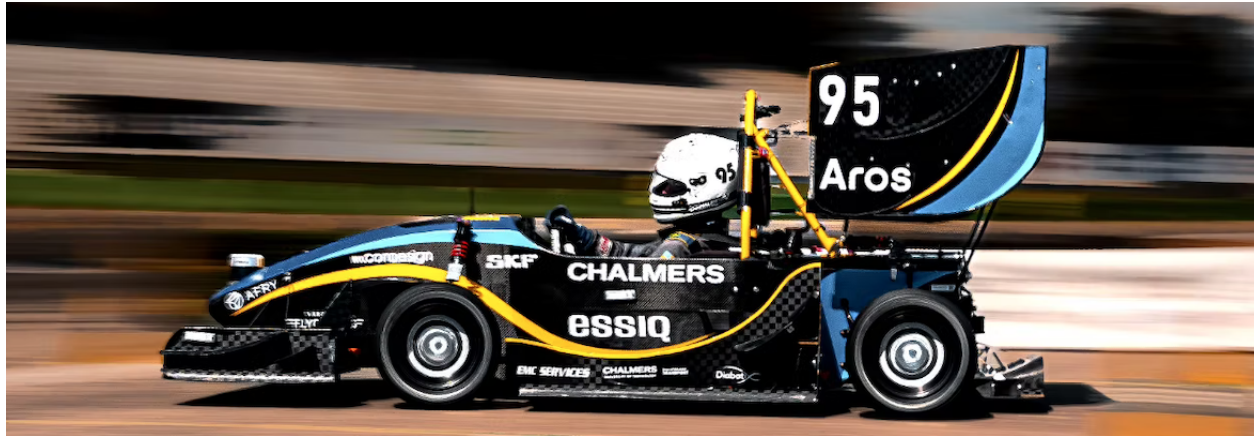




CHALMERS



Estimering av normalkrafter på däck i en Formula Student-bil

Modellbaserad estimering och utvärdering i IPG CarMaker

Kandidatarbete inom Elektroteknik

Erik Cederfjord, Dania Haidari, Albin Jonsson,
Olle Nielsen, Damjan Pankovski, Carl Örnberg

INSTITUTIONEN FÖR ELEKTROTEKNIK
AVDELNINGEN FÖR ELKRAFTTEKNIK

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg 2026
www.chalmers.se

KANDIDATARBETE 2026

Estimering av normalkrafter på däck i en Formula Student-bil

Modellbaserad estimering och utvärdering i IPG CarMaker

Erik Cederfjord, Dania Haidari, Albin Jonsson,
Olle Nielsen, Damjan Pankovski, Carl Örnberg



CHALMERS

Institutionen för elektroteknik
Avdeleningen för elkraftteknik
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg 2026

Estimering av normalkrafter på däck i en Formula Student-bil
Modellbaserad estimering och utvärdering i IPG CarMaker
Erik Cederfjord, Dania Haidari, Albin Jonsson,
Olle Nielsen, Damjan Pankovski, Carl Örnberg

© Erik Cederfjord, Dania Haidari, Albin Jonsson,
Olle Nielsen, Damjan Pankovski, Carl Örnberg, 2026.

Handledare: Stefan Lundberg, Chalmers tekniska högskola
Examinator: Jimmy Ehnberg, Chalmers tekniska högskola

Kandidatarbete 2026
Institutionen för elektroteknik
Avdelningen för elkraftteknik
Chalmers Tekniska Högskola
SE-412 96 Göteborg
Telefon +46 31 772 1000

Omslagsbild: CFS25, byggd av Chalmers Formula Student säsongen 2024/2025. Bild tillhandahållen av Chalmers Formula Student.

Skriven i L^AT_EX
Göteborg 2026

Sammanfattning

En korrekt estimering av vertikala normalkrafter på ett fordons hjul är avgörande för optimal vridmomentfördelning och maximalt väggrepp i en fyrhjulsdriven Formula Student-bil. Den nuvarande modellen som används inom Chalmers Formula Student (CFS) har inte tidigare validerats mot referensdata eller jämförts med alternativa modellansatser.

Syftet med detta kandidatarbete är att bedöma noggrannheten hos den nuvarande modellen för normalkraftsestimering vid olika körfall, samt att jämföra om alternativa fysikbaserade modeller kan ge förbättrade resultat. Arbetet ger CFS underlag för val av estimeringsmodell i framtida utveckling av bilen. Arbetet omfattar implementering av den nuvarande modellen, en helfordonsmodell som tar hänsyn till bland annat fordonets karossrörelser och en fjädermodell som bygger på fjädringssystemets vertikala rörelser.

Modellerna har utvärderats genom simulerade körfall som omfattar bland annat en Endurance-bana samt olika manövrer på en raksträcka och en cirkelbana. Resultaten jämförs med referensdata från IPG CarMaker och analyseras utifrån felmått. Studien visar att mer avancerade modellstrukturer inte nödvändigtvis förbättrar noggrannheten vid dynamiska manövrer.

Nyckelord: normalkraftsestimering, fordonsdynamik, Formula Student, IPG CarMaker, fysikbaserad estimering, lastöverföring.

Abstract

Accurate estimation of vertical tyre normal forces is essential for optimal torque distribution and maximum grip in a four-wheel-drive Formula Student vehicle. The model currently used within Chalmers Formula Student (CFS) has not previously been validated against reference data, nor compared to alternative modelling approaches.

The purpose of this bachelor thesis is to assess the accuracy of the current model for normal force estimation across different driving scenarios, and to compare whether alternative physics-based models can provide improved results. The thesis provides CFS with a basis for selecting an estimation model in the future development of the vehicle. The work includes implementation of the current model used by CFS, a full-vehicle model that accounts for body motions among other effects, and a suspension model based on the vertical motions of the suspension system.

The models were evaluated through simulated driving scenarios including an Endurance track as well as various manoeuvres on a straight road and a circular track. The results are compared with reference data from IPG CarMaker and analysed using error metrics. The study shows that more advanced model structures do not necessarily improve accuracy during dynamic manoeuvres.

Keywords: normal force estimation, vehicle dynamics, Formula Student, IPG CarMaker, physics-based estimation, load transfer.

Förord

Detta kandidatarbete har genomförts inom institutionen inom Elektroteknik vid Chalmers tekniska högskola under våren 2026 i samarbete med Chalmers Formula Student.

Vi vill rikta ett stort tack till vår handledare, Stefan Lundberg, för ovärderlig vägledning, konstruktiv återkoppling och diskussioner under arbetets gång. Vi vill även tacka vår examinator, Jimmy Ehnberg, för noggrann granskning och insiktsfulla kommentarer.

Ett särskilt tack riktas till medlemmarna i Chalmers Formula Student, särskilt Erik Johansson, för stöd, tillgång till simuleringsmiljö samt givande diskussioner kring fordonets dynamiska egenskaper.

Göteborg, Maj 2026

Författare	cid
Erik Cederfjord	erikced
Dania Haidari	daniaha
Albin Jonsson	aljonsso
Olle Nielsen	ollenie
Damjan Pankovski	damjan
Carl Örnberg	carlorn

Nomenklatur

Följande beteckningar används i rapporten.

Symbol	Betydelse
F_z	Vertikal normalkraft
\hat{F}_z	Estimerad vertikal normalkraft
F_x	Longitudinell kraft
F_y	Lateral kraft
m	Fordonets massa
g	Tyngdacceleration
L	Hjulbas
L_f	Avstånd från masscentrum till framaxel
L_b	Avstånd från masscentrum till bakaxel
e_f	Spårvidd framaxel
e_b	Spårvidd bakaxel
H_{MC}	Höjd från mark till masscentrum
H_{RC}	Höjd mellan roll-centrum och masscentrum
t_f	Andel av fordonsmassan på framaxeln
t_v	Andel av fordonsmassan på bilens vänstersida
p_f	Andel av aerodynamisk last på framaxeln
$a_{x,m}$	Mätt longitudinell acceleration
$a_{y,m}$	Mätt lateral acceleration
$a_{z,m}$	Mätt vertikal acceleration
$v_{x,m}$	Mätt longitudinell hastighet
θ_v	Pitch-vinkel
ϕ_v	Roll-vinkel
z_s	Fjädrad massas vertikala läge
z_u	Ofjädrad massas vertikala läge
z_r	Vägens vertikala läge
k_s	Fjäderstyvhet i suspensionen
c_s	Dämpningskoefficient i suspensionen
k_t	Däckstyvhet
C_L	Lyftkoefficient
F_z^{aero}	Aerodynamisk last

Innehåll

Nomenklatur	vii
Figurer	x
Tabeller	xiii
1 Inledning	1
1.1 Bakgrund	1
1.2 Syfte	2
1.3 Avgränsningar	2
2 Fordonsdynamikmodellering och estimering av normalkrafter	4
2.1 Fordonsdynamik	4
2.2 Aerodynamisk kraft	6
2.3 Modeller för normalkraftsestimering	7
2.3.1 Nuvarande modell	7
2.3.2 Helfordonsmodell	9
2.3.3 Fjädermodell	12
3 Metod	14
3.1 IPG CarMaker som simuleringsverktyg	14
3.2 Anpassning av normalkraftsmodellerna till CFS-modellen i IPG Car- Maker	15
3.3 Parametrisering	16
3.3.1 Fjädringssystemet av CFS-bilen i IPG CarMaker	17
3.4 Körfall	18
3.4.1 Konstant fart på raksträcka och cirkelbana	19
3.4.2 Konstant acceleration och retardation på raksträcka	19
3.4.3 FSG Endurance-bana	19
3.5 Datainsamling och analys	20
4 Resultat	21
4.1 Parameteranpassning av p_f	22
4.2 Konstant hastighet på raksträcka	22
4.3 Konstant fart på cirkelbana	23

4.4	Konstant acceleration och retardation på raksträcka	24
4.5	Modellernas beteende under FSG Endurance	26
4.6	Parameterkänslighet	33
5	Diskussion	35
5.1	Övergripande resultat för modellerna på FSG Endurance-banan	35
5.2	Analys av olika körfall	36
5.2.1	Konstant hastighet på raksträcka	36
5.2.2	Konstant fart på cirkelbana	37
5.2.3	Konstant acceleration och retardation	38
5.3	Modellernas styrkor och svagheter	39
5.3.1	Nuvarande modell	39
5.3.2	Helfordonsmodell	40
5.3.3	Fjädermodellen	41
5.3.4	De utökade modellerna	41
6	Slutsats	43
	Referenser	45
A	Bilagor	I
A.1	Anpassade modeller för statistiska fördelningen av normalkraften i IPG CarMaker	I
A.1.1	Nuvarande modell	I
A.1.2	Helfordonsmodell	I
A.2	Fjädermodellen	II
A.3	Resultat för höger fram och bakhjul vid konstant hastighet på raksträcka.	III
A.4	Resultat för estimeringen av normalkrafter på alla däck vid konstant fart i cirkelbana.	III
A.5	Resultat för differensen i normalkrafter mellan konstant fart i cirkel- bana och konstant hastighet på raksträcka för höger framhjul och vänster bakhjul.	V
A.6	Konstant acceleration för höger fram och bakhjul.	VI
A.7	Konstant retardation för höger fram och bakhjul	VI
A.8	Grafer för signaler under FSG-Endurance.	VI

Figurer

1.1	Den bil som byggdes säsongen 24/25. Bild tillhandahållen av CFS.	1
2.1	Schematisk 3D-modell av fordonets koordinatsystem och verkande storheter. Figuren illustrerar däckskrafter (F_x, F_y, F_z), aerodynamiska krafter (F^{aero}), accelerationer i masscentrum (MC) samt rotationer och tröghetsmoment kring roll-, pitch- och yaw-axlarna.	5
2.2	Fordonsmodell som visar acceleration i longitudinellt plan, som illustrerar masscentrum (H_{MC}), hjulbas L , normalkrafter ($F_{z,f}$ och $F_{z,h}$), inertiala krafter vid acceleration och pitch-vinkel (θ_v). Figuren ligger till grund för kraft- och momentbalanser vid normalkrafttestimering.	9
2.3	Fordonsmodellen bakifrån som illustrerar masscentrum, höger- och vänsterbakdäck, normalkrafter och inertiala krafter vid acceleration och roll vid vänstersväng. Figuren ligger till grund för kraft- och momentbalanser vid normalkrafttestimering.	10
2.4	Bilden illustrerar en enkel kvartsbilsmodell över ett hjul. Normalkraften pekar uppåt mot däckets som ses som en fjäder, med fjäderkonstant k_t . Den ofjädrade massans är placerad vid hjulets mittpunkt och från denna verkar suspensionen i form av en fjäder och en dämpare. I figuren är $z_s(t)$ karossens vertikala läge, $z_u(t)$ ofjädrade massans vertikala läge (hjulets centrum) och $z_r(t)$ vägens vertikala läge. Alla lägen anges relativt jämvikt.	12
3.1	Buffertkraften som funktion av fjäderkompressionen [13].	18
3.2	Visar banan som är baserad på den tävlingsbana som användes i Endurance-momentet under Formula Student Germany 2018. Bilden är tillhandahållen av Chalmers Formula Student.	20
4.1	Skattade värden av p_f från referenssimuleringar vid konstanta hastigheter på raksträcka, tillsammans med det empiriskt anpassade sambandet $p_f(v_x)$. Kurvan beskriver hur p_f ökar med fordonshastigheten och asymptotiskt närmar sig ett maximalt värde på 0,3145.	22

-
- 4.2 Fordonsdynamiska insignaler under tidsintervallet 20–60 s av Endurance-banan. Figuren visar longitudinell acceleration (a_x), lateral acceleration (a_y), styrvinkel (δ) (definierad som positiv åt vänster) samt longitudinell hastighet (v_x) över tiden. Samtliga signaler har filtrerats med ett glidande medelvärde över 0,25 s och används som insignaler till modellerna för normalkraftsestimering. 27
- 4.3 Jämförelse mellan den nuvarande modellen och referensdata från IPG CarMaker under tidsintervallet 20 – 60 s av Endurance-banan. Figuren visar estimerade normalkrafter över tid för samtliga hjul jämfört med motsvarande referenssignaler från IPG CarMaker. Samtliga signaler har filtrerats med ett glidande medelvärde över 0,25 s. De fyra övre delgraferna visar normalkraft för fram vänster (fv), fram höger (fh), bak vänster (bv) och bak höger (bh). Den nedre vänstra delgrafen visar medelvärdet av samtliga estimerade normalkrafter samt motsvarande medelvärde från IPG CarMaker. Den nedre högra delgrafen visar avvikelserna mellan estimerad normalkraft och referensdata för respektive hjul över tiden. 28
- 4.4 Jämförelse mellan den utökade nuvarande modellen och referensdata från IPG CarMaker under tidsintervallet 20 – 60 s av Endurance-banan. Figuren visar estimerade normalkrafter över tid för samtliga hjul jämfört med motsvarande referenssignaler från IPG CarMaker. Samtliga signaler har filtrerats med ett glidande medelvärde över 0,25 s. De fyra övre delgraferna visar normalkraft för fram vänster (fv), fram höger (fh), bak vänster (bv) och bak höger (bh). Den nedre vänstra delgrafen visar medelvärdet av samtliga estimerade normalkrafter samt motsvarande medelvärde från IPG CarMaker. Den nedre högra delgrafen visar avvikelserna mellan estimerad normalkraft och referensdata för respektive hjul över tiden. 29
- 4.5 Jämförelse mellan helfordonsmodellen och referensdata från IPG CarMaker under tidsintervallet 20 – 60 s av Endurance-banan. Figuren visar estimerade normalkrafter över tid för samtliga hjul jämfört med motsvarande referenssignaler från IPG CarMaker. Samtliga signaler har filtrerats med ett glidande medelvärde över 0,25 s. De fyra övre delgraferna visar normalkraft för fram vänster (fv), fram höger (fh), bak vänster (bv) och bak höger (bh). Den nedre vänstra delgrafen visar medelvärdet av samtliga estimerade normalkrafter samt motsvarande medelvärde från IPG CarMaker. Den nedre högra delgrafen visar avvikelserna mellan estimerad normalkraft och referensdata för respektive hjul över tiden. 30

-
- 4.6 Jämförelse mellan den utökade helfordonsmodellen och referensdata från IPG CarMaker under tidsintervallet 20 – 60 s av Endurance-banan. Figuren visar estimerade normalkrafter över tid för samtliga hjul jämfört med motsvarande referenssignaler från IPG CarMaker. Samtliga signaler har filtrerats med ett glidande medelvärde över 0,25 s. De fyra övre delgraferna visar normalkraft för fram vänster (fv), fram höger (fh), bak vänster (bv) och bak höger (bh). Den nedre vänstra delgrafen visar medelvärdet av samtliga estimerade normalkrafter samt motsvarande medelvärde från IPG CarMaker. Den nedre högra delgrafen visar avvikelsen mellan estimerad normalkraft och referensdata för respektive hjul över tiden. 31
- 4.7 I övre grafen visas ett 0,25 s glidande medelvärde av fjäderlängden för framhjulen under Endurance-banan i tidsintervallet 20 – 60 s. I nedre grafen visas motsvarande fjäderlängd för bakhjulen. 32
- 4.8 Jämförelse mellan fjädermodellen och referensdata från IPG CarMaker under tidsintervallet 20 – 60 s av Endurance-banan. Figuren visar estimerade normalkrafter över tid för samtliga hjul jämfört med motsvarande referenssignaler från IPG CarMaker. Samtliga signaler har filtrerats med ett glidande medelvärde över 0,25 s. De fyra övre delgraferna visar normalkraft för fram vänster (fv), fram höger (fh), bak vänster (bv) och bak höger (bh). Den nedre vänstra delgrafen visar medelvärdet av samtliga estimerade normalkrafter samt motsvarande medelvärde från IPG CarMaker. Den nedre högra delgrafen visar avvikelsen mellan estimerad normalkraft och referensdata för respektive hjul över tiden. 33
- 4.9 Känslighetsanalys för den nuvarande modellen i förhållande till parametrarna C_L , $LLTD$, p_f och H_{MC} under ett varv körning av Endurance-banan. En parameter i taget varierades med $\pm 20\%$ från sitt nominella värde medan övriga parametrar hölls konstanta. RMSE beräknades över alla fyra hjul för varje parametersteg, medel-RMSE värdet beräknades för varje parametersteg. Notera att ett minimum för samtliga parametrar inte resulterar i ett globalt minimum. 34
- A.1 Fjäderhastigheter med ett 0,25 s glidande medelvärde för samtliga fyra hjul under körning mellan 20 och 60 sekunder. VII

Tabeller

2.1	Definition och klassificering av använda signaler och parametrar.	6
3.1	Bilspecifika parametrar som användes i IPG CarMaker-modellen.	17
4.1	Jämförelse mellan de implementerade modellerna för estimering av vertikala normalkrafter vid simulering av FSG Endurance-banan. Tabellen redovisar medelvärden av RMSE och medelvärden av ME över samtliga hjul.	21
4.2	Jämförelse mellan estimerad normalkraft (\hat{F}_z) och referensvärde från IPG CarMaker ($F_{z,IPG}$) för vänster framhjul vid konstant hastighet för olika farter. Nedersta raden visar absolut medelfel för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felen. Alla kraft- och felvärden anges i newton.	23
4.3	Jämförelse mellan estimerad normalkraft (\hat{F}_z) och referensvärde från IPG CarMaker ($F_{z,IPG}$) vänster bakhjul vid konstant hastighet. Nedersta raden visar absolut medelfel för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felen. Alla kraft- och felvärden anges i newton.	23
4.4	Effekt av lateral acceleration på vänster framhjul. Differensen är beräknad som värdet vid konstant fart i cirkelbana minus värdet vid konstant fart på raksträcka, det vill säga $\Delta F = F_{\text{cirkel}} - F_{\text{rak}}$. Tabellen visar därmed hur väl respektive modell fångar förändringen i normalkraft som uppstår av den laterala termen. Nedersta raden visar absolut medelfel för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felen. Alla kraft- och felvärden anges i newton.	24
4.5	Effekt av lateral acceleration på höger bakhjul. Differensen är beräknad som värdet vid konstant fart i cirkelbana minus värdet vid konstant fart på raksträcka, det vill säga $\Delta F = F_{\text{cirkel}} - F_{\text{rak}}$. Tabellen visar därmed hur väl respektive modell fångar förändringen i normalkraft som uppstår av den laterala termen. Nedersta raden visar absolut medelfel för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felen. Alla kraft- och felvärden anges i newton.	24
4.6	RMSE- och ME-värden för vänster framhjul vid konstant acceleration. Resultaten är sorterade efter medelvärdet av den longitudinella accelerationen a_x . Alla fel anges i newton.	25

4.7	RMSE- och ME-värden för vänster bakhjul vid konstant acceleration. Resultaten är sorterade efter medelvärdet av den longitudinella accelerationen a_x . Alla fel anges i newton.	25
4.8	RMSE- och ME-värden för vänster framhjul vid konstant retardation. Resultaten är sorterade efter medelvärdet av den longitudinella accelerationen a_x . Alla fel anges i newton.	26
4.9	RMSE- och ME-värden för vänster bakhjul vid konstant retardation. Resultaten är sorterade efter medelvärdet av den longitudinella accelerationen a_x . Alla fel anges i newton.	26
A.1	Jämförelse mellan estimerad normalkraft (\hat{F}_z) och referensvärde från IPG CarMaker ($F_{z,IPG}$) för höger framhjul vid konstant hastighet. Nedersta raden visar absolut medelfel för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felen. Alla kraft- och felvärden anges i newton.	III
A.2	Jämförelse mellan estimerad normalkraft (\hat{F}_z) och referensvärde från IPG CarMaker ($F_{z,IPG}$) för höger bakhjul vid konstant hastighet. Nedersta raden visar absolut medelfel för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felen. Alla kraft- och felvärden anges i newton.	III
A.3	Jämförelse mellan estimerad normalkraft och referensvärde från IPG CarMaker för vänster framhjul vid konstant fart i cirkelbana. Nedersta raden visar absolut medelfel för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felen. Alla kraft- och felvärden anges i newton.	III
A.4	Jämförelse mellan estimerad normalkraft och referensvärde från IPG CarMaker för vänster bakhjul vid konstant fart i cirkelbana. Nedersta raden visar absolut medelfel för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felen. Alla kraft- och felvärden anges i newton.	IV
A.5	Jämförelse mellan estimerad normalkraft och referensvärde från IPG CarMaker för höger framhjul vid konstant fart i cirkelbana. Nedersta raden visar absolut medelfel för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felen. Alla kraft- och felvärden anges i newton.	IV
A.6	Jämförelse mellan estimerad normalkraft och referensvärde från IPG CarMaker för höger bakhjul vid konstant fart i cirkelbana. Nedersta raden visar absolut medelfel för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felen. Alla kraft- och felvärden anges i newton.	IV

A.7	Effekt av lateral acceleration på höger framhjul. Differensen är beräknad som värdet vid konstant fart i cirkelbana minus värdet vid konstant fart på raksträcka, det vill säga $\Delta F = F_{\text{cirkel}} - F_{\text{rak}}$. Tabellen visar hur väl respektive modell fångar förändringen i normalkraft som uppstår av den laterala termen. Nedersta raden visar absolut medelfel för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felen. Alla kraft- och felvärden anges i newton.	V
A.8	Effekt av lateral acceleration på vänster bakhjul. Differensen är beräknad som värdet vid konstant fart i cirkelbana minus värdet vid konstant fart på raksträcka, det vill säga $\Delta F = F_{\text{cirkel}} - F_{\text{rak}}$. Tabellen visar hur väl respektive modell fångar förändringen i normalkraft som uppstår av den laterala termen. Nedersta raden visar absolut medelfel för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felen. Alla kraft- och felvärden anges i newton.	V
A.9	RMSE och medelfel (ME) för höger framhjul vid konstant acceleration. Resultaten är sorterade efter medelvärdet av den longitudinella accelerationen a_x . Alla fel anges i newton.	VI
A.10	RMSE och medelfel (ME) för höger bakhjul vid konstant acceleration. Resultaten är sorterade efter medelvärdet av den longitudinella accelerationen a_x . Alla fel anges i newton.	VI
A.11	RMSE och medelfel (ME) för höger framhjul vid konstant bromsning. Resultaten är sorterade efter medelvärdet av den longitudinella accelerationen a_x . Alla fel anges i newton.	VI
A.12	RMSE och medelfel (ME) för höger bakhjul vid konstant bromsning. Resultaten är sorterade efter medelvärdet av den longitudinella accelerationen a_x . Alla fel anges i newton.	VII

1

Inledning

1.1 Bakgrund

Formula Student är en internationell ingenjörstävling där universitetsstudenter designar och bygger en egen formula-bil från grunden. Tävlingen omfattar flera bedömningsmoment, däribland konstruktion, kostnadsanalys, affärsstrategi samt dynamiska körprov som utvärderar fordonets prestanda. Formula Student är ett etablerat tävlingskoncept med över 800 deltagande lag från universitet världen över [1].

Chalmers Formula Student (CFS) är Chalmers tekniska högskolas tävlingslag inom Formula Student och har varit aktivt sedan 2002. Genom åren har CFS uppnått flera internationella framgångar, bland annat en seger i klassen för autonoma fordon vid Formula Student Germany 2023. Lagets verksamhet bedrivs i nära samverkan med Chalmers och industripartners, med målet att utveckla konkurrenskraftiga fordon och samtidigt bidra till utbildning och teknisk kompetensutveckling. Den bil som byggdes under säsongen 2024/2025 visas i figur 1.1 för att visualisera vilken typ av bil som utvecklas inom CFS.



Figur 1.1: Den bil som byggdes säsongen 24/25. Bild tillhandahållen av CFS.

Bilen är eldriven, har fjrhjulsdrift och kan framföras både manuellt och autonomt,

samt är utvecklad för att uppnå hög prestanda i tävlingens dynamiska moment. Fördelningen av normalkrafter mellan däcken är en avgörande faktor för hur ett fordon beter sig på banan. Däckens greppförmåga påverkas direkt av den vertikala lasten, vilket innebär att ett överbelastat däck får sämre prestanda medan ett däck med låg belastning riskerar att spinna upp [2]. I CFS-bilen är det numera möjligt att styra vridmomentet som läggs på alla de fyra hjulen med begränsningen att den uttagna effekten från batteriet inte får överskrida 80 kW [3]. Detta innebär ett optimeringsproblem för att maximera det tillgängliga väggreppet där en optimal vridmomentfördelning ökar fordonets stabilitet och kurvtagande [4]. För att möjliggöra detta behövs en tillförlitlig uppskattning av normalkrafterna på vardera hjul.

Utöver motorsportapplikationer är en korrekt estimering av normalkraftsfördelning av central betydelse för fordon ur ett säkerhetsperspektiv. Normalkrafterna bestämmer det maximalt tillgängliga däckgreppet och utgör därmed en grundläggande indata till aktiva säkerhetssystem såsom antisladd- och stabilitetskontroll. Felaktig uppskattning av hjulens normalkrafter kan leda till försämrad funktion hos dessa system, särskilt vid dynamiska manövrer. Detta är särskilt relevant för CFS-bilen, där individuellt styrda drivmoment möjliggör avancerad vridmomentfördelning mellan hjulen. En korrekt uppskattning av normalkrafterna är då avgörande, eftersom dessa direkt begränsar den maximala överförbara däckkraften och därmed påverkar både stabilitet och prestanda [5], [6].

Den nuvarande modellen för estimering av normalkrafter i CFS-bilen baseras på en fysikalisk modell som använder mätdata från fordonets sensorer, såsom acceleration och hastighet, samt kända fordonsp parametrar. Modellen har dock inte validerats experimentellt eller systematiskt utvärderats i simuleringsmiljö. Det innebär att modellens noggrannhet och tillförlitlighet är okänd. Detta skapar problem vid användning i system för vridmomentfördelning och fordonskontroll. Därför finns ett behov av att utvärdera och jämföra alternativa estimeringsmodeller för att säkerställa hållbar och tillförlitlig prestanda.

1.2 Syfte

Syftet med arbetet är att ge CFS ett underlag för att bedöma noggrannheten hos den nuvarande implementeringen av normalkraftsestimering vid olika körfall, samt att jämföra om alternativa modellansatser kan ge förbättrade resultat.

1.3 Avgränsningar

Arbetet avgränsas till fysikbaserade modeller för estimering av vertikala normalkrafter på hjulen i en CFS-bil. Fokus ligger på att jämföra modeller som beskriver fordonets vertikala lastöverföring och fjädringsdynamik med tydlig fysisk tolkning. Arbetet omfattar inte utveckling av en fullständig flerfrihetsgradsmodell för simulering av hela fordonets dynamik. Däremot implementeras och analyseras en helfordonsbaserad estimeringsstruktur baserad på tidigare forskning, vilken används för att jämföra

olika metoder för normalkraftestimering [6]. Den nuvarande modellen, som redan används i CFS-bilen, inkluderas eftersom den utgör den naturliga utgångspunkten för utvärderingen. Tillsammans utgör dessa tre modellansatser de mest relevanta kandidaterna inom ramen för arbetets övriga avgränsningar, eftersom de kombinerar fysisk tolkbarhet, begränsad modellkomplexitet och möjlighet att jämföra en stationär referens med globala respektive lokala dynamiska modeller utan att kräva träningsdata.

Datadrivna metoder för normalkraftestimering, såsom maskininlärning och djupa neurala nätverk, behandlas inte i arbetet. Även om sådana metoder i vissa studier har visat hög noggrannhet vid estimering av vertikala däckkrafter för racingapplikationer, kräver de tillgång till representativa träningsdata med tillförlitliga referensvärden för normalkrafterna, vilket i praktiken förutsätter däckmonterade sensorer eller avancerad testutrustning [7]. Eftersom normalkrafter inte kan mätas direkt på den aktuella CFS-bilen saknas därmed förutsättningar för att träna och validera sådana modeller på ett tillförlitligt sätt. Datadrivna black-box-modeller ger dessutom begränsad insyn i hur estimeringen sker, vilket försvårar felsökning, tolkning och säkerhetsbedömning. Av dessa skäl begränsas studien till metoder med tydlig fysisk tolkbarhet och spårbarhet mellan indata och estimerade normalkrafter.

Arbetet baseras på simuleringsdata från IPG CarMaker snarare än på fysiska körtester med exempelvis hjulkraftgivare eller intelligenta däck [5], [6]. Slutsatserna gäller därför i första hand under simulerade förhållanden. Hur väl resultaten överförs till det verkliga fordonet beror på hur representativ IPG CarMaker-modellen är i förhållande till den aktuella bilens verkliga dynamik. Dock har simuleringsmiljön i första hand använts för att jämföra modellernas relativa prestanda och identifiera vilken modell som ger bäst resultat, snarare än att bedöma hur väl modellerna överensstämmer med verkligheten. Slutsatserna bör därför främst tolkas som en jämförelse av modellernas inbördes prestanda inom den använda simuleringsmiljön.

2

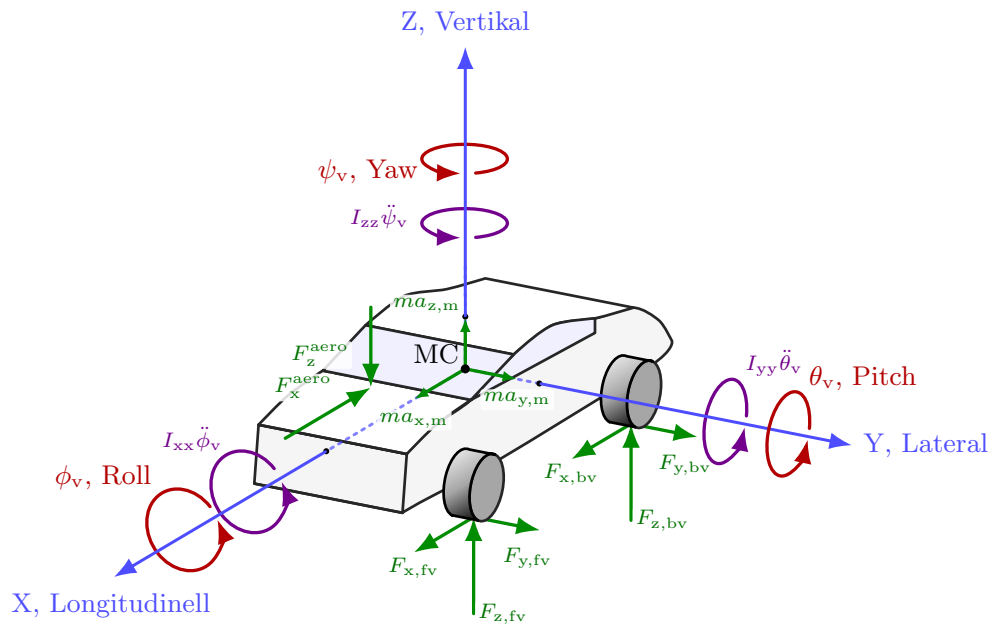
Fordonsdynamikmodellering och estimering av normalkrafter

Detta kapitel introducerar de teoretiska samband som ligger till grund för de estimeringsmodeller som används i denna studie. Först behandlas grundläggande fordonsdynamik och de krafter som påverkar fördelningen av normalkrafter mellan hjulen. Därefter beskrivs tre estimeringsmodeller som är den nuvarande modellen, helfordonsmodellen och fjädermodellen.

2.1 Fordonsdynamik

Ett fordon kan i en första approximation betraktas som en stel kropp där massan är koncentrerad till en punkt, masscentrum (MC). Rörelsen hos MC bestäms av summan av de yttre krafter och moment som verkar på fordonet. Som illustreras i Figur 2.1 utgörs de externa krafterna av däckens kontaktkrafter (F_x, F_y, F_z) och de aerodynamiska krafterna i form av luftmotstånd (F_x^{aero}) och aerodynamisk last (F_z^{aero}). I beteckningarna används indexen f, b, v och h för att ange fram, bak, vänster respektive höger. Dessa krafter ger upphov till både translationell acceleration (a_x, a_y, a_z) och rotation kring fordonets huvudaxlar: roll (ϕ_v), pitch (θ_v) och yaw (ψ_v). Motståndet mot förändring av dessa rotationsrörelser bestäms av fordonets tröghetsmoment (I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}), som beror på hur massan är fördelad i förhållande till vardera rotationsaxel. En större massa placerad längre bort från axeln ger ett större tröghetsmoment jämfört med en liten massa nära axeln. Ett stort tröghetsmoment bidrar till ett större motstånd mot förändringar i rotationsrörelse. Samspelet mellan dessa krafter, accelerationer och tröghetsmoment är avgörande för hur normalkrafterna fördelas mellan hjulen vid olika manövrar.

Vid pitch-rörelse ($\dot{\theta}_v$), se Figur 2.1, uppstår en longitudinell lastöverföring. När bilen accelererar förskjuts lastfördelning bakåt, och ger därmed upphov till en positiv pitch-vinkel där bakdelen rör sig närmare marken medan fronten höjs, se Figur 2.2. Effekten vid inbromsning blir istället motsatsen där lastfördelningen skjuts framåt. På samma sätt ger en roll-rörelse ($\dot{\phi}_v$), rotationen kring bilens längdaxeln, se Figur 2.1, upphov till en lateral lastöverföring vid kurvtagning. När bilen svänger vänster roterar karossen runt sitt roll-centrum (RC) enligt Figur 2.3. Genom en



Figur 2.1: Schematisk 3D-modell av fordonets koordinatsystem och verkande storheter. Figuren illustrerar däckkrafter (F_x , F_y , F_z), aerodynamiska krafter (F^{aero}), accelerationer i masscentrum (MC) samt rotationer och tröghetsmoment kring roll-, pitch- och yaw-axlarna.

kombination av dessa två rörelser förändras normalkraftsfördelningen på vardera däck, där normalkraften är som störst på däckets där karossen ligger som närmast hjulet.

För att uppskatta normalkrafterna på däcken krävs information om fordonets rörelse, geometri och massfördelning. Beroende på vilka förenklade antaganden som görs kan normalkrafterna beräknas med olika modellansatser. De signaler och parametrar som används i projektets modeller sammanfattas i Tabell 2.1.

Tabell 2.1: Definition och klassificering av använda signaler och parametrar.

Symbol	Enhet	Beskrivning	Typ
$a_{x,m}$	m/s ²	Longitudinell acceleration	Insignal
$a_{y,m}$	m/s ²	Lateral acceleration	Insignal
$a_{z,m}$	m/s ²	Vertikal acceleration	Insignal
$v_{x,m}$	m/s	Longitudinell hastighet	Insignal
$x(t)$	m	Fjäderlängd från jämviktspunkt	Insignal
θ_v	rad	Pitch-vinkel	Insignal
ϕ_v	rad	Roll-vinkel	Insignal
ψ_v	rad	Yaw-vinkel	-
m	kg	Fordonsmassa (inkl. förare)	Parameter
g	m/s ²	Tyngdacceleration	Parameter
L_f	m	Avstånd MC till framaxel	Parameter
L_b	m	Avstånd MC till bakaxel	Parameter
L	m	Hjulbas (avstånd fram- till bakaxel)	Parameter
H_{MC}	m	Höjd masscentrum från marken	Parameter
H_{RC}	m	Höjd roll-centrum från masscentrum	Parameter
e_f	m	Spårvidd framaxel (avstånd mellan hjulen)	Parameter
e_b	m	Spårvidd bakaxel (avstånd mellan hjulen)	Parameter
t_f	-	Andel av massa på framaxeln	Parameter
$LLTD$	-	Andel lateral kraft på framaxeln	Parameter
p_f	-	Andel aerodynamisk kraft fram	Parameter
A	m ²	Frontalarea	Parameter
I_{xx}	kgm ²	Tröghetsmoment runt x-axeln genom MC	Parameter
I_{yy}	kgm ²	Tröghetsmoment runt y-axeln genom MC	Parameter
I_{zz}	kgm ²	Tröghetsmoment runt z-axeln genom MC	Parameter
$\hat{F}_{z,i}$	N	Estimerad vertikal normalkraft	Estimerad

2.2 Aerodynamisk kraft

När ett fordon färdas genom luft påverkas den utav aerodynamiska krafter. Dessa kan delas upp i luftmotstånd F_x^{aero} , som verkar mot färdriktningen, och en vertikal aerodynamisk kraft, också kallad nedkraft (eng. *downforce*) F_z^{aero} , se figur 2.1. Luftmotståndet har en indirekt påverkan på bilens normalkraft genom ett pitch-moment, men ett vanligt antagande är att denna kraft verkar nära masscentrum och momentet kan försummas [2]. Den vertikala aerodynamiska kraften kan då modelleras som:

$$F_z^{\text{aero}} = \frac{1}{2} \rho v_x^2 A C_L, \quad (2.1)$$

där ρ är luftens densitet, v_x är fordonets hastighet relativt luften i x-led, A är fordonets frontalarea och C_L är lyftkoefficienten.

Fördelningen av den aerodynamiska lasten mellan fram- och bakaxel bestäms av posi-

tionen för kraftens verkningspunkt. Om verkningspunkten är longitudinellt förskjuten från masscentrum uppstår ett pitch-moment, vilket förändrar normalkraftsfördelningen mellan fram- och bakaxel. Denna verkningspunkt påverkas bland annat av fram- och bakvingarnas geometri, attackvinkel och bilens pitch-läge [8]. Den totala aerodynamiska lasten definieras som differensen mellan totala normalkraften som verkar på bilen F_z^{tot} (alltså summan av alla normalkrafter på vardera hjul) och den statiska normalkraften F_z^{statisk} enligt:

$$F_z^{\text{tot}} - F_z^{\text{statisk}} = F_z^{\text{aero}}. \quad (2.2)$$

I nuvarande och helfordonsmodellen beskrivs fördelningen av aerodynamiska lasten med parametern p_f , som anger andelen av den totala aerodynamiska nedkraften som verkar på framaxeln enligt:

$$F_{z,\text{fram}}^{\text{aero}} = p_f F_z^{\text{aero}}, \quad F_{z,\text{bak}}^{\text{aero}} = (1 - p_f) F_z^{\text{aero}}. \quad (2.3)$$

Därmed kan parametern p_f skattas (om man har tillgång till aerodynamiska normalkrafter) genom andelen normalkraft på framaxeln jämfört med bakaxeln:

$$\frac{F_{z,\text{fram}}^{\text{aero}}}{F_{z,\text{bak}}^{\text{aero}}} = \frac{p_f}{1 - p_f} \quad (2.4)$$

$$p_f = \frac{F_{z,\text{fram}}^{\text{aero}}}{F_{z,\text{fram}}^{\text{aero}} + F_{z,\text{bak}}^{\text{aero}}}. \quad (2.5)$$

2.3 Modeller för normalkraftsestimering

I detta avsnitt presenteras de modeller för normalkraftsestimering som ligger till grund för arbetet. Modellerna skiljer sig åt vad gäller komplexitet, antaganden och vilka fysikaliska fenomen som inkluderas.

2.3.1 Nuvarande modell

Den nuvarande modellen som används av CFS består av summan av fyra krafter. I modellen beskrivs normalkraften per hjul som en 4×1 -vektor enligt:

$$\mathbf{F}_z = \begin{bmatrix} F_{z,\text{fv}} \\ F_{z,\text{fh}} \\ F_{z,\text{bv}} \\ F_{z,\text{bh}} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Den statiska normalkraften är ett direkt resultat av tyngdkraften. Denna kraft kan beskrivas som:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{mg}{2} \begin{bmatrix} t_f \\ t_f \\ (1 - t_f) \\ (1 - t_f) \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

där t_f är andelen av bilens massa som fördelar sig på framaxeln, m är totala massan på bilen inklusive föraren och annat, samt g är tyngdaccelerationen. Noterbart är att t_f teoretiskt kan uttryckas som $t_f = L_b/L$ (se Figur 2.2), vilket följer av momentjämvikt kring fordonets masscentrum. I CFS-modellen behandlas dock t_f som en justerbar parameter snarare än som ett strikt geometriskt värde. Detta motiveras av att masscentrumets position kan variera, exempelvis beroende på förare och övrig last. Genom att låta t_f vara anpassningsbar kan modellen därmed kalibreras mot fordonets faktiska beteende och ge bättre prestanda i tillämpningen. En kraft uppkommer från lateral acceleration ($a_{y,m}$) när exempelvis bilen svänger. Detta beror på att ett moment bildas på bilens vänstra eller högra sida (beroende på riktningen av laterala accelerationen). Det fiktiva momentet beskrivs enligt $ma_{y,m}H_{MC}$, där H_{MC} är höjden för masscentrum, se Figur 2.2. Jämvikt uppnås genom att skapa ett moment på grund av en ökning av normalkraften på ena sidan av bilen, enligt:

$$\Delta F_z e_f L L T D + \Delta F_z e_f (1 - L L T D) = \Delta F_z e_f, \quad (2.8)$$

där $L L T D$ är andelen av lateral kraft som hamnar på bak- respektive framhjul och e_f är spårvidden på framaxeln som antas vara lika stor som spårvidden på bakaxeln. Eftersom den totala kraften i z-led måste vara samma resulterar detta i:

$$\mathbf{F}_2 = \frac{a_{y,m} m H_{MC}}{e_f} \begin{bmatrix} -L L T D \\ L L T D \\ -(1 - L L T D) \\ (1 - L L T D) \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Vid longitudinell acceleration eller inbromsning sker också en omfördelning av normalkrafter. På samma sätt bildas ett longitudinellt moment enligt $ma_{x,m}H_{MC}$. För att upprätthålla fordonets stabilitet uppstår ett moment kring fram- eller bakaxeln beroende på tecknet hos $a_{x,m}$. Detta blir: $\Delta F_{z,v}L + \Delta F_{z,h}L$. Med antagandet av samma kraft på vänster och höger däck fås totala momentet $2\Delta F_z L = ma_{x,m}H_{MC}$. Eftersom totala kraften i z-led måste vara densamma fås:

$$\mathbf{F}_3 = \frac{a_{x,m} m H_{MC}}{2L} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

där L är längden mellan fram- och bakaxel. En ytterligare kraft som uppkommer är från den aerodynamiska lasten. Denna beskrivs av:

$$\mathbf{F}_4 = -\frac{C_L \rho_{\text{luft}} A v_{x,m}^2}{4} \begin{bmatrix} p_f \\ p_f \\ (1 - p_f) \\ (1 - p_f) \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Minustecknet kommer från att C_L är negativ. Slutliga kraften estimeras sedan som:

$$\hat{\mathbf{F}}_z = \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_i. \quad (2.12)$$

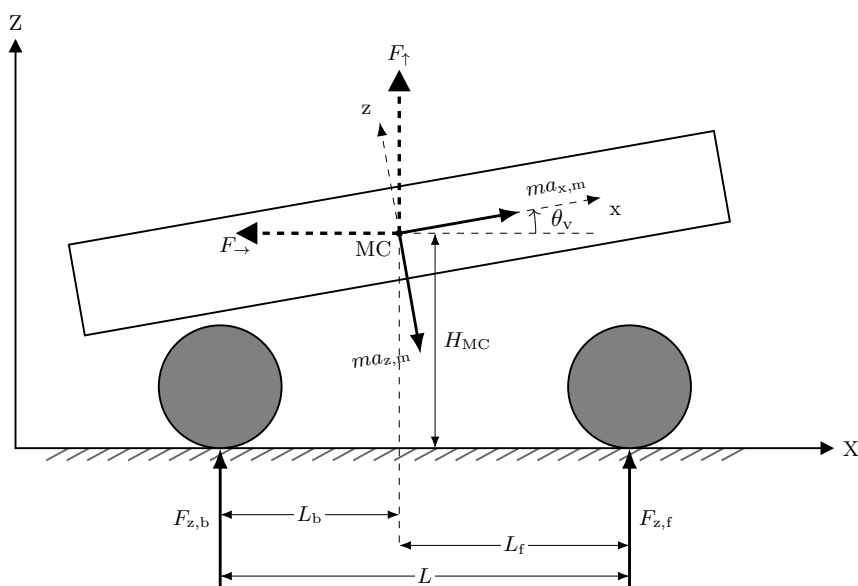
2.3.2 Helfordonsmodell

Denna del bygger på den modellbaserade däckkraftestimeringsmetod som föreslås av Rezaeian et al. [9]. Metoden är utvecklad för att estimeras samtliga komponenter av däckkrafterna, det vill säga longitudinella, laterala och vertikala krafter, genom en helfordonsbaserad estimeringsstruktur.

Med avseende på pitch-axeln, se Figur 2.1, kan de resulterande vertikala och longitudinella krafterna vid masscentrum uttryckas som funktioner av den uppmätta accelerationens komponenter utifrån Figur 2.2 enligt:

$$F_{\uparrow} : m(a_{x,m} \sin(\theta_v) - a_{z,m} \cos(\theta_v)) \quad (2.13)$$

$$F_{\rightarrow} : m(a_{x,m} \cos(\theta_v) + a_{z,m} \sin(\theta_v)). \quad (2.14)$$



Figur 2.2: Fordonsmodell som visar acceleration i longitudinellt plan, som illustrerar masscentrum (H_{MC}), hjulbas L , normalkrafter ($F_{z,f}$ och $F_{z,b}$), inertiala krafter vid acceleration och pitch-vinkel (θ_v). Figuren ligger till grund för kraft- och momentbalanser vid normalkraftestimering.

Med momentjämvikt runt MC och därefter kraftjämvikt enligt (2.13) och (2.14) erhålles:

$$F_{z,f}L_f - F_{z,b}L_b = H_{MC}F_{\rightarrow} = mH_{MC}(a_{x,m} \cos(\theta_v) + a_{z,m} \sin(\theta_v)) \quad (2.15)$$

$$F_{z,f} + F_{z,b} = F_{\uparrow} = m(a_{x,m} \sin(\theta_v) - a_{z,m} \cos(\theta_v)), \quad (2.16)$$

där $F_{z,f}$ är den totala normalkraften på framdäcken och $F_{z,b}$ på baddäcken. Genom

att lösa ut de vertikala krafterna på fram- och bakaxeln fås:

$$F_{z,f} = -\frac{mH_{MC}}{L}(a_{x,m} \cos(\theta_v) + a_{z,m} \sin(\theta_v)) - \frac{mL_b}{L}(a_{x,m} \sin(\theta_v) - a_{z,m} \cos(\theta_v)) \quad (2.17)$$

$$F_{z,b} = \frac{mH_{MC}}{L}(a_{x,m} \cos(\theta_v) + a_{z,m} \sin(\theta_v)) - \frac{mL_f}{L}(a_{x,m} \sin(\theta_v) - a_{z,m} \cos(\theta_v)). \quad (2.18)$$

Den effektiva massan på fram- och bakaxel blir därmed:

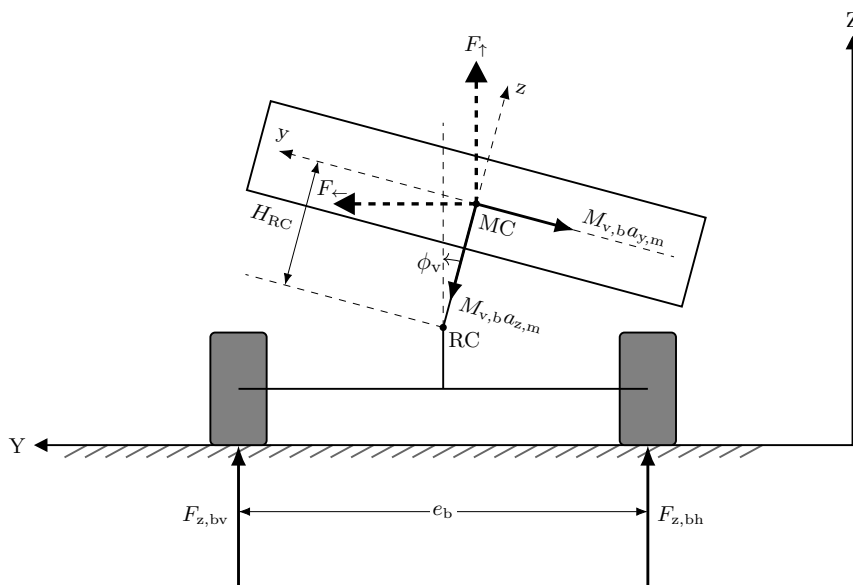
$$M_{v,f} = \frac{F_{z,f}}{g} \quad (2.19)$$

$$M_{v,b} = \frac{F_{z,b}}{g}. \quad (2.20)$$

Därefter görs liknande beräkningar med hänsyn till roll-axeln istället utifrån Figur 2.3 De vertikala och laterala krafterna från accelerationen i MC blir:

$$F_{\uparrow} : M_{v,i}(a_{y,m} \sin(\phi_v) + a_{z,m} \cos(\phi_v)) \quad (2.21)$$

$$F_{\leftarrow} : M_{v,i}(a_{y,m} \cos(\phi_v) - a_{z,m} \sin(\phi_v)). \quad (2.22)$$



Figur 2.3: Fordonsmodellen bakifrån som illustrerar masscentrum, höger- och vänsterbakhjul, normalkrafter och inertiala krafter vid acceleration och roll vid vänstersväng. Figuren ligger till grund för kraft- och momentbalanser vid normalkraftestimering.

Därefter görs liknande beräkningar med hänsyn till roll-axeln enligt (2.21) och (2.22). För att lösa ut normalkraften på högra bakhjulet görs en momentjämvikt runt det

vänstra bakdäcket och vice versa enligt:

$$\begin{aligned}\hat{F}_{z,bh} = & -\frac{M_{v,b}H_{MC}}{e_b}(a_{y,m}\cos(\phi_v) - a_{z,m}\sin(\phi_v)) \\ & -\frac{M_{v,b}}{e_b}(a_{y,m}\sin(\phi_v) + a_{z,m}\cos(\phi_v))\left(\frac{e_b}{2} - H_{RC}\sin(\phi_v)\right),\end{aligned}\quad (2.23)$$

där H_{RC} är sträckan mellan roll-center RC och MC, och e_b är spårvidden på bakaxeln. Termerna i (2.23) kan tolkas enligt:

- Första termen:

$$-\frac{M_{v,b}H_{MC}}{e_b}(a_{y,m}\cos(\phi_v) - a_{z,m}\sin(\phi_v)),$$

representerar bidraget från den laterala kraftkomponenten F_{\leftarrow} .

- Andra termen:

$$-\frac{M_{v,b}}{2}(a_{y,m}\sin(\phi_v) + a_{z,m}\cos(\phi_v)),$$

representerar bidraget från den vertikala kraftkomponenten F_{\uparrow} .

- Tredje termen:

$$\frac{M_{v,b}H_{RC}\sin(\phi_v)}{e_b}(a_{y,m}\sin(\phi_v) + a_{z,m}\cos(\phi_v)),$$

representerar roll-centrumets geometriska påverkan.

På samma sätt utförs beräkningarna för de andra tre däcken och sist erhålles:

$$\begin{aligned}\hat{F}_{z,bv} = & \frac{M_{v,b}H_{MC}}{e_b}(a_{y,m}\cos(\phi_v) - a_{z,m}\sin(\phi_v)) \\ & -\frac{M_{v,b}}{e_b}(a_{y,m}\sin(\phi_v) + a_{z,m}\cos(\phi_v))\left(\frac{e_b}{2} + H_{RC}\sin(\phi_v)\right)\end{aligned}\quad (2.24)$$

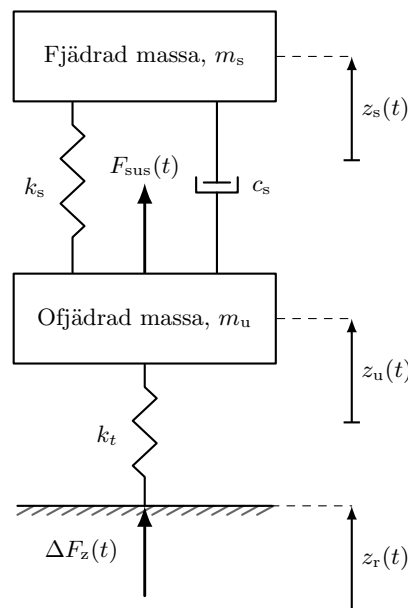
$$\begin{aligned}\hat{F}_{z,fh} = & -\frac{M_{v,f}H_{MC}}{e_f}(a_{y,m}\cos(\phi_v) - a_{z,m}\sin(\phi_v)) \\ & -\frac{M_{v,f}}{e_f}(a_{y,m}\sin(\phi_v) + a_{z,m}\cos(\phi_v))\left(\frac{e_f}{2} - H_{RC}\sin(\phi_v)\right)\end{aligned}\quad (2.25)$$

$$\begin{aligned}\hat{F}_{z,fv} = & \frac{M_{v,f}H_{MC}}{e_f}(a_{y,m}\cos(\phi_v) - a_{z,m}\sin(\phi_v)) \\ & -\frac{M_{v,f}}{e_f}(a_{y,m}\sin(\phi_v) + a_{z,m}\cos(\phi_v))\left(\frac{e_f}{2} + H_{RC}\sin(\phi_v)\right).\end{aligned}\quad (2.26)$$

För att erhålla samtliga normalkraftsestimeringar från (2.23)–(2.26) behövs insignalerna av pitch- och rollvinkeln samt de laterala, longitudinella och vertikala accelerationerna i MC. Eftersom modellen ej tar hänsyn till den aerodynamiska kraften, vilket CFS-bilen påverkas kraftigt av på grund av fram- och bakvingen, så adderas termerna i (2.11) till dess motsvarande krafter i (2.23)–(2.26).

2.3.3 Fjädermodell

Den matematiska formuleringen i följande modell utgår från kvartsbilmodellen presenterad av Alvarez-Sanchez et al. [10]. I detta arbete förenklas modellen genom att den ofjädrade massans vertikala acceleration antas vara försumbar, vilket leder till en enklare modell (se (2.35)). Utgångspunkten för normalkraftsestimering är ett kvartsbilssystem i vertikalled (se figur 2.4) som består av en fjädrad massa m_s (motsvarande en fjärdedel av fordonets totala massa vid jämn viktfordelning) och en ofjädrad massa m_u . Låt $z_s(t)$ vara karossens vertikala läge, $z_u(t)$ den ofjädrade massans vertikala läge (hjulets centrum) och $z_r(t)$ vägens vertikala läge. Koordinatsystemet definieras så att z_s och z_u är noll vid statisk jämvikt.



Figur 2.4: Bilden illustrerar en enkel kvartsbilmodell över ett hjul. Normalkraften pekar uppåt mot däckets som ses som en fjäder, med fjäderkonstant k_t . Den ofjädrade massans är placerad vid hjulets mittpunkt och från denna verkar suspensionen i form av en fjäder och en dämpare. I figuren är $z_s(t)$ karossens vertikala läge, $z_u(t)$ ofjädrade massans vertikala läge (hjulets centrum) och $z_r(t)$ vägens vertikala läge. Alla lägen anges relativt jämvikt.

Eftersom relativa positioner och derivator är centrala för dynamiken definieras:

$$x(t) = z_s(t) - z_u(t), \quad \dot{x}(t) = \dot{z}_s(t) - \dot{z}_u(t), \quad (2.27)$$

för fjädringssystemet, och:

$$y(t) = z_u(t) - z_r(t), \quad \dot{y}(t) = \dot{z}_u(t) - \dot{z}_r(t), \quad (2.28)$$

för däckets. Fjädringssystemet modelleras som summan av krafter från en fjäder, en dämpare och en icke-linjär kraft från en buffert:

$$F_{\text{sus}}(t) = k_s x(t) + c_s \dot{x}(t) + F_{\text{buf}}(x(t)), \quad (2.29)$$

där bufferten är i princip 0 N tills karossen kommer nära däckets, se figur 3.1. Däcket modelleras som en linjär fjäder:

$$\Delta F_z(t) = k_t y(t), \quad (2.30)$$

där ΔF_z är den varierande normalkraften kring statistiskt jämviktsvärde. Enligt Newtons andra lag blir rörelseekvationerna i vertikalled:

$$m_s \ddot{z}_s(t) = -F_{\text{sus}}(t), \quad (2.31)$$

$$m_u \ddot{z}_u(t) = F_{\text{sus}}(t) - \Delta F_z(t). \quad (2.32)$$

Genom att kombinera (2.29) och (2.32) erhålls en explicit estimator för normalkraftsvariationen:

$$\Delta \hat{F}_z(t) = k_s x(t) + c_s \dot{x}(t) + F_{\text{buf}}(x(t)) - m_u \ddot{z}_u(t). \quad (2.33)$$

Under antagandet att inga större kompressioner sker ($F_{\text{buf}} \approx 0$) och att hjulets vertikala acceleration är försumbar ($\ddot{z}_u \approx 0$), kan en förenklad estimator formuleras som:

$$\Delta \hat{F}_z(t) = k_s x(t) + c_s \dot{x}(t). \quad (2.34)$$

Den totala normalkraften på varje hjul estimeras slutligen som summan av den statiska lasten och den dynamiska variationen. Med den statistiska fördelningen från (2.7) fås:

$$\hat{\mathbf{F}}_z = \frac{mg}{2} \begin{bmatrix} t_f \\ t_f \\ (1 - t_f) \\ (1 - t_f) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{s,\text{fv}} x(t)_{\text{fv}} + c_{s,\text{fv}} \dot{x}(t)_{\text{fv}} \\ k_{s,\text{fh}} x(t)_{\text{fh}} + c_{s,\text{fh}} \dot{x}(t)_{\text{fh}} \\ k_{s,\text{bv}} x(t)_{\text{bv}} + c_{s,\text{bv}} \dot{x}(t)_{\text{bv}} \\ k_{s,\text{bh}} x(t)_{\text{bh}} + c_{s,\text{bh}} \dot{x}(t)_{\text{bh}} \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

3

Metod

Arbetet genomfördes genom en kombination av modellutveckling, simuleringar i IPG CarMaker och efterföljande analys i MATLAB. Resultaten från simuleringarna användes sedan för att utvärdera modellernas noggrannhet och för att successivt förbättra modellparametrar och struktur.

3.1 IPG CarMaker som simuleringsverktyg

IPG CarMaker är ett kommersiellt simuleringsverktyg för analys och utveckling av fordonsdynamik, som används inom både industri och akademi [11]. Verktöget bygger på fysikbaserade modeller där fordonets rörelse bestäms genom lösning av rörelseekvationer för ett sammanhängande mekaniskt system bestående av kaross, fjädringssystem, däck och övriga delsystem [12]. Anledningen till att denna mjukvara valdes var för att den är standard inom CFS för simulering och då en modell av CFS-bilen redan finns modellerad.

En central egenskap hos IPG CarMaker är att modellstrukturen redan är definierad, inklusive antalet frihetsgrader och kopplingar mellan delsystem. Användaren parametriserar istället modellen genom att ange exempelvis fordonsdata, däckegenskaper och körscenari. Simuleringen utförs i ett tidsdiskret förlopp där samtliga delmodeller uppdateras sekventiellt för varje tidssteg, där uppdateringsfrekvensen vanligtvis sätts till 100 Hz, men som också kan styras av användaren [12].

IPG CarMaker tillhandahåller ett stort antal interna signaler, så kallade *User Accessible Quantities* (UAQ), vilka representerar tillståndsvariabler, exempelvis hastigheter och krafter [12]. Dessa signaler är direkt beräknade från den underliggande fysikmodellen och kan därför betraktas som konsistenta modellbaserade referenser. Exempelvis kan både fjäderrelaterade storheter såsom längd och hastighet, samt kraftbidrag från fjäder- och dämparsystem loggas direkt.

I IPG CarMaker indexeras hjulen individuellt enligt:

$$\langle \text{pos} \rangle := \text{FL}, \text{FR}, \text{RL}, \text{RR},$$

vilket motsvarar *front-left*, *front-right*, *rear-left* och *rear-right*. Detta index används konsekvent i UAQ-signaler, exempelvis `Car.Spring<pos>.1` och `Car.Spring<pos>.v`,

men även för tillhörande kraftsignaler, vilket möjliggör analys av varje hjul separat [13]. IPG CarMaker kan vidare integreras med MATLAB och Simulink, där IPG CarMaker fungerar som en högupplöst fordonmodell som levererar tillståndsvariabler i varje tidssteg. Detta möjliggör att externa modeller kan köras parallellt och jämföras direkt mot IPG CarMakers interna beräkningar inom samma simulering och återkopplas in i bilens styrsystem.

IPG CarMaker är utvecklat för att ge en så realistisk representation av verklig fordonsdynamik som möjligt, men resultatens noggrannhet beror i hög grad på hur väl modellen parametreras. Eftersom simuleringsmiljön bygger på fysikaliska samband kan verktyget återge många verkliga fenomen med hög precision, särskilt inom longitudinell och lateral fordonsdynamik. Exempelvis kan acceleration, bromsning och lastförskjutning beskrivas på ett sätt som ofta ligger nära uppmätta verkliga data [14].

Överensstämmelsen är som bäst när indata motsvarar det verkliga fordonet, exempelvis korrekta massfördelningar, geometrier, däckparametrar och fjädringskaraktärer [15]. Även väl definierade testförhållanden, såsom torr asfalt, jämnt underlag och reproducerbara manövrer, bidrar till hög träffsäkerhet. I sådana fall används IPG CarMaker ofta som ett substitut inom industrin till tidiga prototyp tester, eftersom simuleringen kan ge tillförlitliga resultat med betydligt lägre kostnad [16].

Avvikelse mot verkligheten uppstår främst när svårmodellerade fenomen dominerar [15]. Detta kan exempelvis vara varierande väggrepp, temperaturberoende däckegenskaper, slitage, mekaniska toleranser eller oförutsägbart mänskligt förarbete. Även aerodynamiska effekter och komplex interaktion mellan flera delsystem kan kräva mer avancerad parametrering för att återges korrekt [17]. Simuleringsresultat bör därför betraktas som en mycket god approximation av verkligheten snarare än en exakt kopia.

3.2 Anpassning av normalkraftsmodellerna till CFS-modellen i IPG CarMaker

Utgångspunkten för CFS-bilen i verkligheten är att den bör vara symmetrisk. I IPG CarMaker finns dock tillgång till normalkrafter på däcken när bilen är stillastående. Detta möjliggjorde en mer extensiv anpassning av de statiska normalkrafterna, genom att ta hänsyn till obalans mellan höger och vänster sida. Låt F_{sfv} , F_{sfh} , F_{sbv} och F_{sbh} vara de statiska normalkrafterna på däcken. Då kan parametern t_f anpassas enligt:

$$t_f = \frac{F_{sfv} + F_{sfh}}{F_{sfv} + F_{sfh} + F_{sbv} + F_{sbh}}. \quad (3.1)$$

Parametern t_v introducerades och beskriver andelen statisk normalkraft som läggs på bilens vänstra sida. Denna kan beskrivas enligt:

$$t_v = \frac{F_{sfv} + F_{sbv}}{F_{sfv} + F_{sfh} + F_{sbv} + F_{sbh}}. \quad (3.2)$$

Den statiska normalkraften som ingår i alla tre modellerna kan uttryckas som:

$$\mathbf{F} = mg \begin{bmatrix} t_f t_v \\ t_f (1 - t_v) \\ (1 - t_f) t_v \\ (1 - t_f) (1 - t_v) \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

För den nuvarande modellen och fjädermodellen innebär denna anpassning endast att den statiska normalkraftstermen modifieras enligt 3.3. I helfordonsmodellen blir anpassningen mer omfattande, eftersom en obalans mellan höger och vänster sida motsvarar ett lateralt förskjutet masscentrum, som påverkar modellens modellering. Detta påverkar även de termer som beskriver lateral lastförflyttning vid roll-rörelse. I nuvarande modellen är det endast masscentrums höjd över marken som påverkar lateral omfördelning av normalkrafter vid lateral acceleration. De fullständiga uttrycken för samtliga modeller efter anpassning till CarMaker-modellens statiska normalkrafter redovisas i Bilaga A.1.

3.3 Parametrisering

Fordonet parametriserades utifrån data för CFS-bilen säsongen 2024-2025. Modellparametrar såsom massa, hjulbas, spårvidd, tyngdpunktsläge samt fjädringsrelaterade egenskaper anpassades för att representera fordonets verkliga geometri och dynamiska beteende så nära som möjligt. Dessa parametrar kan ses i Tabell 3.1.

Tabell 3.1: Bilspecifika parametrar som användes i IPG CarMaker-modellen.

Parameter	Värde
m	299,8324 kg
e_f	1,242 m
e_b	1,203 m
L_f	0,8268 m
L_b	0,7732 m
L	1,6 m
H_{MC}	0,283 m
H_{RC}	0,283 m
k_{fram}	35 000 N/m
k_{bak}	45 000 N/m
$c_{fram,komp}$	2 500 Ns/m
$c_{fram,retur}$	5 000 Ns/m
$c_{bak,komp}$	3 000 Ns/m
$c_{bak,retur}$	6 000 Ns/m
A	1,1 m ²
C_L	-3,02
t_f	0,4824
t_v	0,4985
p_f	0,3145
LLTD	0,5

3.3.1 Fjädringssystemet av CFS-bilen i IPG CarMaker

Fjädringssystemet i IPG CarMaker modelleras med en fjäder, dämpare och buffert. Fjädern har olika styvhet på fram- och bakaxeln. För fram- och bakaxeln är fjäderkonstanterna:

$$k_{fram} = 35\,000 \text{ N/m}, \quad k_{bak} = 45\,000 \text{ N/m}.$$

Dämparen modelleras som en viskös dämpare där dämpkraften är proportionell mot dämparens relativa hastighet. Dämpningskonstanten är däremot inte densamma i båda rörelseriktningarna. Istället används ett värde när dämparen trycks ihop, det vill säga vid kompression, och ett annat värde när dämparen förlängs, det vill säga vid retur [13].

Matematiskt kan därför dämpningskoefficienten skrivas styckvis som:

$$c_i(\dot{x}_i(t)) = \begin{cases} c_{i,komp}, & \dot{x}_i < 0, \\ c_{i,retur}, & \dot{x}_i > 0, \end{cases}$$

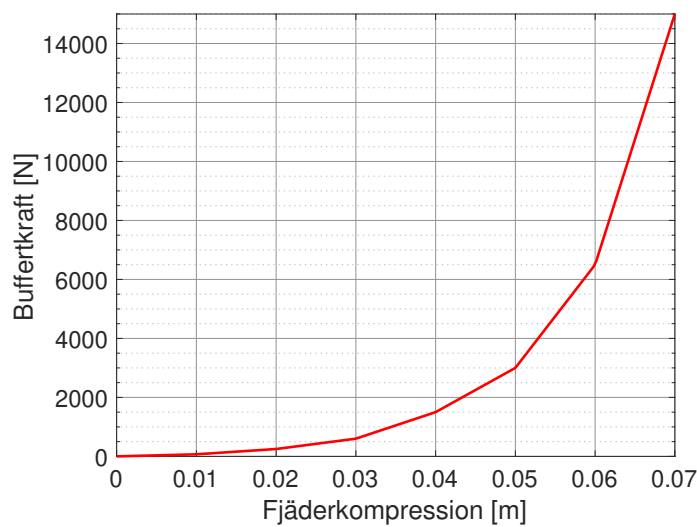
där index i betecknar respektive hjul. För framaxeln används:

$$c_{fram,komp} = 2\,500 \text{ Ns/m}, \quad c_{fram,retur} = 5\,000 \text{ Ns/m},$$

och för bakaxeln används:

$$c_{\text{bak,komp}} = 3\,000 \text{ Ns/m}, \quad c_{\text{bak,retur}} = 6\,000 \text{ Ns/m}.$$

Utöver huvudfjäder och dämpare består fjädringssystemet också av en buffert. Den fungerar som ett ändlägesstopp och aktiveras först när fjädringsrörelsen blir tillräckligt stor. Vid små fjädringsrörelser (mindre än 1 cm) är buffertkraften nära noll, vilket gör att den har liten påverkan på normalkraften under normal körning. När fjädningen däremot närmar sig sitt ändläge ökar buffertkraften mycket, vilket ger ett extra icke-linjärt bidrag till den vertikala hjulkraften. Detta illustreras i Figur 3.1.



Figur 3.1: Buffertkraften som funktion av fjäderkompressionen [13].

Om effekten av bufferten försummas genom att anta små töjningar av fjädringssystemet kan förändringar av normalkrafter för fjädermodellen beskrivas enligt:

$$\Delta \hat{\mathbf{F}}_z = \begin{bmatrix} k_{\text{fram}} x(t)_{\text{fv}} + c(\dot{x}(t))_{\text{s,fv}} \dot{x}(t)_{\text{fv}} \\ k_{\text{fram}} x(t)_{\text{fh}} + c(\dot{x}(t))_{\text{s,fh}} \dot{x}(t)_{\text{fh}} \\ k_{\text{bak}} x(t)_{\text{bv}} + c(\dot{x}(t))_{\text{s,bv}} \dot{x}(t)_{\text{bv}} \\ k_{\text{bak}} x(t)_{\text{bh}} + c(\dot{x}(t))_{\text{s,bh}} \dot{x}(t)_{\text{bh}} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Den totala fjädermodellen som tar hänsyn till parameteriseringen i (3.3) beskrivs i (A.6).

3.4 Körfall

För att jämföra modellerna testades olika banor med olika manövrer. Detta för att isolera olika krafter och undersöka under vilka omständigheter olika modeller stämmer överens med IPG CarMakers bestämning av normalkrafterna.

3.4.1 Konstant fart på raksträcka och cirkelbana

Modellerna testades på raksträckor vid konstant hastighet för att undersöka hur väl de överensstämmer med referensdata i IPG CarMaker i frånvaro av dynamiska effekter. I *manuever* användes *speed control* med en *max deviation* på 0 och *sensitivity* på 1 vilket gjorde att bilen körde så nära de utsatta hastigheterna som möjligt. Hastigheterna varierades i steg om 5 m/s, från 0 m/s upp till 30 m/s. Detta gjordes för varje modell.

En cirkelbana användes också för att utvärdera modellerna. Radien på denna var 44 m, detta då den ofta används i simuleringssammanhang inom CFS. Samma inställningar som ovan användes som körinställningar med hastigheter mellan 5 m/s till 20 m/s, med intervall på 5 m/s.

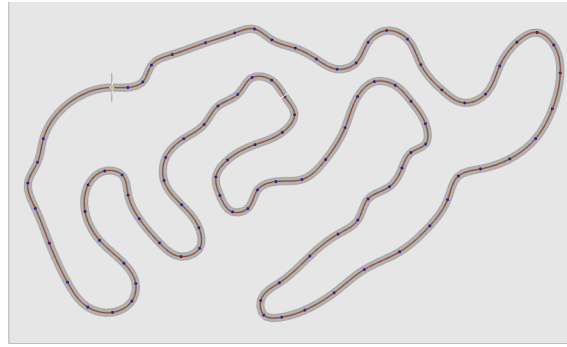
3.4.2 Konstant acceleration och retardation på raksträcka

För att isolera effekten av longitudinell dynamik på normalkraftsestimeringen genomfördes simuleringar med konstant pedalpådrag på en raksträcka. I IPG CarMaker varierades gaspedalens position mellan olika värden mellan 0 och 1, där 0 motsvarar inget pedalpådrag och 1 fullt pedalpådrag. Vid dataanalysen analyserades sedan de tidsintervaller under accelerationen när den var nära konstant.

För retardationen användes tre olika *manuevers* i IPG CarMaker. Den första var *speed control* upp till 30 m/s, därefter var det *speed control* i 5 s för att uppnå stationärt tillstånd och sist gjordes en inbromsning där bromspedalen varierades mellan 0 och 1. Vid dataanalysen analyserades sedan de tidsintervaller under retardationen när retardationen var nära konstant.

3.4.3 FSG Endurance-bana

En av testbanorna baserades på endurance-momentet i *Formula Student Germany*, som kan ses i Figur 3.2. Endurance-banan är tävlingens mest omfattande körmoment och används för att utvärdera bilens prestanda, driftsäkerhet och stabilitet under längre tid. Banan innehåller en kombination av kurvor, accelerationer och inbromsningar, vilket gör den lämplig för analys av varierande normalkrafter under realistiska körförhållanden. Eftersom banan testar många olika moment är det en stark indikator på vilken modell som presterar bäst. I IPG CarMaker användes IPG *driver* inställd på medelaggressiv [12].



Figur 3.2: Visar banan som är baserad på den tävlingsbana som användes i Endurance-momentet under Formula Student Germany 2018. Bilden är tillhandahållen av Chalmers Formula Student.

3.5 Datainsamling och analys

Simuleringsdata exporterades från IPG CarMaker och analyserades i MATLAB. IPG Control användes för initial visualisering och verifiering av signalerna under simuleringens gång. Eftersom de estimerade normalkrafterna i denna studie inte används som återkoppling till fordonets styrsystem, påverkar estimeringsalgoritmerna inte fordonets beteende under körningen. Det var därför möjligt att först simulera de olika körfallen i IPG CarMaker och spara relevanta signaler tillsammans med referensvärden för normalkrafterna. Därefter kunde denna data läsas in i MATLAB och analyseras, bland annat med hjälp av felmåttan nedan.

Modellernas prestanda utvärderades genom jämförelse mellan estimerade och referensbaserade normalkrafter. Både kvalitativ analys av tidsserier och kvantitativa felmått användes. De huvudsakliga felmåttan var *Root Mean Square Error* (RMSE):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\hat{F}_j - F_j)^2}, \quad (3.5)$$

och *Mean Error* (ME):

$$ME = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\hat{F}_j - F_j), \quad (3.6)$$

där $N = f_s T$ är totala antalet mätpunkter, f_s är samplingsfrekvensen som var 100 Hz och T är tiden för simuleringen. RMSE användes som huvudsakligt mått eftersom det beskriver den totala avvikelserna över hela körfallet och viktar större fel högre. ME användes för att identifiera eventuell systematisk bias i modellerna. Detta kan göras för alla de fyra hjulen och ett medel-RMSE erhålles enligt $(RMSE_{fv} + RMSE_{fh} + RMSE_{bv} + RMSE_{bh})/4$. Motsvarande kan också göras för ME. När stationära situationer analyserades, där normalkrafterna ej varierade över tid, användes avvikelserna (e) från modellens estimeringar och IPG CarMakers referens som:

$$e = \hat{F}_z - F_{z,IPG}. \quad (3.7)$$

4

Resultat

För att undvika upprepning redovisas endast utvalda hjul i huvudtexten eftersom flera av hjulen visar liknande resultat. Kompletterande resultat för andra hjul finns i Avsnitt A.

Efter att ha simulerat FSG Endurance-banan för samtliga tre modeller (nuvarande modell, helfordonsmodell och fjädermodell) erhöles resultaten som presenteras i Tabell 4.1. Resultaten visar att den nuvarande modellen uppvisar högst noggrannhet sett till både RMSE och ME, och presterar därmed bäst över hela Endurance-banan. Helfordonsmodellen får ett större medelfel, medan fjädermodellen uppvisar tydligt högre avvikelser och därmed lägst total precision. De utökade modellerna (skattning av p_f enligt (4.1)) tar bättre hänsyn till den aerodynamiska kraftfördelningen och förbättrar respektive modells prestanda.

Tabell 4.1: Jämförelse mellan de implementerade modellerna för estimering av vertikala normalkrafter vid simulering av FSG Endurance-banan. Tabellen redovisar medelvärden av RMSE och medelvärden av ME över samtliga hjul.

Modell	Medel-RMSE [N]	Medel-ME [N]
Nuvarande	46,81	0,47
Utökad nuvarande	45,27	0,47
Helfordons	61,40	-7,22
Utökad helfordons	56,80	-7,22
Fjäder	102,91	-9,08

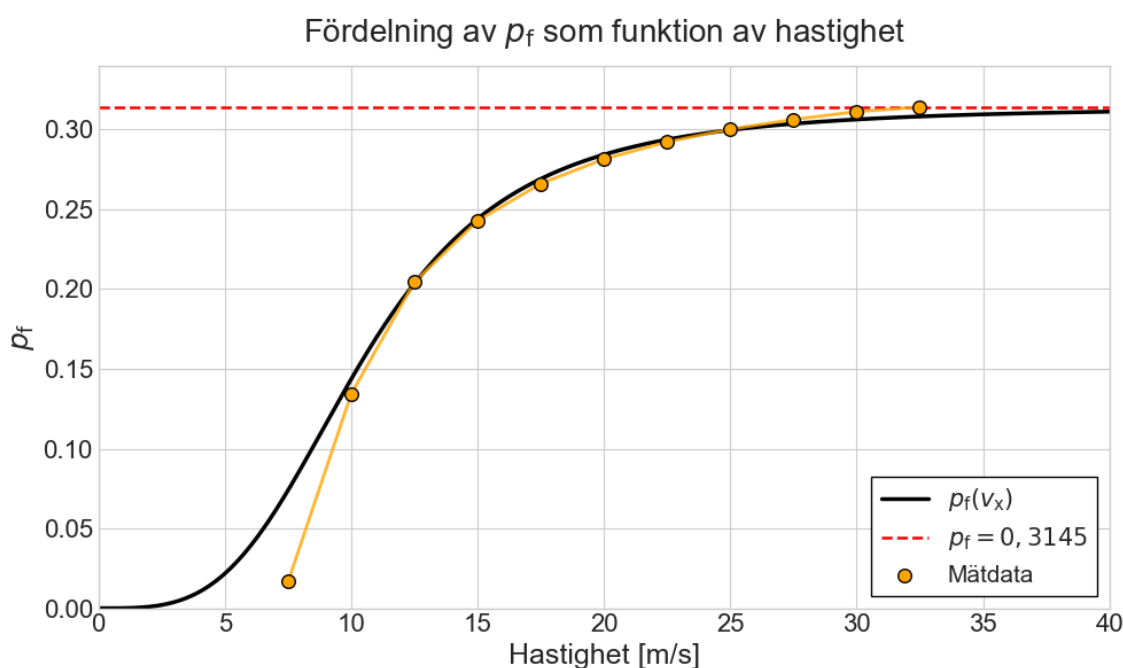
Det bör dock understrykas att dessa resultat avser den sammanlagda prestationen över ett helt varv och inte nödvändigtvis speglar modellernas lämplighet i varje enskilt tävlingsmoment inom Formula Student Germany. I nedanstående kapitel diskuteras därför resultaten från varje körfall i detalj för analys av styrkor och svagheter på en racingbana.

4.1 Parameteranpassning av p_f

Från de uppmätta normalkrafterna från IPG CarMaker vid olika hastigheter kunde den aerodynamiska lasten på fram- och bakaxeln beräknas enligt (2.2). Från dessa värden kunde parametern p_f skattas enligt (2.5). Ett hastighetsberoende för p_f observerades och för optimering av den aerodynamiska kraftfördelningen anpassades ett empiriskt samband enligt:

$$p_f(v_x) = 0,3145 \frac{v_x^{3,5}}{v_x^{3,5} + 10,5^{3,5}}. \quad (4.1)$$

I Figur 4.1 visas datapunkterna tillsammans med det empiriska sambandet.



Figur 4.1: Skattade värden av p_f från referenssimuleringar vid konstanta hastigheter på raksträcka, tillsammans med det empiriskt anpassade sambandet $p_f(v_x)$. Kurvan beskriver hur p_f ökar med fordonshastigheten och asymptotiskt närmar sig ett maximalt värde på 0,3145.

4.2 Konstant hastighet på raksträcka

De simulerade normalkrafterna och de estimerade normalkrafterna för vänster fram- och bakhjul visas i Tabell 4.2 och Tabell 4.3, högerhjulen visade liknande resultat, se Bilaga A.1 och A.2. Alla modeller visade sig överskatta normalkrafterna på framdäcken medan baddäcken underskattades. Resultaten visar att de båda utökade modellerna, som tar hänsyn till förändringen i den aerodynamiska lastfördelningen, estimerade normalkrafterna med högst precision. Den absoluta medelavvikelsen för dessa modeller var mellan 2 – 3 N på vardera däck. Den nuvarande och helfordonsmodellen visade ett jämnt absolut medelfel runt 10 – 12 N respektive 22 – 24 N.

Fjädermodellen visade istället stor variation av det absoluta medelvärdet där bakdäckens absoluta medelvärde låg runt 7 N medan framdäcken var mellan 18 – 19 N. De statistiska krafterna för bilens däck visas i Tabellerna 4.2, 4.3, A.1 och A.2 när farten är 0 m/s. För vänster framhjul är denna 708,14 N, vänster bakhjul 759,75 N, högerframhjul 712,50 N och högerbakhjul 763,97 N.

Tabell 4.2: Jämförelse mellan estimerad normalkraft (\hat{F}_z) och referensvärde från IPG CarMaker ($F_{z,IPG}$) för vänster framhjul vid konstant hastighet för olika farter. Nedersta raden visar absolut medelvärde för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felen. Alla kraft- och felvärden anges i newton.

Fart [m/s]	$F_{z,IPG}$	Nuvarande		Utökad nuvarande		Helfordon		Utökad helfordon		Fjäder	
		\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e
0	708,14	708,25	0,11	708,25	0,11	708,28	0,14	708,28	0,14	708,23	0,09
5	696,70	716,16	19,47	708,72	12,02	717,27	20,57	708,92	12,23	702,06	5,36
10	721,62	740,15	18,53	722,79	1,17	744,04	22,42	723,07	1,45	731,11	9,49
15	763,82	780,62	16,81	764,58	0,76	789,18	25,36	765,00	1,18	779,78	15,97
20	822,58	836,66	14,07	824,52	1,94	851,67	29,09	825,07	2,49	847,10	24,51
25	898,75	908,69	9,94	899,54	0,79	932,12	33,37	900,37	1,62	933,50	34,74
30	948,71	955,63	6,92	947,70	-1,01	984,51	35,80	948,69	-0,02	989,61	40,90
Absolut medel e 	-	-	12,26	-	2,54	-	23,82	-	2,73	-	18,72

Tabell 4.3: Jämförelse mellan estimerad normalkraft (\hat{F}_z) och referensvärde från IPG CarMaker ($F_{z,IPG}$) vänster bakhjul vid konstant hastighet. Nedersta raden visar absolut medelvärde för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felen. Alla kraft- och felvärden anges i newton.

Fart [m/s]	$F_{z,IPG}$	Nuvarande		Utökad nuvarande		Helfordon		Utökad helfordon		Fjäder	
		\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e
0	759,75	759,64	-0,11	759,64	-0,11	759,58	-0,16	759,58	-0,16	759,62	-0,12
5	796,49	777,15	-19,34	784,59	-11,90	776,02	-20,47	784,37	-12,13	787,16	-9,33
10	847,49	829,45	-18,04	846,81	-0,68	825,53	-21,96	846,51	-0,99	838,80	-8,69
15	932,27	916,51	-15,76	932,56	0,28	907,94	-24,33	932,13	-0,15	924,45	-7,82
20	1050,99	1038,69	-12,31	1050,82	-0,17	1023,56	-27,43	1050,16	-0,83	1043,43	-7,56
25	1203,13	1195,62	-7,51	1204,78	1,65	1172,19	-30,94	1203,94	0,81	1195,37	-7,76
30	1302,04	1297,91	-4,13	1305,84	3,80	1269,04	-33,00	1304,86	2,82	1293,88	-8,17
Absolut medel e 	-	-	11,03	-	2,66	-	22,61	-	2,56	-	7,06

4.3 Konstant fart på cirkelbana

Resultatet av de laterala bidragen i estimeringen utav normalkrafterna för vänster fram- och höger bakhjul visas i Tabell 4.4 och Tabell 4.5, höger fram- och vänster bakhjul visade liknande resultat, se Bilaga A.7 och A.8 (för samtliga resultat utan skillnad se Bilaga A.3, A.4, A.5 och A.6). Tabellerna visar skillnaden mellan den estimerade normalkraften vid konstant fart i cirkelbana och dess motsvarande normalkraft på raksträckan vid samma fart, $\Delta F_z = F_{\text{cirkel}} - F_{\text{rak}}$. Därmed visar tabellerna hur bra normalkraften omfördelas mellan vardera däck under konstant lateral acceleration. Resultatet visar att de utökade modellerna inte skiljer sig från deras motsvarande ursprungsmodell. Dessutom visar de också att avvikelserna från det simulerade värdet ökar kraftigt när hastigheten ökar.

För vänster framhjul visade sig nuvarande och helfordonsmodellen överskatta normalkrafterna medan fjädermodellen underskattade den. Helfordonsmodellen presterade bäst med ett absolut medelfel runt 9 N följt utav nuvarande modellen runt 12 N. Fjädermodellen hade låg precision med ett absolut medelfel runt 49 N.

Tabell 4.4: Effekt av lateral acceleration på vänster framhjul. Differensen är beräknad som värdet vid konstant fart i cirkelbana minus värdet vid konstant fart på raksträcka, det vill säga $\Delta F = F_{\text{cirkel}} - F_{\text{rak}}$. Tabellen visar därmed hur väl respektive modell fångar förändringen i normalkraft som uppstår av den laterala termen. Nedersta raden visar absolut medelfel för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felen. Alla kraft- och felvärden anges i newton.

Fart [m/s]	$\Delta F_{z,IPG}$	Nuvarande		Utökad nuvarande		Helfordon		Utökad helfordon		Fjäder		
		$\Delta \hat{F}_z$	Δe	$\Delta \hat{F}_z$	Δe	$\Delta \hat{F}_z$	Δe	$\Delta \hat{F}_z$	Δe	$\Delta \hat{F}_z$	Δe	
5	17,93	19,97	2,03	19,97	2,04	19,78	1,86	19,79	1,85	11,26	-6,67	
10	73,34	79,41	6,06	79,41	6,06	78,13	4,79	78,13	4,79	48,10	-25,24	
15	163,55	177,17	13,61	177,16	13,61	173,25	9,70	173,25	9,70	105,15	-58,41	
20	286,19	312,74	26,56	312,73	26,54	305,44	19,25	305,45	19,26	180,73	-105,45	
Absolut medel	 \Delta e 	–	–	12,07	–	12,06	–	8,90	–	8,90	–	48,94

För höger bakhjul visade sig nuvarande och helfordonsmodellen istället underskatta normalkrafterna medan fjädermodellen överskattade den. Här presterade istället nuvarande modellen bäst med ett absolut medelfel runt 2 N följt utav helfordonsmodellen på 18 N. Fjädermodellen ger fortfarande högst absolut medelfel runt 30 N.

Tabell 4.5: Effekt av lateral acceleration på höger bakhjul. Differensen är beräknad som värdet vid konstant fart i cirkelbana minus värdet vid konstant fart på raksträcka, det vill säga $\Delta F = F_{\text{cirkel}} - F_{\text{rak}}$. Tabellen visar därmed hur väl respektive modell fångar förändringen i normalkraft som uppstår av den laterala termen. Nedersta raden visar absolut medelfel för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felen. Alla kraft- och felvärden anges i newton.

Fart [m/s]	$\Delta F_{z,IPG}$	Nuvarande		Utökad nuvarande		Helfordon		Utökad helfordon		Fjäder		
		$\Delta \hat{F}_z$	Δe	$\Delta \hat{F}_z$	Δe	$\Delta \hat{F}_z$	Δe	$\Delta \hat{F}_z$	Δe	$\Delta \hat{F}_z$	Δe	
5	-21,52	-19,97	1,55	-19,97	1,55	-21,97	-0,46	-21,97	-0,45	-16,65	4,87	
10	-81,82	-79,41	2,41	-79,41	2,41	-87,77	-5,96	-87,77	-5,96	-63,51	18,30	
15	-179,24	-177,55	1,69	-177,53	1,70	-198,33	-19,10	-198,33	-19,11	-141,78	37,44	
20	-309,83	-313,31	-3,48	-313,30	-3,47	-355,50	-45,68	-355,50	-45,69	-251,18	58,65	
Absolut medel	 \Delta e 	–	–	2,28	–	2,28	–	17,80	–	17,80	–	29,82

4.4 Konstant acceleration och retardation på raksträcka

Resultaten i Tabell 4.6 och 4.7 visar RMSE- och ME-värden under acceleration för vänster fram- och bakhjul, högerhjulen visade liknande resultat, se Bilaga A.9 och A.10. Resultatet visar att samtliga modeller överskattar normalkraften på framdäcken medan de istället underskattar den på bakdäcken.

För vänster framhjul hade helfordonsmodellerna bäst precision med ett genomsnittligt RMSE-värde runt 25 N för den ursprungliga och 19 N för den utökade. Den nuvarande

modellen hade ett genomsnittligt RMSE-värde runt 32 N och dess utökade modell 27 N. Fjädermodellen hade ett RMSE-värde runt 43 N.

Tabell 4.6: RMSE- och ME-värden för vänster framhjul vid konstant acceleration. Resultaten är sorterade efter medelvärdet av den longitudinella accelerationen a_x . Alla fel anges i newton.

a_x [m/s ²]	Nuvarande		Utökad nuvarande		Helfordon		Utökad helfordon		Fjäder	
	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME
0,81	19,68	19,68	19,44	19,44	19,72	19,72	19,46	19,46	11,81	11,81
2,50	19,56	19,56	17,97	17,94	18,89	18,89	17,13	17,10	28,26	28,26
4,17	19,48	19,47	15,26	14,98	17,56	17,56	12,90	12,61	44,78	44,78
5,82	19,39	19,39	12,38	11,19	15,61	15,61	8,02	6,67	61,41	61,40
9,00	64,44	64,42	54,45	54,11	51,75	51,74	40,65	40,29	78,82	78,79
13,70	51,66	51,48	40,32	39,68	26,18	23,63	17,09	10,28	35,61	35,40
Absolut medel	32,37	32,33	26,64	26,22	24,95	24,53	19,21	17,79	43,45	43,41

För vänster bakhjul hade de nuvarande modellerna bäst precision med ett genomsnittligt RMSE-värde runt 32 N för den ursprungliga och 26 N för den utökade. Helfordonsmodellen hade ett genomsnittligt RMSE-värde runt 41 N och dess utökade modell 34 N. Fjädermodellen hade ett mycket högt RMSE-värde runt 158 N.

Tabell 4.7: RMSE- och ME-värden för vänster bakhjul vid konstant acceleration. Resultaten är sorterade efter medelvärdet av den longitudinella accelerationen a_x . Alla fel anges i newton.

a_x [m/s ²]	Nuvarande		Utökad nuvarande		Helfordon		Utökad helfordon		Fjäder	
	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME
0,81	19,67	-19,67	19,44	-19,44	20,16	-20,16	19,90	-19,90	24,45	-24,45
2,50	19,49	-19,49	17,91	-17,87	21,21	-21,21	19,44	-19,41	55,43	-55,43
4,17	19,31	-19,31	15,11	-14,82	23,08	-23,08	18,34	-18,13	86,11	-86,11
5,82	19,10	-19,09	12,16	-10,90	25,71	-25,70	17,37	-16,77	116,65	-116,64
9,00	64,08	-64,06	54,13	-53,75	79,75	-79,75	68,48	-68,30	219,64	-219,64
13,70	50,92	-50,00	40,19	-38,19	76,46	-76,32	63,36	-62,97	447,06	-447,06
Absolut medel	32,10	31,94	26,49	25,83	41,06	41,04	34,48	34,25	158,22	158,22

Resultaten i Tabell 4.8 och 4.9 visar RMSE- och ME-värden under inbromsning för vänster fram- och bakhjul, högerhjulen visade liknande resultat, se Bilaga A.11 och A.12. Tabellerna visar att nuvarande och helfordonsmodellerna överskattar normalkraften på framdäcken medan de istället underskattar den på bakdäcken. Fjädern visar istället det inverterade där den underskattar framdäcken och överskattar bakdäcken. Resultaten visar att de båda utökade modellerna presterar bäst där den utökade nuvarande modellen har ett RMSE-värde runt 13 N respektive 10 N på dess fram- och bakdäck medan den utökade helfordonsmodellen visade större variation med 6 N på fram- och 15 N på bakdäcket. Även här ger fjädermodellen ett högt RMSE-värde på runt 88 N på fram- och 137 N på bakdäcket.

Tabell 4.8: RMSE- och ME-värden för vänster framhjul vid konstant retardation. Resultaten är sorterade efter medelvärdet av den longitudinella accelerationen a_x . Alla fel anges i newton.

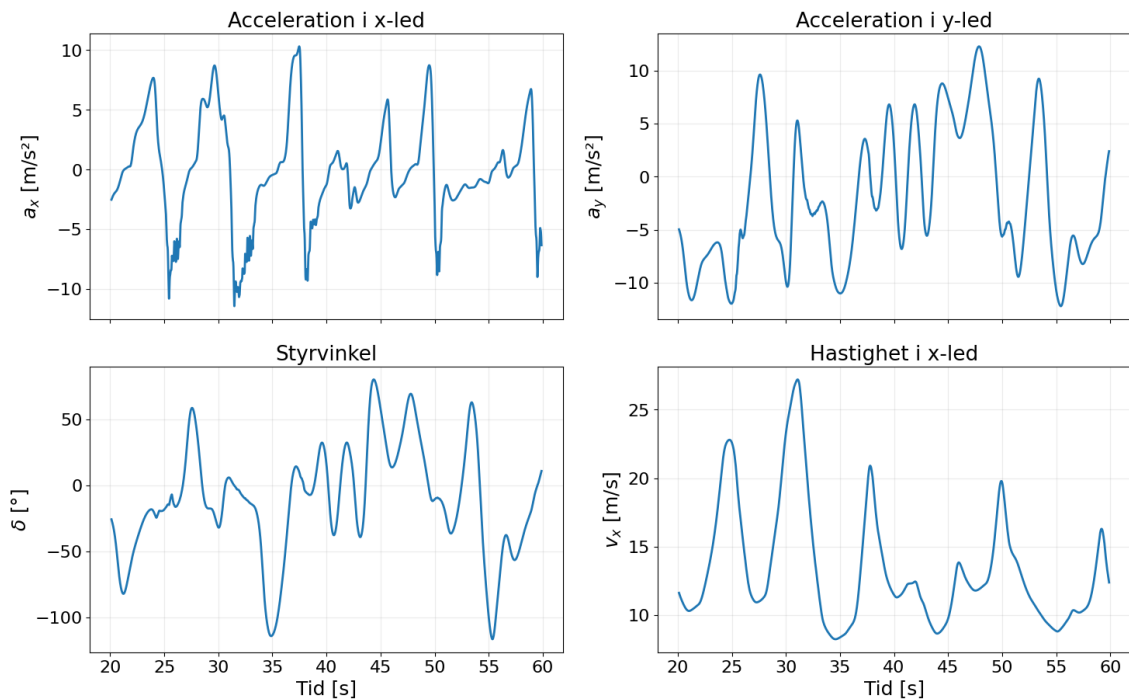
a_x [m/s ²]	Nuvarande		Utökad nuvarande		Helfordon		Utökad helfordon		Fjäder	
	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME
-5,22	15,59	15,57	7,55	7,25	39,83	39,71	7,63	7,61	16,35	-16,25
-6,29	17,31	17,30	9,24	8,95	39,10	38,90	7,94	7,88	33,72	-33,64
-7,37	18,81	18,81	10,78	10,50	37,95	37,65	7,76	7,59	51,25	-51,18
-10,10	21,88	21,88	14,29	14,02	33,58	32,91	5,79	4,74	95,71	-95,64
-12,87	24,10	24,08	17,24	16,98	27,41	26,07	5,00	-0,58	141,10	-141,00
-15,66	24,93	24,77	18,68	18,53	20,17	16,85	9,75	-7,53	187,80	-187,66
Absolut medel	20,44	20,40	12,96	12,71	33,01	32,02	7,31	5,99	87,66	87,56

Tabell 4.9: RMSE- och ME-värden för vänster bakhjul vid konstant retardation. Resultaten är sorterade efter medelvärdet av den longitudinella accelerationen a_x . Alla fel anges i newton.

a_x [m/s ²]	Nuvarande		Utökad nuvarande		Helfordon		Utökad helfordon		Fjäder	
	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME
-5,22	12,38	-12,28	4,89	-3,97	35,26	-35,18	3,13	-3,08	94,47	94,12
-6,29	14,04	-13,95	6,49	-5,60	36,31	-36,19	5,19	-5,17	105,62	105,16
-7,37	15,49	-15,41	7,97	-7,10	37,67	-37,50	7,47	-7,44	116,64	116,07
-10,10	18,45	-18,37	11,42	-10,51	42,76	-42,50	14,40	-14,34	143,51	142,65
-12,87	20,52	-20,43	14,34	-13,33	50,68	-50,38	23,81	-23,72	169,35	168,19
-15,66	21,12	-20,98	15,62	-14,74	61,12	-60,71	36,42	-36,34	194,18	192,62
Absolut medel	17,00	16,90	10,12	9,21	43,97	43,74	15,07	15,02	137,29	136,47

4.5 Modellernas beteende under FSG Endurance

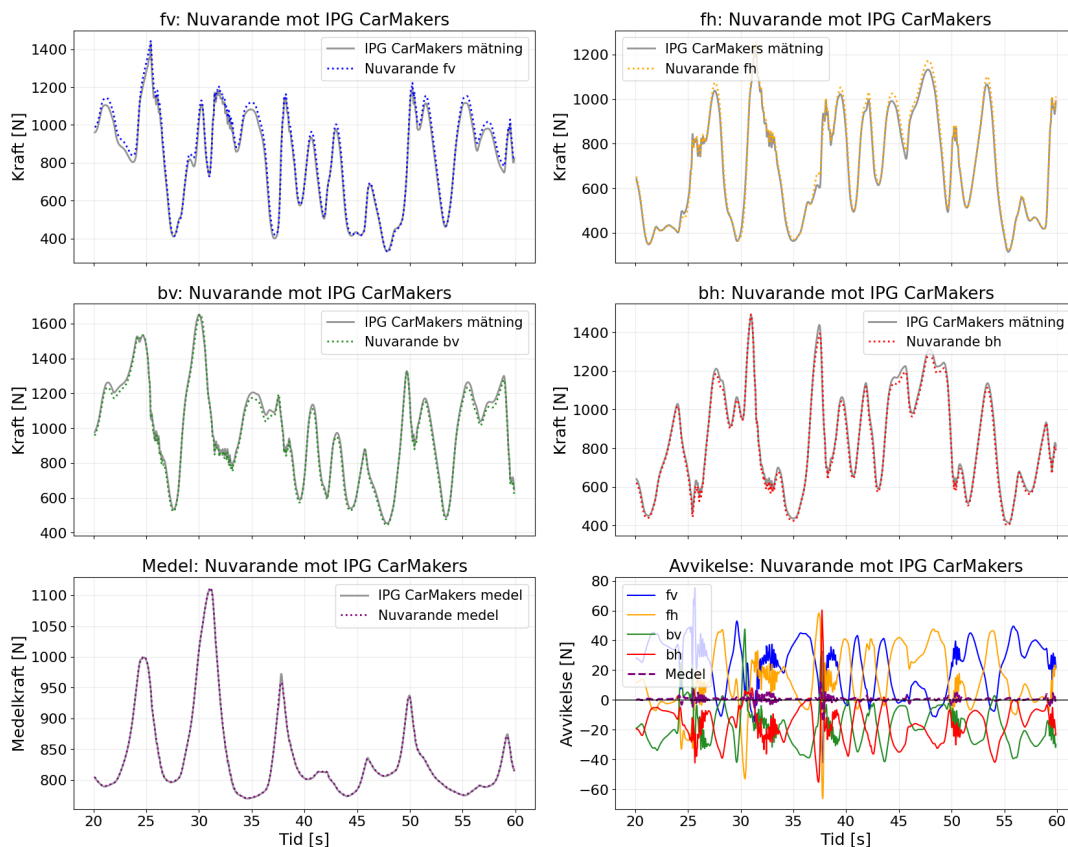
I Figur 4.2 visas CFS-bilens longitudinella och laterala acceleration, dess styrvinkel samt hastighet i x-led under tidsintervallet 20 – 60 s med ett glidande medelvärde på 0,25 s. Dessa signaler bidrar till estimeringarna av normalkrafterna, exempelvis kan det ses att en ökning av hastigheten i x-led i Figur 4.2 bidrar till en ökning av medelkraften i Figurerna 4.3 - 4.8.



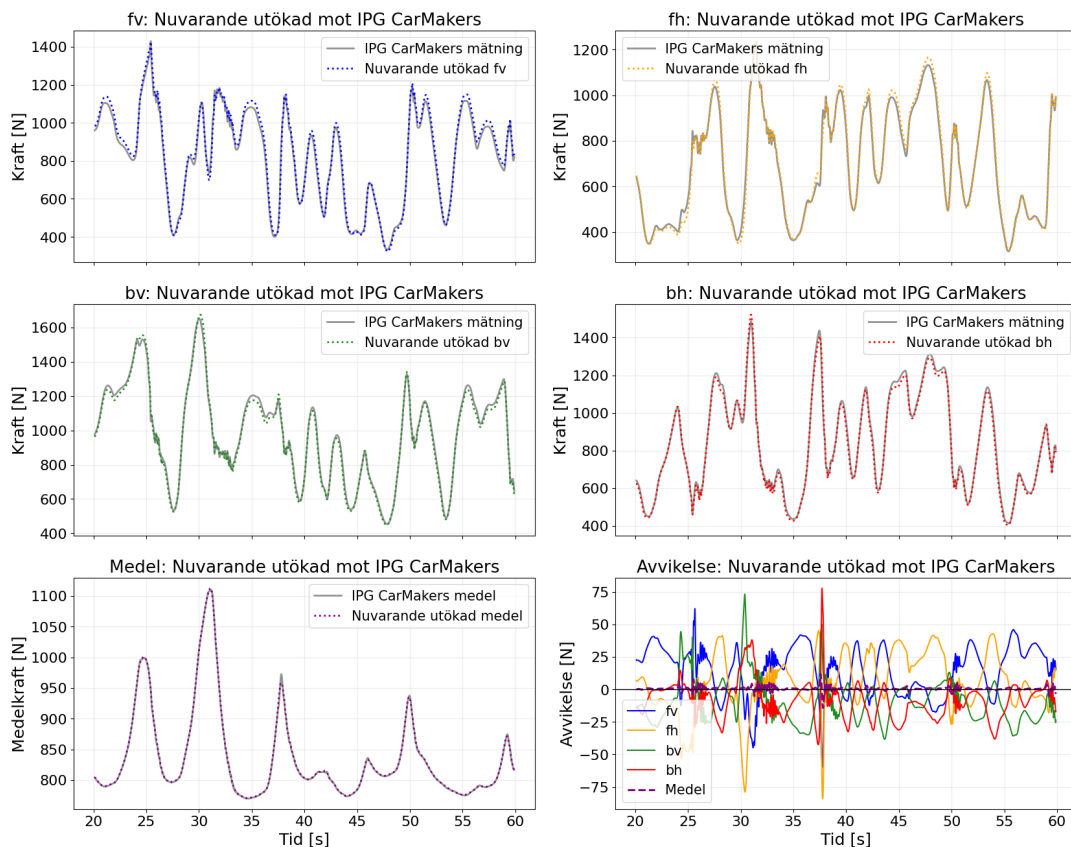
Figur 4.2: Fordonsdynamiska insignaler under tidsintervallet 20 – 60 s av Endurance-banan. Figuren visar longitudinell acceleration (a_x), lateral acceleration (a_y), styrvinkel (δ) (definierad som positiv åt vänster) samt longitudinell hastighet (v_x) över tiden. Samtliga signaler har filtrerats med ett glidande medelvärde över 0,25 s och används som insignaler till modellerna för normalkraftsestimering.

De olika modellernas normalkraftsestimering på varje enskilt däck som funktion av tiden i jämförelse med IPG CarMakers värden visas i Figur 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 och 4.8. Dessa värden visas som ett glidande medelvärde över 0,25 s och visar även avvikelserna för vardera däck samt den totala normalkraften över hela bilen.

De nuvarande modellerna, som illustreras i Figur 4.3 och Figur 4.4, visar sig prestera med en hög precision över större delar av banan där det genomsnittliga RMSE-värdet över alla fyra hjul ligger runt 47 N för grundmodellen och 45 N för den utökade, se Tabell 4.1. Upphovet till de största avvikelserna enligt figurerna är de mest transienta förloppen där normalkraften når sina lokala max- och minpunkter. Den största absoluta avvikelserna på banan ligger lite under 80 N. Dessutom estimerar de nuvarande modellerna den totala medelkraften på bilen med hög precision.



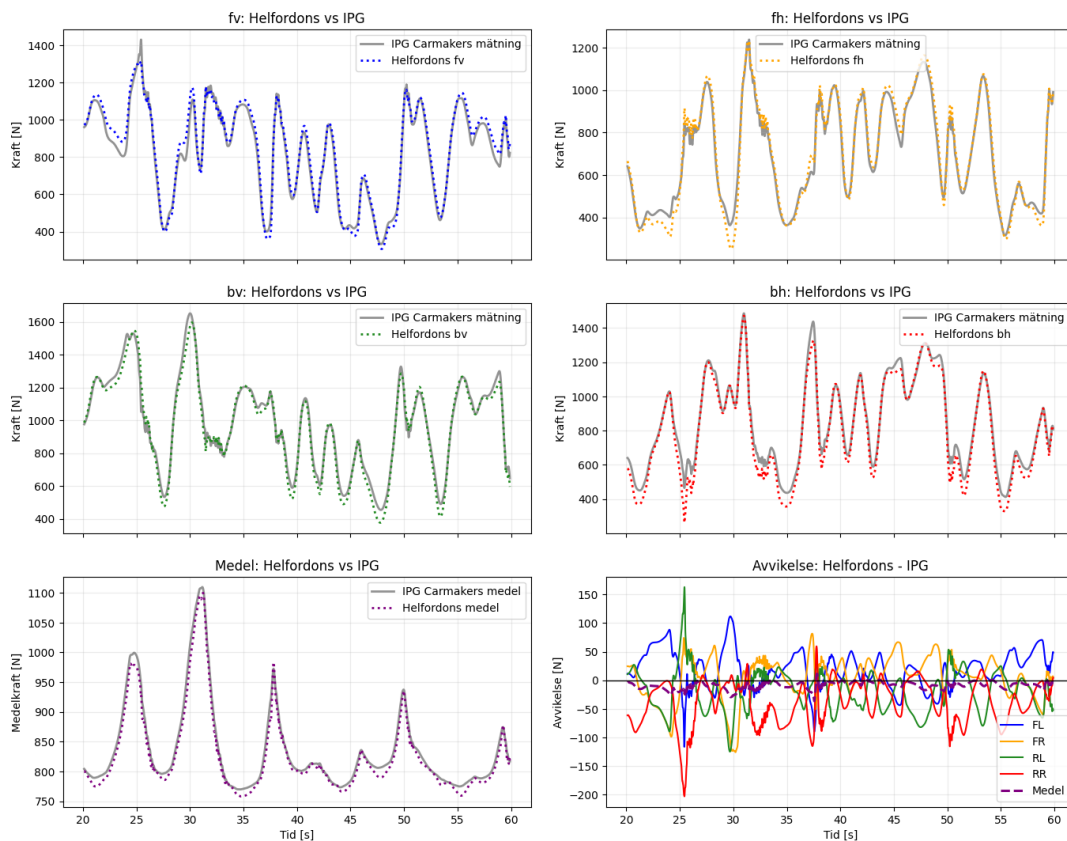
Figur 4.3: Jämförelse mellan den nuvarande modellen och referensdata från IPG CarMaker under tidsintervallet 20 – 60 s av Endurance-banan. Figuren visar estimerade normalkrafter över tid för samtliga hjul jämfört med motsvarande referenssignaler från IPG CarMaker. Samtliga signaler har filterats med ett glidande medelvärde över 0,25 s. De fyra övre delgraferna visar normalkraft för fram vänster (fv), fram höger (fh), bak vänster (bv) och bak höger (bh). Den nedre vänstra delgrafen visar medelvärdet av samtliga estimerade normalkrafter samt motsvarande medelvärde från IPG CarMaker. Den nedre högra delgrafen visar avvikelsen mellan estimerad normalkraft och referensdata för respektive hjul över tiden.



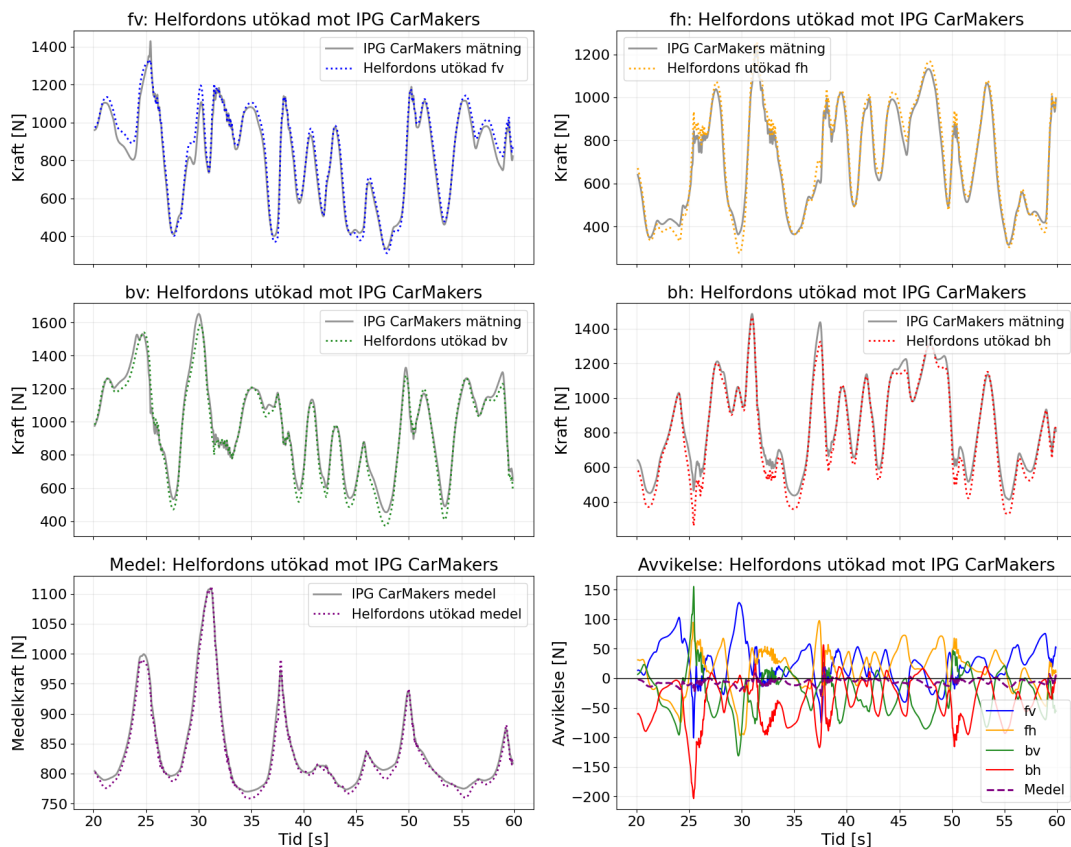
Figur 4.4: Jämförelse mellan den utökade nuvarande modellen och referensdata från IPG CarMaker under tidsintervallet 20 – 60 s av Endurance-banan. Figuren visar estimerade normalkrafter över tid för samtliga hjul jämfört med motsvarande referenssignaler från IPG CarMaker. Samtliga signaler har filtrerats med ett glidande medelvärde över 0,25 s. De fyra övre delgraferna visar normalkraft för fram vänster (fv), fram höger (fh), bak vänster (bv) och bak höger (bh). Den nedre vänstra delgrafen visar medelvärdet av samtliga estimerade normalkrafter samt motsvarande medelvärde från IPG CarMaker. Den nedre högra delgrafen visar avvikelsen mellan estimerad normalkraft och referensdata för respektive hjul över tiden.

För helfordonsmodellerna, som illustreras i Figur 4.5 och 4.6, presterar även dessa med en hög precision över större delar av banan fast med lite högre RMSE-värden runt 61 N för grundmodellen och 57 N för den utökade, se Tabell 4.1. Helfordonsmodellerna visar på större avvikelser vid de mest transienta förloppen, med den största avvikelsen på lite mer än 150 N. Modellerna visar också att den totala normalkraften över hela bilen skiljer sig från IPG CarMakers värden där avvikelserna här också sker vid de mest transienta förloppen.

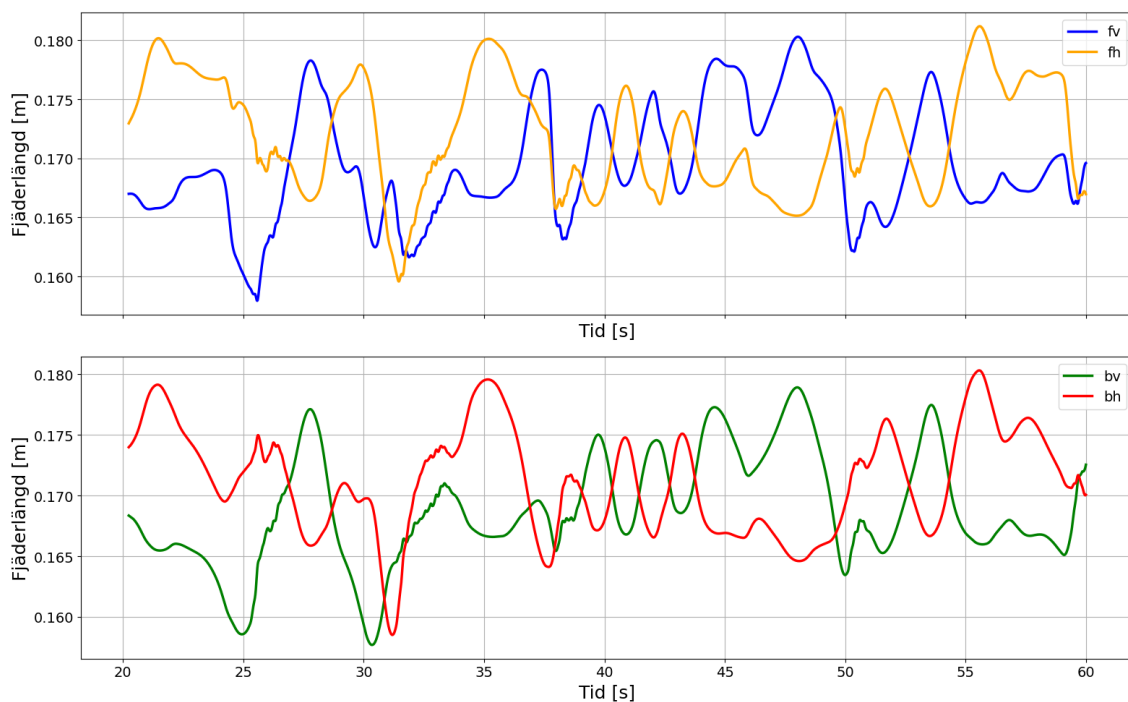
Jämförelse mellan alla däck och medel för helfordons, 0,25 s glidande medelvärde



Figur 4.5: Jämförelse mellan helfordonsmodellen och referensdata från IPG CarMaker under tidsintervallet 20 – 60s av Endurance-banan. Figuren visar estimerade normalkrafter över tid för samtliga hjul jämfört med motsvarande referenssignaler från IPG CarMaker. Samtliga signaler har filterats med ett glidande medelvärde över 0,25 s. De fyra övre delgraferna visar normalkraft för fram vänster (fv), fram höger (fh), bak vänster (bv) och bak höger (bh). Den nedre vänstra delgrafen visar medelvärdet av samtliga estimerade normalkrafter samt motsvarande medelvärde från IPG CarMaker. Den nedre högra delgrafen visar avvikelserna mellan estimerad normalkraft och referensdata för respektive hjul över tiden.

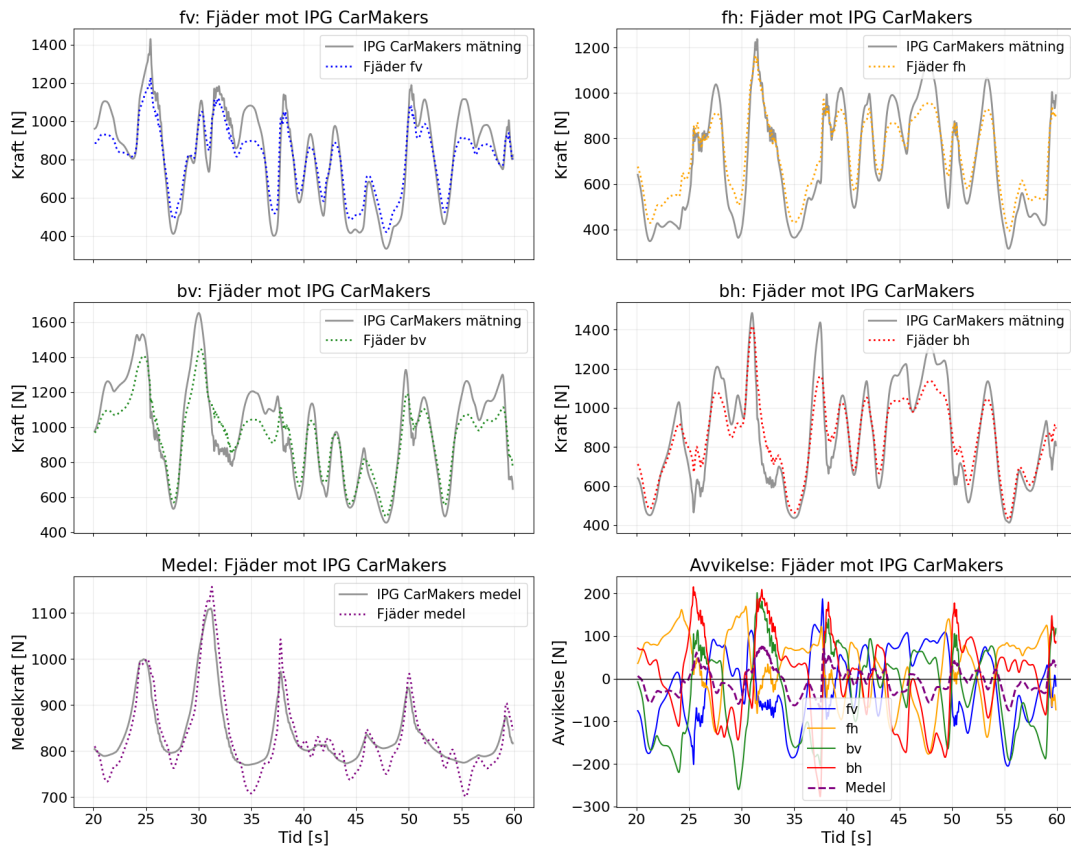


Figur 4.6: Jämförelse mellan den utökade helfordonsmodellen och referensdata från IPG CarMaker under tidsintervallet 20 – 60 s av Endurance-banan. Figuren visar estimerade normalkrafter över tid för samtliga hjul jämfört med motsvarande referenssignaler från IPG CarMaker. Samtliga signaler har filterats med ett glidande medelvärde över 0,25 s. De fyra övre delgraferna visar normalkraft för fram vänster (fv), fram höger (fh), bak vänster (bv) och bak höger (bh). Den nedre vänstra delgrafen visar medelvärdet av samtliga estimerade normalkrafter samt motsvarande medelvärde från IPG CarMaker. Den nedre högra delgrafen visar avvikelsen mellan estimerad normalkraft och referensdata för respektive hjul över tiden.



Figur 4.7: I övre grafen visas ett 0,25 s glidande medelvärde av fjäderlängden för framhjulen under Endurance-banan i tidsintervallet 20 – 60 s. I nedre grafen visas motsvarande fjäderlängd för bakhjulen.

Fjädermodellen är beroende av två tidsberoende signaler, fjäderlängd och fjäderhastighet. Fjäderlängden varierade för de olika hjulen mellan 0,15 – 0,19 m och visas i figur 4.7. Fjäderhastigheten var väldigt låg och brusig och varierade mellan $-0,05$ – $0,04$ m, och visas i A.1. Fjädermodellens estimeringar, som illustreras i Figur 4.8, visar stora brister i precision. Estimeringarna visade att modellen fungerar i stora drag men når nästan aldrig upp till IPG CarMakers värden. De största avvikelserna når upp till ungefär 250 N och estimeringen av den totala medelkraften på bilen skiljer sig mycket vid de mest transienta förloppen.



Figur 4.8: Jämförelse mellan fjädermodellen och referensdata från IPG CarMaker under tidsintervallet 20 – 60 s av Endurance-banan. Figuren visar estimerade normalkrafter över tid för samtliga hjul jämfört med motsvarande referenssignaler från IPG CarMaker. Samtliga signaler har filterats med ett glidande medelvärde över 0,25 s. De fyra övre delgraferna visar normalkraft för fram vänster (fv), fram höger (fh), bak vänster (bv) och bak höger (bh). Den nedre vänstra delgrafen visar medelvärdet av samtliga estimerade normalkrafter samt motsvarande medelvärde från IPG CarMaker. Den nedre högra delgrafen visar avvikelserna mellan estimerad normalkraft och referensdata för respektive hjul över tiden.

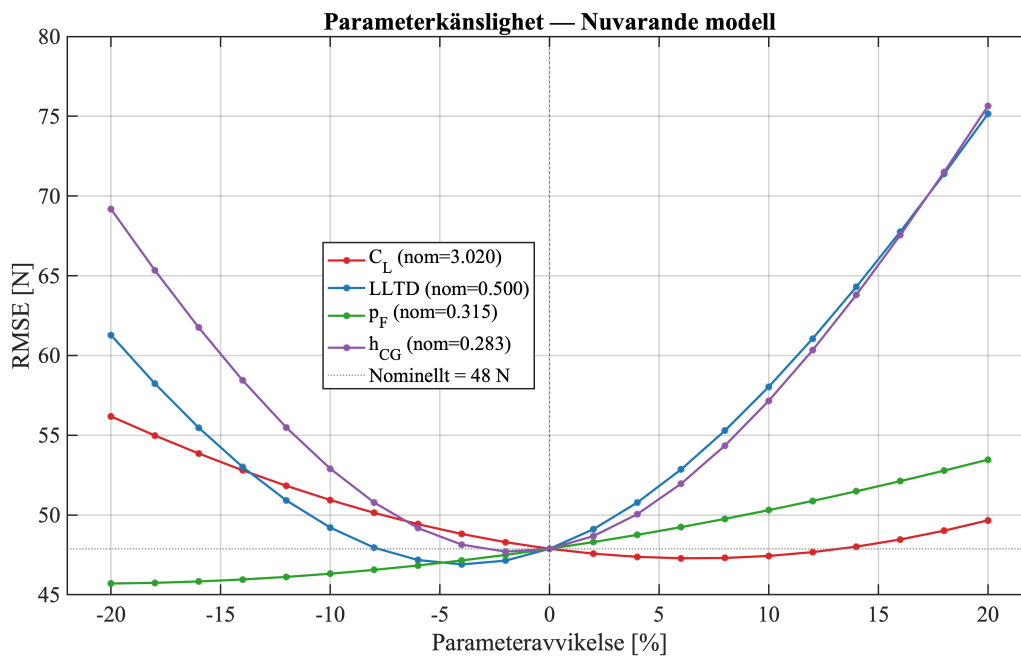
4.6 Parameterkänslighet

Figur 4.9 visar hur känslig den nuvarande modellen är för ändringar i de parametrar som kan kalibreras. Parametrarna C_L , $LLTD$, p_f och H_{MC} sveptes över en variabel i taget över Endurance-banan, medan övriga parametrar hölls konstanta. För varje nytt parametervärde kördes modellen på samma bana, och RMSE beräknades därefter över samtliga fyra hjul.

Figuren visar att den nuvarande modellen är mest känslig för variationer i $LLTD$ och H_{MC} . När någon av dessa parametrar avviker med $\pm 20\%$ från sina nominella värden, ökar RMSE hastigt, särskilt för de positiva avvikelserna. Detta är också rimligt eftersom båda parametrar direkt påverkar fördelningen av lasten mellan

hjulen. $LLTD$ styr hur den laterala lasten fördelas mellan fram- och bakaxel, medan H_{MC} påverkar momentarmen vid acceleration, retardation och kurvtagning.

Känslighetsanalysen begränsades till den nuvarande modellen eftersom den gav lägst RMSE i flera körfall samtidigt som den innehåller få parametrar som går att tolka fysikaliskt. Detta ger en mer tydlig bild på hur parameterfel påverkar resultatet. Motsvarande analys skulle i princip även kunna utföras på helfordonsmodellen och fjädermodellen. Resultaten i Figur 4.9 bör därför inte användas för att dra direkta slutsatser om parameterkänsligheten hos de andra modellerna.



Figur 4.9: Känslighetsanalys för den nuvarande modellen i förhållande till parametrarna C_L , $LLTD$, p_f och H_{MC} under ett varv körning av Endurance-banan. En parameter i taget varierades med $\pm 20\%$ från sitt nominella värde medan övriga parametrar hölls konstanta. RMSE beräknades över alla fyra hjul för varje parametersteg, medel-RMSE värdet beräknades för varje parametersteg. Notera att ett minimum för samtliga parametrar inte resulterar i ett globalt minimum.

5

Diskussion

För att ge en mer fullständig analys av modellernas prestanda analyseras varje delmoment separat i följande avsnitt. Detta ger en tydligare bild av i vilka situationer respektive modell presterar väl, var modellerna brister och vilka möjliga orsaker som ligger bakom dessa avvikelser. Analysen utgör även en grund för framtida arbete genom att lyfta fram modellernas styrkor, begränsningar och möjliga förbättringar inför en framtida implementation.

5.1 Övergripande resultat för modellerna på FSG Endurance-banan

Resultaten i Tabell 4.1 till 4.5 visar att den nuvarande modellen generellt ger lägst fel, framför allt när modellerna jämförs på Endurance-banan. Däremot presterar den inte bäst i varje enskilt fall. I vissa avgränsade fall ger helfordonsmodellen lägst fel, till exempel på vänster framhjul vid lateral lastöverföring, se Tabell 4.4, samt på framhjulen vid acceleration, se Tabell 4.6. Vid retardation gäller detta främst den utökade helfordonsmodellen på framhjulen, se Tabell 4.8. Den nuvarande modellen framstår ändå som starkast överlag.

På Endurance-banan ger den nuvarande modellen ett genomsnittligt RMSE på 46,81 N, helfordonsmodellen ger 61,40 N och fjädermodellen 102,91 N. När den hastighetsberoende aerodynamiska lastfördelningen $p_f(v_x)$ används minskar RMSE till 45,27 N för den nuvarande modellen och 56,80 N för helfordonsmodellen, se Tabell 4.1. Det visar att fördelningen har viss betydelse för resultaten, men förbättrar inte modellerna tillräckligt för att ändra rangordningen på Endurance-banan.

En förklaring till varför den nuvarande modellen fungerar bra är förmodligen att den bygger direkt på de största bidragen till normalkraften. Den statiska lasten och den aerodynamiska lasten sätter totalnivån, medan den longitudinella och laterala lastöverföringen omfördelar lasten mellan fram- och bakaxel samt mellan vänster och höger sida. Det gör att modellen behåller en tydlig kraftbalans genom att justera lasten mellan hjulen. Helfordonsmodellen beskriver pitch- och roll-rörelse mer detaljerat, vilket kan ge bättre resultat i vissa körfall. Samtidigt blir den mer känslig för avvikelser i geometri, vinklar eller accelerationssignaler från IPG CarMaker-

modellen. Detta stämmer också med tidigare studier där mer komplexa modeller inte alltid ger lägre fel, eftersom fler parametrar kan göra modellen känsligare för parameterfel och brus [18].

5.2 Analys av olika körfall

Här analyseras de olika körfall som simulerats för att undersöka under vilka förhållanden modellerna presterar bättre respektive sämre, och på så sätt identifiera styrkor och svagheter hos modellerna.

5.2.1 Konstant hastighet på raksträcka

I Tabell 4.2 och 4.3 visas den estimerade normalkraften på vänster framdäck vid konstant hastighet på raksträcka och IPG CarMakers referens. På framdäcken estimerar de utökade modellerna normalkraften bäst, följt av den nuvarande modellen med ett medelabsolutfel på 12,26 N, fjädermodellen med medelfel på 18,72 N och helfordonsmodellen på 23,82 N. Eftersom modellerna vid konstant hastighet endast tar hänsyn till statisk normalkraft och aerodynamisk last, kan felet i detta körfall främst kopplas till skattningen av den aerodynamiska lasten. Detta stärks av att felet i den statiska normalkraften, vilket motsvarar den första raden i tabellerna, är nära 0 N.

Anledningen till att de utökade modellerna ger bäst resultat är rimligt då samma data som presenteras i Tabellerna 4.2, 4.3, A.1 och A.2 använts för att anpassa p_f till den aerodynamiska lasten enligt Figur 4.1. En möjlig förklaring till att helfordonsmodellen presterar sämre än den nuvarande modellen är att helfordonsmodellen approximerar $H_{RC} = H_{MC}$. Detta diskuteras vidare i Avsnitt 5.3.2. Fjädermodellen ger även relativt goda estimeringar jämfört med övriga körfall, och detta är det enda körfallet där modellen inte presterar sämst. En möjlig förklaring är att körfallet motsvarar en stationär situation utan bidrag från longitudinell eller lateral lastöverföring. Normalkraftsförändringen uppstår genom att den aerodynamiska lasten komprimerar fjädringssystemet. Fjädermodellen kan därför indirekt fånga en del av den aerodynamiska lastens inverkan genom den uppmätta fjäderdeformationen, utan att explicit använda någon uppskattad luftmotstånds- eller lyftkoefficient. Vid låga hastigheter är dessutom fjäderdeformationen liten, vilket minskar inverkan av bufferten i fjädringssystemet, se Figur 3.1. Detta är förmodligen anledningen till att modellen skattar normalkrafterna väldigt väl vid låga hastigheter.

I Tabell 4.2 observeras även att IPG CarMakers estimering av normalkraften är lägre på framhjulen vid en konstant hastighet på 5 m/s än stillastående körning. En möjlig förklaring till detta är att drag-kraften (F_x^{aero} , se Figur 2.1) verkar effektivt i en punkt över masscentrum och skapar ett moment som motverkas av ökad normalkraft på bakhjulen och minskad på framhjulen. Detta moment modelleras ej i varken nuvarande- eller helfordonsmodellen eftersom det antas att drag-kraften verkar i masscentrum. Vid högre hastigheter tar sedan den vertikala aerodynamiska lasten över och IPG CarMakers normalkraftsreferens ökar igen. Av samma anledning

kan det även observeras i Tabell 4.2 att felet mellan IPG CarMaker och modellens normalkraftsestimering minskar med en ökning av hastigheten. I nuvarande modellen uppskattas p_f till konvergensvärdet 0,3145, medan uppmätta datapunkter i Figur 4.1 ligger betydligt lägre. Vid ökande hastigheter närmar sig datapunkterna konvergensvärdet mer och mer, och därav sjunker felet mellan IPG CarMakers referens och estimeringen i nuvarande modellen.

5.2.2 Konstant fart på cirkelbana

Vid körning med konstant fart på cirkelbana antas fordonet följa en bana med konstant radie r och hastighet v . Den longitudinella accelerationen kan då sättas till noll ($a_x = 0$), medan den laterala accelerationen ges av:

$$a_y = \frac{v^2}{r}. \quad (5.1)$$

För att isolera modellernas potential att fånga upp bilens laterala kraftförskjutning från acceleration i y -led analyserades differensen mellan normalkraftsestimering på raksträcka och cirkel enligt:

$$\Delta F_z = F_{z, \text{cirkel}} - F_{z, \text{raksträcka}}, \quad (5.2)$$

där $F_{z, \text{cirkel}}$ och $F_{z, \text{raksträcka}}$ är normalkraften på ett enskilt däck vid en konstant fart på raksträcka respektive cirkelbana. För den nuvarande modellen innebär detta att endast termen i (2.9) bör bidra till skillnaden, eftersom skillnaden mellan körning med konstant hastighet på cirkelbana och på raksträcka är att den laterala accelerationen är nollskild. Enligt modellens antaganden kommer även de aerodynamiska krafterna elimineras vid subtraktionen, även om dessa i praktiken kan påverkas av att fordonet svänger och därmed möter luftflödet med en annan anfallsvinkel, vilket kan förändra både lyft- och luftmotståndskoefficienter [8]. För helfordonsmodellen reduceras ej komplexiteten fullt såpass mycket eftersom både pitch och roll kan ändras från körning rakt fram. På liknande sätt reduceras heller inte komplexiteten på fjädermodellen, mer än att den statiska normalkraftsfördelningen elimineras från differensen i (5.2).

I Tabell 4.4 och 4.5 visas resultatet för differensen i (5.2) för IPG CarMakers referens och modellernas för vänster framhjul och höger bakhjul. Intressant är att helfordonsmodellen för vänster framhjul skattar det laterala bidraget bättre än den nuvarande modellen, med ett medel absolut fel på 3,16 N lägre. Detta beror sannolikt på att roll-vinkeln ändras tillräckligt mycket under körningen för att helfordonsmodellen, som tar hänsyn till denna, ska ge bättre estimeringar än den nuvarande modellen, som inte gör det. För höger bakhjul presterar däremot den nuvarande modellen tydligt bäst, och med en väsentligt lägre avvikelse än helfordonsmodellen. Detta bedöms bero på att helfordonsmodellen generellt har svårare att skatta normalkrafterna på de bakre hjulen, vilket sannolikt kan förklaras av samma resonemang som förs i Avsnitt 5.3.2. Fjädermodellen presterar klart sämst på båda hjulen samt vid hastigheter över 10 m/s, med exempelvis en ökning i absolut fel på ungefär 80% mellan 15 m/s och 20 m/s för vänster framhjul. Anledningen till

detta borde ligga återigen i att de olinjära krafter som inte modelleras tar över och att detta ökar olinjärt vid ökade hastigheter. Likt körfallet på raksträckan analyseras här ett stationärt tillstånd, vilket innebär att normalkraftsestimeringen huvudsakligen bestäms av fjäderkompressionen snarare än av dämparkrafterna.

5.2.3 Konstant acceleration och retardation

Vid konstant acceleration i x-led testas hur väl modellerna kan omfördela normalkrafter från framaxeln till bakaxeln. Matematiskt innebär detta att $a_x = C$ och $a_y = 0$, där C är någon konstant med enhet m/s^2 . Exempelvis i nuvarande modellen blir då skillnaden mot konstant hastighet termen i (2.10) och den blir då:

$$\mathbf{F}_3 = \frac{CmH_{MC}}{2L} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

I Tabell 4.6 och 4.7 visas det tydligt att normalkrafterna på vänster framhjul överskattas och för alla modeller underskattas på höger bakhjul. Detta beror på olika faktorer men eftersom både helfordonsmodellen och nuvarande modellen överskattar och underskattar för alla accelerationer, indikerar detta att felet är kopplat till parametreringen snarare än den specifika modellstrukturen. I (5.3) ingår både höjden till masscentrum och avstånd mellan fram- och bakaxel. Antingen kan höjden till masscentrum vara för låg eller så kan avståndet mellan framaxel och bakaxel vara för långt. Eftersom modellen av CFS-bilen i IPG CarMaker är egenparametriserad och samtidigt bygger på standardkomponenter från IPG CarMaker, är osäkerheter i fordonsparametrarna en rimlig felkälla. Inom ramen för detta tidsbegränsade projekt prioriterades främst justering av direkt anpassningsbara parametrar, såsom p_f , t_v och t_f . En naturlig fortsättning på arbetet vore därför att undersöka CarMaker-modellen av CFS-bilen mer ingående och validera centrala fordonsparametrar mot mätdata eller annan referensdata. Exempelvis behandlar Bixel et al. metoder för skattning och mätning av masscentrum och tröghetsparametrar, vilket illustrerar hur sådana fordonsparametrar kan bestämmas och användas för att förbättra fordonsmodeller [19].

Det framgår även av Tabell 4.6 och A.9 att helfordonsmodellen skattar normalkraften på framhjulen bättre än den nuvarande modellen. Detta är i linje med den tidigare observationen att helfordonsmodellen generellt tycks beskriva framhjulets normalkrafter bättre än bakhjulets. En möjlig förklaring är att modellens antaganden kring roll-centrumets position påverkar lastfördelningen olika mellan fram- och bakaxel. Om roll-centrumet vid bakaxeln i den simulerade fordonsmodellen ligger högre än vad som antas i helfordonsmodellen, kan detta bidra till att den nuvarande modellen istället ger lägre fel för vänster bakhjul, vilket framgår av Tabell 4.7. Att felet dessutom växer med accelerationsnivån är konsistent med en sådan parametermässig avvikelse, eftersom lastöverföringen mellan axlarna ökar linjärt med a_x och därmed förstärker effekten av ett feldimensionerat roll-centrum.

5.3 Modellernas styrkor och svagheter

Under detta avsnitt diskuteras djupgående modellernas olika styrkor och svagheter och möjliga orsaker till dem.

5.3.1 Nuvarande modell

Den nuvarande modellen var den modell som presterade bäst över hela Endurance-banan med ett genomsnittligt RMSE-värde över samtliga däck på 46,81 N, se Tabell 4.1. Dessutom visar resultatet att modellen presterar med ett jämnt och lågt felmått över samtliga däck genomgående under de andra körsätten. Eftersom den statiska och aerodynamiska termen tillsammans bestämmer fordonets totala normalkraft kommer modellens genomsnittliga normalkraft över samtliga hjul att ligga nära referensen från IPG CarMaker, vilket bekräftas i Figur 4.3. Avvikelser på enskilda däck uppkommer därför främst från fel i lastfördelningen mellan höger- och vänstersida samt fram- och bakaxel, vilket är modellens egentliga estimeringsuppgift.

En annan fördel med modellen är dess simplicitet. Den totala normalkraften delas upp i statiska, longitudinella, laterala och aerodynamiska bidrag, vilket beräknas separat. Därmed undviks termer där flera tidsberoende insignaler multipliceras med varandra. Detta minskar risken för att mätbrus i flera signaler förstärks och propageras genom modellen, vilket kan ge bättre estimeringar.

Dessutom bidrar simpliciteten till att det är lättare att förbättra en komponent av körsättet i taget. Exempelvis gjordes antagandet i den laterala kraftkomponenten att e_f och e_b var lika stora. Detta är ett rimligt antagande då dessa är väldigt lika (se Tabell 3.1), men skulle kunna optimeras genom att ta hänsyn till båda variablerna. Dock visar resultaten inget tecken på att detta hade någon stor inverkan då Tabell 4.4 och 4.5 visar på att bakdäcken approximerades bättre än framdäcken. Detta även fast ett byte från parametern e_f till e_b i (2.9) skulle teoretiskt sätt göra bakdäcksapproximationen bättre. Dessutom visar modellen också störst avvikelse vid accelerationssteget, se Tabell 4.6 och 4.7. Även här skulle kraftkomponenten i (2.10) tänkas ändras för att ta hänsyn till att överföringen skiljer sig när pitch-vinkeln för bilen ändrar sig, på samma sätt skulle den också påverka resultatet i bromsningen. Dock skulle detta öka komplexiteten av modellen och behöver inte nödvändigtvis göra modellen bättre under tävlingsförhållanden.

I Figur 4.9 visas också att modellen är extra känslig för förändringar i parametrarna $LLTD$ och H_{MC} . Under körning ändras bilens höjd när fjädringen trycks ihop, alltså är H_{MC} inte helt konstant. Däremot är det svårt att uppskatta förändringen noggrant, och eftersom känslighetsanalysen visar att modellen är särskilt känslig för parametern, skulle en felaktig uppskattning ge större fel än ett konstant antagande. I detta fall används därför den ursprungliga höjden som det konstanta värdet.

Sedan är det också viktigt att notera att värdena från grafen är svepta över Endurance-banan, detta innebär att en ändring av parametrarna för optimering på just denna

specifika bana inte motsvarar optimerade inställningar för en annan. Förflyttar man dessutom samtliga parametrar till minimum för vardera komponent kommer inte nödvändigtvis ett globalt minimum uppnås.

5.3.2 Helfordonsmodell

Helfordonsmodellen beräknar effektiva massorna $M_{v,f}$ och $M_{v,b}$ utifrån kraft- och momentjämvikt baserad på L_f och L_b . Vid konstant hastighet på plan mark reduceras modellen i praktiken till en kraft- och momentbalans mellan fram- och bakaxel [20]. Därefter använder den både pitch- och roll-vinkel för att estimerar momentjämvikt med högre precision. Eftersom alla simuleringar körts på platt mark, blir pitch- och roll-vinklar endast stora vid grova svängar och accelerationer. Detta kan också bekräftas genom att helfordonsmodellen ger sämre resultat än nuvarande modellen på Endurance-banan, se Tabell 4.1 men presterar bättre än nuvarande modell för vänster framhjul i konstant fart på cirkelbana, se Tabell 4.4, konstant acceleration, se Tabell 4.6 och konstant retardation, se Tabell 4.8.

Den troligaste förklaringen till att helfordonsmodellen ger en mycket sämre uppskattning på de bakre hjulen (och därmed sämre uppskattning totalt) är att roll-centrum antas vara på samma höjd som masscentrum, det vill säga $H_{RC} = H_{MC}$, se Figur 2.3. Denna höjd bestäms främst av fjädringssystemets geometri och kunde inte utläsas någonstans i IPG CarMaker och var anledningen till att approximationen $H_{RC} = H_{MC}$ behövde göras. Eftersom fjädringssystemet skiljer sig för fram- och bakaxeln för både fjädrar och dämpare, är förmodligen roll-centrum placerat på olika ställen. Därav kan det vara anledningen till sämre resultat på bakhjulen än framhjulen. En naturlig fortsättning på arbetet hade varit att använda data för att anpassa H_{RC} så att modellfelet minimeras, eller försöka implementera avancerade fysikaliska modeller för att beräkna detta. Detta är i linje med Botha och Els, som utvecklade en algoritm där både masscentrum och roll-centrum estimerades i realtid med hjälp av grundläggande signaler som återfinns i helfordonsmodellen med ett Kalman filter [21].

Helfordonsmodellen innehåller som sagt mer information än den nuvarande modellen, i och med att den tar hänsyn till pitch- och roll-vinklar och bygger på samma grundläggande fysik för uppskattning av stationär massfördelning, longitudinella och laterala omfördelningar samt uppskattning av aerodynamiska lasten. Den har därmed större utvecklingspotential än den nuvarande modellen och skulle, med en korrekt beskrivning av roll-centrum och masscentrum, sannolikt kunna ge bättre resultat. Därför bör helfordonsmodellen inte avskrivas som en möjlig framtida implementering i CFS-bilen. Resultaten illustrerar dock en vanlig avvägning vid modellutveckling, mer komplexa modeller kan ge högre noggrannhet, men ställer samtidigt mer krav på implementation, parameteranpassning och validering. Om detta däremot inte kan genomföras på ett tillräckligt noggrant sätt, kan den ökade modellkomplexiteten istället leda till sämre resultat, vilket också var fallet i denna studie.

5.3.3 Fjädermodellen

Fjädermodellen uppvisade till skillnad från de andra modellerna ett betydligt större fel mot IPG CarMakers värden på normalkrafterna under alla dynamiska körsituationer. Konstant hastighet på raksträcka som visas i Tabell 4.2 och 4.3, är det enda scenario där fjädermodellen presterar bättre än resterande modeller på hastigheter under 10 m/s. Att fjädermodellen presterar bättre vid konstant hastighet kan dessutom förklaras fysikaliskt, med hänsyn till approximationen $\ddot{z}_u(t) = 0$, se (2.34). Approximationen stämmer delvis då $\ddot{z}_u(t)$ ligger nära 0 vid plan väg, men tar inte hänsyn till chassits rörelse. Då accelerationen i både x- och y-led är 0 vid konstant hastighet, intar karossen ett stationärt tillstånd, och båda termerna i approximationen blir 0. Att medelfelet sedan ökar med hastigheten kan bero på att fjädern komprimeras allt mer och buffertens påverkan, som ökar kraftigt med kompressionen, se Figur 3.1, blir större och därmed bidrar till ett ökat medelfel. Anledningen till att modellen brister i de andra scenarion kan dessutom kopplas direkt till chassits rörelse, där negligeringen av \ddot{z}_u betyder att däckkompressionen till följd av chassits rörelse försummas. Detta leder till att normalkraften uttrycks som $F_{z,i} = F_{\text{sus},i}$ och inte $F_{z,i} = F_{\text{sus},i} - m_u \ddot{z}_u$. Då modellen dessutom behandlar den vertikala dynamiken för varje hjul isolerat, kopplas inte höger och vänster hjul samman genom krängningshämmaren, vars uppgift är att överföra krafter från sida till sida på respektive axel, vilket kan vara anledningen till att modellen även brister i fallet vid konstant hastighet i cirkelbana.

Trots dessa brister behöver fjädermodellen inte modellera den aerodynamiska lasten explicit, vilket kan vara en fördel vid körfall där bilen framförs längre sträckor med relativt jämn hastighet och begränsade dynamiska lastförändringar. De förenklingar som görs i (2.34) innebär dock att modellen inte lyckas fånga upp snabba dynamiska förändringar tillräckligt effektivt.

5.3.4 De utökade modellerna

De utökade modellerna använder en hastighetsberoende aerodynamisk fördelningsparameter $p_f(v_x)$, enligt (4.1), som har anpassats mot referensdata från IPG CarMaker enligt Figur 4.1. I Tabell 4.2 går det att utläsa att de utökade modellerna förbättrar normalkraftsestimeringen väsentligt. För den nuvarande modellen förbättras estimate- ringen från 12,26 N till 2,54 N på vänster framhjul och från 23,82 N till 2,73 N för helfordonsmodellen. Liknande observationer illustreras även för de andra hjulen i Tabellerna 4.3, A.1 och A.2. Detta är förväntat då data från simuleringar för konstant hastighet på raksträcka har använts för att anpassa funktionen i (4.1). Mer bekräftande resultat ses i Tabellerna 4.8 och 4.9 där förbättringen är ännu mer markant, särskilt för helfordonsmodellen där medel-RMSE på vänster framhjul minskar från 33,01 N till 7,31 N, och för den nuvarande modellen från 20,44 N till 12,96 N.

Förbättringen är däremot liten på FSG Endurance-banan, där medel-RMSE minskar endast från 46,81 N till 45,27 N för den utökade nuvarande modellen och från 61,40 N till 56,80 N för den utökade helfordonsmodellen, se Tabell 4.1. Att förbättringen dämpas vid Endurance-banan är en väldigt tydlig indikation på att modellerna

generellt sett är dåliga på att fånga upp transienta förlopp. En rimlig förklaring är att luftflödet runt bilen inte endast beror på den longitudinella hastigheten, utan även på bilens vinkel till vinden samt dess acceleration, pitch- och roll-vinkel [22]. Det går därför att konstatera att den hastighetsberoende uppskattningen av den aerodynamiska lastfördelningen mellan bilens hjul ger en betydligt större förbättring vid stationära körfall än på Endurance-banan, även om den i regel förbättrar estimeringen av normalkrafterna.

6

Slutsats

Syftet med arbetet var att ge CFS ett underlag för att bedöma noggrannheten hos den nuvarande implementeringen av normalkraftsestimering, samt att jämföra alternativa fysikbaserade modeller för estimering av vertikala normalkrafter på däck i en CFS-bil. Modellerna har utvärderats mot referensdata från IPG CarMaker i körfall som motsvarar de huvudsakliga belastningssituationerna på en tävlingsbana: konstant hastighet på raksträcka, konstant fart på cirkelbana, konstant acceleration och retardation samt FSG Endurance-banan.

Den nuvarande modellen gav lägst genomsnittlig RMSE på Endurance-banan med 46,81 N, jämfört med 61,40 N för helfordonsmodellen och 102,91 N för fjädermodellen, trots att de andra modellerna innehåller fler dynamiska bidrag. Helfordonsmodellen presterar bättre i enskilda fall, framför allt på vänster framhjul vid lateral lastöverföring i cirkelbana (8,90 N mot 12,07 N), men den nuvarande modellen ger lägst total avvikelse över banan.

Den hastighetsberoende fördelningen $p_f(v_x)$ förbättrar estimeringen tydligt vid konstant hastighet på raksträcka, där det absoluta medelfelet på vänster framhjul minskar från 12,26 N till 2,54 N för den utökade nuvarande modellen och från 23,82 N till 2,73 N för den utökade helfordonsmodellen. På Endurance-banan blev förbättringen däremot liten, vilket visar att felen i dynamiska körfall inte i första hand styrs av aerodynamisk lastfördelning. Samtliga modeller överskattar normalkrafterna på framhjulen och underskattar dem på bakhjulen vid acceleration, med störst fel för vänster bakhjul. Arbetet visar därmed att enkla modeller kan vara en fördel vid normalkraftsestimering, så länge modellen bevarar kraftbalansen och beskriver de dominerande lastöverföringar.

Sammantaget rekommenderas den utökade nuvarande modellen för normalkraftsestimering på CFS-bilen, eftersom den uppvisar lägst eller likvärdigt fel i de analyserade körfallen och i praktiken reduceras till den nuvarande modellen vid låga hastigheter. En naturlig fortsättning på arbetet är att validera de fysikaliska fordonsparametrarna i IPG CarMaker-modellen mot direkta mätningar på fordonet, vilket bedöms ha större potential att förbättra estimeringen vid acceleration än ytterligare utveckling av modellstrukturerna.

Litteratur

- [1] Formula Student Germany, *Formula Student Germany*, 2026. hämtad 13 febr. 2026. URL: <https://www.formulastudent.de>.
- [2] W. F. Milliken och D. L. Milliken, *Race Car Vehicle Dynamics*. Warrendale, PA, USA: SAE International, 1995.
- [3] *Formula Student Rules 2026*, version 1.1, Rev-15f99a7, Formula Student Germany, 2026. hämtad 4 maj 2026. URL: https://www.formulastudent.de/fileadmin/user_upload/all/2026/rules/FS-Rules_2026_v1.1.pdf.
- [4] M. Asperti, M. Vignati och E. Sabbioni, "On Torque Vectoring Control: Review and Comparison of State-of-the-Art Approaches," *Machines*, årg. 12, nr 3, s. 160, 2024. DOI: 10.3390/machines12030160.
- [5] M. Doumiati, A. Victorino, A. Charara och D. Lechner, "Lateral Load Transfer and Normal Forces Estimation for Vehicle Safety: Experimental Test," *Vehicle System Dynamics*, årg. 47, nr 12, s. 1511–1533, 2009. DOI: 10.1080/00423110802673091.
- [6] L. Filipozzi, F. Assadian, M. Kuang, R. Johri och J. Velazquez Alcantar, "Estimation of Tire Normal Forces including Suspension Dynamics," *Energies*, årg. 14, nr 9, s. 2378, 2021. DOI: 10.3390/en14092378.
- [7] S. Öngir, E. C. Kaleli, M. Z. Konyar och H. M. Ertunç, "Vertical Force Monitoring of Racing Tires: A Novel Deep Neural Network-Based Estimation Method," *Applied Sciences*, årg. 15, nr 1, s. 123, 2025. DOI: 10.3390/app15010123.
- [8] S.-Y. Cheng, K.-Y. Chin, S. Mansor och A. B. Abd Rahman, "Experimental study of yaw angle effect on the aerodynamic characteristics of a road vehicle fitted with a rear spoiler," *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, årg. 184, s. 305–312, 2019, ISSN: 0167-6105. DOI: 10.1016/j.jweia.2018.11.033.
- [9] A. Rezaeian m. fl., "Novel Tire Force Estimation Strategy for Real-Time Implementation on Vehicle Applications," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, årg. 64, nr 6, s. 2231–2241, 2015. DOI: 10.1109/TVT.2014.2345695.
- [10] E. Alvarez-Sánchez, "A Quarter-Car Suspension System: Car Body Mass Estimator and Sliding Mode Control," *Procedia Technology*, årg. 7, s. 208–214, 2013. DOI: 10.1016/j.protcy.2013.04.026.
- [11] IPG Automotive, *CarMaker*, <https://www.ipg-automotive.com/solutions/product-portfolio/carmaker>, Hämtad: 2026-05-11, 2026.
- [12] IPG Automotive GmbH, *CarMaker Quick Start Guide*, 2020.

- [13] IPG Automotive GmbH, *CarMaker Reference Manual*, Internal technical documentation, IPG Automotive GmbH, 2023.
- [14] E. Kutluay och H. Winner, "Validation of Vehicle Dynamics Simulation Models – A Review," *Vehicle System Dynamics*, årg. 52, nr 2, s. 186–200, 2014. DOI: 10.1080/00423114.2013.868500.
- [15] A. Albinsson, F. Bruzelius, B. Jacobson och S. Ran, "Validation of vehicle-based tyre testing methods," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, årg. 233, nr 1, s. 18–27, 2019. DOI: 10.1177/0954407018777581.
- [16] IPG Automotive, *Virtual Prototypes*, <https://www.ipg-automotive.com/solutions/process-steps/virtual-prototypes>, Hämtad: 2026-05-11, 2026.
- [17] D. Rocchi, L. Rosa, E. Sabbioni, M. Sbrosi och M. Belloli, "A numerical–experimental methodology for simulating the aerodynamic forces acting on a moving vehicle passing through the wake of a bridge tower under cross wind," *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, årg. 104-106, s. 256–265, 2012, 13th International Conference on Wind Engineering, ISSN: 0167-6105. DOI: 10.1016/j.jweia.2012.03.012.
- [18] X. Wang, T. Chen och J. Lu, "Longitudinal Tire Force Estimation Method for 4WIDEV Based on Data-Driven Modified Recursive Subspace Identification Algorithm," *Algorithms*, årg. 18, nr 7, s. 409, 2025. DOI: 10.3390/a18070409.
- [19] R. A. Bixel, G. J. Heydinger, N. J. Durisek, D. A. Guenther och S. J. Novak, "Developments in Vehicle Center of Gravity and Inertial Parameter Estimation and Measurement," i *SAE Technical Paper Series*, 1995. DOI: 10.4271/950356.
- [20] R. Rajamani, *Vehicle Dynamics and Control*, 2. utg. New York, NY, USA: Springer, 2012. DOI: 10.1007/978-1-4614-1433-9.
- [21] T. R. Botha och P. S. Els, "Vehicle centre of mass, roll-centre and pitch-centre height estimation," *International Journal of Vehicle Systems Modelling and Testing*, årg. 13, nr 4, s. 319–339, 2019. DOI: 10.1504/IJVSMT.2019.104877.
- [22] P. Aschwanden, J. Müller, G. C. Travaglio och T. Schöning, "The Influence of Motion Aerodynamics on the Simulation of Vehicle Dynamics," *SAE International Journal of Passenger Cars - Mechanical Systems*, årg. 1, s. 545–551, april 2008. DOI: 10.4271/2008-01-0657.

A

Bilagor

A.1 Anpassade modeller för statistiska fördelningen av normalkraften i IPG CarMaker

Under detta beskrivs matematiskt exakt de modeller som användes i simuleringarna. Dessa är något modifierade från hur de beskrivs i Avsnitt 2. Detta på grund av att statistiska normalkraften parameteriseras enligt (3.3). Anledningen till att dessa modeller ligger i appendix är att detta kan vara svårt att göra på en verklig CFS-bil, därför är det mer lämpat att lägga de rekommenderade implementerade modellerna för en riktig CFS-bil i Avsnitt 2.

A.1.1 Nuvarande modell

I nuvarande modellen ändras bara den statistiska normalkraften från nya parameteriseringen eftersom endast avståndet mellan höger och vänster hjul spelar roll i det laterala bidraget som beskrivs i (2.9), inte vart mellan hjulen masscentrum är placerat. Nuvarande modellen kan då beskrivas enligt:

$$\mathbf{F} = mg \begin{bmatrix} t_f t_v \\ t_f (1 - t_v) \\ (1 - t_f) t_v \\ (1 - t_f) (1 - t_v) \end{bmatrix} + \frac{a_{y,m} m H_{MC}}{e_f} \begin{bmatrix} -LLTD \\ LLTD \\ -(1 - LLTD) \\ (1 - LLTD) \end{bmatrix} \tag{A.1}$$
$$+ \frac{a_{x,m} m H_{MC}}{2L} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{C_L \rho_{luft} A v_{x,m}^2}{4} \begin{bmatrix} p_f \\ p_f \\ (1 - p_f) \\ (1 - p_f) \end{bmatrix}.$$

A.1.2 Helfordonsmodell

I helfordonsmodellen påverkar masscentrumets laterala position normalkrafterna, till skillnad från i den nuvarande modellen. De effektiva massorna i (2.19) och (2.20) behålls oförändrade, men hävarmarna i roll-bidraget justeras för att ta hänsyn till den laterala viktfordelningen. Avståndet till vänster sida skrivs därför som $t_v e_f$ respektive

$t_v e_b$, medan avståndet till höger sida skrivs som $(1 - t_v) e_f$ respektive $(1 - t_v) e_b$. Den totala modellen kan då uttryckas som:

$$\begin{aligned} \hat{F}_{z,fv} = & \frac{M_{v,f} H_{MC}}{e_f} (a_{y,m} \cos(\phi_v) - a_{z,m} \sin(\phi_v)) \\ & - \frac{M_{v,f}}{e_f} (a_{y,m} \sin(\phi_v) + a_{z,m} \cos(\phi_v)) (t_v e_f + H_{RC} \sin(\phi_v)). \end{aligned} \quad (A.2)$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_{z,fh} = & - \frac{M_{v,f} H_{MC}}{e_f} (a_{y,m} \cos(\phi_v) - a_{z,m} \sin(\phi_v)) \\ & - \frac{M_{v,f}}{e_f} (a_{y,m} \sin(\phi_v) + a_{z,m} \cos(\phi_v)) ((1 - t_v) e_f - H_{RC} \sin(\phi_v)). \end{aligned} \quad (A.3)$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_{z,bv} = & \frac{M_{v,b} H_{MC}}{e_b} (a_{y,m} \cos(\phi_v) - a_{z,m} \sin(\phi_v)) \\ & - \frac{M_{v,b}}{e_b} (a_{y,m} \sin(\phi_v) + a_{z,m} \cos(\phi_v)) (t_v e_b + H_{RC} \sin(\phi_v)) \end{aligned} \quad (A.4)$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_{z,bh} = & - \frac{M_{v,b} H_{MC}}{e_b} (a_{y,m} \cos(\phi_v) - a_{z,m} \sin(\phi_v)) \\ & - \frac{M_{v,b}}{e_b} (a_{y,m} \sin(\phi_v) + a_{z,m} \cos(\phi_v)) ((1 - t_v) e_b - H_{RC} \sin(\phi_v)). \end{aligned} \quad (A.5)$$

Även här adderades aerodynamiska lasten i (2.11) för den slutgiltiga ekvationen som användes vid estimeringarna.

A.2 Fjädermodellen

I fjädermodellen, likt nuvarande modellen är det bara statiska normalkraften som omfördelas och den kan uttryckas enligt:

$$\hat{\mathbf{F}}_z = mg \begin{bmatrix} t_v t_f \\ (1 - t_v) t_f \\ t_v (1 - t_f) \\ (1 - t_v) (1 - t_f) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{s,fv} x(t)_{fv} + c(\dot{x}(t))_{s,fv} \dot{x}(t)_{fv} \\ k_{s,fh} x(t)_{fh} + c(\dot{x}(t))_{s,fh} \dot{x}(t)_{fh} \\ k_{s,bv} x(t)_{bv} + c(\dot{x}(t))_{s,bv} \dot{x}(t)_{bv} \\ k_{s,bh} x(t)_{bh} + c(\dot{x}(t))_{s,bh} \dot{x}(t)_{bh} \end{bmatrix}. \quad (A.6)$$

A.3 Resultat för höger fram och bakhjul vid konstant hastighet på raksträcka.

Tabell A.1: Jämförelse mellan estimerad normalkraft (\hat{F}_z) och referensvärde från IPG CarMaker ($F_{z,IPG}$) för höger framhjul vid konstant hastighet. Nedersta raden visar absolut medelfel för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felet. Alla kraft- och felvärden anges i newton.

Fart [m/s]	$F_{z,IPG}$	Nuvarande		Utökad nuvarande		Helfordon		Utökad helfordon		Fjäder	
		\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e
0	712,50	712,39	-0,11	712,39	-0,11	712,44	-0,06	712,44	-0,06	712,37	-0,13
5	701,12	720,30	19,18	712,86	11,74	721,42	20,31	713,08	11,96	706,20	5,08
10	726,04	744,29	18,24	726,93	0,88	748,20	22,16	727,23	1,18	735,24	9,20
15	768,23	784,75	16,52	768,71	0,48	793,33	25,09	769,14	0,91	783,89	15,66
20	826,99	840,78	13,79	828,64	1,65	855,81	28,82	829,21	2,22	851,18	24,19
25	903,19	912,84	9,65	903,68	0,49	936,28	33,09	904,53	1,34	937,58	34,39
30	953,15	959,77	6,63	951,84	-1,30	988,66	35,52	952,84	-0,30	993,67	40,53
Absolut medel e	-	-	12,02	-	2,38	-	23,58	-	2,57	-	18,45

Tabell A.2: Jämförelse mellan estimerad normalkraft (\hat{F}_z) och referensvärde från IPG CarMaker ($F_{z,IPG}$) för höger bakhjul vid konstant hastighet. Nedersta raden visar absolut medelfel för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felet. Alla kraft- och felvärden anges i newton.

Fart [m/s]	$F_{z,IPG}$	Nuvarande		Utökad nuvarande		Helfordon		Utökad helfordon		Fjäder	
		\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e
0	763,97	764,08	0,11	764,08	0,11	764,05	0,08	764,05	0,08	764,06	0,10
5	800,64	781,59	-19,05	789,03	-11,61	780,48	-20,15	788,83	-11,81	791,59	-9,05
10	851,64	833,89	-17,75	851,25	-0,39	829,99	-21,64	850,96	-0,67	843,22	-8,42
15	936,42	920,95	-15,47	936,99	0,57	912,40	-24,01	936,58	0,17	928,85	-7,56
20	1055,13	1043,11	-12,02	1055,25	0,12	1028,01	-27,11	1054,61	-0,51	1047,81	-7,32
25	1207,28	1200,07	-7,22	1209,22	1,94	1176,67	-30,62	1208,42	1,13	1199,73	-7,56
30	1306,19	1302,36	-3,84	1310,29	4,09	1273,51	-32,68	1309,33	3,14	1298,21	-7,98
Absolut medel e	-	-	10,78	-	2,69	-	22,33	-	2,50	-	6,86

A.4 Resultat för estimeringen av normalkrafter på alla däck vid konstant fart i cirkelbana.

Tabell A.3: Jämförelse mellan estimerad normalkraft och referensvärde från IPG CarMaker för vänster framhjul vid konstant fart i cirkelbana. Nedersta raden visar absolut medelfel för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felet. Alla kraft- och felvärden anges i newton.

Fart [m/s]	$F_{z,IPG}$	Nuvarande		Utökad nuvarande		Helfordon		Utökad helfordon		Fjäder	
		\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e
5	714,63	736,13	21,50	728,69	14,06	737,05	22,43	728,71	14,08	713,32	-1,31
10	794,96	819,56	24,59	802,20	7,23	822,17	27,21	801,20	6,24	779,21	-15,75
15	927,37	957,79	30,42	941,74	14,37	962,43	35,06	938,25	10,88	884,93	-42,44
20	1108,77	1149,40	40,63	1137,25	28,48	1157,11	48,34	1130,52	21,75	1027,83	-80,94
Absolut medel e	-	-	29,29	-	16,04	-	33,26	-	13,24	-	35,11

Tabell A.4: Jämförelse mellan estimerad normalkraft och referensvärde från IPG CarMaker för vänster bakhjul vid konstant fart i cirkelbana. Nedersta raden visar absolut medelfel för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felen. Alla kraft- och felvärden anges i newton.

Fart [m/s]	$F_{z,IPG}$	Nuvarande		Utökad nuvarande		Helfordon		Utökad helfordon		Fjäder	
		\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e
5	817,60	796,47	-21,13	803,91	-13,69	797,26	-20,34	805,61	-12,00	803,28	-14,32
10	928,41	907,25	-21,16	924,61	-3,80	910,60	-17,81	931,57	3,16	898,30	-30,11
15	1110,79	1092,80	-17,99	1108,86	-1,94	1099,54	-11,26	1123,72	12,92	1053,31	-57,49
20	1361,96	1354,62	-7,34	1366,77	4,81	1364,69	2,72	1391,28	29,31	1264,93	-97,04
Absolut medel e	–	–	16,91	–	6,06	–	13,03	–	14,35	–	49,74

Tabell A.5: Jämförelse mellan estimerad normalkraft och referensvärde från IPG CarMaker för höger framhjul vid konstant fart i cirkelbana. Nedersta raden visar absolut medelfel för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felen. Alla kraft- och felvärden anges i newton.

Fart [m/s]	$F_{z,IPG}$	Nuvarande		Utökad nuvarande		Helfordon		Utökad helfordon		Fjäder	
		\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e
5	683,53	700,98	17,45	693,54	10,01	702,24	18,71	693,89	10,36	693,40	9,87
10	653,39	666,49	13,10	649,13	-4,26	670,66	17,27	649,69	-3,70	683,00	29,61
15	604,39	608,09	3,71	592,04	-12,35	615,48	11,09	591,30	-13,09	664,25	59,87
20	538,49	524,28	-14,21	512,13	-26,36	530,81	-7,68	504,22	-34,27	637,88	99,39
Absolut medel e	–	–	12,12	–	13,25	–	13,69	–	15,36	–	49,69

Tabell A.6: Jämförelse mellan estimerad normalkraft och referensvärde från IPG CarMaker för höger bakhjul vid konstant fart i cirkelbana. Nedersta raden visar absolut medelfel för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felen. Alla kraft- och felvärden anges i newton.

Fart [m/s]	$F_{z,IPG}$	Nuvarande		Utökad nuvarande		Helfordon		Utökad helfordon		Fjäder	
		\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e	\hat{F}_z	e
5	779,12	761,62	-17,50	769,06	-10,06	758,51	-20,61	766,86	-12,26	774,94	-4,18
10	769,82	754,48	-15,34	771,84	2,02	742,22	-27,60	763,19	-6,63	779,71	9,88
15	757,18	743,40	-13,78	759,46	2,27	714,07	-43,11	738,25	-18,94	787,07	29,88
20	745,30	729,80	-15,50	741,95	-3,35	672,51	-72,79	699,11	-46,20	796,63	51,33
Absolut medel e	–	–	15,53	–	4,42	–	41,03	–	21,01	–	23,82

A.5 Resultat för differensen i normalkrafter mellan konstant fart i cirkelbana och konstant hastighet på raksträcka för höger framhjul och vänster bakhjul.

Tabell A.7: Effekt av lateral acceleration på höger framhjul. Differensen är beräknad som värdet vid konstant fart i cirkelbana minus värdet vid konstant fart på raksträcka, det vill säga $\Delta F = F_{\text{cirkel}} - F_{\text{rak}}$. Tabellen visar hur väl respektive modell fångar förändringen i normalkraft som uppstår av den laterala termen. Nedersta raden visar absolut medelfel för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felen. Alla kraft- och felvärden anges i newton.

Fart [m/s]	$\Delta F_{z,IPG}$	Nuvarande		Utökad nuvarande		Helfordon		Utökad helfordon		Fjäder	
		$\Delta \hat{F}_z$	Δe	$\Delta \hat{F}_z$	Δe	$\Delta \hat{F}_z$	Δe	$\Delta \hat{F}_z$	Δe	$\Delta \hat{F}_z$	Δe
5	-17,59	-19,32	-1,73	-19,32	-1,73	-19,18	-1,60	-19,19	-1,60	-12,80	4,79
10	-72,65	-77,80	-5,14	-77,80	-5,14	-77,54	-4,89	-77,54	-4,88	-52,24	20,41
15	-163,84	-176,66	-12,81	-176,67	-12,83	-177,85	-14,00	-177,84	-14,00	-119,64	44,21
20	-288,50	-316,50	-28,00	-316,51	-28,01	-325,00	-36,50	-324,99	-36,49	-213,30	75,20
Absolut medel $ \Delta e $	–	–	11,92	–	11,93	–	14,25	–	14,24	–	36,15

Tabell A.8: Effekt av lateral acceleration på vänster bakhjul. Differensen är beräknad som värdet vid konstant fart i cirkelbana minus värdet vid konstant fart på raksträcka, det vill säga $\Delta F = F_{\text{cirkel}} - F_{\text{rak}}$. Tabellen visar hur väl respektive modell fångar förändringen i normalkraft som uppstår av den laterala termen. Nedersta raden visar absolut medelfel för respektive modell, beräknat som medelvärdet av absolutbeloppen av felen. Alla kraft- och felvärden anges i newton.

Fart [m/s]	$\Delta F_{z,IPG}$	Nuvarande		Utökad nuvarande		Helfordon		Utökad helfordon		Fjäder	
		$\Delta \hat{F}_z$	Δe	$\Delta \hat{F}_z$	Δe	$\Delta \hat{F}_z$	Δe	$\Delta \hat{F}_z$	Δe	$\Delta \hat{F}_z$	Δe
5	21,11	19,32	-1,79	19,32	-1,79	21,24	0,13	21,24	0,13	16,12	-4,99
10	80,92	77,80	-3,12	77,80	-3,12	85,07	4,15	85,06	4,15	59,50	-21,42
15	178,52	176,29	-2,23	176,30	-2,22	191,60	13,07	191,59	13,07	128,86	-49,67
20	310,97	315,93	4,97	315,95	4,98	341,13	30,15	341,12	30,14	221,50	-89,48
Absolut medel $ \Delta e $	–	–	3,03	–	3,03	–	11,88	–	11,87	–	41,39

A.6 Konstant acceleration för höger fram och bak-hjul.

Tabell A.9: RMSE och medelfel (ME) för höger framhjul vid konstant acceleration. Resultaten är sorterade efter medelvärdet av den longitudinella accelerationen a_x . Alla fel anges i newton.

a_x [m/s ²]	Nuvarande		Utökad nuvarande		Helfordon		Utökad helfordon		Fjäder	
	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME
0,81	19,37	19,37	19,13	19,13	19,56	19,56	19,30	19,30	11,51	11,51
2,50	19,20	19,20	17,62	17,59	18,95	18,95	17,19	17,15	27,91	27,91
4,17	19,07	19,07	14,86	14,57	17,83	17,83	13,17	12,89	44,39	44,38
5,82	18,94	18,94	11,98	10,74	16,10	16,10	8,45	7,17	60,98	60,97
9,00	64,21	64,19	54,22	53,89	53,01	52,99	41,89	41,55	78,83	78,80
13,70	51,05	50,88	39,71	39,08	27,77	25,47	18,11	12,11	35,32	35,10
Absolut medel	31,97	31,94	26,25	25,83	25,54	25,15	19,69	18,36	43,32	43,11

Tabell A.10: RMSE och medelfel (ME) för höger bakhjul vid konstant acceleration. Resultaten är sorterade efter medelvärdet av den longitudinella accelerationen a_x . Alla fel anges i newton.

a_x [m/s ²]	Nuvarande		Utökad nuvarande		Helfordon		Utökad helfordon		Fjäder	
	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME
0,81	19,36	-19,36	19,12	-19,12	19,94	-19,94	19,68	-19,68	24,13	-24,13
2,50	19,13	-19,13	17,55	-17,51	21,20	-21,20	19,43	-19,40	55,06	-55,06
4,17	18,90	-18,90	14,71	-14,41	23,27	-23,27	18,53	-18,32	85,69	-85,69
5,82	18,64	-18,64	11,76	-10,44	26,09	-26,09	17,74	-17,16	116,18	-116,17
9,00	64,00	-63,98	54,06	-53,67	80,93	-80,92	69,66	-69,48	219,24	-219,23
13,70	50,92	-49,99	40,19	-38,18	78,46	-78,32	65,35	-64,97	446,45	-446,44
Absolut medel	31,82	31,67	26,23	25,56	41,65	41,62	35,06	34,84	157,79	157,79

A.7 Konstant retardation för höger fram och bak-hjul

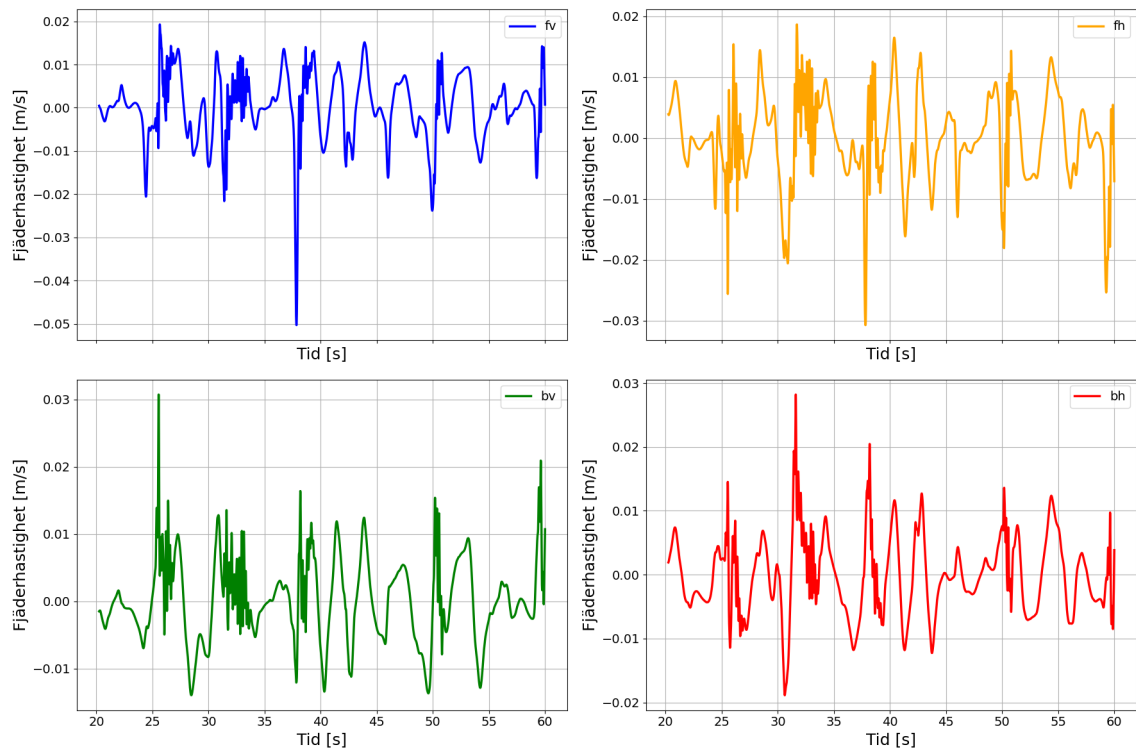
Tabell A.11: RMSE och medelfel (ME) för höger framhjul vid konstant bromsning. Resultaten är sorterade efter medelvärdet av den longitudinella accelerationen a_x . Alla fel anges i newton.

a_x [m/s ²]	Nuvarande		Utökad nuvarande		Helfordon		Utökad helfordon		Fjäder	
	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME
-5,22	15,44	15,42	7,41	7,11	38,88	38,76	6,68	6,66	16,62	-16,52
-6,29	17,19	17,18	9,12	8,83	38,01	37,81	6,86	6,80	33,96	-33,89
-7,37	18,73	18,72	10,69	10,42	36,73	36,43	6,56	6,37	51,47	-51,40
-10,10	21,88	21,88	14,28	14,01	32,04	31,36	4,54	3,20	95,88	-95,81
-12,87	24,19	24,17	17,32	17,07	25,59	24,19	5,46	-2,46	141,21	-141,12
-15,66	25,04	24,85	18,76	18,61	18,29	14,51	11,65	-9,86	187,92	-187,79
Absolut medel	20,41	20,37	12,93	12,68	31,59	30,51	6,96	5,89	87,84	87,76

A.8 Grafer för signaler under FSG-Endurance.

Tabell A.12: RMSE och medelfel (ME) för höger bakhjul vid konstant bromsning. Resultaten är sorterade efter medelvärdet av den longitudinella accelerationen a_x . Alla fel anges i newton.

a_x [m/s ²]	Nuvarande		Utökad nuvarande		Helfordon		Utökad helfordon		Fjäder	
	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME	RMSE	ME
-5,22	12,18	-12,08	4,74	-3,77	34,22	-34,14	2,13	-2,04	94,55	94,19
-6,29	13,87	-13,77	6,34	-5,42	35,11	-34,99	4,01	-3,98	105,67	105,21
-7,37	15,34	-15,25	7,84	-6,95	36,32	-36,15	6,12	-6,10	116,65	116,09
-10,10	18,37	-18,29	11,36	-10,43	41,01	-40,75	12,65	-12,59	143,44	142,58
-12,87	20,52	-20,42	14,34	-13,33	48,49	-48,19	21,62	-21,53	169,17	168,01
-15,66	21,10	-20,95	15,58	-14,71	58,35	-57,92	33,62	-33,54	194,00	192,47
Absolut medel	16,90	16,79	10,03	9,10	42,25	42,02	13,36	13,30	137,25	136,43



Figur A.1: Fjäderhastigheter med ett 0,25 s glidande medelvärde för samtliga fyra hjul under körning mellan 20 och 60 sekunder.

INSTITUTIONEN FÖR ELEKTROTEKNIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg, Sverige
www.chalmers.se



CHALMERS