5.172)$$

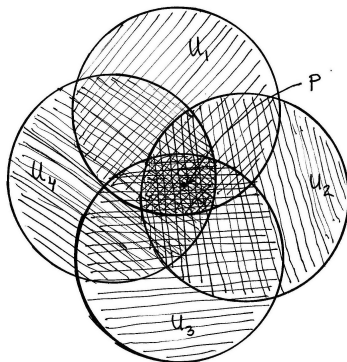
Om M är orienterbar kan vi utvidga w till M så att $h > 0$ på varje karta U_i . I så fall definierar w ett volymelement. Att h är positivt är då alltså oberoende av koordinatsystem.

Givet en funktion $f : M \rightarrow N$ på en orienterbar mångfald väljer vi ett volymelement w samt en koordinatombgivning U_i med koordinatsystemet

$$\{x_1, \dots, x_m\}$$

Man kan då definiera en integral över U : i :

$$\int_{U_i} f w = \int_{\varphi_i(U_i)} f(\varphi_i^{-1}(\mathbf{x})) h(\varphi_i^{-1}(\mathbf{x})) dx^1 dx^2 \dots dx^m \quad (5.173)$$



Figur 5.16: En intuitiv visualisering av enhetspartitionen

Notera att vi skriver $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ som $dx^1 \dots dx^m$. φ är vår vanliga koordinatfunktion sådan att $U_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ med inversen $\varphi^{-1}(\mathbf{x}); \mathbb{R}^m \rightarrow U_i$. Vi har nu en definierad integral på en viss karta $\{U_i, \varphi_i\}$ med hjälp av U_i och φ_i . Det gäller nu att utvidga integralen över hela M . För att detta skall vara möjligt måste M vara en differentierbar mångfald som definierat i början av kapitlet samt det måste finnas en mängd differentierbara funktioner $\epsilon_i(p)$ vilka uppfyller följande villkor:

- i $0 \leq \epsilon_i(p) \leq 1$
- ii $\epsilon_i(p) = 0$ om $p \notin U_i$
- iii $\epsilon_1(p) + \epsilon_2 + \dots = 1$ för varje $p \in M$

$\epsilon(p)$ kallas för **enhetspartitionen**. Villkoren ger nu direkt

$$f(p) = \sum_i f(p) \epsilon_i(p) = \sum_i f_i(p) \quad (5.174)$$

där $f_i(p) \equiv f(p) \epsilon_i(p)$ försvinner utanför U_i enligt ii. Man kan nu definiera en integral för varje $f_i(p)$ över U_i . Vi har alltså

$$\int_M f w = \sum_i \int_{U_i} f_i(w) \quad (5.175)$$

Intuitivt kan man tänka sig $\epsilon_i(p)$ som "densiteter" på områdena U_i där summan av bidragen från alla densiteter alltid blir 1. Detta illustreras som området i mitten i figur 5.16..

5.5 Liegrupper och Liealgebra

Om punkterna på en differentierbar mångfald bildar element i en grupp kallas mångfalden en **liegrupp**. Ett känt exempel är mångfalden $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ där gruppoperationen är vanlig multiplikation: två element $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bildar ett tredje $xy = z \neq 0$. Viktigt är att om man tar två tal, ett nära x och det andra nära y kommer produkten vara nära z . Vidare ser vi att enhetselementet är 1 samt att varje x har en invers x^{-1} .

En liegrupp G är en differentierbar mångfald med en gruppstruktur sådan att gruppoperationerna är differentierbara. Gruppoperationerna på en liegrupp betecknas

$$\text{i } \cdot : G \cdot G \rightarrow G, (g_1, g_2) \rightarrow g_1 \cdot g_2$$

$$\text{ii } ^{-1} : G \rightarrow G, g \rightarrow g^{-1}$$

Enhetselementet till gruppen betecknas e . Dimensionen av gruppen G är densamma som dimensionen av G som mångfald. Som brukligt förkortas ofta $g_1 \cdot g_2$ med $g_1 g_2$. Om produkten $g_1 g_2$ är kommutativ betecknas oftast produkten med $+$ istället, i enlighet med konventioner inom grupp teori.

Exempel på Liegrupper

1. Enhetscirkeln S^1 i det komplexa talplanet. $S^1 = \{e^{i\theta} \mid \theta(\text{mod } 2\pi)\}$
Gruppoperationerna är definierade med:

$$\text{i } \cdot : e^{i\theta} e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$$

$$\text{ii } ^{-1} : (e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$$

Lägg märke till att operationerna är differentierbara. Därmed är S^1 en liegrupp och vi kallar den $U(1)$.

2. Den generella linjära gruppen $GL(n, \mathbb{R})$ eller $GL(n, \mathbb{C})$ är en liegrupp vilket också gäller för dess undergrupper, ofta kallade matrisgrupper. Gruppoperationerna är vanlig matrismultiplikation och matrisinvers, och $GL(n, \mathbb{R})$ har dimension n^2 .

Speciellt viktiga liegrupper för fysikaliska tillämpningar är matrisgrupper, ur vilka de mest använda användas är:

1. $O(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}), MM^T = M^T M = I_n\}$ som kallas den ortogonala gruppen. Namnet kommer ifrån att raderna och kolonnerna i M bildar ortogonala vektorer med avseende på inre produkt.
2. $SL(n, \mathbb{R}) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det M = 1\}$. Denna kallas den speciella linjära gruppen.

3. Den grupp som uppfyller båda villkoren ovan kallas den speciella ortogonala gruppen $SO(n)$

Vi har även motsvarande matrisgrupper över de komplexa talen:

1. $U(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}); M^\dagger M = MM^\dagger = 1\}$ den unitära gruppen.
2. $SL(n, \mathbb{C}) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}); \det = 1\}$ den speciella linjära gruppen
3. $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$ den speciella unitära gruppen.

Liealgebror

I detta avsnitt kommer vi att utforska liealgebror. Låt oss börja med att skapa oss en överblick vad algebra och liealgebror är och ge exempel på sådana.

Algebra är en av de äldsta grenarna inom matematiken och ligger som grunden för många efterföljande. Det finns olika områden inom algebra med egna egenskaper men vi kan på mer beskrivligt och omatematiskt sätt säga att algebran ersätter tal med bokstäver. Algebran behandlar många olika objekt, exempelvis tal, matriser, vektorrum och andra mer allmänna algebraiska strukturer som grupper, kroppar eller ringar, och eftersom vi kan bilda algebror till dessa objekt kan vi direkt uttala oss om vissa lagar och egenskaper som kommer gälla dessa. Därför är det intressant att undersöka om vi kan relatera algebran till liealgebra. I allmänhet är en liealgebra⁵ inte en algebra eftersom associativitet är ett krav på en algebra och liebracketen inte är associativ.

Den enklaste relationen mellan den associativa algebran⁶ och liealgebror är att en given algebra A över någon kropp k definierad enligt $[x, y] = xy - yx$ för $x, y \in A$ är en Liealgebra.

Den norske matematikern Sophus Lie var den första som förstod att mycket information om strukturen av liegrupper är fångad i deras liealgebror, och dessa är ofta lättare att arbeta med. I början betraktades element av liealgebror som infinitesimala gruppelament och det är därför de är lättare att hantera, liegrupper är globala objekt medan liealgebror är liegruppernas lokala struktur. Det finns flera definitioner av liealgebra och vi börjar med att ge en allmän.

5.5.1 Allmän definition av en Liealgebra

Definition 5.13 (Liealgebra). Givet ett vektorrum L med en operation $L \times L \rightarrow L$ vilken vi skriver som $[X, Y] \rightarrow L$ utgör detta en liealgebra om

⁵Termen **liealgebra** introducerades av den tyske matematikern Hermann Klaus Hugo Weyl under 30-talet när han studerade liegrupper, speciellt deras representationer på differentierbara mångfaldar.

⁶En associativ ring som har en kompatibel struktur av ett vektorrum över en visst kropp

1. $[X, Y]$ är bilinjär
2. $[X, X] = 0$
3. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

Det första och andra kravet tillsammans medför⁷ att $[X, Y] = -[Y, X]$. Det gäller nu att tillämpa detta på ett speciellt vektorrum som är isomorft med ett visst tangentrum på en mångfald G , vilken utgör en liegrupp. Man låter nu ett godtyckligt element $a \in G$ verka på hela G , antingen från höger eller från vänster. Denna avbildning $G \rightarrow G$ är en diffeomorfism och kallas för en vänster- respektive högertranslation, eftersom varje element i G förflyttas till ett annat element. Mer formellt skriver vi:

Definition 5.14 (Höger- och vänstertranslation). Låt a och g vara element av en liegrupp G . **Den högra translationen** $R_a : G \rightarrow G$ och **den vänstra translationen** $L_a : G \rightarrow G$ av g genom a är definierade som

$$R_a g = ga \quad (5.176)$$

$$L_a g = ag \quad (5.177)$$

En sådan avbildning inducerar en avbildning mellan tangentplanen i punkterna g och ag på mångfalden. Detta skrivs

$$L_{a*} : T_g G \rightarrow T_{ag} G \quad (5.178)$$

$$R_{a*} : T_g G \rightarrow T_{ga} G \quad (5.179)$$

Höger- och vänstertranslationerna ger ekvivalenta teorier och därför kommer vi fortsättningsvis bara behandla den vänstra translationen. En intressant observation är att de båda translationerna kommuterar med varandra, vilket vi verifierar här nedan. Låt $a, b, g \in G$, då gäller:

$$\begin{aligned} L_a \circ R_b g &= agb = R_b \circ L_a g \\ \Leftrightarrow L_a(gb) &= agb = R_b(ag) \end{aligned}$$

Lägg också märke till att dessa translationer i allmänhet inte kommuterar med sig själva.

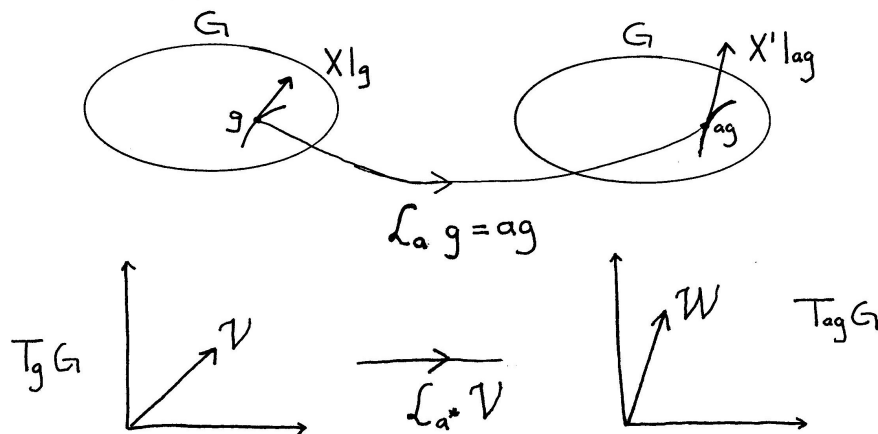
$$L_a \circ L_b \neq L_b \circ L_a \quad \text{och} \quad R_a \circ R_b \neq R_b \circ R_a$$

Observera även hur sammansättningen av dessa avbildningar beter sig.

$$\begin{aligned} L_a \circ L_b &= L_{ab} \quad \text{och} \quad R_a \circ R_b = R_{ba} \\ L_{a*} \circ L_{b*} &= L_{ab*} \quad \text{och} \quad R_{a*} \circ R_{b*} = R_{ba*} \end{aligned}$$

För $V \in T_g G$ och $W \in T_{ag} G$ kan man då skriva $L_{a*} V = W$. Med dessa beteckningar illustrerar vi avbildningen helt analogt med tidigare avsnitt om inducerade avbildningar 5.2.6, se figur 5.5.1.

⁷Se C för bevis



Figur 5.17: En liegruppinducerad avbildning. Jämför med figur 5.10 i avsnitt 5.2.6

Sedan tidigare har vi sambanden

$$V = V^\mu \partial / \partial x^\mu \quad (5.180)$$

$$W = W^\alpha \partial / \partial y^\alpha \quad (5.181)$$

där

$$W^\alpha = V^\mu \frac{\partial y^\alpha(x)}{\partial x^\mu} \quad (5.182)$$

är koordinattransformationen enligt tidigare avsnitt 5.2.6.

Koordinaten y^α för ag betecknar vi med $x^\alpha(ag)$. Det gäller nu att relatera ovanstående till vektorfält över G på ett naturligt sätt. När man studerar avbildningar från en struktur till en annan är kanske den mest naturliga frågan: Vilka strukturer bevaras under avbildningen, det vill säga är invarianta? Man inför därför följande definition:

Definition 5.15 (Vänsterinvariant vektorfält). Låt X vara ett vektorfält på en Liegrupp G . X kallas för ett vänsterinvariant vektorfält om $L_{a*}X|_g = X_{ag}$.

Detta betyder med andra ord att avbildningen L_{a*} bibehåller vektorfältet X 's struktur på hela G . Vi vill nu skriva definitionen på koordinatform. Vi använder därför beteckningarna i figur 5.5.1:

$$V = X|_g, \quad W = L_{a*}X|_g, \quad y^\alpha = x^\alpha(ag) \quad (5.183)$$

Sambanden (5.180) och (5.182) sätts in i definitionen och vi får:

$$\begin{aligned} X'|_{ag} &= L_{a*}X|_g = \text{enligt (5.182)} = X^\mu(g) \frac{\partial x^\alpha(ag)}{\partial x^\mu} \partial/\partial x^\alpha|_{ag} = \\ &= X^\alpha(ag) \partial/\partial x^\alpha|_{ag} = X|_{ag} \end{aligned} \quad (5.184)$$

Man kan nu definiera ett invariant vektorfält på hela G genom att välja någon lämplig vektor V i ett tangentrum och låta avbildningen L_{a*} definiera ett vektorfält. Det naturliga valet är att välja en vektor i tangentrummet till enhetselementet $V \in T_e G$ och man kan nu definiera ett vektorfält X_V för varje punkt i G

$$X_V|_g = L_{g*}V \quad (5.185)$$

vilket automatiskt blir invariant vilket man inser om man skriver

$$X_V|_{ag} = L_{ag*}V = (L_a L_g)_*V = L_{a*}(L_{g*}V) = L_{a*}X_V|_g \quad (5.186)$$

Omvänt definierar ett vänsterinvariant vektorfält X en unik vektor

$$V = X|_e \in T_e G \quad (5.187)$$

Mängden av vänsterinvarianta vektorfält på G kommer vi att beteckna med $\mathfrak{g}$ och avbildningen $T_e G \rightarrow \mathfrak{g}$ definierad som $V \mapsto X_V$ beskriver en isomorfism mellan $\mathfrak{g}$ och $T_e G$. Härav ser man direkt att $\mathfrak{g}$ är ett vektorrum som är isomorft med vektorrummet $T_e G$. Vi har nu fått fram det vektorrum på vilket vi ska definiera en liealgebra. En viktig egenskap hos vänsterinvarianta vektorfält är att kommutatorn av två vänsterinvarianta vektorfält också är vänsterinvariant. Med andra ord kan vi visa att $\mathfrak{g}$ är sluten under liebracketen om vi låter L_{a*} verka på den:

$$L_{a*}[X, Y]_g = [L_{a*}X|_g, L_{a*}Y|_g] = [X, Y]|_{ag} \quad (5.188)$$

där $X, Y \in \mathfrak{g}$. Vi summerar nu ovanstående i en formell definition:

Definition 5.16 (Liealgebra). Mängden av vänsterinvarianta vektorfält $\mathfrak{g}$ över någon kropp $\mathbb{K}$ tillsammans med liebracket $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ som uppfyller följande villkor

- skevsymmetri: $[a, b] = -[b, a] \quad \forall a, b \in \mathfrak{g}$
- Jacobi-identiteten: $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0 \quad \forall a, b, c \in \mathfrak{g}$
- bilinjäritet: $[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z], [z, [ax + by]] = a[z, x] + b[z, y]$
 $\forall a, b \in \mathbb{K} \text{ och } \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$

kallas för **liealgebran** av en liegrupp.

Vi vet att varje liegrupp har sin motsvarande liealgebra, som vi har påstått är väsentlig och användbar. Låt oss nu motivera varför. Tidigare i detta avsnitt beskrivs liealgebra som tangentrum vid identitetsselementet, och tangentrummet till en punkt är platt, vilket medför att det är lättare att arbeta med liealgebror än liegrupper.

Tangentvektorn till en funktion i en punkt på dess graf talar om hur funktionen beter sig i närheten av denna punkt men den säger ingenting om det globala beteendet av funktionen. På samma sätt beskriver liealgebran hur en liegrupp ser ut i närheten av identitetsselementet. Eftersom vi kan översätta identitetsselementet till varje annan punkt av liegruppen genom att utföra gruppmultiplikation kan vi dra slutsatsen att liealgebra ger oss information om beteendet av liegruppen i närheten av alla punkter. En nackdel med liealgebran är att den inte talar om globala egenskaper som topologisk struktur av liegruppen, till exempel om den är sammanhängande eller enkelt sammanhängande.

Vi presenterar nedan några intressanta exempel på hur man finner liealgebror till de vanligaste liegrupperna⁸

Exempel 5.6 (liealgebra av $GL(n, \mathbb{R})$). Låt $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ vara en liealgebra av $GL(n, \mathbb{R})$. Vi kommer att använda oss av approximationsmetoden och börjar med att definiera en kurva $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ där vi kräver att $c(0) = I_n$. Denna kurva kommer att approximeras enligt $c(s) = I_n + sA + O(s^2)$ där A är en $n \times n$ matris med reella element. Vi studerar vad som händer om vi låter s vara nära noll, $s \mapsto 0$. Observera att det $c(s)$ inte kan försvinna och $c(s)$ måste vara i $GL(n, \mathbb{R})$. liealgebran bestäms genom att beräkna tangentvektorn till $c(s)$ i I_n , vilket vi kan skriva $c'(s)\Big|_{s=0} = A$.

Detta medför att $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ är en mängd av $n \times n$ matriser och $\dim \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = n^2 = \dim GL(n, \mathbb{R})$.

Nästa exempel visar hur man finner liealgebran av $SL(n, \mathbb{R})$ och $SO(n, \mathbb{R})$ som är delgrupper av $GL(n, \mathbb{R})$

Exempel 5.7 (liealgebra av $SL(n, \mathbb{R})$). Vi upprepar samma procedur som i förra exemplet och approximerar kurvan på samma sätt. Om kurvan $c(s)$ skall vara $SL(n, \mathbb{R})$ måste den uppfylla $\det c(s) = 1 + \text{tr} A = 1$, vilket medför att $\text{tr} A = 0$. Detta betyder att $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ är mängden av spårlösa $n \times n$ matriser och $\dim \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1$.

Exempel 5.8 (liealgebra av $SO(n, \mathbb{R})$). Vi låter igen $c(s) = I_n + sA + O(s^2)$. För att denna kurva skall vara i $SO(n, \mathbb{R}) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$ så krävs det att $c(s)^t c(s) = c(s) c^t(s) = I_n$.

Derivering av detta uttryck ger $c'(s)^t c(s) + c(s)^t c'(s) = 0$. Efter insättning av $s = 0$ får vi $A = -A^t$. Detta betyder att liealgebran $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ består av antisymmetriska matriser. I en omgivning av identitetsselementet är liealgebran

⁸Vi följer Nakaharas resonemang s.211

av $O(n)$ samma som liealgebran av $SO(n, \mathbb{R})$ och $\dim \mathfrak{so}(n) = \dim o(n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exempel 5.9 (liealgebror av $GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{C})$ och $U(n)$). liealgebran $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ är en mängd av $n \times n$ matriser med komplexa element och liealgebran av $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ är en mängd av spårlösa matriser med $\dim \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = 2(n^2 - 1)$.

För att hitta $\mathfrak{u}(n)$ upprepar approximationsmetoden och skriver $c(s) = I_n + sA + O(s^2)$. Gruppen $U(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) | MM^\dagger = M^\dagger M = \mathbf{1}\}$ innehåller denna kurva endast om den uppfyller villkoret $c(s)^\dagger c(s) = I_n$, vilket betyder att $c'(s)^\dagger c(s) + c(s)^\dagger c'(s) = 0$. Insättning av $s = 0$ i detta uttryck ger igen $A^\dagger = -A$. Detta medför att $\mathfrak{u}(n)$ är mängden av antisymmetriska, Hermitska matriser med $\dim \mathfrak{u}(n) = n^2$.

Vi har även att $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n)$ är mängden av Hermitska matriser med $\dim \mathfrak{su}(n) = n^2 - 1$.

5.5.2 Enparameter delgrupp

Exponentialfunktionen används på vitt skilda områden eftersom den har många egenskaper som gör den lätt att arbeta med. Vi ska här se om vi kan bygga upp en teori som låter oss hitta en generalisering av denna på mångfaldar.

Ett flöde i någon mångfald M genereras av vektorfält $X \in \mathcal{X}(M)$. Vi vill undersöka hur flödet kan bildas av ett vänsterinvariant vektorfält. Tidigare har vi definierat vänsterinvariant vektorfält som ett vektorfält X_g på en Liegrupp G om villkoret

$$L_{a*} X|_g = X|_{ag} \quad (5.189)$$

är uppfyllt.

Definition 5.17 (Enparameterdelgrupp). En **enparameterdelgrupp** är en kurva $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$ som uppfyller villkoret

$$\phi(t)\phi(s) = \phi(t+s). \quad (5.190)$$

Hädanefter kommer vi enbart att ägna oss åt enparameterdelgrupper som är differentierbara.

Det inses lätt att enparameterdelgruppen är kommutativ:

$$\phi(t)\phi(s) = \phi(t+s) = \phi(s+t) = \phi(s)\phi(t) \quad (5.191)$$

Vidare observerar vi följande relationer

- a) $\phi(0) = e$
- b) $\phi^{-1}(t) = \phi(-t)$.

För beviset av de ovanstående relationerna se C

Låt vår enparameterdelgrupp följa ett vänsterinvariant vektorfält X , $\frac{d\phi^\mu(t)}{dt} = X^\mu(\phi(t))$. Vänstertranslatera nu vektorfältet i punkten 0, vilket ger

$$(L_{t*}) \frac{d}{dt} \Big|_0 = \frac{d}{dt} \Big|_t$$

Vi introducerar nu en inducerad differentialavbildning $\phi_* : T_t\mathbb{R} \rightarrow T_{\phi(t)}G$ som kommer att verka på vårt vektorvärt från 5.5.2, samt betecknar $\phi(t) = g$. Detta ger:

$$\begin{aligned} \phi_* \frac{d}{dt} \Big|_0 &= \frac{d\phi^\mu(t)}{dt} \Big|_0 \frac{\partial}{\partial g^\mu} \Big|_e = X|_e \\ \phi_* \frac{d}{dt} \Big|_t &= \frac{d\phi^\mu(t)}{dt} \Big|_t \frac{\partial}{\partial g^\mu} \Big|_g = X|_g \end{aligned}$$

Exponentialfunktionen spelar en viktig roll i matematisk analys, men inom differentialgeometri och topologi fokuserar vi oss på differentierbara mångfaldar och deras egenskaper. Detta betyder att vi behöver generalisera den vanliga exponentialfunktionen till en exponentialavbildning. Exponentialavbildningen visar sig vara avgörande för att studera liegrupper och liealgebror.

Vi har hittills lärt oss att liealgebror är definierade på tangentrummet till liegruppen vid identitetselementet, med andra ord rummet av alla tangentvektorer vid identitetselementet. Låt oss studera en koppling mellan liealgebror och liegrupper genom exponentialavbildningen.

Definition 5.18 (Exponentiell avbildning). Vi låter G vara en liegrupp och $V \in T_e G$. Låt nu **exponentiellavbildningen** $\exp: T_e G \rightarrow G$ vara

$$\exp(V) \equiv \phi_V(1) \tag{5.192}$$

där $\phi_V(1)$ är enparameterdelgrupp av G definierad av ett unikt vänsterinvariant vektorfält X_V , $L_{g*}V = X_V \Big|_g$, $V \in T_e G$, $g \in G$.

Den exponentiella avbildningen avbildar tangentrummet till liegruppen på liegruppen själv, $T_e G \rightarrow G$. Antag att liealgebran är en linjärisering av liegruppen och att den exponentiella avbildningen tar oss från liealgebran till liegruppen. Därmed delinjäriserar den exponentiella avbildningen liealgebran:

- $\exp : \mathfrak{so}(n) \rightarrow \mathbf{SO}(n)$
- $\exp : \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$

- $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$
- $\exp : \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$

Man kan fråga sig om dessa avbildningar är väldefinierade, och det är de eftersom de tilldelar ett unikt element i liegruppen till varje element i liealgebran. Låt oss nu studera exponentialfunktionen innan vi återknyter till enparameterdelgrupper.

Vi vet sedan tidigare att exponentialfunktionen kan utvecklas i taylorserien

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (5.193)$$

Vi utgår från detta för att definiera exponentialfunktionen på matriser. Om vi låter en liegrupp G vara en mängd av $n \times n$ matriser med reella eller komplexa element kan vi se att exponentialavbildningen är ekvivalent med exponentialfunktionen av en matris

$$e^A = I_n + \sum_{p \geq 0} \frac{A^p}{p!} = \sum_{p \geq 0} \frac{A^p}{p!} \quad (5.194)$$

där $A^0 = I_n$

För bevis av att den ovanstående serien är konvergent och väldefinierad se C.2.

Om $G = \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ och $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ kan vi omdefiniera enparameterdelmängden $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ som

$$\phi_A(t) = e^{tA} = I_n + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n + \dots \quad (5.195)$$

där vi genom att låta $t = 1$ får tillbaka vår exponentialavbildning.

$$\phi_A(1) = e^A = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots \quad (5.196)$$

Exempel 5.10 (Beräkning av matrisexponential). Låt oss beräkna e^A av en antisymmetrisk matris.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$$

Observera att vi kan bryta ut θ samt att kvadraten av matrisen är enhetsmatrisen, så när som på en skalfaktor:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}^2 = -\theta^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Låt även $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, för att underlätta beräkningar. Detta ger att potenser av vår matris A kan skrivas som:

$$\begin{aligned} A^{4n} &= \theta^{4n} I_2, \\ A^{4n+1} &= \theta^{4n+1} J, \\ A^{4n+2} &= -\theta^{4n+2} I_2, \\ A^{4n+3} &= -\theta^{4n+3} J, \end{aligned}$$

Sammantaget har vi:

$$e^A = I_2 + \frac{\theta}{1!} J - \frac{\theta^2}{2!} I_2 - \frac{\theta^3}{3!} J + \frac{\theta^4}{4!} I_2 + \frac{\theta^5}{5!} J - \frac{\theta^6}{6!} I_2 - \frac{\theta^7}{7!} J + \dots$$

$$\Leftrightarrow$$

$$e^A = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \right) I_2 + \left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \right) J.$$

Där termerna inom parenteserna är taylorutvecklingar av $\cos \theta$ respektive $\sin \theta$, vilket betyder att vi slutligen kan skriva:

$$e^A = \cos \theta I_2 + \sin \theta J$$

$$\Leftrightarrow$$

$$e^A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Matrisexponential tillämpas ofta på att lösa ordinära differentialekvationer vilket visas nedan.

Exempel 5.11 (Matrisexponential). Sätt

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 2 \\ 13 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

Låt oss beräkna e^{tA} för att utnyttja detta till att hitta en lösning till $\frac{dx}{dt} = Ax$

med begynnelsevillkoret $x(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

diagonalisering ger $A = PDP^{-1}$ där

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ -1 & 2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vi har $e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ -1 & 2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.197)$$

$$= \begin{pmatrix} 5e^t - e^{2t} - 3e^{-t} & 3e^t - e^{2t} - 2e^{-t} & -e^t + e^{-t} \\ -5e^t + 2e^{2t} + 3e^{-t} & -3e^t + 2e^{2t} + 2e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ 5e^t + e^{2t} - 6e^{-t} & 3e^t + e^{2t} - 4e^{-t} & -e^t + 2e^{-t} \end{pmatrix} \quad (5.198)$$

Och den allmänna lösningen blir $x(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$

där C_1, C_2, C_3 är konstanter. Lösningen till just detta problem får vi till:

$$x(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11e^t + e^{2t} + 8e^{-t} \\ 11e^t - 2e^{2t} - 8e^{-t} \\ -11e^t - e^{2t} + 16e^{-t} \end{pmatrix} \quad (5.199)$$

Detta är ett typexempel på hur man kan utnyttja exponentialfunktionen för att lösa linjära differentialekvationer.

5.5.3 Liegruppernas verkan på mångfalder.

Vi har sett att en liegrupp G via gruppoperationen kan användas som en transformation på mångfalden G , där varje punkt i G samtidigt är ett grupp-element. För att studera en mer allmän situation skall vi försöka att abstrahera en bakomliggande mer allmän struktur rörande samspelet mellan en grupp och geometrin. I avsnittet "Flöden och liederivatan" konstruerade vi en avbildning $\sigma : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$. Här verkar $\mathbb{R}$ som en abelsk grupp på M . Vi formulerar en generalisering av detta i följande definition

Definition 5.19 (Liegruppernas verkan på mångfald). Låt G vara någon liegrupp och M vara en glatt mångfald. En **glatt verkan** av G på M är en gruppdiffgeomorfism

$$G \rightarrow \text{Diff}(M)$$

så att den associerade avbildningen

$$\sigma : G \times M \rightarrow M$$

uppfyller följande villkoren

$$\text{i } \sigma(g_1, \sigma(g_2, p)), \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

$$\text{ii } \sigma(e, p) = p, \quad \forall p \in M$$

Denna definition säger att bilden av p under transformationen⁹ av g_2 : $\sigma(g_2, p)$ är en punkt $p' = \sigma(g_2, p)$ på G . På p' verkar nu elementet g_1 :

$$\sigma(g_1, p') = \sigma(g_1, (\sigma(g_2, p))) \quad (5.200)$$

med samma resultat som om man direkt verkar med gruppprodukten $g_1 \circ g_2$ på p . Det är speciellt viktigt att understryka skillnaden mellan vår tidigare definition av liegrupper där $G \times G \rightarrow G$. Vi har alltså generaliserat ett steg ytterligare genom att gruppen G i $G \times M \rightarrow M$ ej är identisk med M .

Nedan presenteras några exempel¹⁰ på verkan av liegrupper på olika mångfaldar. Vi börjar dock med att definiera och karakterisera denna verkan.

Definition 5.20 (Liegruppens verkan). Låt G vara en Liegrupp som verkar på en mångfald M . Denna verkan $\sigma : G \times M \rightarrow M$ sägs vara

- a) **transitiv** om för någon $p_1, p_2 \in M$ existerar det ett element $g \in G$ sådant att $\sigma(g, p_1) = p_2$;
- b) **fri** om det existerar ett element p sådant att $\sigma(g, p) = p$ då måste g vara det neutrala elementet e ;
- c) **effektiv** om det neutrala elementet $e \in G$ är ett unikt element som definierar verkan på M , med andra ord om $\sigma(g, p) = p, \quad \forall p \in M$ då måste g vara det neutrala elementet.

Exempel 5.12 (liegruppernas verkan). Övre halvplanet är en öppen delmängd av $\mathbb{R}$ med alla punkter $(x, y) \in \mathbb{R}, y > 0$. Låt oss associera H med mängden av komplexa tal, $z \in \mathbb{C}$ och $\Im z > 0$. Om vi definierar en transitiv verkan

$$\sigma: \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) \times H \rightarrow H$$

För något $z \in H$ och för någon matris $A \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ får vi

$$A \cdot z = \frac{az+b}{cz+d},$$

där

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

med $\det A = 1$.

Avbildningarna som uppfyller $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ kallas för Möbiustransformationer.

⁹Lägg märke till att transformationen är en translation

¹⁰För utförligare behandling se [8]

Möbiustransformationer¹¹ är grundläggande avbildningar som verkar på ett horisontellt plan och skickar varje punkt till en motsvarande punkt under vissa krav. Det finns fyra grundläggande typer: enkel translation, dilatationer, rotationer och invers där man vänder planet ut och in. Linjer på planet kan antingen förbli linjer eller omvandlas till cirklar och lokala vinklar bevaras. Om vi behandlar 3D-rummet och placerar en Riemannsfär ovanför planet och lyser igenom toppen av den kan vi visualisera möbiustransformationerna. När sfären förflyttas följer punkterna på planet efter vilket betyder att när sfären genomgår translation, genomgår även planet translation. Om vi lyfter sfären skapas dilatation och om vi roterar den runt en rotationsaxel roterar även planet med. Inversen fås genom att rotera sfären runt den horisontella axeln. Även de mest komplicerade Möbiustransformationer visar sig som enkla rörelser av sfären.

Exempel 5.13 (liegruppernas verkan). Låt mängden av $n \times n$ symmetriska och positiva matriser betecknas **MPD**(n). Låt oss nu verka med liegruppen $A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ på $S \in \mathbf{MPD}$

$$A \cdot S = ASA^T$$

Denna verkan är även transitiv eftersom varje **MPD** matris S kan skrivas som $S = BB^T$ för någon inverterbar matris B .

Exempel 5.14 (liegruppernas verkan). liegruppen **SO**(3) består av linjära avbildningar som är avståndsbevarande (med determinant ett). Varje linjär avbildning lämnar origo fixt och man ser lätt att rotationer avbildar S^2 på sig själv. Vi har därför följande verkan

$$\mathbf{SO}(3) \times S^2 \rightarrow S^2$$

definerad som

$$\sigma : R \cdot x = Rx$$

Denna verkan är transitiv. Detta beror på att för två punkter x, y på sfären S^2 finns en rotation, vars axel är vinkelrätt mot planet som innehåller x, y och origo O , av sfären¹² som avbildar x till y . På samma sätt kan vi för valfritt $n \geq 1$ skapa en verkan på den reella enhetssfären, $S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$, genom:

$$\sigma : \mathbf{SO}(n) \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}.$$

Exempel 5.15 (liegruppernas verkan). Låt $M \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ och $x \in \mathbb{R}^n$. Vi definierar verkan av **GL**($n, \mathbb{R}$) på $\mathbb{R}^n$ som vanlig multiplikation mellan matris och vektor.

¹¹För de intresserade rekommenderar vi Möbius Transformations Revealed av Douglas N. Arnold och Jonathan Rogness, University of Minnesota

¹²Detta plan är inte unikt när x and y är antipodiska

$$\sigma : (M, x) = M \cdot x.$$

Ibland är det användbart att tänka sig en grupp som ett abstrakt algebraiskt objekt med olika representationer. Vi representerar gruppens element som matriser, vilket mer allmänt är linjära transformationer.

Vi låter nu liegruppen verka på sig själva på ett speciellt sätt. Denna verkan kallas för den adjungerade representationen och defineras nedan.

Definition 5.21 (Den adjungerade representationen). Låt $a \in G$ och vi definierar homomorfism $ad_a : G \rightarrow G$ genom konjugation

$$ad_a : g \mapsto aga^{-1} \tag{5.201}$$

Homomorfismen kallas för den adjungerade representationen och den är den naturliga representationen av en liegrupp G på sin egen liealgebra. Liegruppen opererar på sig själv på ett linjärt sätt med konjugation.

Kapitel 6

De Rham kohomologigrupper

De Rham kohomologi är ett betydelsefullt och intressant men krävande koncept som tillhör algebraisk topologi och spelar en mycket viktig roll i matematisk fysik och andra relaterade ämnen. Det är ett matematiskt verktyg för att få ut topologisk information om glatta mångfalder. Kohomologi teori är baserad på existensen av differentiella former med föreskrivna egenskaper. Det som gör de Rham kohomologi speciellt är att vi erhåller topologisk information genom att använda differentiella metoder.

Dessa strukturer är användbara för att framställa relationer mellan kedjor och rand av något topologiskt rum eller algebraisk konstruktion. Vi presenterar de viktigaste begreppen innan vi definierar kohomologigrupper och tar upp deras egenskaper.

6.1 De Rham Kohomologigrupper och integraler på mångfalder

För den fortsatta texten kommer vi att behöva förstå hur man kan tolka simplex på mångfalder, samt deras tillhörande egenskaper i det sammanhanget. Detta kan göras genom att avbilda ett standardsimplex ω_r i $\mathbb{R}^r$ på mångfalden M med hjälp av en glatt funktion f . Vi definierar nu ett **singulärt r-simplex**, s_r , på M som bilden av f , $f(\sigma_r) = s_r$. Vi kommer i fortsättningen att utelämma ordet singulärt eftersom det i sammanhanget borde vara tydligt vad vi pratar om. Vi behöver nu en ny definition av simplex eftersom det inte finns någon bra tolkning av geometriskt oberoende på mångfalder. Innan vi går närmare in på detta, behöver vi även omdefiniera kedjor, kedjegrupper, randgrupper och cykelgrupper analogt med hur vi gjorde det i avsnittet Homologi.

Definition 6.1. • En **r-kedja**, c , på en mångfald M är summan av r -simplexer med reella koefficienter: $c_r = \sum_i a_i s_{r,i}$ där $a_i \in \mathbb{R}$ och $s_{r,i}$ är i :te r -simplexet.

- **Kedjegruppen**, $C_r(M)$, på en mångfald M , är mängden av alla r -kedjor på mångfalden: $C_r(M) = \{c_r : c_r = \sum_i a_i s_{r,i}\}$
- **Randen** till ett r -simplex, ∂s_r sätter vi som bilden av randen till vårt r -simplex i $\mathbb{R}^n$: $\partial s_r = f(\partial \sigma_r)$
- En **r -cykel** på M är en r -kedja utan rand, $\partial c_r = 0$.
- **Randgruppen**, $B_n(M)$, på en mångfald M är mängden av alla n -rander på M : $B_n(M) = \{b_n : b_n = \partial c_{n+1}\}$
- **Cykelgruppen**, Z_n , är mängden av alla n -cykler på M : $Z_n = \{c_n : \partial c_n = 0\}$

Detta är rakt av en övergång till mångfalder, med definitioner som följer av vår simplexdefinition. Vi fortsätter med att fördjupa våra kunskaper inom differentiella former och deras integraler innan vi undersöker de Rham kohomologigrupperna.

Ett volymelement ω i $\mathbb{R}^r$, dvs en r -form skrivs, med $a(x)$ som skalärfunktion:

$$\omega = a(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^r$$

Tolkningen av volymelement är lik den vi har sett från flervariabelanalys, med $a(x)$ som skalfaktor visar $dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^r$ hur mycket $a(x)$ sträcker ut sig i alla riktningar. Detta bildar alltså en r -dimensionell volym.

Nu definierar vi integralen av r -formen ω över ett standardsimplex $\bar{\sigma}_r$ genom:¹

$$\int_{\bar{\sigma}_r} \omega \equiv \int_{\bar{\sigma}_r} a(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^r$$

Detta är en naturlig men viktig definition för att komma närmare ett sätt att analytiskt behandla integraler på mångfalder. Högersidan är vår vanliga flerdimensionella integral.²

Låt oss nu definiera integration av ω på ett singulärt r -simplex s_r i M genom:

Definition 6.2 (Integration av r -former över ett singulärt r -simplex).

$$\int_{s_r} \omega = \int_{\bar{\sigma}_r} f^* \omega \quad (6.1)$$

¹Vi kommer utgå från att läsaren sedan tidigare har maskineriet att integrera generella funktioner, alltså använder vi oftast Lebesgueintegralen och inte Riemannintegralen. Kom däremot ihåg att de funktioner som är riemannintegrerbara alltid är lebesgueintegrerbara samt att då överrensstämmer i båda integralerna.

²För att integration över en r -form ω ska vara meningsfullt så krävs det att ω har kompakt stöd på M . Detta betyder att mängden punkter $p \in M$ där $\omega(p) \neq 0$ eller deras slutna hölje (closure) skall vara kompakt.

Där $f : \bar{s}_r \rightarrow M$ är glatt och sådan att $s_r = f(\bar{s}_r)$. Eftersom $f^*\omega$ är en r -form i $\mathbb{R}^r$ är högersidan återigen vanlig flerdimensionell integration. Hur kan vi gå tillväga för att lösa integration över kedjor? Om vi drar oss till minnet att en kedja är en formell summa (med reella koefficienter) av simplex, och sedan utnyttjar vår definition av integral över simplex ovan, kan vi definiera integralen över en allmän r -kedja. Denna blir då den formella summan av integralerna över simplexen:

$$\int_{c_r} \omega = \sum_i a_i \int_{s_{r,i}} \omega, \text{ där } c_r = \sum_i a_i s_{r,i}$$

6.1.1 Stokes sats

Nu är vi redo att formulera en känd integralsats

Sats 6.1 (Stokes sats). Sätt $\omega \in \Omega^{r-1}(M)$ och $c \in C_r(M)$. Då gäller:

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$$

Låt oss förklara några typiska bevisidéer för Stokes sats.³ Eftersom c är en linjärkombination av simplex räcker det med att visa satsen för endast ett simplex. Ett annat sätt att gå till väga i bevisgången är att utnyttja en orienterad uppdelning av mångfalden, vilket innebär att kurvor som är parallella men har olika orientering kommer att ta ut varandra och slutligen återstår endast randen.

Från envariabelanalys har vi att integralen över en funktion f på ett intervall $[a, b]$ kan beräknas genom primitiva funktionen F genom $F(b) - F(a)$. Lägg märke till att $\{a\} \cup \{b\}$ är randen till intervallet $[a, b]$ och observera att ω är en generalisering av primitiv funktion till $d\omega$. Stokes sats på mångfalder är alltså helt analog den vi känner igen från analysen. Notera att vi utgår från att vi har en $(r-1)$ -form och skapar sedan en r -form genom den externa derivatan. Det är inte säkert att en form alltid kan skrivas som derivatan av en annan form. Vi skall nu härleda vektorfältens Stokes och Gauss sats:

Sats 6.2. Stokes sats och Gauss sats som vi känner igen dem från vektorfälten:

- **Stokes vektorfältssats:** $\int_\gamma \nabla \times \mathbf{F} d\gamma = \int_{\partial\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$
- **Gauss sats:** $\int_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV = \int_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS$, med $\partial V = S$

Både Gauss sats och det som här kallas Stokes vektorfältssats är alltså specialfall av Stokes sats (6.1). Sammanfattningsvis är alltså denna sats en viktig och kraftfull sats.

³För formellt bevis, se s. 228 i Nakahara [1]

6.1.2 Sluten och exakt form

Vi såg ovan att Stokes sats berättar hur vi kan beräkna integralen av derivatan av en form på ett område, genom att integrera formen själv över randen på området. Detta leder oss till att ställa frågan hur det är om vi har integralen över ett område av någon form, om denna formen i sin tur är derivatan av någon annan form. Är den det kan vi använda Stokes sats. Vi vill klassificera dessa olika typer av former och definierar därför:

Definition 6.3. .

- En form är **sluten** om dess externa derivata är noll: $d\omega = 0$
- En form är **exakt** om den är extern derivatan av någon annan form: $\omega = d\phi$

Namnen är välbefogade: en sluten form förändras inte, till exempel en skalärfunktion är konstant, ett vektorfält har ingen källa (divergensen är noll) eller är rotationsfritt (rotationen är noll). Även benämningen 'exakt form' känns välbefogat: integralen av en exakt form över en kurva är, som en rak följd av Stokes sats, enbart beroende på start- och slutpunkt av kurvan. Generellt är integralen av en exakt form enbart beroende på randen till området formen integreras över.

Låt oss ge ytterligare två exempel på slutna former. Vi antar att rummet är $\mathbb{R}^n$.

- En skalärfunktion är en 0-form. Den externa derivatan av skalärfunktionen är gradienten. Om formen är sluten betyder det att gradienten är noll. Om gradienten är noll på hela området har vi en konstansfunktion. Detta betyder också att integralen av formen över varje sluten kurva vara noll.
- En 1-form är ett vektorfält. Den externa derivatan av ett vektorfält är dess rotation. Så om formen är sluten har inte vektorfältet någon rotation. Detta betyder att vektorfältets bidrag kommer precis att ta ut varandra över varje sluten kurva, vilket betyder att integralen av fältet över en sluten kurva är noll.

Vi kan även se att exakta former måste vara slutna eftersom, för $\omega = d\phi$;

$$\int \omega = \phi(A) - \phi(A) = 0 \quad \forall \phi \in \Omega^{r-1}$$

enligt Stokes sats. Det ser vi formellt eftersom d är nilpotent.⁴ Vi formulerar därmed följande sats:

Sats 6.3. $d\omega = 0$ om $\omega = d\phi$, ty $d\omega = d(d\phi) = 0$.

⁴Ett element n är nilpotent om $n^2 = 0$

Man kan fråga sig om inte det omvända gäller: att slutna former också är exakta, eftersom fallet varit så i våra tidigare exempel. Anledning till detta är att $\mathbb{R}^n$ är en mångfald som beter sig snällt och nästa avsnitt ska vi undersöka vilka krav vi måste ställa på mångfalden för att varje slutna form även ska vara exakt.

6.1.3 Poincarés lemma

Vi har lärt oss att varje exakt r -form är sluten, detta eftersom den externa derivatan av en exakt form är noll. Från vektorfälten känner vi även till att rotationsfria fält har en potential, vilket översatt till formspråk betyder att slutna former är exakta. Detta betyder att då vi har behandlat dessa situationer i vektorfält är sluten och exakt form ekvivalenta. Detta gäller dessvärre inte generellt sätt.

Exempel 6.1. Låt $d\theta$ vara en 1-form, med θ definierad som vanligt - vinkeln mot ena koordinataxeln, definierad på $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Den är då sluten men inte exakt. Man inser utan svårighet att den är sluten, men för att se att den inte är exakt behöver man beräkna integralen ett varv runt origo. $\int_{\gamma} d\theta = 2\pi$ då γ är ett slutet varv runt origo, orienterat medurs. Notera att θ inte är globalt definierad, eftersom vinkeln är samma varje heltaligt varv. Det är detta som gör att formen inte är exakt.

Exempel 6.2. Låt $d\theta$ vara definierad som i exemplet ovan, men nu på ett snittat plan: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$. I detta fall är vår 1-form både sluten och exakt, vilket kan inses eftersom θ nu är globalt definierad - men även via Poincarés lemma som snart följer.⁵

Vi kan observera en viktig detalj om slutna former: integralen av en sluten form runt en sluten kurva är inte alltid noll, det sammanfaller bara då formen är exakt. Poincarés lemma knyter ihop dessa begrepp och visar när vi kan förvänta oss att en sluten form också är exakt. Detta beror på hur mångfalden, som är definitionsmängden för vår form, beter sig.

Lemma 6.1 (Poincarés lemma). Om en koordinatomgivning U av en mångfald M kan deformeras kontinuerligt till en punkt $p_0 \in M$ så är varje sluten r -form på U även exakt.⁶

Lägg märke till att i exemplet ovan kan vi deformera definitionsmängden kontinuerligt till origo för vår form. Dock ligger origo inte i definitionsmängfalden för vår form och alltså gäller inte teoremet i det fallet.

⁵Detta är likt hur man i komplex analys använder principalgrenen till logaritmer, vilket inte är ett sammanträffande som vi kommer se nedan.

⁶För bevis hänvisar vi till s. 235 [1]. Notera att detta är en intuitiv formulering som duger för våra syften, men som inte är matematisk korrekt.

Vi kan relatera detta till både vektorfält och komplex analys. I vektorfält visar divergensen om det finns källor eller ej, vilka betyder att mångfalden inte kan deformeras till en punkt. Detta eftersom källor symboliserar en urartning. Lägg märke till att divergensen är den externa derivatan av en 2-form.

Då vi behandlar komplex analys, kan vi tänka oss att en funktion $f(z)$ är en deformation av sin definitions mängd $D \subseteq \mathbb{C}$ till en annan typ av mångfald (värdemängden) $V \subseteq \mathbb{C}$. Detta betyder att om funktionen har några singulariteter på D kommer dessa manifesteras sig som hål i värdemängden, vilket är precis detsamma som att definitions mängden inte är dras ihop till en punkt. Det blir tydligare om man tänker på $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ⁷.

Vidare betyder detta också att varje sluten form är exakt lokalt.

6.2 Exempel på integration av r-former.

Exempel 6.3 (Integration av en 1-form). Låt α vara en 1-form

$$\alpha = 2dx + 3xdy$$

och P en delkurva till kurvan $y = x^3$ från punkten $(0, 0)$ till punkten $(1, 1)$. Först parametriserar vi P genom att skriva

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^3 \end{cases} \quad \text{där } 0 \leq t \leq 1$$

Vi sätter in detta i integralen och får

$$\begin{aligned} \int_P \alpha(x, y) &= \int_0^1 \alpha(t, t^3) dt = \\ &= \int_0^1 [2dt + 3td(t^3)] = \int_0^1 (2 + 9t^2) dt = 4 \end{aligned}$$

där d opererar på t^3 och vi använder oss av implicit differentiering för att få $3t^2 dt$.

Nästa exempel kräver lite mer beräkningar men det visar också att differentiella former och deras integration tillämpas i problem av fysikalisk natur.

Exempel 6.4 (Integration av en 2-form: Energins flöde från Solens yta). Låt

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R_{solen}^2\}$$

⁷ $(\mathbb{C}, +, *) \cong (\mathbb{R}^2, +, \times)$ med $\times : (a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Energins flöde från Solen genom ytan $S \subset M$ bestäms genom att integrera följande 2-form över S

$$f = \frac{E}{4\pi} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dy \wedge dz + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dz \wedge dx + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dx \wedge dy \right)$$

Låt oss börja med att beräkna den yttre derivatan av f eftersom resultatet av denna beräkning kommer att hjälpa oss tolka resultatet av integrationen av f . Vi omskriver nämnaren för att förenkla beräkningar:

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

Vilket medför att den differentiella formen blir:

$$f = \frac{E}{4\pi} \left(\frac{x}{r^3} dy \wedge dz + \frac{y}{r^3} dz \wedge dx + \frac{z}{r^3} dx \wedge dy \right)$$

Vi beräknar den yttre derivatan och använder oss av följande egenskaper av differentiella former

$$d(\omega + \psi) = d\omega + d\psi$$

$$d(\varphi dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx_j \wedge (dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})$$

Vi applicerar de ovanstående relationerna på f och får

$$\begin{aligned} df &= \frac{1}{r^6} \left(r^3 - 3xr^2 \frac{\partial r}{\partial x} \right) dx \wedge dy \wedge dz + \\ &+ \frac{1}{r^6} \left(r^3 - 3yr^2 \frac{\partial r}{\partial y} \right) dy \wedge dz \wedge dx + \\ &+ \frac{1}{r^6} \left(r^3 - 3zr^2 \frac{\partial r}{\partial z} \right) dz \wedge dx \wedge dy + \\ &= \frac{1}{r^6} ((r^3 - 3x^2r) + (r^3 - 3y^2r) + (r^3 - 3z^2r)) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= 0, \end{aligned}$$

där följande relationerna användes

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

Detta indikerar att vår 2-form är sluten. Fysikalisk tolkning säger att det inte finns någon annan energikälla förutom den som befinner sig.

Nästa del av beräkningarna beskriver inte bara flödet av solens energi utan visar även om f är exakt eller ej.

I allmänhet integrerar vi följande 2-form över någon orienterad mångfald på följande sätt:

$$\int_S f = \int_S \frac{1}{2} f_{\mu\nu}(x(u)) J^{\mu\nu}(x(u)) du^1 \wedge du^2 \quad (6.2)$$

I vårt fall S är 2-sfär som vi skall integrera över. Vi följer flervariablersanalys och parametriserar ytan $x^\mu = x(u)$, $u = (u^1, u^2) \in S$ med

$J^{\mu\nu} = e_1^\mu e_2^\nu - e_1^\nu e_2^\mu$ där e_1 och e_2 är tangentvektorer till ytan som är definierade $e_j^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial u^j}$ och u^1, u^2 är lokala koordinater på mångfalden och $(x^\mu, y^\nu) = (y, z), (z, x), (x, y)$. Vi inför sfäriska koordinater

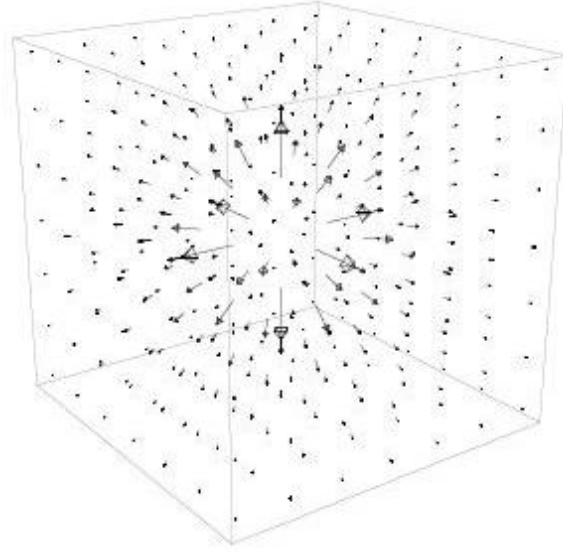
$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \phi \\ y = R \sin \theta \sin \phi \\ z = R \cos \theta \end{cases}$$

och ersätter $u_1 = \theta$ och $u_2 = \phi$ med vinklarna $0 \leq \phi \leq 2\pi$ och $0 \leq \theta \leq \pi$. Vi beräknar vidare komponenter av tangentvektorerna

$$\begin{cases} e_1^x = \frac{\partial x}{\partial \theta} = R \cos \theta \cos \phi \\ e_1^y = \frac{\partial y}{\partial \theta} = R \cos \theta \sin \phi \\ e_1^z = \frac{\partial z}{\partial \theta} = -R \sin \theta \\ e_2^x = \frac{\partial x}{\partial \phi} = -R \sin \theta \sin \phi \\ e_2^y = \frac{\partial y}{\partial \phi} = R \sin \theta \cos \phi \\ e_2^z = \frac{\partial z}{\partial \phi} = 0 \end{cases}$$

och på samma sätt Jakobians komponenter

$$\begin{cases} J^{yz} = e_1^y e_2^z - e_1^z e_2^y = R^2 \sin^2 \theta \cos \phi \\ J^{zx} = e_1^z e_2^x - e_1^x e_2^z = R^2 \sin^2 \theta \sin \phi \\ J^{xy} = e_1^x e_2^y - e_1^y e_2^x = R^2 \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$



Figur 6.1: Integration av en 2-form.

vi är redo att fortsätta med beräkningen:

$$\begin{aligned}
 \int_S f &= \int_S \frac{1}{2} f_{\mu\nu}(x(u)) J^{\mu\nu}(x(u)) du^1 \wedge du^2 \\
 &= \int_S \frac{E}{4\pi} \frac{R \sin \theta \cos \phi}{R^3} J^{yz}(\theta, \phi) d\theta \wedge d\phi \\
 &\quad + \int_S \frac{E}{4\pi} \frac{R \sin \theta \sin \phi}{R^3} J^{zx}(\theta, \phi) d\theta \wedge d\phi \\
 &\quad + \int_S \frac{E}{4\pi} \frac{R \cos \theta}{R^3} J^{xy}(\theta, \phi) d\theta \wedge d\phi \\
 &= \frac{E}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\theta \sin \theta = -\frac{E}{2} \cos \theta \Big|_0^\pi \\
 &= E
 \end{aligned}$$

Detta resultat visar tydligt att f inte är en exakt form eftersom om den skulle vara exakt hade integralen varit lika med noll - vilket hade betytt att ingen energi skulle strömma genom ytan. Fysikalisk tolkning av integralen är mängden av energi som passerar sfärens yta per tid se figur 6.1. Som avslutning är det intressant att veta vilken typ av energikälla det handlar om. Detta kan lätt kontrolleras genom att operera med Hodge operator⁸ på 2-form.

⁸Hodge operator $*$ är en linjär avbildning $*$: $\Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{m-r}(M)$ som opererar på en r -form. Detta kommer att behandlas i nästa kapitel "Riemann geometri" i avsnittet 8.8.1.

$$\begin{aligned}
*f &= \frac{E}{4\pi} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dy \wedge dz + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dz \wedge dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx \wedge dy \right) = \frac{E}{4\pi} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dy + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dz \right) = \frac{E}{\pi} \frac{\hat{r}}{r^2}
\end{aligned}$$

Denna beräkning visar att det är en punktkälla som befinner sig intui i sfären.

6.3 Dualitet mellan homologi och kohomologigrupper- de Rhams teorem

Kohomologi beskrivs av en sekvens av abelska grupper som tillsammans med en operator bygger upp ett så kallat **kokedjekomplex**. Ett kokedjekomplex är en allmän struktur som existerar för många olika abelska grupper och operatorer. I fallet kohomologi, så utgörs de abelska grupperna av vektorrummet av r -former på $\Omega^r(M)$ och operatorn är den externa derivatan d^r . Kokedjekomplexet (Ω^r, d^r) utgörs då av:

$$\Omega^0 \xrightarrow{d^0} \Omega^1 \xrightarrow{d^1} \Omega^2 \xrightarrow{d^2} \Omega^3 \xrightarrow{d^3} \dots \quad (6.3)$$

De abelska grupperna Ω^r länkas alltså samman via en homomorfism som ges av den externa derivatan

$$d^r : \Omega^r \longrightarrow \Omega^{r+1} \quad (6.4)$$

dessutom så är sammansättningen av två följande avbildningar noll.

$$d^{n+1}d^n = 0 \quad (6.5)$$

Låt oss nu fortsätta med att definiera de Rham-kohomologigrupperna, vilka visar sig vara tätt sammanknutna med de vanliga homologi-grupperna på en mångfald. Detta trots att de ytligt verkar vara vitt skilda objekt.

Definition 6.4 (de Rham kohomologigrupp). Låt M vara m -dimensionell mångfald. Mängden av slutna r -former kallas r -te **kocykelgruppen**- $Z^r(M)$ och mängden av exakta r -former kallas r -te **korandgruppen**- $B^r(M)$. Båda grupperna är vektorrum med reella koefficienter. Den r -te de Rham kohomologigruppen definieras som

$$H^r(M; \mathbb{R}) \equiv Z^r(M)/B^r(M) = \frac{\ker d_{d+1}}{\text{im } d_d}. \quad (6.6)$$

Ett element i kohomologigruppen består alltså av ekvivalensklasserna av slutna r -former som bara skiljer sig med en exakt form.

Exempel 6.5 (Beräkning av den 0-te och den första kohomologigruppen). Låt oss studera tallinjen, det vill säga sätt vår mångfald till de reella talen, $M = \mathbb{R}$. Vi har då komplexet:

$$0 \xrightarrow{d} \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} 0 \quad (6.7)$$

Vi behöver beräkna nollte kocykelgruppen samt korandgruppen för att ta fram nollte kohomologigruppen. Nollte kocykelgruppen är alla slutna 0-former på M vars yttre derivata är noll. Detta gäller godtycklig konstant, vilket betyder att $Z^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Låt oss nu kolla på korandgruppen. Nollte korandgruppen är alla 0-former som har primitiv funktion. Vi ser på vårt komplex ovan att denna grupp måste vara 0, eftersom primitiva funktionen till en 0-form skulle vara en (-1) -form, $B^0(\mathbb{R}) = 0$. Detta tillsammans ger att $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

För att beräkna den första kohomologigruppen observerar vi till att börja med att varje 1-form måste vara sluten ty det finns inga 2-former på $\mathbb{R}$, $Z^1(\mathbb{R}) = \Omega^1(\mathbb{R})$. Vi lutar oss på ett välkänt resultat från envariabelanalys då vi ska studera vilka former som har primitiv funktion. Låt $g(x)dx$ vara en 1-form, och skapa 0-formen f genom integralen:

$$f(x) = \int_0^x g(x)dx$$

Detta betyder att $df = g(x)dx$ och alltså är $g(x)dx$ exakt. Lägg märke till att vi inte behöver göra några inskränkningar på vår 1-form $g(x)dx$ för att säga detta, och därför är varje 1-form på de reella talen exakt, $B^1(\mathbb{R}) = \Omega^1(\mathbb{R})$. Första kohomologigruppen blir noll, och vi ser av komplexet att detta gäller alla kohomologigrupper som inte är nollte, $H^r(\mathbb{R}) = 0$ $r \in \{2, 3, 4, \dots\}$.

I kapitel 2 har vi definierat ett vektorrum och associerat med det duala vektorrummet. Vi vill nu visa en viktig relation mellan homologi och kohomologigrupper. Vi börjar att definiera en inre produkt av en r -form och en r -kedja. Vidare låter vi M vara en m -dimensionell mångfald. Låt nu $\omega \in \Omega^r(M)$ och $c \in C_r(M)$ där $1 \leq r \leq m$ och definiera en inre produkt mellan dem $(\ , \) : C_r(M) \times \Omega^r(M) \rightarrow \mathbb{R}$ genom att skriva

$$c, \omega \mapsto (c, \omega) \equiv \int_c \omega. \quad (6.8)$$

Den inre produkten är alltså integralen av r -formen ω över kurvan c . Notera att med hjälp av Stokes sats kan den inre produkten skrivas på en kompakt form:

$$(c, d\omega) = (\partial c, \omega) \quad (6.9)$$

Om vi nu istället skapar en inre produkt mellan element av homologigruppen $H_r(M)$ och kohomologigruppen $H^r(M)$ kan vi visa att $H_r(M)$ är en dual till kohomologigruppen $H^r(M)$. Låt $[c] \in H_r(M)$ och $[\omega] \in H^r(M)$ och vi definierar återigen en inre produkt mellan dessa element $\Lambda : H_r(M) \times H^r(M) \rightarrow \mathbb{R}$ som

$$\Lambda : ([c], [\omega]) \equiv (c, \omega) = \int_c \omega. \quad (6.10)$$

Sats 6.4 (de Rham's teorem.). Om M är en kompakt mångfald och $H_r(M)$ respektive $H^r(M)$ är ändlig dimensionella och avbildningen

$$\Lambda : H_r(M) \times H^r(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

är bilinär och icke-degenererad då är $H^r(M)$ det duala vektorrummet av $H_r(M)$.

Dualiteten är en viktig egenskap som bland annat medför att $H_r(M)$ är isomorft med $H^r(M)$. Det finns fler exempel på liknande isomorfism mellan homologi och kohomologigrupper

- $H^0(M) \cong H_0(M) \cong \underbrace{\mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}}_n$ om M har n -sammanhängande komponenter
- $H^1(S^1) \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{R}$

Vidare kan vi även visa att det finns en relation mellan Bettital och respektive homologi och kohomologigrupper. De tidigare definierade Bettitalen kan skrivas som

$$b_r(M) \equiv \dim H_r(M) \quad (6.11)$$

där $\dim H_r(M)$ kallas för r -te Bettital av M . Detta medför att vi kan introducera följande relation

$$b^r \equiv \dim H^r(M) = \dim H_r(M) = b_r(M)$$

vilket återigen indikerar på ett starkt samband mellan homologi- och kohomologiteori. Man kan också uttrycka Eulerkarakteristiken på följande sätt

$$\chi(M) = \sum_{r=1}^m (-1)^r b^r(M). \quad (6.12)$$

Den sista ekvationen utgör en direkt länk mellan topologi och analys eftersom vänsterled är en topologisk invariant som karakteriserar topologiska rum och högerled innehåller ett rent analytiskt uttryck.

6.3.1 Poincarés dualitet

Innan vi skall studera kohomologigruppernas struktur skall vi titta närmare på en ytterligare egenskap som kallas **Poincarés dualitet**. Vi låter M vara m -dimensionel mångfald och vidare antar vi att $\omega \in H^r(M)$ och $\eta \in H^{m-r}(M)$. Vi definierar en inre produkt $\langle, \rangle : H^r(M) \times H^{m-r}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ som

$$\langle \omega, \eta \rangle \equiv \int_M \omega \wedge \eta. \quad (6.13)$$

där $\omega \wedge \eta$ betecknar ett volymelement.

Denna produkt definierar **Poincarés dualitet** mellan $H^r(M)$ och $H^{m-r}(M)$ och är bilinär men inte singulär. En intressant observation av Eulerkarakteristiken är att mångfalder med udda dimension försvinner

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \sum (-1)^r b_r = \frac{1}{2} \left\{ \sum (-1)^r b_r + \sum (-1)^{m-r} b_{m-r} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum (-1)^r b_r - \sum (-1)^{-r} b_r \right\} = 0. \end{aligned} \quad (6.14)$$

där vi använde oss av Betti-tal symmetri - nämligen $b_r = b_{m-r}$.

6.4 De Rham kohomologigrupper och deras struktur.

En intressant egenskap hos de Rham kohomologigrupper är att de kan ha en ringstruktur, medan homologigrupper kan inte ha det. För en definition av algebraiska ringar se i appendix avsnitt B.2. Ringar är mycket intressanta och betydelsefulla algebraiska objekt. Deras struktur kan varieras från enkla till väldigt komplicerade strukturer med många tillämpningar i fysik i bland annat teorier om supersymmetriska fält och kvantringsteori. Det finns flera olika typer av ringar:

- Ringen av heltal $\mathbb{Z}$
- Ringen av gaussiska heltal $\mathbb{Z}[i]$
- Ringen av polynom $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ i n variabler
- Ringen av $n \times n$ matriser
- Ringen av reella tal $\mathbb{R}$
- Trivial ring

Konceptet bakom algebraiska ringar kan också tillämpas på kohomologiteori där vi vill introducera kohomologiringer av topologiska rum. Vi fortsätter nu med att definiera dessa kohomologiringer.

6.4.1 Kohomologiringar

Låt $[\omega]$ vara ett element av $H^q(M)$ och $[\eta]$ vara ett element av $H^r(M)$ (en klass av slutna q och r -former). Kilprodukten av två slutna q och r -former (externa produkten) är alltid en sluten $(q+r)$ -form som är ett element av $H^{q+r}(M)$, därmed är kilprodukten av klasser väldefinierad $[\omega] \wedge [\eta] = [\omega \wedge \eta]$ och beror inte på vilka representanter vi väljer. Låt oss skriva $\omega' = \omega + d\psi$ och sätt in detta i vår kilprodukt

$$[\omega'] \wedge [\eta] \equiv [(\omega + d\psi) \wedge \eta] = [\omega \wedge \eta + d(\psi \wedge \eta)] = [\omega \wedge \eta]$$

och produkten $\wedge : H^q(M) \times H^r(M) \rightarrow H^{q+r}(M)$ är en väldefinierad avbildning.

de Rham kohomologi ring $H^*(M)$ definieras av den direkta summan

$$H^*(M) \equiv \bigoplus_{r=1}^m H^r(M) \quad (6.15)$$

där produkten kommer från den externa produkten

$$\wedge : H^*(M) \times H^*(M) \rightarrow H^*(M) \quad (6.16)$$

Den direkta summan av ringar $R_1, R_2, \dots, R_n$ är en mängd

$$R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_n = \{r_1, r_2, \dots, r_n\} : r_i \in R_i \text{ för } i = 1, \dots, n$$

med addition och multiplikation definierad komponentvis, det vill säga

$$(r_1, r_2, \dots, r_n) + (s_1, s_2, \dots, s_n) = (r_1 + s_1, r_2 + s_2, \dots, r_n + s_n)$$

$$(r_1, r_2, \dots, r_n) \cdot (s_1, s_2, \dots, s_n) = (r_1 s_1, r_2 s_2, \dots, r_n s_n)$$

Lemma 6.1. Den direkta summan av godtycklig många ringar är en ny ring.

Exempel 6.6 (Den direkta summan av Lie algebror). Låt $\mathfrak{g}$ och $\mathfrak{g}'$ beteckna två Lie algebror och deras direkta summa är ett vektorrum $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ bestående av paren $(x, x'), x \in \mathfrak{g}, x' \in \mathfrak{g}'$ med operationen

$$[(x, x'), (y, y')] = ([x, y], [x', y']), \quad x, y \in \mathfrak{g}, \quad x', y' \in \mathfrak{g}'$$

Vi har redan sett att det finns en direkt relation mellan Betti talet och Eulerkarakteristiken och vi är nu intresserade av att ta reda på om det finns någon relation mellan de redan introducerade kohomologiringarna av respektive mångfalder. För att göra en sådan studie måste vi först introducera ytterligare en formel som har en viktig betydelse inom algebraisk topologi.

6.4.2 Künneths formel

Künneths formel relaterar kohomologi av två objekt med kohomologi av deras produkt. Med andra ord kan vi säga att den skapar samband mellan singular kohomologi av två topologiska rum, till exempel X och Y med deras produkt $X \times Y$. Vad som är intressant är att Künneths formel gäller för båda kohomologi- och homologiteorier.

I det enklaste fallet är relationen mellan dessa topologiska rum och deras produkt en tensorprodukt.

Vi låter M vara en produktmångfald definierad som $M = M_1 \times M_2$. Låt vidare $\{\omega_i^p\}$ ($1 \leq i \leq b^p(M_1)$) vara en bas av $H^p(M_1)$ och $\{\eta_i^p\}$ ($1 \leq i \leq b^p(M_2)$) vara basen av $H^p(M_2)$. Vi noterar att $\omega_i^p \wedge \eta_j^{r-p}$ ($1 \leq i \leq r$) är en sluten r -form i M . Varje element som tillhör $H^r(M)$ kan fördelas till en summa av en produkt av elementen $H^r(M_1)$ och $H^{r-p}(M_2)$. Vi kan därmed skriva

Künneths formeln

$$H^r(M) = \bigoplus_{p+q=r} [H^p(M_1) \otimes H^q(M_2)]. \quad (6.17)$$

vilken vidare kan skrivas om med hjälp av Bettitalen

$$b^r(M) = \sum_{p+q=r} b^p(M_1) b^q(M_2). \quad (6.18)$$

Künneths formeln har den mycket viktiga egenskapen att den gör det möjligt att relatera kohomologiringer av respektive mångfalder

$$\begin{aligned} H^*(M) &= \sum_{r=1}^m H^r(M) = \sum_{r=1}^m \bigoplus_{p+q=r} H^p(M_1) \otimes H^q(M_2) = \\ &= \sum_p H^p(M_1) \otimes \sum_q H^q(M_2) = H^*(M_1) \otimes H^*(M_2). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Från denna ekvation följer en intressant egenskap av Eulerskarakteristiken som presenteras i exemplet nedan.

Exempel 6.7 (Produkt av Eulerkarakteristiken). Visa att

$$\chi(M) = \chi(M_1) \cdot \chi(M_2)$$

där $M_1 = M_2 = S^1$ och $M = T^2$. Exemplet baseras på faktumet att om $\alpha \in H^p(M_1)$ och $\beta \in H^q(M_2)$ då är $\alpha \wedge \beta \in H^{p+q}(M)$, nämligen för en torus har vi $T^2 = S^1 \times S^1$ och vidare finner vi att $b^0(T^2) = b^0(S^1)b^0(S^1) = 1^2 = 1$, $b^1(T^2) = b^1(S^1)b^0(S^1) + b^0(S^1)b^1(S^1) = 1^2 + 1^2 = 2$, $b^2(T^2) = b^1(S^1)b^1(S^1) = 1$. Alltså $\chi(T^2) = 1 - 2 + 1 = 0$ och $\chi(T^2) = \chi(S^1) \cdot \chi(S^1) = 0$.

Kapitel 7

Riemanngeometri

När vi har begreppet mångfald kan vi beskriva helt generella rum. De rum som fysikaliska teorier utspelar sig i är en delmängd av dessa och ett karakteristiskt drag hos dessa rum är att de har ett avståndsbegrepp. Riemanngeometri är den del av differentialgeometri som studerar glatta mångfald utrustade med en så kallad Riemannmetrik och vi studerar även de så kallade pseudo-Riemannska mångfalderna, eller Lorentzmångfalderna. Dessa är utrustade med andra metriker, så kallade Lorentzmetriker. När vi väl har ett avståndsbegrepp kan vi härleda många egenskaper hos rummen. Det som gör denna teori fysikaliskt viktig är att den ger en naturlig matematisk formalism för Einsteins allmänna relativitetsteori, där den fyrdimensionella rumtiden inte är plan utan krökt. Bernhard Riemann började utveckla denna geometri på 1850-talet.

7.1 Metriker

En metrik ger oss en inre produkt på en mångfald vilken vi kan använda för att generalisera avståndsbegreppet. Vi definierar de två sorters metriker vi nämnde i inledningen.

Definition 7.1 (Riemannmetrik). Låt g vara ett tensorfält av typ $(0, 2)$ på mångfalden M . Om g i varje punkt $p \in M$ uppfyller

$$g_p(U, V) = g_p(V, U) \quad (7.1)$$

$$g_p(U, U) \geq 0, \text{ med likhet endast för } U = 0 \quad (7.2)$$

för godtyckliga vektorer U, V i p så kallas g en *Riemannmetrik*.

Vi ser att Riemannmetriker är positivt definita och symmetriska.

Definition 7.2 (Pseudo-Riemannmetrik). Låt g vara ett tensorfält som i definition 7.1, som i varje punkt $p \in M$ uppfyller ekvation 7.1 samt

$$g_p(U, V) = 0 \quad \forall U \in T_p M \implies V = 0 \quad (7.3)$$

för godtyckliga vektorer U, V i p . g kallas då en **pseudo-Riemannmetrik**.

Vi definierar nu den inre produkten $\langle U, V \rangle = g_p(U, V)$ där $U, V \in T_p M$. För en godtycklig karta i en mångfald M med koordinaterna $\{x^\mu\}$ kan vi skriva metriken på följande sätt:

$$g_p = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (7.4)$$

där $g_{\mu\nu}$ kan betraktas som en matris. Även inversen $g^{\mu\nu}$ kommer att dyka upp i våra formler nedan. Ytterligare en form för metriken fås genom att ta inre produkten av infinitesimala förflyttningar i basvektorriktningarna $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$ som i avsnittet 'Flöden och Liederivatan'. Detta skrivs:

$$ds^2 = g(dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, dx^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (7.5)$$

I likhet med Nakahara [1] kommer vi också att kalla detta objekt för en metrik trots att det inte är ett tensorfält.

7.1.1 Inledande exempel på metriker

Den enklaste metriken av alla är den Euklidiska metriken, vars komponenter ges av $\delta_{\mu\nu}$. Detta är en Riemannmetrik. Alla Riemannmetriker kan diagonaliseras och skalas om för att ge den Euklidiska metriken.

$$(\delta)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

Det andra enkla exemplet på en metrik är Minkowskimetriken, känd från speciell relativitetsteori. Den betecknas η och skrivs i matrisform med 3 rumsdimensioner och en tidsdimension:

$$(\eta)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

Denna är ett specialfall av metrikerna med ett negativt reellt egenvärde och övriga egenvärden positiva reella. Dessa metriker kallas Lorentzmetriker och kan med lämpligt val av transformation omvandlas till Minkowskimetriken. Många författare skriver denna metrik med omvända tecken jämfört med oss och Nakahara [1]. I denna metrik kan som nämnts skalärprodukten bli negativ. Detta är precis vad vi väntar oss utifrån den speciella relativitetsteorin. Vektorer klassificeras där som rumslika, ljuslika eller tidslika beroende på om beloppet är positivt, noll, eller negativt.

Många av de metriker vi behandlar är, med ett lämpligt val av koordinater, diagonala metriker med den allmänna formen nedan.

$$S = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

Där koefficienterna är godtyckliga funktioner av alla fyra variabler. Vi kommer att studera denna allmänna metrik närmare i exempel 7.3.

7.1.2 Inbäddningar och inducerade metriker

En inbäddning av ett topologiskt objekt i ett rum är en representation av objektet som bevarar dess struktur. Mer formellt är det en funktion $f : X \rightarrow Y$ sådan att X är homomorfisk med $f(X)$, där $f(X)$ ges den relativa topologin med avseende på Y . Exempelvis kan S^1 inbäddas i planet $\mathbb{R}^2$ som enhetscirkeln.

Vid inbäddningar av en mångfald M i en metrisk mångfald N av högre dimension, där M är en delmångfald av N , inducerar metriken på N en naturlig metrik på M . Låt $f : M \rightarrow N$ vara en inbäddning. Pullbacken f^* parar ihop de punkter i N som f avbildat M på med punkter i M . Om vi har en metrik i N , kalla den g_N , så kan vi låta delmångfalden M i viss mening ärva metriken i N genom att definiera den inducerade, även kallad naturliga, metriken $g_M = f^*g_N$. På komponentform har vi:

$$g_{M\mu\nu}(x) = g_{N\alpha\beta}(f(x)) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^\nu} \quad (7.9)$$

Exempel på inducerade metriker

Exempel 7.1 (Inducerad metrik). Låt $f \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara en inbäddning av en torus på $(\mathbb{R}^3, \delta)$ definierad som

$$f : (\theta, \phi) \mapsto ((R + r\cos\theta)\cos\phi, (R + r\cos\theta)\sin\phi, r\sin\theta)$$

där $R > 0$. Visa att den inducerade metriken på T^2 är

$$g = r^2 d\theta \otimes d\theta + (R + r\cos\theta)^2 d\phi \otimes d\phi.$$

Vi börjar med att beräkna metriken komponenter

$$g_{\theta,\theta} = \langle f_\theta, f_\theta \rangle = r^2$$

där $f_\theta = \frac{\partial f}{\partial \theta}$

$$g_{\theta,\phi} = g_{\phi,\theta} = \langle f_\theta, f_\phi \rangle = \langle f_\phi, f_\theta \rangle = 0$$

$$\begin{aligned}
g_{\phi,\phi} &= \langle f_\phi, f_\phi \rangle \\
&= [(-R \sin \phi - r \cos \theta \sin \phi)^2 + (R \cos \phi + r \cos \theta \cos \phi)^2] \\
&= R^2 \sin^2 \phi + 2Rr \sin^2 \phi \cos \theta + r^2 \cos^2 \theta \\
&\quad + \sin^2 \phi + R^2 \cos^2 \phi + 2Rr \cos^2 \phi \cos \theta + r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi \\
&= (R + r \cos \theta)^2
\end{aligned}$$

där $f_\phi = \frac{\partial f}{\partial \phi}$
och vi får slutligen den sökta metriken

$$g = r^2 d\theta \otimes d\theta + (R + r \cos \theta)^2 d\phi \otimes d\phi.$$

7.2 Konnektion

Vi har inga problem med att flytta vektorer i euklidiska vektorrum. Ska vi flytta en vektor, $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$, två steg i x_1 -led är det lätt: $\mathbf{v}' = (x_1 + 2, x_2, \dots, x_n)$. Vi kan tyvärr inte uttala oss om förflyttningar på en mångfald än, eftersom den bara lokalt beter sig euklidiskt. Vi kommer i denna text att enbart behandla så kallade Affina konnektioner, vilka vi beskriver här nedan. Det finns flera sätt att lösa problemet och lösningen vi behandlar, dessa affina konnektioner, bygger på att vi vet hur vi vektorfält beter sig på mångfalder¹.

7.2.1 Motivering och definition

Anledningen till att vi kan translatera vektorer effektivt i en euklidisk mångfald är att tangentrummen vid de olika punkterna på mångfalden kan identifieras med varandra genom samma translation². På en allmän differentierbar mångfald har vi inte fördelen att ha ett naturligt sätt att relatera tangentrummen vid olika punkter med varandra. Det vi däremot har är en teori för hur vektorfält beter sig på mångfalder.

Låt oss innan vi fortsätter fråga oss om det verkligen är viktigt att kunna relatera tangentrummen med varandra. Så länge vi använder koordinatberoende framställning av vektorer och tensorer kommer vi generellt sätt inte att kunna relatera vid olika punkter på mångfalden till varandra. En relation mellan tangentrummen, kallad konnektion, råder bot på detta.

Vi har sett att vi inte kan translatera ett tangentrum för en punkt till en annan punkt utan att införa nya begrepp. Låt oss betänka vad vi menar med translation från en punkt till en annan, vi menar en förflyttning från en punkt till en annan. Nu kan vi börja formulera detta matematiskt:

¹Dra er även till minnes att vi enbart behandlar differentierbara mångfalder

²Egentligen finns vektorerna i sina tangentrum, vilka vi kan translatera till varandra och på så sätt jämföra vektorer.

Definition 7.3 (Pseudo-definition). Om vi har en kurva mellan två punkter, är en affin konnektion något som förflyttar vår vektor längs denna kurva.

Detta är faktiskt vad vi kommer uppnå i nästa avsnitt, men än så länge är detta en definition som inte är möjlig att göra eftersom vi inte har något sätt att jämföra tangentrummen för två olika punkter. Nästa avsnitt uppnår detta genom att luta sig på konnektionen, vilken vi försöker få fram här.

Vi vet att vi kan translatera tangentrummen mellan punkter på en euklidisk mångfald, och vi vet att varje mångfald lokalt är euklidisk. Detta tillsammans låter oss komma närmare en ordentlig definition av konnektion.

Definition 7.4 (Pseudo-definition 2). Om vi har en kurva mellan två punkter som är tillräckligt nära varandra för att vi kan se båda som punkter på en euklidisk mångfald, är en affin konnektion något som förflyttar vår vektor längs denna kurva.

Detta är kärnan av vad en affin konnektion är. För att försäkra sig om att punkterna är tillräckligt nära varandra kräver vi att förflyttningen är infinitesimal, vilket är motiveringen bakom att låta en affin konnektion vara den kovarianta derivatan. Vi har redan en definition av den för skalärfält, $\nabla_X f \equiv X[f]$, låt oss nu definiera det för vektorfält.

Definition 7.5 (Kovariant derivata). Den **kovarianta derivatan** med avseende på ett vektorfält X betecknat ∇_X , är en avbildning $\nabla : \mathcal{X}(M)^2 \rightarrow \mathcal{X}(M)$ som uppfyller:

- $\nabla_{fV+gW}Y = f\nabla_VY + g\nabla_WY$
- $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$
- $\nabla_{fY} = Y\nabla_Xf + f\nabla_XY = X[f]Y + f\nabla_XY$

Vi har här allmänt krävt de egenskaper vi vill att vår kovarianta derivata ska ha, och på sådant sätt skapat vårt objekt. Denna kovarianta derivata är vad vi menar med en **affin konnektion**.

Vi kommer här att avsluta kapitlet med en kort definition av konnektionskoefficienterna, vilka specificerar hur basvektorerna på en karta ändras från punkt till punkt. Om vi har konnektionskoefficienterna kan vi med andra ord beräkna den kovarianta derivatan av valfritt vektorfält på mångfalden.

Definition 7.6 (Konnektionskoefficient). **Konnektionskoefficienterna** $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ är definierade³ som

$$\nabla_V e_\mu \equiv \nabla_{e_V} e_\mu = e_\lambda \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$$

³Lägg märke till att vi för att vara helt strikt formella behöver klargöra att vi rör oss på en karta som innehåller punkten våra basvektorer lever på

7.3 Parallellförflyttning

Vi har redan konnektionen, som specificerar hur vektorer kan förflyttas, men vi vill finna ett uttryck som även berättar hur vektorer "borde" förflyttas. Det är här parallellförflyttning kommer in. Då man tänker sig den vanliga definitionen på parallellförflyttning inser man snabbt att en ny definition krävs: hur parallellförflyttar man en vektor på en krökt yta som till exempel en sfär? Vår nya definition kommer innehålla kravet att vektorn förflyttas parallellt med avseende på en viss kurva, konnektionen.

Definition 7.7. Låt $c : [a, b] \rightarrow M$ vara en kurva, och $X(t)$ ett vektorfält definierat på kurvan. Låt V vara tangentvektorn till kurvan. Då låter vi parallellförflyttning betyda

$$\nabla_V X = 0.$$

Detta innebär enligt ovan att givet en konnektion, så ändras inte X i förhållande till tangentvektorn V till kurvan: tangentvektorn är parallell med kurvan i varje punkt vilket motiverar definitionen.

Betänk att konnektionen är den kovarianta derivatan, alltså en infinitesimal förflyttning. Detta betyder att parallellförflyttningen kan fås genom att integrera konnektionen. Det kan vi tolka det som att parallellförflyttningen är en lokal⁴ manifestering av konnektionen. Vi kan gå andra hållet och ta fram konnektionen ur en parallelltransport genom att lösa medföljande differentialekvationer.

7.3.1 Geodetisk linje

Då vi nu har parallellförflyttning kan vi börja angripa problemet med att vi i allmänhet inte har några raka linjer på mångfalden. I detta avsnitt ska vi generalisera vår definition av rak linje och se hur vi kan applicera det på mångfalden. En rät linje är en kurva sådan att om vi parallellförflyttar dess tangentvektor i någon punkt längs med kurvan kommer den flyttade tangentvektorn alltid att vara parallell med kurvan. En linje som uppfyller detta kallar vi geodetisk.

Definition 7.8. En geodetisk linje är en kurva $c(t)$ med tangentvektor V sådant att

$$\nabla_V V = 0$$

Vi kan se att mellan två punkter kommer det inte att finnas en unik geodetisk linje. Tänk på ett badkar: om du börjar i mitten på ena kortsidan och ska till mitten på andra kortsidan kommer du att få minst två geodetiska linjer. Ett annat exempel är sfären där det finns oändligt många geodetiska linjer mellan sydpolen och nordpolen.

⁴Lägg dock märke till att trots att parallellförflyttningen är lokal är den större än konnektionen - som är infinitesimal

Antag att vi har en mångfald inbäddad i vårt vanliga rum $\mathbb{R}^3$. Då är ett visuellt sätt att konstruera de geodetiska linjerna att tänka sig att man håller en bit tejp ovanför två punkter på mångfalden, så spänd som möjligt (tejpen är alltså en rak sträcka mellan punkterna i $\mathbb{R}^3$). Nu för vi bara ner tejpen på vår mångfald. Om tejpen krullar sig på någon sida betyder det att det inte är en geodetisk linje på mångfalden. Detta eftersom krullningen indikerar att kurvan är krökt och därmed att en tangentvektor inte kommer vara parallel med kurvan efter förflyttning längs kurvan.

Exempel 7.2. På en sfär är storcirkarna de geodetiska linjerna.

7.4 Torsionstensorn

Vi kommer senare att behandla kurvatur av en mångfald, men i detta avsnitt ska vi titta kort på vridning. Det finns en användbar tensor som beskriver vridning vilken kallas torsionstensorn. Innan vi går in på torsionstensorn närmre behöver vi veta vad vi menar med vridning, och det är vi hur tangentvektorn till en kurva vrider sig då vi flyttar oss längs kurvan. Detta kan ses som hur mycket konnektionen vrider sig.

Vi ger ett enkelt exempel för att försöka förstå vad torsionen egentligen avser: säg att du simmar en längd i en simbassäng. Då följer du en rak kurva mellan de båda ändarna på bassängen. Låt oss säga att du är tangentvektorn till kurvan som bildas av din rörelse. Låt oss även säga att du börjar simma crawl, men går över till ryggsim någon gång på vägen. Din riktning ändras aldrig, men du har vridigt dig. På precis samma sätt vill vi markera hur mycket tangentvektorn till en kurva vrider sig och vi ger därför följande definition:

Definition 7.9. Torsionstensorn $T(X, Y)$

$$T(X, Y) \equiv \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

Låt oss kontrollera att torsionen är en tensor. Sätt $f \in \mathcal{F}$, då blir $T(fX, Y) = T(X, fY) = fT(X, Y)$ genom produktregeln. Alltså är $T(X, Y)$ en tensor.

Vi ser även att torsionstensorn är en $(1, 2)$ -tensor genom resonemanget att torsionstensorn tar in två vektorer och ger ut en vektor som indikerar vridningen. Matematiskt syns det eftersom $T(X, Y) = X^\mu T^\nu T(e_\mu, e_\nu)$. Vi behöver inte gå in djupare på torsionen eftersom vi oftast hanterar Levi-Civita-konnektionen vilken inte har någon torsion.

7.5 Levi-Civita-konnektionen

Eftersom ingen konnektion är mer naturlig än någon annan, så har vi möjlighet att välja en konnektion med önskvärda egenskaper. Man kan fråga sig vilka dessa egenskaper skulle kunna vara samt om det finns en konnektion som uppfyller dessa och om konnektionen är entydigt bestämd av just dessa egenskaper. Ett naturligt krav att ställa, är att då vi tillämpar konnektionen på det euklidiska rummet $\mathbb{R}^n$ skall vi få vår vanliga parallellförflyttning. Om vi därutöver kräver att torsionen måste vara noll, har vi kraftigt avgränsat antalet valmöjligheter. Denna konnektion blir entydig, genom att explicit konstruera den enligt satsen nedan. Egenskapen att torsionen försvinner kallar vi för att konnektionen är **symmetrisk**.

Sats 7.1 (Riemanngeometris fundamentalsats). Givet en mångfald M och en metrik g finns en unik symmetrisk konnektion, vilken vi kallar Levi-Civita-konnektionen.

Bevis. Låt först ∇ vara en godtycklig konnektion. Dess koefficienter är

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + K_{\mu\nu}^{\kappa} \quad (7.10)$$

Kan vi få en ny konnektionskoefficient genom att addera $-K_{\mu\nu}^{\kappa}$? Isåfall existerar Levi-Civita-konnektionen och är unik.

Addera ett godtyckligt tensorfält $t_{\mu\nu}^{\lambda}$ till en konnektionskoefficient och provar om denna, låt kalla den X uppfyller kravet för att vara en konnektionskoefficient. Vårt krav är att följande ekvation ska gälla för koordinattransformationen från $\{e^{\mu}\}$ till $\{f^{\mu}\}$, där $\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa}$ antas vara konnektionskoefficienter i basen $\{e^{\mu}\}$ och $\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} + t_{\mu\nu}^{\lambda}$ konnektionskoefficienter för basen $\{f^{\mu}\}$.

$$\nabla_{f_{\alpha}} f_{\beta} = X f_{\gamma} = (\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} + t_{\alpha\beta}^{\gamma}) f_{\gamma} \quad (7.11)$$

Vi byter koordinater i vänsterledet:

$$\begin{aligned} \nabla_{f_{\alpha}} f_{\beta} &= \{f_{\alpha} = (\partial x^{\mu} / \partial y^{\beta}) e_{\mu}\} \\ &= \nabla_{f_{\alpha}} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\beta}} e_{\mu} \right) \\ &= \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial y^{\alpha} \partial y^{\beta}} e_{\mu} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial y^{\alpha}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\beta}} \nabla_{e_{\lambda}} e_{\mu} \\ &= \left(\frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial y^{\alpha} \partial y^{\beta}} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial y^{\alpha}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\beta}} \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} \right) e_{\nu} \end{aligned}$$

Nu kan vi skriva

$$\left(\frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial y^{\alpha} \partial y^{\beta}} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial y^{\alpha}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\beta}} \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} \right) e_{\nu} = (\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} + t_{\alpha\beta}^{\gamma}) f_{\gamma} \quad (7.12)$$

Och eftersom $e_\nu/f_\gamma = \partial y^\gamma/\partial x^\nu$ kan vi göra följande omskriving:

$$\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\nu} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + t_{\alpha\beta}^\gamma \quad (7.13)$$

Och nu föregås konnektionskoefficienten i vänsterledet av precis de koordinatbyten som låter oss förkorta bort Γ -termerna ur ekvationen och få:

$$\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\nu} = t_{\alpha\beta}^\gamma \quad (7.14)$$

Vilket är ett $(1,2)$ -tensorfält på varje sida, varav det ena är godtyckligt valt av oss och det andra väljs så att ekvationen uppfylls genom att hitta en motsvarande koordinattransformation. Det finns alltså för varje $(1,2)$ -tensorfält ett motsvarande koordinatbyte som transformerar konnektionskoefficienterna genom addition av tensorfältet. Om vi väljer $t_{\alpha\beta}^\gamma = -K_{\mu\nu}^\kappa$ får vi precis Levi-Civita-konnektionen. I ekvationerna ovan är symmetrin i α, β tydlig. $\square$

7.5.1 Geodeter

Geodeter får en ny, fysikaliskt viktig betydelse med Levi-Civita-konnektionen. De blir nu även ett lokalt minima för längden av de möjliga kurvorna mellan två punkter, inte bara de rakaste möjliga linjerna.

7.6 Riemanns kurvaturtensor

Vi kommer hädanefter alltid att anta att vår konnektion är Levi-Civita-konnektionen.

Om vi har en mångfald vill vi kunna uttala oss om hur krökt denna mångfald är. Exempelvis är jorden krökt, men mindre krökt än ett bowlingklot. Så vad betyder krökning? Vi säger att ju mindre något lokalt kring en punkt liknar ett euklidiskt rum, desto mer krökt är mångfalden i den punkten. Hur kan vi tolka detta matematiskt?

Först betyder detta att vi kommer få fram någon typ av fält, skalär-, vektor- eller tensorfält. Detta för att vi vill ha någon typ av funktion som är definierad i varje punkt. Vad mer kan vi härleda enbart utifrån vår tanke på krökning ovan? Vi vill på något sätt undersöka hur avstånden mellan två punkter förhåller sig gentemot hur det avståndet hade varit på en platt (euklidisk) yta. Vi kommer att ha ett fält som behandlar metriken. Vi kommer med andra ord att få ett tensorfält och nu med detta som inledning följer här definitionen av Kurvaturtensor.

Definition 7.10. Kurvaturtensorn ⁵ $R(X, Y)Z$ definieras enligt:

$$R(X, Y)Z \equiv \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

Vad Kurvaturtensorn mäter är hur en vektor (Z här ovan) förändras om den flyttas längs en sluten infinitesimal kurva, vilket formellt kan ses som:

Om vi har två kommuterande vektorfält X och Y , och flyttar vektorn $Z \in T_{x_0}M$ Δt tid längs fältet X 's flöde och sedan Δt tid längs Y 's flöde, och sedan lika lång tid i $-X$'s flöde och till slut $-Y$'s flöde, så kommer vi tillbaka till samma punkt (vi antar här att fälten kommuterar). Då mäter $R(X, Y)Z$ hur Z har förändrats vid denna flytt.

Vi vill kunna behandla detta helt generellt, och därmed måste vi försöka undvika kravet på att fälten X och Y ska kommutera. Detta innebär att vi även behöver transportera Z längs kommutatorn $[X, Y]$ för att komma tillbaka till samma punkt.

Kurvaturtensorn (en $(1, 3)$ -tensor) tar in tre vektorer, två för riktningar och en som ska utvärderas, och den ger ut en vektor. Vektorn som ges ut ger ett mått på hur mycket den utvärderade vektorn ändras i en förflyttning i ett infinitesimalt parallelogram av de två andra vektorernas.

När vi nu har fått lite förståelse för hur kurvaturtensorn fungerar, skall vi undersöka vilka matematiska samband vi kan härleda utifrån detta. Vi börjar med några enklare sådana

Sats 7.2. • $R(X, Y) = -R(Y, X)$

$$\bullet \langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$$

Den första av de två inses genom antisymmetri, den andra genom Liealgebran. Dessa två kan kombineras för att ge

$$[R(X, Y)Z, W] = [R(Z, W)X, Y]$$

Sats 7.3 (Bianchi identiteterna). .

$$\begin{aligned} \bullet R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X &= 0 \\ \bullet (\nabla_X R)(Y, Z)V + (\nabla_Y R)(Z, X)V + (\nabla_Z R)(X, Y)V &= 0 \end{aligned}$$

Vi kommer inte att bevisa någon av dessa identiteter⁶, utan kommer istället att ge bevisidé för första identiteten:

⁵Ibland skiljer man på Riemanns kurvaturtensor och Kurvaturtensorn, där den förstnämnda är $(0, 4)$ -tensorn skapad genom att använda metriken på den sistnämnda, i enlighet med Manipulationer i 2

⁶För formell behandling av identiteterna samt bevis se s. 269 i [1]

Kom ihåg att Levi-Civitakonnektionen inte har någon vridning, $T(X, Y) = 0$ för alla X, Y . Detta i samband med att inse att $\nabla_Z[X, Y]$ kan skrivas om enligt nedan kommer efter formella beräkningar att ge svaret.

$$[Z, [X, Y]] = \nabla_Z[X, Y] - \nabla_{[X, Y]}Z \Leftrightarrow \nabla_Z[X, Y] = [Z, [X, Y]] + \nabla_{[X, Y]}Z$$

Vi har nu gått igenom några av de matematiska följderna men vi vill även veta hur Kurvaturtensorn ter sig i olika baser eftersom vi då kan se dess verkan på vektorer. Vi kommer därför att avsluta detta avsnitt med att skriva kurvaturtensorns koordinater i en bas.

Vi ser kurvaturtensorns verkan på dualbasen dx^μ och koordinatbasen e_μ . Komponenterna i tensorn kan då skrivas ⁷

$$R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \langle dx^\kappa, R(e_\mu, e_\nu)e_\lambda \rangle = \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} + \Gamma^\eta_{\nu\lambda} \Gamma^\kappa_{\mu\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\lambda} \Gamma^\kappa_{\nu\eta}$$

7.6.1 Exempel på Riemanns kurvaturtensor

Vi börjar med att härleda den allmänna formen för Riemannntensorn för en fyrdimensionell diagonal metrik med avseende på Levi-Civita-konnektionen. Vidare skall vi tillämpa denna på intressanta specialfall. Det första exemplet följer resonemanget i Rindler, [10] ss 419-421.

Exempel 7.3 (4D-Diagonala metrikers Riemannntensor). Metriken vi avser är i matrisform ekvation 7.8, på differentialformen skrivs den:

$$\vec{ds} = A dx^1 dx^1 + B dx^2 dx^2 + C dx^3 dx^3 + D dx^4 dx^4 \quad (7.15)$$

där koefficienterna är allmänna: $A = A(x^1, x^2, x^3, x^4)$, $B = B(x^1, x^2, x^3, x^4)$, $C = C(x^1, x^2, x^3, x^4)$ och $D = D(x^1, x^2, x^3, x^4)$. Konnektionen är Levi-Civita och därför ges konnektionskoefficienterna $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$ av Christoffelsymbolerna $\{\nu^\mu_\sigma\}$. Vi inför några symboler för att kunna skriva uttrycken på en mer kompakt form:

$$\alpha = \frac{1}{2A}, \quad \beta = \frac{1}{2B}, \quad \gamma = \frac{1}{2C}, \quad \delta = \frac{1}{2D} \quad (7.16)$$

samt följande konvention för derivator:

$$\begin{aligned} A_\mu &= \frac{\partial A}{\partial x^\mu} & B_\mu &= \frac{\partial B}{\partial x^\mu} & C_\mu &= \frac{\partial C}{\partial x^\mu} & D_\mu &= \frac{\partial D}{\partial x^\mu} \\ A_{\mu\nu} &= \frac{\partial^2 A}{\partial x^\mu \partial x^\nu} & B_{\mu\nu} &= \frac{\partial^2 B}{\partial x^\mu \partial x^\nu} & C_{\mu\nu} &= \frac{\partial^2 C}{\partial x^\mu \partial x^\nu} & D_{\mu\nu} &= \frac{\partial^2 D}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{aligned} \quad (7.17)$$

⁷Genom definitionen av Christoffelsymbolerna. För explicit härledning se s. 255, ekv. (7.42) i [1]

Vi börjar med att beräkna konnektionskoefficienterna $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\sigma g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\mu\sigma})$ där en diagonal metrik innebär att summan endast innehåller termen med $\lambda = \mu$. Vi konstaterar först att då alla tre index är olika kommer koefficienten vara noll, då den endast innehåller metriken icke-diagonalelement. Alltså, $\Gamma_{23}^1 = 0$ för alla permutationer av indexen. Vi tittar sedan på koefficienterna med de två nedre indexen lika: $\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{12} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}) = \frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{22} = -\alpha B_1$. Det är uppenbart att detta följer ett enkelt mönster när man byter 1 och 2 mot övriga index. De koefficienter som är kvar har alla formen $\Gamma_{\nu\mu}^\nu$ och för enkelhetens skull sätter vi index ν till ett och åskådliggör den allmänna formen på dessa koefficienter: $\Gamma_{1\mu}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{1\mu} + \partial_\mu g_{11} - \partial_1 g_{1\mu}) = \frac{1}{2}g^{11}\partial_\mu g_{11} = \alpha A_\mu$. Genom att permutera indexen kan vi nu få alla konnektionskoefficienter.

Nu kan vi beräkna Riemannstensorns element $R_{\lambda\mu\nu}^\kappa = \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa + \Gamma_{\nu\lambda}^\eta \Gamma_{\mu\eta}^\kappa - \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\kappa$. Det räcker att beräkna tre element vars index sedan kan permuteras eller manipuleras enligt Riemannstensorns symmetriegenskaper för att ge övriga.

Om alla index är olika blir elementet noll: $R_{234}^1 = 0$. Nästa typiska element är $R_{213}^1 = \partial_1 \Gamma_{32}^1 - \partial_3 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{32}^\eta \Gamma_{1\eta}^1 - \Gamma_{12}^\eta \Gamma_{3\eta}^1 = 0 - \alpha A_{23} + \gamma C_2 \alpha A_3 + \beta B_3 \alpha A_2 + \alpha A_2 \alpha A_3 = -A_{23} + \alpha A_2 A_3 + \beta A_2 B_3 + \gamma A_3 C_2$. Det tredje typiska elementet är $R_{212}^1 = \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^\eta \Gamma_{1\eta}^1 - \Gamma_{12}^\eta \Gamma_{2\eta}^1 = -\alpha B_{11} - \alpha A_{22} + \alpha B_1 \alpha A_1 + \beta B_2 \alpha A_2 - \gamma B_3 \alpha A_3 - \delta B_4 \alpha A_4 + \alpha A_2 \alpha A_2 + \beta B_1 \alpha B_1 = -A_{22} - B_{11} + \alpha(A_1 B_1 + A_2^2) + \beta(A_2 B_2 + B_1^2) - \gamma A_3 B_3 - \delta A_4 B_4$.

Sammanfattningsvis har vi följande typiska element:

$$\begin{cases} R_{234}^1 = 0 \\ R_{213}^1 = -A_{23} + \alpha A_2 A_3 + \beta A_2 B_3 + \gamma A_3 C_2 \\ R_{212}^1 = -A_{22} - B_{11} + \alpha(A_1 B_1 + A_2^2) + \beta(A_2 B_2 + B_1^2) - \gamma A_3 B_3 - \delta A_4 B_4 \end{cases} \quad (7.18)$$

7.7 Holonomi, isometri och Killingvektorfält

7.7.1 Holonomigruppen

En vektor i en punkt p som parallellförflyttas längs en sluten kurva tillbaka till p kommer i allmänhet att förändras. Om vi begränsar oss till affina konnektioner på Riemannska mångfalder kan vi definiera en grupp av sådana transformationer av vektorer med avseende på alla slutna kurvor $c(t)$ innehållande p på M . Låt oss ta kurvorna $\{c(t) : 0 \leq t \leq 1, c(0) = c(1) = p\}$ och vektorn X . För en given konnektion kommer varje kurva c ge upphov till en transformation från $T_p M$ tillbaka på sig själv. Vi kan nu definiera **holonomigruppen**.

Definition 7.11 (Holonomigrupp). Med $p \in M$ och $c(t)$ som ovan ger parallellförskjutningar längs av X längs c upphov till transformationen

$$P_c : T_p M \rightarrow T_p M \quad (7.19)$$

Gruppen av alla sådana transformationer betecknas $H(p)$ och kallas **holonomigruppen på p** .

Gruppoperationen är sammansättningen. I det här fallet innebär det att först låta vektorn parallellförflyttas längs en kurva och sedan längs nästa. Den totala kurvan är sluten och därmed är alltså mängden sluten under gruppoperationen. Som identitetsselement har vi transformationen genererad av kurvan som bara består av punkten p . Som invers har vi transformationen som genereras av kurvan genomlöst i motsatt riktning.

Genom att parallellförflytta en vektor från p till en godtycklig punkt q , transformera den på ovan beskrivna sätt och sedan förskjuta resultatet tillbaka till p , kan vi definiera en isomorfi mellan $H(p)$ och $H(q)$ för alla punkter som ligger i en sammanhängande mängd. Det blir då meningsfullt att tala om en holonomigrupp för hela mångfalden, underförstått en holonomigrupp som gäller för varje punkt i mångfalden.

7.7.2 Isometri

Isometrier är avbildningar som bevarar längden av vektorer, typexemplet är rotationer och translationer i ett euklidiskt rum. En generell definition av isometri görs i termer av metriken.

Definition 7.12 (Isometri). Låt f vara en diffeomorfism och M en Riemannsk eller pseudo-Riemannsk mångfald sådana att $f : M \rightarrow M$. Om f bevarar metriken, dvs uppfyller nedanstående ekvation, kallas den en **isometri**.

$$f^* g_{f(p)} = g_p \quad (7.20)$$

Ett liknande men något svagare begrepp får vi genom att tillåta f att relatera metriken med en skalfaktor, vilket vi beskriver i nästa avsnitt. Det är lätt att inse att identitetstransformationen och den inversa transformationen till en isometri också är isometrier, liksom sammansättning av två isometrier. Alltså finns en isometrigrupp på ett rum, bestående av alla isometrier.

Exempel på isometri

Exempel 7.4 (Euklidiska rummets isometrier). Vi har nämnt att translationer och rotationer i det euklidiska rummet är isometrier. Vi betraktar $\mathbb{R}^2$. Diffeomorfismen f är i detta fall $\vec{f}(\vec{p}) = A\vec{p} + \vec{T}$ där $A \in SO(2)$, $\vec{T} \in \mathbb{R}^2$. Metriken är $\delta_{\mu\nu}$.

Ekvation 7.20 blir nu på komponentform med kartesiska koordinater $\{p^x, p^y\}$ och $\{f(p)^x, f(p)^y\}$:

$$\frac{\partial f(p)^\alpha}{\partial p^\mu} \frac{\partial f(p)^\beta}{\partial p^\nu} g_{\alpha\beta}(f(p)) = \delta_{\mu\nu}(\vec{p}) \quad (7.21)$$

Vilket kan skrivas

$$\mathbb{A}(\alpha, \mu) \mathbb{A}(\beta, \nu) g_{\alpha\beta}(f(p)) = \delta_{\mu\nu}(\vec{p}) \quad (7.22)$$

Där g är metriken i punkten $f(p)$. Om denna är $\delta(f(p))$ så är f en isometri. Vi ser att vänsterledet är noll då $\mu \neq \nu$ och ett då $\mu = \nu$. Vi sätter $\mu = \nu$ och undersöker vad som händer för olika α och β . Vi tittar på $\mathbb{A} \in SO(2)$:

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

För $\alpha \neq \beta$ och $\mu = \nu$ får vi en summa av två kancerande termer i vänsterledet. Ekvationen blir då ej uppfylld eftersom vi har $0 = 1$. Det betyder att icke-diagonalelementen inte kan bestämmas på detta sätt. För $\alpha = \beta$ får vi däremot $2g_{\alpha\alpha} = 1 \Leftrightarrow g_{\alpha\alpha} = \delta_{\alpha\alpha}$. Diagonalelementen är alltså ett.

Nu sätter vi istället $\mu \neq \nu$. För $\alpha = \beta$ får vi $0 = 0$, det vill säga inget nytt. För $\alpha \neq \beta$ får vi $2(\cos^2\phi - \sin^2\phi)g = \delta$, vilket kräver att icke-diagonalelementen i g är noll. Därmed har vi visat att $g(f(p)) = \delta$ och att f är en isometri.

7.7.3 Konforma avbildningar

Vi definierar en typ av avbildningar som liknar isometrier men vilka endast kräver att metriken ska vara bevarad så när som på en skalfaktor $e^{2\sigma}$ där $\sigma \in \mathcal{F}(M)$ är en funktion. Denna skalfaktor gör att det finns många av dessa så kallade **konforma avbildningar**. Definitionen lyder som följer.

Definition 7.13 (Konform avbildning). Låt f vara en diffeomorfism och M en Riemannsk eller pseudo-Riemannsk mångfald sådana att $f : M \rightarrow M$. Om f bevarar metriken så när som på en skalfaktor, dvs uppfyller nedanstående ekvation, kallas den en **konform avbildning**.

$$f^* g_{f(p)} = e^{2\sigma} g_p \quad (7.24)$$

Konforma avbildningar bevarar inte längder, men de bevarar vinklar mellan vektorer, vilket är en karakteristisk egenskap hos konforma avbildningar och kan användas som en alternativ definition. Detta kan vi se genom att undersöka vad vinkeln avbildas på:

$$\begin{aligned} \cos \Theta &= \frac{g_p(X, Y)}{\sqrt{g_p(X, X)g_p(Y, Y)}} \mapsto \frac{e^{2\sigma} g_p(X, Y)}{\sqrt{e^{2\sigma} g_p(X, X)e^{2\sigma} g_p(Y, Y)}} = \\ &= \frac{g_p(X, Y)}{\sqrt{g_p(X, X)g_p(Y, Y)}} = \cos \Theta \quad (7.25) \end{aligned}$$

Bevarandet av vinklar gäller dock bara lokalt eftersom en rak linje i allmänhet inte kommer att avbildas på en rak linje. Konforma avbildningar skiljer sig alltså ganska mycket från vad vi vanligtvis menar med 'lika så när som på en skalfaktor'. De konforma avbildningarna på en mångfald M bildar en grupp med avseende på sammansättning vilken kallas $Conf(M)$. Två metriker som relateras med skalfaktorn $e^{2\sigma}$ sägs vara **konformt relaterade**, vilket är en ekvivalensrelation vars ekvivalensklasser kallas den **konforma strukturen** på M . Själva avbildningen $g \rightarrow e^{2\sigma} g$ kallas en **Weylskalning** och även dessa bildar en grupp, kallad $Weyl(M)$. Det finns ytterligare ett begrepp som behöver nämnas. Om en mångfald M i varje punkt p har en karta sådan att $g_{\mu\nu} = e^{2\sigma} \delta_{\mu\nu}$ så kallas den **konformt plan**.

Exempel på konforma avbildningar

Exempel 7.5 (Analytiska funktioner). Vi visar här att alla analytiska funktioner med derivata skild från noll är konforma avbildningar. Vi tar en analytisk funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Vi definierar en funktion $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ enligt:

$$\hat{f}(x_1, x_2) = \hat{f}(\Re f(x_1 + ix_2), \Im f(x_1 + ix_2)) = \hat{f}(u(x_1, x_2), v(x_1, x_2)) \quad (7.26)$$

Jacobimatrisen av denna funktion är

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v}{\partial x_1} & \frac{\partial v}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

Men eftersom f är analytisk kan vi skriva om detta med Cauchy-Riemanns ekvationer, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, och får då:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial u}{\partial x_2} & \frac{\partial u}{\partial x_1} \end{pmatrix} = \left[\left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\} \right] = \{r \cos \theta, r \sin \theta\} = r \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (7.28)$$

Jacobimatrisen är en ortogonal matris, nu tittar vi på hur två korsande kurvor transformeras under avbildningen. Låt $\gamma_1(t) = (u_1(t), v_1(t))$ och $\gamma_2(t) = (u_2(t), v_2(t))$ vara glatta kurvor och $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z$, där $z \in \mathbb{C}$ är en godtycklig punkt. Vi stoppar in dessa kurvor i $\hat{f}$ och deriverar med avseende på t .

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \hat{f}(\gamma_1)|_{t=0} = J(\gamma_1(0)) \frac{\partial \gamma_1}{\partial t}(0) = J(x_1, x_2) \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial t} \hat{f}(\gamma_2)|_{t=0} = J(\gamma_2(0)) \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}(0) = J(x_1, x_2) \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial t} \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (7.29)$$

Tangentvektorerna för kurvorna avbildas alltså av en ortogonal rotationsmatris, under förutsättning att $f'(z) \neq 0$. En ortogonal transformation bevarar vinklar och därmed är f en konform avbildning.

7.7.4 Killingvektorfält

Ett vektorfält bildar en vektor vid multiplikation med en vektor. Det finns en speciell avgränsad mängd av vektorfält som vid multiplikation med en infinitesimal vektor och addition med en punkt ger upphov till en isometri. Vi definierar:

Definition 7.14 (Killingvektorfält). Låt M vara en Riemmansk mångfald och $X \in \mathcal{X}$ ett vektorfält. Låt avbildningen f definieras av

$$f : x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon X^\mu \quad (7.30)$$

Om f är en isometri kallas X ett **Killingvektorfält**.

Namnet Killingvektorfält kommer från den tyske matematikern Wilhelm Killing. De är alltså inte så farliga som man kan tro. Dessa vektorfält uppfyller **Killingekvationen**:

$$X^\xi \partial_\xi g_{\mu\nu} + \partial_\mu X^\kappa g_{\kappa\nu} + \partial_\nu X^\lambda g_{\mu\lambda} = 0 \quad (7.31)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(\mathcal{L}_X g)_{\mu\nu} = 0 \quad (7.32)$$

Det som gör Killingvektorfälten intressanta för oss är att de har ett samband med symmetrierna på en mångfald. De vektorfält som uppfyller på Killingekvationen motsvarar nämligen symmetrioperationerna på den aktuella mångfalden. Vi kan på motsvarande sätt som definitionen ovan definiera ytterligare en typ av vektorfält:

Definition 7.15 (Konformt Killingvektorfält). Låt M vara en Riemmansk mångfald och $X \in \mathcal{X}$ ett vektorfält. Låt avbildningen f definieras av

$$f : x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon X^\mu \quad (7.33)$$

Om f är en konform avbildning kallas X ett **konformt Killingvektorfält**.

7.8 Icke-koordinatbasen

När vi inför en metrik g på en mångfald så uppstår en ny möjlighet att välja en bas. Den bas vi använt hittills kallas koordinatbasen, medan vi nu kan definiera **icke-koordinatbasen**. Vi inför samtidigt en dualbas till icke-koordinatbasen.

7.8.1 Definition av basvektorerna

Vi utgår från vår koordinatbas $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$ och dess dualbas $\{dx^\mu\}$. Vi tar en rotationsmatris $\{e^\mu_\alpha \in GL(m, \mathbb{R}) : \det e^\mu_\alpha > 0\}$ och roterar koordinatbasen med denna:

$$\hat{e}_\alpha = e^\mu_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (7.34)$$

Vi måste ställa ytterligare ett krav på basen för att den ska vara bra, nämligen att den är ortonormal med avseende på vår metrik:

$$g(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta) = e^\mu_\alpha e^\nu_\beta g_{\mu\nu} = \begin{cases} \delta_{\alpha\beta} \\ \eta_{\alpha\beta} \end{cases} \quad (7.35)$$

Vi ser här också att inverserna av rotationsmatriserna ger oss metriken när de multipliceras med δ eller η .

Nu inför vi på samma sätt som tidigare (avsnitt 5.2) en dualbas, som vi kallar $\{\hat{\theta}^\alpha\}$. Denna införs genom att kräva $\langle \hat{\theta}^\alpha, \hat{e}_\beta \rangle = \delta^\alpha_\beta$ (eller η^α_β) vilket ger oss:

$$\hat{\theta}^\alpha = e^\alpha_\mu dx^\mu \quad (7.36)$$

Notera att vi här använder den inversa matrisen jämfört med föregående definition. Vi använder konventionen att ta index från början av alfabetet ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$) till icke-koordinatbasen och index från mitten av alfabetet $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \dots$ till koordinatbasen.

Elementen i koefficientmatrisen e^μ_α kallas **vierbeins** för fyrdimensionella mångfaldar och **vielbeins** för mångdimensionella dito (från tyska vier = fyra och viel = många.) Metriken relateras till icke-koordinatbasens vektorer genom följande två samband:

$$\begin{cases} g_{\mu\nu} = e^\mu_\alpha e^\nu_\beta \delta_{\alpha\beta} \\ g = \delta_{\alpha\beta} \hat{\theta}^\alpha \otimes \hat{\theta}^\beta \end{cases} \quad (7.37)$$

7.8.2 Transformation av objekt till icke-koordinatbasen

Vektorer

Enligt vår konvention för index är V^μ en vektor i koordinatbas medan V^α är samma vektor i icke-koordinatbas. V ska vara samma vektor oavsett bas, men dess komponenter relateras på samma sätt som motsvarande basvektorer, nämligen genom multiplikation med vierbein:

$$\begin{cases} V^\mu = V^\alpha e^\mu_\alpha \\ V^\alpha = e^\alpha_\mu V^\mu \end{cases} \quad (7.38)$$

Kovektorer

Kovektorerna relateras på motsvarande sätt vilket låter oss transformera differentiella former till icke-koordinatbasen, detta ses direkt från vår definition av kovektorerna $\hat{\theta}$.

Konnektionen

Konnektionskoefficienterna definieras i icke-koordinatbasen på samma sätt som i koordinatbasen:

$$\nabla_{\alpha} \hat{e}_{\beta} \equiv \nabla_{\hat{e}_{\alpha}} \hat{e}_{\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \hat{e}_{\gamma} \quad (7.39)$$

Det vill säga de kovarianta derivatorna av basvektorerna med avseende på varandra. Vi är också intresserade av att relatera dessa konnektionskoefficienter till motsvarande i koordinatbasen. Om vi sätter in $\hat{e}_{\alpha} = e_{\alpha}^{\mu} e_{\mu}$ får vi:

$$\nabla_{\hat{e}_{\alpha}} \hat{e}_{\beta} = e_{\alpha}^{\mu} (\partial_{\mu} e_{\beta}^{\nu} + e_{\beta}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}) e_{\nu} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} e_{\gamma}^{\nu} e_{\nu} \quad (7.40)$$

lägg märke till att e med ett index är en basvektor medan e med två index är ett vielbein. Faktorn inom parentes är $\nabla_{\mu} e_{\beta}^{\nu}$, så om vi bryter ut konnektionskoefficienten i sista termen får vi det önskade uttrycket

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = e_{\nu}^{\gamma} e_{\alpha}^{\mu} \nabla_{\mu} e_{\beta}^{\nu} \quad (7.41)$$

7.9 Hodgeteori

En stor del av den teori som hittills har byggts upp baseras på $\Omega^r(M)$ ⁸, vektorrummet av r-former på M. Operationerna kilprodukt, extern produkt, intern produkt och extern derivata definieras alla på r-former, det vill säga element i $\Omega^r(M)$, och när vi integrerar så tar r-former rollen som volymelement. I detta avsnitt undersöks vektorrummet $\Omega^r(M)$ närmare, det har nämligen den intressanta egenskapen att $\Omega^r(M) \simeq \Omega^{m-r}(M)$, där m är mångfaldens dimension. Med hjälp av begreppsapparaten från tidigare avsnitt, så kan denna isomorfism utnyttjas på ett förvånansvärt produktivt sätt.

Det är enkelt att visa isomorfism $\Omega^r(M) \simeq \Omega^{m-r}(M)$. I kapitel (5), om mångfald, så noterade vi att mängden kilprodukten av r en-former, $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$, bildar bas i $\Omega^r(M)$. För ett vektorrum i allmänhet så gäller att dimensionen är lika med antalet baselement. Hur många baselement har $\Omega^r(M)$ då? Vi kan välja r stycken μ ur m stycken totalt på $\binom{m}{r}$ sätt. Med hjälp av ett grundläggande kombinatoriskt samband har vi nu:

$$\dim \Omega^r(M) = \binom{m}{r} = \binom{m}{m-r} = \dim \Omega^{m-r}(M) \quad (7.42)$$

Därför följer isomorfin, eftersom vektorrum med samma dimension och samma skalärer är isomorfa.

7.9.1 Hodgestjärnan

Även om det är lätt att visa isomorfin, så finns det normalt, för en allmän mångfald, inget bra och entydigt sätt att konstruera isomorfism mellan $H^r(M)$ och $H^{m-r}(M)$ på. Men detta ändrar sig när vi inför en metrik. Vi har tidigare sett att en metrik g ger oss en isomorfism mellan tangentrummet $T_p M$ och kotangentrummet $T_p^* M$ av en mångfald, men utöver det så ger metriken g oss en naturlig⁹ isomorfism mellan $H^r(M)$ och $H^{m-r}(M)$. Denna naturliga isomorfism ges av Hodge * operatoren, vilken vi definierar på följande sätt:

Definition 7.16 (Hodge *). **Hodge *** är en linjär avbildning $*$: $\Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{m-r}(M)$ med följande verkan på $\Omega^r(M)$'s basvektorer:

$$*(dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}) = \frac{\sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|}}{(m-r)!} \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_{r+1} \dots \nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m}. \quad (7.43)$$

⁸Egentligen $\Omega_p^r(M)$, men vi skriver ofta slarvigt $\Omega^r(M)$ eller Ω^r om punkten och mångfalden är godtyckliga eller underförstådda.

⁹Med naturlig menas här en isomorfism som på ett enkelt sätt, som är naturligt i viss mening, följer ur mångfaldens struktur som metriken ger upphov till. Begreppet kan definieras matematisk stringent med kateorigeori, men vi nöjer oss här med en intuitiv förståelse.

Operatoren $*$ brukar kallas för Hodgestjärnan eller Hodgedualen. I definitionen av $*$ använder vi oss av Levi-Civita symbolen

$$\varepsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_m} = \begin{cases} +1 & \text{om } (\mu_1\mu_2\dots\mu_m) \text{ är en jämn permutation av } (12\dots m) \\ -1 & \text{om udda} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases} \quad (7.44)$$

Notera att vi kan använda metriken för att höja indexen, $g^{\mu_1\nu_1}\varepsilon_{\nu_1}^{\mu_2\mu_3\dots\mu_m} = \varepsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_m}$, vilket ger:

$$\frac{1}{\det(g_{\mu\nu})}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_m} = \varepsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_m}.$$

Om $*$ appliceras två gånger på en r -form, så får vi igen en r -form: $\Omega^r(M) \xrightarrow{*} \Omega^{m-r}(M) \xrightarrow{*} \Omega^r(M)$. Detta gör att det finns en väldigt enkel invers till Hodgestjärnan. $*^{-1} = \pm(-1)^{r(m-r)}*$, där $+$ gäller för en riemannmetrik och $-$ för en lorentzmetrik.

Den naturliga isomorfismen mellan $H^r(M)$ och $H^{m-r}(M)$, det vill säga Hodge $*$ operatoren, möjliggör definitionen av en adjunkt $d^\dagger$ till den externa derivatan d . d tillsammans med $d^\dagger$ gör att vi kan omformulera elektromagnetism på ett modernt, snyggt och kompakt sätt. Adjunkten möjliggör också definitionen av en allmän laplaceoperator, vilket gör att vi kan börja tala om harmoniska former. Dessa harmoniska former visar sig vara djupt förbundna med de kohomologigrupper som vi talade om i kapitel (6). Det är dit vi är på väg nu.

7.9.2 Adjunkten till externa derivatan

En adjunkt $d^\dagger$ till en operator d är i allmänhet någonting som uppfyller $(d\beta, \alpha) = (\beta, d^\dagger\alpha)$, där $(\cdot, \cdot)$ står för inre produkt. Innan en adjunkt kan införas behöver vi alltså någon typ av inre produkt. Som innan så inducerar hodgestjärnan en naturlig inre produkt mellan två r -former, vilken vi definierar som:

$$(\omega, \eta) \equiv \int_M \omega \wedge *\eta = \frac{1}{r!} \int_M \omega_{\mu_1\dots\mu_r} \eta^{\mu_1\dots\mu_r} \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \quad (7.45)$$

Detta är en bra definition eftersom denna inre produkt både är symmetrisk och positivt definit åtminstone för riemannmetriker. Dessutom så är den invariant (under koordinattransformationer), på grund av att $\sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ är ett invariant volymelement.

Om vi låter α vara en r -form och β en $(r-1)$ -form så vill vi alltså nu hitta en operator $d^\dagger$ som uppfyller $(d\beta, \alpha) = (\beta, d^\dagger\alpha)$. Hur gör vi det? Vi nöjer oss här med att säga att det kan göras och att svaret är följande:

Definition 7.17 (Adjunkten till externa derivatan). Adjunkten till den externa derivatan $d : \Omega^{r-1}(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ ges av operatoren $\mathbf{d}^\dagger : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r-1}(M)$, med $d^\dagger = \pm(-1)^{mr+m} * d*$ (+ gäller för riemannmetrik och – för lorentzmetrik).

7.9.3 Elektromagnetism

Elektromagnetismen låter sig beskrivas på ett naturligt sätt genom att använda former. Med hjälp av den externa derivatan och dess adjunkt kan Maxwells ekvationer på en godtycklig mångfald med Lorentzmetrik (i vakuum och naturliga enheter) skrivas som två tensorekvationer.

$$dF = 0 \quad \text{och} \quad d^\dagger F = J \quad (7.46)$$

Här är J ström-ett-formen $J = J_\mu dx^\mu = -\rho dt + j_k dx^k$ och F den elektromagnetiska tensorn. F är en komplett antisymmetrisk tensor av typ $(0, 2)$ (det vill säga en 2-form) och skrivs därför som bekant, se ekvation :

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (7.47)$$

Där komponenterna ges av:¹⁰

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.48)$$

Dessutom så blir kontinuitetsekvationen $dJ = 0$.

Här lämpar det sig att tillämpa våra kunskaper för att visa hur ekvationerna (7.46) ovan reduceras till den klassiska formen på Maxwells ekvationer när vi befinner oss i ett Minkowskirum. Vi undersöker alltså hur ekvationerna ser ut för en mångfald med Minkowskimetrik. Kom ihåg att metriken koefficienter då ges av (7.7) på sidan 110. Mångfalden ("rummet") har $m = 4$ dimensioner, varav en tidslik och tre rumsliga. Indexen μ och ν tar värdena $0, 1, 2, 3$ och indexet $k = 1, 2, 3$. Vi skriver $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, x, y, z)$ och $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu$.

Låt oss börja med $dF = 0$. Definitionen av extern derivata, ekvation (5.11) sidan 74, ger

$$\frac{1}{2} \partial_\lambda F_{\mu\nu} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = 0. \quad (7.49)$$

I detta läge så är det bra att komma ihåg två av kilproduktens egenskaper: $dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = 0$ om något index förekommer minst dubbelt och att $dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu$ byter tecken varje gång två index byter plats (antisymmetri).

¹⁰Detta är ett av två sätt att kombinera ihop det elektriska och magnetiska fältet till en antisymmetrisk tensor.

Nu kan summationen utföras enklare, och det kan till exempel göras genom att för varje fix komponent i (7.48) kolla vilka summationstermer den ger upphov till. Det syns direkt att alla termer med $F_{\mu\mu}$ är noll, så vi börjar med F_{01} som ger upphov till följande (nollskilda) termer:

$$\frac{1}{2}\partial_y F_{01} dy \wedge dt \wedge dx \quad (7.50)$$

$$\frac{1}{2}\partial_z F_{01} dz \wedge dt \wedge dx. \quad (7.51)$$

Detta är på grund av antisymmetrin i både tensorn och kilprodukten exakt samma termer som F_{10} ger upphov till:

$$\frac{1}{2}\partial_y F_{10} dy \wedge dx \wedge dt = \frac{1}{2}\partial_y F_{01} dy \wedge dt \wedge dx \quad (7.52)$$

$$\frac{1}{2}\partial_z F_{10} dz \wedge dx \wedge dt = \frac{1}{2}\partial_z F_{01} dz \wedge dt \wedge dx. \quad (7.53)$$

Det räcker alltså att kolla på koefficienterna ovanför diagonalen och ekvation (7.49) blir då:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & -(\partial_y E_z - \partial_z E_y)dt \wedge dy \wedge dz \\ & -(\partial_x E_z - \partial_z E_x)dt \wedge dx \wedge dz \\ & -(\partial_x E_y - \partial_y E_x)dt \wedge dx \wedge dy \end{aligned} \right\} + \left. \begin{aligned} & -\partial_t B_x dt \wedge dy \wedge dz \\ & +\partial_t B_y dt \wedge dx \wedge dz \\ & -\partial_t B_z dt \wedge dx \wedge dy \end{aligned} \right\} \\ & -(\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z)dx \wedge dy \wedge dz = 0. \end{aligned}$$

Notera hur vi har grupperat termerna. Det första blocket motsvarar en rotation, det andra en derivata och det tredje en divergens. Basen är dock element i $\Omega^3(M)$. För att visa att detta är samma sak som när vi använder "vanliga" basvektorer, så måste vi hitta en isomorfism mellan $\Omega^3(M)$ och $\mathcal{X}(M)$. En sådan ges av $\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} = -\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$ (från ekvation (7.44) sidan 128), genom att vi identifierar komponenterna i en vektor med komponenterna i en 3-form: $x^\kappa = \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\omega_{\lambda\mu\nu}$. Alltså till exempel $x^0 = -(\omega_{123} + \omega_{312} + \omega_{231} - \omega_{132} - \omega_{321} - \omega_{213})$. Vår 3-form dF har bara de komponenter vi ser här ovan, varför vi identifierar $x^0 = \partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z$. Samma procedur applicerad på de andra koefficienterna ger nu att $dF = 0$ exakt motsvaras av:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \text{ och } \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (7.54)$$

För att visa hur $d^\dagger F = J$ reduceras till de andra två Maxwellekvationerna noterar vi först att, då $m = 4$ och $r = 2$, så blir $d^\dagger F = -(-1)^{mr+m} * d * F = -* d * F$. I ett nästa steg undersöks vad Hodgestjärnanorna och den externa derivatan gör med F . Enligt definitionen (7.16) (sidan 128) och (5.11) sidan 74 har vi:

$$\begin{aligned} & -* d * \left(\frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \right) = -* d \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \varepsilon_{\kappa\lambda}^{\mu\nu} dx^\kappa \wedge dx^\lambda \right) \\ & = -* \left(\frac{1}{4} \partial_\xi (F_{\mu\nu} \varepsilon_{\kappa\lambda}^{\mu\nu}) dx^\xi dx^\kappa \wedge dx^\lambda \right) = -\frac{1}{4} \partial_\xi (F_{\mu\nu} \varepsilon_{\kappa\lambda}^{\mu\nu}) \varepsilon_\pi^{\xi\kappa\lambda} dx^\pi \end{aligned}$$

För att kunna uttolka Levi-Civita-symbolerna måste vi höja eller sänka alla index: $\varepsilon_{\kappa\lambda}^{\mu\nu} = g_{\kappa\alpha}g_{\lambda\beta}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ och $\varepsilon_{\pi}^{\xi\kappa\lambda} = g_{\pi\gamma}\varepsilon^{\xi\kappa\lambda\gamma}$, vilket nu ger

$$d^\dagger F = -\frac{1}{4}\partial_\xi(F_{\mu\nu} g_{\kappa\alpha} g_{\lambda\beta} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta})g_{\pi\gamma} \varepsilon^{\xi\kappa\lambda\gamma} dx^\pi. \quad (7.55)$$

Nästa steg är att utföra summationen och det kan göras på samma sätt som vi gjorde innan, det vill säga för varje element $F_{\mu\nu}$ i (7.48) så kollar vi vilka (nollskilda) summationstermer det ger upphov till. Ekvationen (7.55) ovan har nio summationsindex, men antalet termer är ändå hanterbart, eftersom Minkowskimetriken är diagonal och $\varepsilon^{\xi\kappa\lambda\gamma} = 0$ så fort ett index dyker upp två gånger. Kom ihåg att Minkowskimetriken har determinant -1 vilket betyder att $\varepsilon^{\xi\kappa\lambda\gamma} = -\varepsilon_{\xi\kappa\lambda\gamma}$.

Låt oss kolla på koefficienten F_{01} som ger upphov till följande termer:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}\partial_1(F_{01}g_{22}g_{33}\varepsilon^{0123})g_{11}\varepsilon^{0231}dx^1 &= -\frac{1}{4}\partial_0F_{01}dx \\ -\frac{1}{4}\partial_0(F_{01}g_{22}g_{33}\varepsilon^{0123})g_{00}\varepsilon^{1230}dx^0 &= -\frac{1}{4}\partial_1F_{01}dt \\ -\frac{1}{4}\partial_1(F_{01}g_{33}g_{22}\varepsilon^{0132})g_{11}\varepsilon^{0321}dx^1 &= -\frac{1}{4}\partial_0F_{01}dx \\ -\frac{1}{4}\partial_0(F_{01}g_{33}g_{22}\varepsilon^{0132})g_{00}\varepsilon^{1320}dx^0 &= -\frac{1}{4}\partial_1F_{01}dt. \end{aligned}$$

Koefficienten F_{10} upphov till ger exakt samma termer på grund av antisymmetrin, det är alltså alltid fyra termer som är likadana. Tillsammans med de andra koefficienterna får vi nu:

$$\begin{aligned} d^\dagger F &= -\partial_x E_x dt - \partial_y E_y dt - \partial_z E_z dt - \partial_t E_x dx - \partial_t E_y dy - \partial_t E_z dz \\ &\quad (\partial_y B_z - \partial_z B_y)dx - (\partial_x B_z - \partial_z B_x)dy + (\partial_x B_y - \partial_y B_x)dz \\ &= -\rho dt + j_x dx + j_y dy + j_z dz. \end{aligned}$$

Genom att identifiera varje 1-form med en vektor ($x^\mu = w_\mu$), på liknande sätt som förut, syns det slutligen att $d^\dagger F = J$ exakt motsvaras av:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \partial_t \mathbf{E} \text{ och } \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho. \quad (7.56)$$

7.9.4 Laplaceoperatorn

Den externa derivatan och dess adjunkt kan användas för att definiera en allmän laplaceoperator. En sådan definition bör täcka in laplaceoperatorn som vi känner till den och det har visat sig att följande är en bra definition:

Definition 7.18 (Laplaceoperatorn). **Laplaceoperatorn** $\Delta : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ definieras som $\Delta = (d + d^\dagger)^2 = dd^\dagger + d^\dagger d$.

Definition 7.19. Vi inför nu en del nya begrepp och upprepar några gamla.

En r -form ω kallas **harmonisk** om $\Delta\omega = 0$.

Mängden av harmoniska r -former på M kallar vi $\text{Harm}^r(M)$.

En r -form ω kallas **sluten** om $d\omega = 0$.

En r -form ω kallas **kosluten** om $d^\dagger\omega = 0$.

En r -form kallas **exakt** om den globalt kan skrivas som $\omega_r = d\alpha_{r-1}$ med $\alpha_{r-1} \in \Omega^{r-1}(M)$.

Mängden av exakta r -former på M kallar vi $d\Omega^{r-1}(M)$.

En r -form kallas **koexakt** om den globalt kan skrivas som $\omega_r = d^\dagger\beta_{r+1}$ med $\beta_{r+1} \in \Omega^{r+1}(M)$.

Mängden av koexakta r -former på M kallar vi $d^\dagger\Omega^{r+1}(M)$.

Laplaceoperatorn är en positiv operator, ty $(\omega, \Delta\omega) = (\omega, (d^\dagger d + d d^\dagger)\omega) = (d\omega, d\omega) + (d^\dagger\omega, d^\dagger\omega) \geq 0$. Detta visar också att en r -form måste vara både sluten och kosluten för att vara harmonisk, ty endast då gäller likhet.

Med hjälp av Stokes sats så går det att inse att exakta, coexakta och harmoniska former är parvis ortogonala för en mångfald utan rand. Dessutom så utgörs allt som är ortogonalt mot exakta och koexakta former av endast de harmoniska formerna. Detta gör att vi kan förstå följande sats:

Sats 7.4 (Hodge dekompositionssatsen). För en kompakt, orienterbar, riemannsk mångfald (M, g) utan rand, så kan $\Omega^r(M)$ på ett unikt sätt delas upp i $\Omega^r(M) = d\Omega^{r-1}(M) \oplus d^\dagger\Omega^{r+1}(M) \oplus \text{Harm}^r(M)$. Det vill säga varje r -form kan skrivas som summan av en exakt, en koexakt och en harmonisk del.

I detta läge är vi redo för att klargöra den djupa relationen mellan kohomologigrupper och mängden av harmoniska former. Kom ihåg att kohomologigruppen består av ekvivalensklasserna av slutna r -former som bara skiljer sig med en exakt form (jämför kapitel 6). En representant i en sådan ekvivalensklass betecknar vi med ω_r . Enligt Hodge dekompositionssatsen så kan den skrivas som $\omega_r = d\alpha_{r-1} + d^\dagger\beta_{r+1} + \gamma_r$ (dvs. en exakt, en koexakt och en harmonisk del). Men eftersom formen skall vara sluten, så reduceras detta till $\omega_r = d\alpha_{r-1} + \gamma_r$. I detta sammanhang betraktar vi former som bara skiljer sig med en exakt form som ekvivalenta. Det betyder att varje element i kohomologigruppen, det vill säga varje ekvivalensklass, kommer att motsvaras av en och exakt en harmonisk form. Vi kan enkelt konstruera denna isomorfism också. Eftersom Harm^r och $d\Omega^{r-1}$ är ortogonala, så kommer alla former som bara skiljer sig med en exakt form (dvs är kohomologa) att ha samma projektion på Harm^r . Vi identifierar alltså varje form som är representant i någon ekvivalensklass av kohomologigruppen med dess projektion på Harm^r . Vi har nu Hodge's sats:

Sats 7.5 (Hodge's sats). På en kompakt, orienterbar, riemannsk mångfald (M, g) är $H^r(M) \simeq \text{Harm}^r(M)$. r -kohomologigrupperna är also isomorfa med

mängden av harmoniska r -former på M . Isomorfism fås genom att identifiera varje ekvivalensklass med projektionen av dess representanter på Harm^r .

Kom ihåg att Bettitalen b^r är dimensionen av kohomologigrupperna ¹¹. För eulerkarakteristiken gäller nu alltså:

$$\chi(M) = \sum (-1)^r b^r = \sum (-1)^r \dim \text{Harm}^r(M) \quad (7.57)$$

Denna ekvation innebär att vi kan beräkna eulerkarakteristiken, en topologisk invariant, genom att rent analytiskt lösa egenvärdesproblemet för laplaceoperatoren på mångfalden.

¹¹Notera att en kohomologigrupp är både en grupp och ett vektorrum, det är alltså meningsfullt att tala om dimension.

Kapitel 8

Tillämpningar i allmän relativitetsteori

Man brukar säga att matematik är naturens språk. Detta går kanske att diskutera, men vi kan åtminstone med full tillförsikt konstatera att differentialgeometri är språket som används för att beskriva gravitation. Grundinsikten i den allmänna relativitetsteorin är att massan kröker rumtiden. Vi brukar föreställa oss universum som 'platt', men i själva verket så beskrivs rumtiden bäst som en krökt mångfald, och vi behöver alltså all den matematik som vi hittills har tagit upp för att få en bra förståelse för gravitationen.

Förhållandet att massan kröker rumtiden uttrycks matematiskt koncist med Einsteins fältekvation.¹

Sats 8.1 (Einsteins fältekvation).

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (8.1)$$

Vänsterledet uttrycker kurvaturen av rumtiden, medans högerledet beskriver energin och rörelsemängden i rumtiden. Vi kommer att studera i detalj vad denna ekvation betyder och vad den kan säga om universum.

Einsteins fältekvation är en tensorekvation, i vänsterledet står Einstein-tensorn $G_{\mu\nu}$ och i högerledet energi-rörelsemängdstensorn $T_{\mu\nu}$. Einstein-tensorn definieras som

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (8.2)$$

Riccitensorn definieras som kontraktionen av Riemann-tensorn $R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ och den skalära kurvaturen definieras som kontraktionen av Riccitensorn

¹Notera att Einsteins fältekvation ibland brukar skrivas $G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$ där Λ kallas den kosmologiska konstanten. I denna framställning så betraktar vi istället denna term som en del av $T_{\mu\nu}$, något som bland annat kan motiveras med att Λ troligen härrör ifrån vakuum-kvantfluktuationer. Vi använder också enheter så att $c = 1$.

$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Eftersom både Riccitenorn och den skalära kurvaturen R konstrueras ur metriken, är också Einsteintensorn bara ett resultat av metriken som vi väljer. Genom att formulera allmän relativitet i tensorer uppfylls automatiskt den generella relativitetsprincipen: Att alla fysikaliska lagar ska ha samma form oberoende av koordinatsystem. Men energi och rörelsemängd är bevarade storheter, och därför måste (formellt enligt Noether's theorem) energi-rörelsemängdstensorn, och därmed också Einsteintensorn, vara konserverade storheter. Det är detta krav som leder till den definition av Einsteintensorn som har gjorts.

Vad innebär då Einsteins fältekvation för universum? Beroende på från vilket håll ekvationen betraktas, kan man tänka sig ett flertal olika metriker som ger upphov till olika energi-rörelsemängdstensorer, eller tvärtom och kausalt mer korrekt så går det att ta fram olika energi-rörelsemängdstensorer och se vad de ger upphov till för rumtid. Frågan kan ställas vilka av dessa som beskriver vårt universum bäst, och vad de har för fysikaliska implikationer. Ett bra sätt att få insyn i dessa frågor på är att studera de analytiska lösningar som Einsteins fältekvation har. För att kunna hitta analytiska lösningar till Einsteins fältekvation måste ett flertal förenklande antaganden göras och ett flertal krav ställas för att begränsa antalet fria variabler. I det följande så väljer vi att undersöka några enkla lösningar. I nästföljande avsnitt (8.1) betraktar vi ett tomt universum och därefter, i avsnitt (8.2), ett universum som inte är tomt, men isotropt och homogent.

8.1 Vakuumlösningar

De enklaste analytiska lösningarna till Einsteins fältekvation fås genom att betrakta ett tomt universum, det vill säga utan energi och massa. I så fall så försvinner energi-rörelsemängdstensorn, $T_{\mu\nu} = 0$, och Einsteins fältekvation reduceras till $G_{\mu\nu} = 0$. Vilket alltså innebär att vi söker lösningar som uppfyller $R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$. Detta kan förenklas ytterligare ty $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \Leftrightarrow R = \frac{1}{2}\delta^\mu_\mu R \Rightarrow R = 0$. Einsteins fältekvation i vakuum kan nu skrivas

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (8.3)$$

Vi undersöker nu för vilka metriker $g_{\mu\nu}$ detta uppfylls.

Om Riemannntensorn $R^\kappa_{\mu\lambda\nu}$ är noll, så är också Riccitenorn $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ noll och den skalära kurvaturen $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ likaså. Detta skulle alltså ge en lösning. Intuitivt så mäter Riemannntensorn hur mycket en mångfald avviker ifrån en platt mångfald. Riemannntensorn försvinner för en euklidisk mångfald och andra mångfalder vars metriker har konstanta koefficienter. En godtycklig euklidisk metrik $\delta_{\mu\nu}$ löser alltså Einsteins fältekvation i vakuum.

Men alla vakuumlösningar måste inte vara mångfalder med metriker vars Riemannntensor försvinner. Vi kan mycket väl tänka oss mångfalder med metriker som ger upphov till en nollskild Riemannntensor men en Riccitenor

som är noll. Det är enkelt att se när Riemannntensorn försvinner, men Riemannntensorn försvinner inte bara för metriker med konstanta koefficienter. Alla endimensionella metriker har en försvinnande Riemannntensor men den försvinner också för till exempel metriken (i två dimensioner)

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.4)$$

Metriken med komponenterna

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

däremot har både nollskild Riemannntensor, nollskild Riccitensor och nollskild skalär kurvatur.

Mycket längre än så vill vi inte gå i letandet efter vakuumlösningarna till Einsteins fältekvation, men det finns mycket forskning och en stor teori kring dessa. Det är mycket svårare att hitta lösningar där Riccitensorn försvinner för fall då Riemannntensorn inte försvinner. Det är dock ofta dessa som är intressanta och sådana metriker dyker upp i till exempel strängteori. Mångfalder med en metrik som uppfyller Einsteins fältekvation i vakuum brukar kallas Einsteinmångfalder och studiet av dessa är intressant även ur en rent matematisk synpunkt. Den intresserade läsaren hänvisas till Besse [11]. För att ge ytterligare ett exempel på hur nära differentialgeometri och topologi är sammankopplade, så kommer här (utan förklaring) ett resultat från Hitchin och Thorpe:

Sats 8.2 (Hitchin-Thorpe olikheten). För att en kompakt, orienterbar, glatt 4-mångfald skall kunna tillåta en riemannmetrik som uppfyller Einsteins fältekvation i vakuum (8.3) måste följande gälla:

$$\chi(M) \geq \frac{3}{2}|\tau(M)|,$$

där $\chi(M)$ är mångfaldens eulerkaraktistik och $\tau(M)$ dess signatur.

8.2 Friedmann–Robertson–Walker-lösningen

Robertson-Walker metriken är en lösning till Einsteins fältekvation (8.1) som beskriver ett rumsligt homogent och isotropt universum. I tillräckligt stor skala uppfyller vårt verkliga universum kraven på homogenitet och isotropi förvånansvärt bra. Av denna anledning utgör Robertson-Walkermetriken (och Friedmanekvationerna som härleds med den) fortfarande grunden för standardmodellen inom modern kosmologi. Robertson-Walkermetriken kan härledas formellt med hjälp av Killingvektorer, men vi ger här endast en

kortfattad och delvis intuitiv beskrivning av hur det kan göras baserad på Weinberg [12], Hooft [14] och Islam [13]. För en utförligare härledning hänvisar vi läsaren till Weinberg [12].

Utgångspunkten är den mest allmänna formen för en metrik

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^0, x^1, \dots, x^{n-1})dx^\mu dx^\nu. \quad (8.6)$$

Koefficienterna $g_{\mu\nu}$ är alltså godtyckliga funktioner av alla koordinater. Vårt första krav är att universum skall ha fyra dimensioner, $n = 4$ och $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3)$. Varav en tidslig dimension, med $x^0 = t$, och tre rumsliga.

Symmetrikravet som leder härifrån till Robertson-Walker metriken brukar ibland kallas för den kosmologiska principen, vilken säger att universum är rumsligt homogent och isotropt. Denna princip uppfylls förvånansvärt bra i alla praktiska observationer av universum. Notera ordet "rumsligt" som innebär att vi inte ställer krav på att den tidslika delen är homogen och isotrop. Vi kräver alltså en uppdelning av universum i en rumslig del som är homogen och isotrop och en tidslig som inte nödvändigtvis är det:

$$ds^2 = f(x^0)dx^0 dx^0 + h_{ij}(x^1, x^2, x^3)dx^i dx^j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8.7)$$

Den rumsliga delen $d\omega^2 = h_{ij}(x^1, x^2, x^3)dx^i dx^j$ skall alltså vara homogen och isotrop. Intuitivt så innebär homogenitet att universum är likadant vart vi än befinner oss, det vill säga att i det stora hela är massfördelningen densamma överallt. Isotropi innebär att universum ser likadant ut i alla riktningar. För att göra detta mer formellt använder vi oss av de Killing-vektorer som vi tog upp tidigare. Vi säger att en mångfald är **homogen** om det i varje punkt finns lösningar till Killingekvationen (7.31) som kan anta alla möjliga värden, givet metriken. Ett ekvivalent sätt att uttrycka detta på är att säga att det finns infinitesimala isometrier som kan translaterar varje punkt till varje punkt i dess omgivning. Jämför med ekvation (7.30) och (7.31) på sidan 126. Detta innebär att metriken måste tillåta killingvektorer $X_\nu = g_{\mu\nu}X^\mu$ som kan translatera varje punkt x^μ till varje punkt $x^\mu + \varepsilon X^\mu$ utan att metriken ändras.

Isotropi definieras på liknande sätt som att det i varje punkt finns lösningar till Killingekvationen som inte påverkar x^μ men vars derivator $\Delta_\mu X_\nu$ kan anta alla möjliga värden.

Utifrån dessa krav kan vi ta fram en metrik. Weinberg [12] visar att metriker som är isotropa i varje punkt nödvändigtvis är homogena, att de är maximalt symmetriska (det vill säga de tillåter $\frac{1}{2}m(m+1)$ Killingvektorer) och att de unikt bestäms av den skalära kurvaturen R och signaturen (antalet positiva och negativa egenvärden av metriken).

För vår rumsliga del $d\omega^2$ är alla egenvärden positiva. Det går nu att gissa sig fram till att en maximalt symmetrisk metrik måste ha formen

$$d\omega^2 = -A^2(t) \left(dx^i dx^i + \frac{k(x^i dx^i)^2}{1 - kx^i x^i} \right) \quad (8.8)$$

där $k = -1, 0, 1$ beroende på om den skalära kurvaturen är $R < 0$, $R = 0$ eller $R > 0$. $A(t)$ är en godtycklig funktion.² Ett byte till sfäriska koordinater $x^1 = r \sin \theta \cos \phi$, $x^2 = r \sin \theta \sin \phi$ och $x^3 = r \cos \theta$ ger nu

$$d\omega^2 = -A^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (8.9)$$

Vi kombinerar nu ihop detta med tidsdelen i ekvation (8.2) och ersätter dessutom $f(x^0)dx^0dx^0$ med dt^2 för att få standardformen på **Robertson-Walker-metriken**.³

$$ds^2 = dt^2 - A^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (8.10)$$

Metriken som ges av denna ekvation beskriver alltså den fyrdimensionella, homogena och isotropa rumtiden som utgör en bra modell av vårt universum. Faktorn $A(t)$ är en skalfaktorn som beskriver hur den rumsliga delen av universum ändras med tiden. För tydlighetens skull kan vi skriva ut komponenterna som elementen i en matris:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A^2 \frac{1}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (8.11)$$

8.3 Härledning av Friedmann-ekvationerna

I föregående avsnitt har Einsteins fältekvation (8.1) inte använts en enda gång. Formen på metriken (8.10) är alltså bara ett resultat av kravet på isotropi och koordinatvalet. Skalfaktorn $A = A(t)$ är dock fortfarande en helt okänd funktion. Denna funktion beskriver hur rummet ändras med tiden och för att bestämma den måste vi lösa Einsteins fältekvation för en rimlig form på energi-rörelsemängdstensorn $T_{\mu\nu}$.

Kraven på isotropi och homogenitet bör rimligtvis även gälla för $T_{\mu\nu}$. Vart vi än befinner oss skall alltså energitätheten ε och trycket p vara densamma. Trycket måste också vara detsamma från alla riktningar för att kravet på isotropi skall vara uppfyllt. Det går att visa att under dessa förutsättningar så måste $T_{\mu\nu}$ ha samma form som energi-rörelsemängdstensorn för en perfekt gas:⁴

$$(T_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} p \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

²I fortsättningen skriver vi bara A , t -beroendet är underförstått.

³Detta motsvarar variabelbytet $t = \int \sqrt{f(x^0)} dx^0$.

⁴Se Weinberg [12] för en härledning.

Där ε och p eventuellt kan vara funktioner av tiden t .

Utifrån dessa resultat kan vi nu ta fram formen av Einsteins fältekvationer för Robertson-Walker metriken. Det gäller alltså att förenkla

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (8.13)$$

Där $g_{\mu\nu}$ ges av (8.11) och $T_{\mu\nu}$ av (8.12).

För att ta fram Riccitensores komponenter kontraherar vi indexen i formeln för Riemann tensors komponenter för att få

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\eta\lambda} - \Gamma^\eta_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\eta\nu} \quad (8.14)$$

Vi använder oss av Levi-Civita-konnektionen varpå konnektionskoefficienterna ges av Christoffelsymbolerna

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}g^{\lambda\eta}(\partial_\mu g_{\nu\eta} + \partial_\nu g_{\mu\eta} - \partial_\eta g_{\mu\nu}) \quad (8.15)$$

Det framgår direkt ur ekvationen ovan (och ur definitionen av Levi-Civita-konnektionen) att $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$, vi har alltså $\binom{4+2-1}{2} \cdot 4 = 40$ stycken konnektionskoefficienter att beräkna. Flera av dessa blir dock noll, till exempel blir koefficienten noll om alla index är olika eftersom metriken är diagonal. Det är 13 + 6 (pga. symmetrien) koefficienter som inte blir noll:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{11} &= \frac{\dot{A}A}{1 - kr^2}, \quad \Gamma^0_{22} = \dot{A}Ar^2, \quad \Gamma^0_{33} = \dot{A}Ar^2 \sin^2 \theta \\ \Gamma^1_{11} &= \frac{rk}{1 - kr^2}, \quad \Gamma^1_{22} = -r(1 - kr^2), \quad \Gamma^1_{33} = -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \\ \Gamma^2_{12} &= \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma^3_{23} = \cot \theta \\ \Gamma^1_{01} &= \Gamma^2_{02} = \Gamma^3_{03} = \frac{\dot{A}}{A} \end{aligned}$$

För tydlighetens skull visar vi hur en sådan koefficient beräknas, de andra beräknas analogt. Vi använder ekvation (8.15) och beräknar Γ^1_{22} . Läsaren bör dra sig till minnes vad indexen står för, $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$, dessutom så är metriken diagonaliserad och dess koefficienter ges av (8.11). Summationskonventionen måste naturligtvis beaktas. $\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}g^{1\eta}(\partial_2 g_{2\eta} + \partial_2 g_{2\eta} - \partial_\eta g_{22}) = \frac{1}{2}g^{11}(-\partial_r g_{22})$. Kom ihåg att $g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = \delta^\lambda_\mu$, vilket innebär att $g^{11} = -\frac{1-kr^2}{A^2}$ och alltså har vi $\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}(-\frac{1-kr^2}{A^2})(-\partial_r(-A^2 r^2)) = -r(1 - kr^2)$.

Nästa steg är att använda ekvation (8.14) för att beräkna Riccitensores koefficienter $R_{\mu\nu}$. Dessa beräkningar förenklas avsevärt genom att inse att koefficienterna är noll så fort $\mu \neq \nu$, något som följer av vårt krav på isotropi. Vi måste alltså bara beräkna fyra koefficienter. Den första är $R_{00} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{00} -$

$\partial_0 \Gamma_{0\lambda}^\lambda + \Gamma_{00}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda - \Gamma_{0\lambda}^\eta \Gamma_{0\eta}^\lambda = 0 - 3 \cdot \partial_0 \Gamma_{01}^1 + 0 - 3 \cdot \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1 = -3 \frac{\ddot{A}}{A}$ och de andra beräknas på samma sätt. Vi får:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3 \frac{\ddot{A}}{A} \\ R_{11} &= \frac{1}{1 - kr^2} (\ddot{A}A + 2\dot{A}^2 + 2k) \\ R_{22} &= r^2 (\ddot{A}A + 2\dot{A}^2 + 2k) \\ R_{33} &= r^2 \sin^2 \theta (\ddot{A}A + 2\dot{A}^2 + 2k) \end{aligned}$$

Utifrån detta kan vi beräkna den skalära kurvaturen $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} = -\frac{6}{A^2} (\ddot{A}A + \dot{A}^2 + k)$.

Nu har vi kommit så långt att det är möjligt att skriva ut Einsteins fältekvation (8.13) i komponentform. För 00-komponenten får vi:

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = 8\pi G T_{00} \Leftrightarrow -3 \frac{\ddot{A}}{A} - \frac{1}{2} \left(-\frac{6}{A^2}\right) (\ddot{A}A + \dot{A}^2 + k) = 8\pi G \varepsilon$$

Omskrivning ger nu:

$$\frac{\dot{A}^2}{A^2} + \frac{k}{A^2} = \frac{8}{3} \pi G \varepsilon \quad (8.16)$$

På grund av antagandet om isotropi är 11-, 22- och 33- komponenterna desamma och vi får dessa till

$$2\ddot{A}A + \dot{A}^2 + k = -8\pi G p A^2. \quad (8.17)$$

Ekvationerna (8.16) och (8.17) ovan brukar kallas för **Friedmannekvationerna** och de utgör grunden för flera viktiga modeller av vårt universum.

Låt oss undersöka närmare vad Friedmannekvationerna säger. Konstanten k beskriver formen av universum: För $k = 1$ har vi ett slutet universum med positiv kurvatur (dvs. sfärformigt), för $k = -1$ är universums kurvatur negativt (dvs. hyperboliskt formad) och för $k = 0$ är det platt. Skalfaktorn $A(t)$ beskriver universums expansion eller kontraktion med tiden. Galaxer som vid en viss tid befinner sig på ett avstånd d_0 ifrån varandra, kommer efter tiden t att befinna sig på ett avstånd $d(t) = A(t)d_0$ ifrån varandra.

Genom att sätta in $\dot{A}^2$ från (8.16) i (8.17) fås följande ekvation:

$$\frac{\ddot{A}}{A} = -\frac{4}{3}(\varepsilon + 3p). \quad (8.18)$$

Här så syns det hur den (relativa) accelerationen av universums expansion är relaterad till energitätheten och trycket. På grund av det negativa tecknet kan det direkt synas att universum bör expandera allt långsammare. På grund av energi-masskonservering bör dessutom både trycket och energitätheten minska när expansion sker och därför så borde denna deacceleration

minska med tiden. Observationer tyder dock på att universums expansionshastighet ökar. Detta har lett till att kosmologer har börjat tala om någonting med negativ energitäthet, kallad mörk energi, som skulle kunna förklara en positiv acceleration i ekvation (8.18).

Litteraturförteckning

- [1] Nakahara, M. (2003) *Geometry, topology and physics*. Taylor & Francis Group LLC.
- [2] Durbin, J.R. (2009) *Modern Algebra, an introduction*. John Wiley & Sons, Inc.
- [3] Simon, B. (1996) *Representations of finite and compact groups*. American Mathematical Society.
- [4] University of California Irvine <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/> (2011-05).
- [5] Brzezinski, J. (2005) *Algebraiska strukturer*. Matematiska vetenskaper, Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet.
- [6] Brzezinski, J. (2004) *Linjär och multilinjär algebra*. Matematiska vetenskaper, Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet.
- [7] Armstrong, M.A. (1983) *Basic Topology*. Springer, New York.
- [8] Gallier, J. (2005) *Notes on group actions, manifolds, Lie groups and Lie algebras*. University of Pennsylvania, Philadelphia.
- [9] Gallier, J. (2011) *Geometric Methods and applications for computer science and engineering, second edition*. Springer.
- [10] Rindler, W. (2006) *Relativity: Special, General, Cosmological 2nd ed.*. Oxford University Press, New York.
- [11] Besse, A.L. (1987) *Einstein Manifolds*. Springer, Heidelberg.
- [12] Weinberg, S. (1972) *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [13] Islam, J.N. (2004) *An introduction to mathematical cosmology*. Cambridge University Press, Cambridge.

- [14] Hooft, G. (1998) *Introduction to general relativity*. Caputcollege, Utrecht.
- [15] Lee, J. (2000) *Differential geometry-analysis and physics*. Jeffrey Marc lee.
- [16] Abraham, R. et al. (1983) *Manifolds, Tensor Analysis and Applications* Addison Wesley
- [17] Penrose, R. (2007) *The Road to Reality* Vintage Books
- [18] Flanders, H. (1963) *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences* Academic

Del III

Bilagor

Bilaga A

Ordlista

Eftersom vi har träffat på många svåröversatta engelska begrepp vill vi klargöra exakt vad vi menar med våra översättningar, här är samtliga begrepp samlade.

A.1 Engelsk-svensk

Abelian Abelsk

Action Verkan

Arcwise connected Bågvis sammanhängande

Atlas Atlas

Bilinearity Bilinjäritet

Boundary group Randgrupp

Boundary Rand

Chart Karta

Conformal Konform

Connected Sammanhängande

Connection Konnektion

Coset Sidoklass

Crosscap Korshuva

Cycle group Cykelgrupp

Cyclic group Cyklisk grupp

Euler Characteristic Eulerkarakteristik

Field Kropp

Geodesic Geodetisk linje

Group Grupp

Integral domain Integritetsområde

Jacobi-identity Jacobi-identitet

Kernel Kärna

Klein bottle Kleinflaskan

Left-invariant Vänsterinvariant

Left/Right translation Vänster/Höger translation

Lie subalgebra Lie underalgebra

Manifold Mångfald

Metric Metrik

Möbius strip Möbiusbandet

Non-coordinate basis Icke-koordinatbasen

One-parameter subgroup En-parameterdelgrupp

Open set Öppen mängd

Parallell transport Parallellförskjutning

Projective plane	Projektiva planet	Jacobi-identitet	Jacobi-identity
Quotient group	Kvotgrupp	Kärna	Kernel
Ring	Ring	Karta	Chart
Simplicial complex	Simpliciellt komplex	Kilprodukt	Wedge product
Skew-symmetry	Antisymmetrisk	Kleinflaskan	Klein bottle
Subgroup	Delgrupp	Konform	Conformal
Topological space	Topologiskt rum	Konnektion	Connection
Wedge product	Kilprodukt	Korshuva	Crosscap
A.2 Svensk-engelsk		Kropp	Field
Abelsk	Abelian	Kvotgrupp	Quotient group
Antisymmetrisk	Skew-symmetry	Lie delalgebra	Lie subalgebra
Atlas	Atlas	Mångfald	Manifold
Bågvisst sammanhängande	Arcwise connected	Metrik	Metric
Bilinjäritet	Bilinearity	Möbiusbandet	Möbius strip
Cykelgrupp	Cycle group	Öppen mängd	Open set
Cyklisk grupp	Cyclic group	Parallellförskjutning	Parallell transport
Delgrupp	Subgroup	Projektiva planet	Projektive plane
En-parameterdelgrupp	One-parameter subgroup	Rand	Boundary
Eulerkarakteristik	Euler Characteristic	Randgrupp	Boundary group
Geodetisk linje	Geodesic	Sammanhängande	Connected
Grupp	Group	Sidoklass	Coset
Icke-koordinatbasen	Non-coordinate basis	Simpliciellt komplex	Simplicial complex
Integritetsområde	Integral domain	Topologiskt rum	Topological space
		Vänster/Höger translation	Left/Right translation

Vänsterinvariant Left-invariant

Verkan Action

Bilaga B

Algebraiska objekt och mängdlära

Det finns en hierarki av algebraiska objekt med allt mer struktur. Vi börjar med begreppet binär relation på en mängd och definierar sedan i tur och ordning delmängder av detta, för att till sist komma fram till objektet **kropp** där de reella talen med de vanliga räkneoperationerna ingår.

B.1 Mängder och relationer

Det moderna mängdbegreppet utvecklades under en period från 1870-talet fram till 1922 när ZFC-teorin fick sin nuvarande form. Målet var att finna en fullständig axiomatisering av hela matematiken, som skulle grunda sig på mängdläran. ZFC innehåller nio axiom och ett schema för hur de oändligt många ytterligare axiomen ska se ut, och har varit tillräcklig för alla matematikens behov fram till idag. Även om Kurt Gödel visade 1931 att en fullständig axiomatisering av matematiken är omöjlig, så är ZFC en tillräckligt god axiomatisering för all modern matematik. Vi kommer här nöja oss med att diskutera mängdbegreppet.

En **mängd** är en samling av objekt, som själva kan vara mängder. En mängd får dock inte innehålla sig själv (annars uppkommer Russells paradox). Objekten i mängden kallas element. Elementen har ingen inbördes ordning, och det får inte finnas några dubletter i mängden. Vi skriver mängder på följande sätt:

$$M = \{a, b, c\} \tag{B.1}$$

$$N = \{a, b, d\} \tag{B.2}$$

Att elementet a tillhör M skrivs $a \in M$. Ett viktigt sätt att bilda nya mängder är den **Cartesiska mängdprodukten**, mängden av ordnade par:

$$M \times N = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, a), (b, b), (b, d), (c, a), (c, b), (c, d)\} \tag{B.3}$$

Att vi har **ordnade** par innebär att $(a, b) \neq (b, a)$, vilket gör ovanstående till en korrekt mängd utan dubletter. En tvåställig **relation** $R(x, y)$ på en mängd M är en delmängd av den cartesiska produkten av mängden M med sig själv. Vi skriver det med symboler:

Definition B.1 (Relation). $R(x, y) \subseteq M \times M$

Man kan på motsvarande sätt definiera en-, tre- eller flerställiga relationer. Dessa har vi dock inget intresse av i denna text. Inom matematiken är en speciell sorts relationer särskilt användbara, de kallas **ekvivalensrelationer** och definieras som följer (med den förenklade notationen $*(x, y) \equiv x * y$):

Definition B.2 (Ekvivalensrelation). En relation $*$ på M är en ekvivalensrelation om den uppfyller följande:

- **Reflexivitet:** $a * a$
- **Symmetri:** $a * b \Leftrightarrow b * a$
- **Transitivitet:** $a * b$ och $b * c \Rightarrow a * c$

För alla $a, b \in M$

Ekvivalensrelationer **partitionerar** en mängd i partitioner kallade **ekvivalensklasser**. En ekvivalensklass karakteriseras av att för alla element a, b som tillhör den, gäller $a * b$. Man skriver ekvivalensklasser som $[a]$ där a är ett element i klassen, kallat en representant för klassen. Alla element tillhör någon ekvivalensklass, ty $a * a$ enligt definition B.2. Inget element tillhör mer än en ekvivalensklass, ty om två ekvivalensklasser skulle överlappa så gör transitiviteten att de är en och samma.

Vi ska inte diskutera begreppet avbildningar då läsaren bör känna till detta. Vi nöjer oss med att definiera den speciella delmängd av avbildningar som vi behöver för definitionen av grupp:

Definition B.3 (Binär operation). En **binär operation** $*$ på M är en avbildning $*$: $M \times M \rightarrow M$

B.2 Grupper

Se kapitel 1 för teorin.

B.2.1 Additiv och multiplikativ notation

Gruppoperationer kan skrivas med den allmänna notationen $*(a, b) = c$ men det är ofta mer tilltalande att använda antingen den multiplikativa eller den additiva notationen. I multiplikativ notation skrivs $a \cdot b$ som ab och $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ som a^n . I additiv notation förkortas inte operationen bort

utan $a + b$ skrivs $a + b$. Upprepade additioner skrivs som heltalsmultipler, $a + a + a + a + \dots + a = na$. Subtraktion brukar användas för att ange addition med inversa elementet utan att behöva skriva ut det korrekta uttrycket med parenteser.

B.3 Ringar

När man ger en gruppstruktur åt tal, kan man frestas att införa ytterligare en binär operation. På de reella talen bildar addition en grupp, men även multiplikation uppfyller många av kriterierna som definierar en grupp, så det är naturligt att undra om det inte finns något objekt med ytterligare struktur som svarar mot detta. Det går att definiera en sådan struktur, och det gör vi här.

Definition B.4 (Ring). En **ring** är en mängd R med två binära operationer $+$ och $\cdot$ som uppfyller följande villkor:

- $(R, +)$ är en abelsk grupp
- $(R, \cdot)$ är sluten, associativ och det existerar ett identitetsselement 1 sådant att $1 \cdot a = a \forall a \in R$.
- De **distributiva** lagarna gäller: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ och $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

Vi ser att denna struktur är något mer generell än exemplet $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ då vi inte kräver att multiplikationen ska bilda en grupp, vi accepterar frånvaron av inverser. Detta tyder på att mer restriktiva strukturer kan definieras, men vi börjar med att titta på ett exempel på en ring. Lägg även märke till att en ring kan vara kommutativ under multiplikation, men den måste inte vara det. Om en ring är kommutativ under multiplikation kallas den för en **kommutativ ring**. Kommutativa ringar är en delmängd av ringar.

Exempel B.1 (Ring $\mathbb{Z}$). Heltalen $\mathbb{Z} = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ uppfyller under addition följande regler:

- Slutenhet: $a + b \in \mathbb{Z} \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$
- Associativitet: $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$
- Kommutativitet: $a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$
- Existens av identitet: $0 + a = a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$
- Existens av invers: $a + -a = -a + a = 0 \quad \forall a \in \mathbb{Z}$

Alltså är $(\mathbb{Z}, +)$ en abelsk grupp. Under multiplikation har vi istället följande:

- Slutenhet: $a \cdot b \in \mathbb{Z} \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$
- Associativitet: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$
- Existens av identitet: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$

Och de distributiva lagarna gäller. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ är alltså en ring.

Ringar utgör en delmängd av grupper, vilket i sin tur utgör en delmängd av **magmor** (plural av **en magma**) vilket är ett namn som införts för mängder med en binär operation utan ytterligare villkor. Det finns ett antal namngivna algebraiska strukturer som var och en svarar mot ett ytterligare krav på den struktur som den är en delmängd av. Vi har här inte definierat alla dessa och kommer inte att göra det.

B.4 Integritetsområden

I en ring kan det finnas element a, b sådana att $a \cdot b = 0$. Dessa kallas **nolldelare** eftersom nollan kan faktoriseras i dem, och om de hade en invers skulle nollan vara delbar med denna! Vi kan definiera en ny struktur där vi förbjuder nolldelare.

Definition B.5 (Integritetsområde). En kommutativ ring som saknar nolldelare kallas för ett **integritetsområde**.

De reella talen är ett välbekant exempel. Vi kan även fortsätta med vårt förra exempel:

Exempel B.2 (Integritetsområdet $\mathbb{Z}$). Som vi visat är $\mathbb{Z}$ en ring. Multiplikationen av heltal är dessutom kommutativ, och det finns inga heltal a, b sådana att $a \cdot b = 0$. Vi kan alltså dra slutsatsen att $\mathbb{Z}$ är ett integritetsområde.

Vi kräver fortfarande inte existensen av multiplikativa inverser, vilket leder oss till att definiera ytterligare en struktur.

B.5 Kroppar

Vi ställer nu kravet att vår struktur ska ha multiplikativa inverser för alla element utom noll.

Definition B.6 (Kropp). En kropp är en mängd $\mathbb{K}$ med två operationer $+$ och $\cdot$ där $+$ bildar en abelsk grupp på $\mathbb{K}$ medan $\cdot$ på $\mathbb{K}$ uppfyller samtliga kriterier för att vara en abelsk grupp, med undantag av att den additiva identiteten saknar multiplikativ invers. Dessutom uppfyller operationerna de distributiva lagarna.

De reella talen uppfyller precis dessa villkor, det går att dela med allt utom noll. Heltalen saknar däremot multiplikativa inverser för fler element än noll, och är därmed inte en kropp. Det inses lätt att även de komplexa talen är en kropp under multiplikation och addition. Vi tittar på ett exempel på en ny mängd, som är en kropp.

Exempel B.3 (De rationella talen $\mathbb{Q}$). Vi testar egenskaperna av $\mathbb{Q}$ under $+$ och $\cdot$ i tur och ordning:

- Slutenhets: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Q}$, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \in \mathbb{Q}$.
- Associativitet: $\frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = (\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f} = \frac{adf+bcf+bde}{bdf}$, $\frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}) = (\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}) \cdot \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}$
- Kommutativitet: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{ad+bc}{bd}$, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} = \frac{ac}{bd}$
- Existens av identiteter: Addition: $0 + a = a + 0 = a$, Multiplikation: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
- Existens av inverser: Additiv invers: $\frac{a}{b}^{-1} = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} \quad \forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, multiplikativ invers: $\frac{a}{b}^{-1} = \frac{b}{a} \quad \forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : b \neq 0$
- Distributivitet av $\cdot$ över $+$: $\frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = (\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}) + (\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f})$

Vi har visat att $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ är en kropp.

Bilaga C

Utelämnade bevis

C.1 Tensorer.

Definition C.1. Tensorprodukten över V^k betecknas $\otimes^k V$ och definieras definieras enligt: $\otimes^k V$ är ett vektorrum med en multilinjär avbildning $\rho : V^k \rightarrow \otimes^k V$ sådan att för varje vektorrum P och varje multilinjär avbildning $\phi : V^k \rightarrow P$ existerar en och endast en homomorfism $f : \otimes^k V \rightarrow P$ sådan att $f\rho = \phi$

C.2 Mångfald

Bevis C.1 (Jaceks bevis av egenskaper av en-parameter delgrupp). a) Låt $t, s \in \mathbb{R}$ och vi låter $t = s = 0$ dvs $\phi(0)\phi(0) = \phi(0)$, vi dividerar ekvationen med $\phi(0)$ och vi får $\phi(0) = \frac{\phi(0)}{\phi(0)} = e$.

b) Vi låter nu $s = -t$ och vi finner att $\phi(t)\phi(-t) = \phi(0)$ genom att dividera likheten med $\phi(t)$ får vi den sökta relationen $\phi(-t) = \frac{\phi(0)}{\phi(t)} = \frac{e}{\phi(t)} = \phi^{-1}(t)$ där e betecknar som vanligt ett neutralt element.

Lemma C.1 (Konvergens lemma av matrisexponential). Låt $A = (a_{ij})$ vara (reell eller komplex) $n \times n$ matris och låt Om $A^p = (a_{ij}^{(p)})$, då

$$|a_{ij}^{(p)}| \leq (n\mu)^p$$

$\forall i, j, 1 \leq i, j \leq n$ vilket medför att n^2 serien

$$\sum_{p \geq 0} \frac{a_{ij}^{(p)}}{p!}$$

konvergerar absolut och matrisen

$$e^A = \sum_{p \geq 0} \frac{A^p}{p!}$$

är en väldefinierad matris.

Bevis C.2 (Konvergens av matrisexponential). Beviset är genom induktion på p [9]. För $p = 0$, har vi $A^0 = I_n, (n\mu)^0 = 1$. Vidare antar vi att

$$|a_{ij}^{(p)}| \leq (n\mu)^p$$

$\forall i, j, 1 \leq i, j \leq n$ då får vi

$$\left| a_{ij}^{(p+1)} \right| = \left| \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(p)} a_{kj} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}^{(p)}| |a_{kj}| \leq \mu \sum_{k=1}^n |a_{ik}^{(p)}| \leq n\mu (n\mu)^p$$

dvs

$$|a_{ij}^{(p+1)}| \leq (n\mu)^{p+1}, \quad \forall i, j, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

För varje par (i, j) så som $1 \leq i, j \leq n$, eftersom

$$|a_{ij}^{(p)}| \leq (n\mu)^p,$$

serien

$$\sum_{p \geq 0} \frac{|a_{ij}^{(p)}|}{p!}$$

avgränsas av den konvergerande serien

$$e^{n\mu} = \sum_{p \geq 0} \frac{(n\mu)^p}{p!}$$

och är därför absolut konvergent. Detta visar att

$$e^A = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$$

är väldefinierad.

Bevis C.3 (Bevis för egenskap av liealgebra).

$$\begin{aligned} 0 &= [X + Y, Y + X] \text{ (enligt 2)} = \\ &= [X, X] + [X, Y] + [Y, X] + [Y, Y] \text{ (enligt 1)} = \\ &= 0 + [X, Y] + [Y, X] + 0 \\ &\Rightarrow [X, Y] = -[Y, X] \end{aligned} \tag{C.1}$$

Bilaga D

Projektets arbetsgång

D.1 Bidragsrapport

Kapitel 1, Inledningen till kapitel 7, 7.1 utom exempel 7.1 som är skrivet av Jacek Sordyl, 7.5, 7.7-7.8 och B är skrivet av Jens Nordmark. Kapitel 3, inledningen till 4, 8 samt 7.9 är skrivet av Georg Treuter. Kapitel 2, 6.1, 4.1-4.2.3, 5.2.5, 7.2-7.3 och 7.6 är skrivet av Peter Lindgren Lauritzson, utom Exempel 7.3 som är skrivet av Jens Nordmark. Inledningen till kapitel 6, 6.2-6.4 och 5.5-5.5.3 är skrivet av Jacek Sordyl. I exempel 6.5 har även Peter Lindgren Lauritzson bidragit. Kapitel 5 från inledningen fram till 5.4.7 och delar av början till 5.5 är skrivet av Linnea Wikman, utom 5.2.5 som är skrivet av Peter Lindgren Lauritzson. Index, ordlista, lista över symboler, sammanfattning/abstract samt avsnitten gruppmöten, fackspråkshandledning, organisation och bidragsrapport är gjorda av Jens Nordmark. Inledningen har skrivits av Jens Nordmark och Linnea Wikman.

D.2 Gruppmöten

Gruppen har de flesta veckor haft två möten med handledaren och ett varierande antal möten för planering av projektet och diskussioner om ämnet. En bit in i projektet började handledaren hålla en föreläsning per vecka. Ämnena för dessa var:

- Lagrange formulering av analytisk mekanik
- Hamiltons formulering av analytisk mekanik
- Integralinvarianter
- Tensorformulering av maxwells ekvationer
- Instantoner i Yang-Mills-teori

- Gaugning av $U(1)$ och $SU(2)$

Övriga möten med handledaren användes dels för att hålla presentation av vad gruppen läst den veckan, dels för att diskutera ämnet med handledaren.

D.3 Fackspråkshandledning

Gruppen har vid denna rapports färdigställande haft två möten med centrum för fackspråk och kommunikation på Chalmers bibliotek, och ett tredje är bokat.

- Handledningstillfälle 1: Responsarbete gjordes tillsammans med grupp MCCX02-11-03 *Controlling the speed of quantum decay* den 15 mars. Responsen från den andra gruppen fick oss att kraftigt utöka förkunskapsdelen av texten med fotnoter och ett appendix.
- Handledningstillfälle 2 gjordes den 29 april och handlade främst om informellt språk och ett onormalt syfte med texten. Det beslutades mot fackspråks rekommendationer att inte ta bort alla skämt ur texten.
- Handledningstillfälle 3: muntlig presentation är planerat den 27 maj.

D.4 Organisation

Google documents användes för att hålla en aktuell version av denna rapport tillgänglig för alla medverkande under hela skrivprocessen. Uppdelningen av skrivandet har beslutats genom konsensus varje gång någon blivit klar med ett avsnitt och föreslagit ett nytt att påbörja. Detta har gjort att alla kunnat skriva i sin egen takt hela tiden utan några konflikter. Texten har diskuterats kontinuerligt och växt fram väldigt icke-linjärt, vilket är bra för sammanhanget och inlärningen. Gemensam notation infördes stegvis efter att de första bidragen haft vissa skillnader i notationen.

Gruppens wiki har främst använts för att samla länkar till texter och verktyg som gruppens medlemmar hittat. Det är även på wikin som projekt-dagboken förts.

Sakregister

- A_n , 14
- B_n , 38
- C_n , 38
- $GL(n, \mathbb{C})$, 15
- $GL(n, \mathbb{R})$, 15
- $H(p)$, 121
- H_n , 39
- $Harm^r(M)$, 132
- $O(n, \mathbb{K})$, 15
- $R(X, Y)Z$, 118
- $SL(n, \mathbb{R})$, 15
- $SO(n, \mathbb{K})$, 15
- $SU(n, \mathbb{C})$, 15
- S_n , 14
- $T(X, Y)$, 115
- $U(n, \mathbb{C})$, 15
- Z_n , 38
- Δ , 131
- $\Omega^r(M)$, 127
- χ , 32
- δ , 110
- η , 110
- $\log x$, 12
- $\mathbb{Z}_n$, 14
- ∂ , 38
- $\text{Conf}(M)$, 123
- $\text{Sym}(S)$, 14
- $\text{Weyl}(M)$, 123
- $d\Omega^{r-1}(M)$, 132
- $d^\dagger\Omega^{r+1}(M)$, 132
- $\exp(V)$, 87
- Öppen kurva, 46
- Öppen mängd, 23
- Öppet täcke, 26
- Additiv notation, 149
- Adjunkt, 129
- Affin konnektion, 113
- Alternerande, 21
- Analytisk funktion, 123
- Antisymmetri, 21
- Atlas, 42
- Bågvis sammanhängande, 27
- Basvektorer, 48
- Bettinummer, 35
- Bilinjäritet, 17, 84
- Binär operation, 149
- Cartesisk produkt, 148
- Coexakt, 132
- Cosluten, 132
- Crosscaps, 31
- Cykelgrupp, 38
- cyklisk grupp, 13
- delgrupp, 11
- Diffeomorfism, 44
- Diskret topologi, 24
- Effektiv verkan, 91
- Einsteins fältekvation, 134
- Einsteintensorn, 134, 135
- Ekvivalensklasser, 149
- Ekvivalensrelation, 149
- Elektromagnetisk tensorn, 129
- enparameterdelgrupp, 86
- Euklidisk metrik, 110
- Eulerkarakteristik, 32
- Exakt, 132
- Exakt form, 97
- Exponentialfunktionen, 87

fri abelsk grupp, 13
 Fri verkan, 91
 Friedmann-Robertson-Walker-lösningen, 136
 Friedmanekvationerna, 140
 fundamentala homomorfisatsen, 14
 Fyrfärgsteoremet, 33

 General Linear Group, 15
 Geodet, 117
 Glatt verkan, 90
 grupp, 10

 högersidoklasser, 13
 Högertranslation, 82
 Harmonisk, 132
 Hausdorffrum, 25
 Hitchin-Thorpe olikheten, 136
 Hodge $*$, 127
 Hodge dekompositionssatsen, 132
 Hodge's sats, 133
 Hodgedualen, 127
 Hodgestjärnan, 127
 Holonomigrupp, 121
 homeomorfism, 26
 Homogen mångfald, 137
 Homologigrupper, 31, 37, 39
 homomorfi, 12

 Integritetsområde, 151
 Isometri, 121
 isomorfi, 11
 Isotrop mångfald, 137

 Jacobi-identiteten, 84
 Jacobimatrisen, 123

 kärnan, 12
 Karta, 42
 Killingekvationen, 124, 137
 Killingvektorfält, 124
 Kleinflaskan, 27
 kompakt, 27
 Konform avbildning, 122
 Konform relation, 123
 Konform struktur, 123
 Konformt Killingvektorfält, 124
 Konformt plan, 123
 Konnektion, 116
 konnektionskoefficienter, 139
 Kontinuitet, 25
 Kontinuitetsekvationen, 129
 Kontravariant, 19
 konvex, 32
 Korshuvor, 31
 Kosmologiska principen, 137
 kovariant, 19
 Kropp, 151
 Kryssprodukt, 17
 kvotgrupp, 14

 Laplaceoperator, 131
 Laplaceoperatorn, 131
 Levi-Civita-konnektionen, 116
 Levi-Civita-tensorn, 22
 Liealgebra, 84
 Liebracket, 84
 Logaritmen, 12
 Lorentzmetrik, 110

 Mängd, 148
 Möbiusbandet, 27
 Möbiustransformationer, 91
 Mångfalder, 41
 Magma, 151
 Maxwells ekvationer, 129
 Metrik, 109
 Minkowskimetrik, 110
 Multilinjäritet, 17
 multiplikativ notation, 149

 n-kedja, 37
 Noethers teorem, 135
 Nolldelare, 151
 normal delgrupp, 13

 Omgivning, 25
 Ortogonala gruppen, 15

 Poincarés lemma, 98

Polyeder, 36
 Projektiva planet, 27
 Pseudo-Riemannmetrik, 110

 r-form, 95
 Rand, 37
 Randgrupp, 38
 randoperatör, 38
 Reflexivitet, 149
 Relation, 149
 Riccitensorn, 135
 Riemannmetrik, 109
 Riemanns kurvaturtensor, 118
 Riktningsderivata, 47
 Ring, 150
 Robertson-Walker-metriken, 136

 Sammanhängande, 27
 Sfären, 27
 sidoklasser, 13
 simplex, 35
 Simplicielt komplex, 36
 Singulärt simplex, 94
 Skevsymmetri, 84
 Sluten, 132
 Sluten form, 97
 Special Linear Group, 15
 Special orthogonal group, 15
 Standard n-simplex, 36
 Stokes sats, 96
 Ström-ett-formen, 129
 Symmetri, 149
 Symmetrisk konnektion, 116

 Täck, 26
 Tangentplan, 45
 Tensor, 17
 Tensorfält, 51
 Tensorprodukt, 18
 Tensorproduktrum, 21
 Topologi, 23
 topologiska invarianter, 26
 Topologiskt rum, 23, 24
 Torsionstensorn, 115
 Torus, 27

 Totalt antisymmetrisk, 22
 Transitiv verkan, 91
 Transitivitet, 149
 Triangulering, 37
 trivial topologi, 24

 Unitära gruppen, 15

 vänstersidoklasser, 13
 Vänstertranslation, 82
 Vakuumlösningar, 135
 vanlig topologi, 24
 Volymelement, 95

 Weylskalning, 123

 Yta, 27

 ZFC, 148