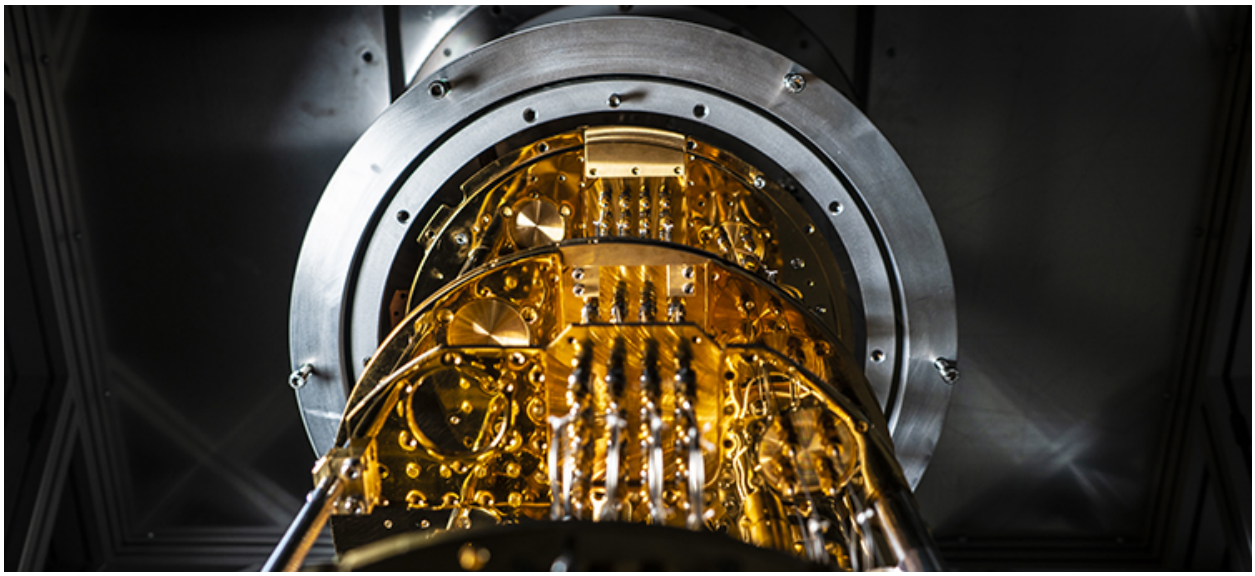
CHALMERS
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



Optimering av tvåkvantbitsgrindar på en supraledande kvantdator

Kandidatarbete inom mikroteknologi och nanovetenskap

Emil Ingelsten
Linus Nordqvist
Jesper Ozolins
Alexander Reusch Eide
Elina Sahlberg
Henrik Zander

INSTITUTIONEN FÖR MIKROTEKNOLOGI OCH NANOVETENSKAP
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg, Sverige 2021
www.chalmers.se

Kandidatarbete MCCX02-21-10

Optimering av tvåkvantbitsgrindar på en supraledande kvantdator

Emil Ingelsten
Linus Nordqvist
Jesper Ozolins
Alexander Reusch Eide
Elina Sahlberg
Henrik Zander

CHALMERS
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Institutionen för mikroteknologi och nanovetenskap
Chalmers Tekniska Högskola
Göteborg, Sverige 2021

Optimering av tvåkvantbitsgrindar på en supraledande kvantdator

Emil Ingelsten
Linus Nordqvist
Jesper Ozolins
Alexander Reusch Eide
Elina Sahlberg
Henrik Zander

Handledare: Anton Frisk Kockum och Jorge Fernández Pendás, Institutionen för mikroteknologi och nanovetenskap
Examinator: Vessen Vassilev, Institutionen för mikroteknologi och nanovetenskap

Kandidatarbete MCCX02-21-10
Institutionen för mikroteknologi och nanovetenskap
Chalmers tekniska högskola
SE-412 96 Göteborg
Telefon +46 31 772 1000

Framsida: Bild på kvantdatorn som utvecklas av Wallenbergcentret för kvantteknologi (WACQT) på Chalmers tekniska högskola. Fotograf: Johan Bodell.

Typsatt i LaTeX
Göteborg, Sverige 2021

Optimering av tvåkvantbitsgrindar på en supraledande kvantdator

Emil Ingelsten
Linus Nordqvist
Jesper Ozolins
Alexander Reusch Eide
Elina Sahlberg
Henrik Zander

Institutionen för mikroteknologi och nanovetenskap
Chalmers tekniska högskola

Abstract

There is currently a race going on to build the largest, fastest and most stable quantum computer. Apart from implementing qubits that are stable, another major hurdle is implementing the quantum gates acting on those qubits as close to perfectly as possible. Multi-qubit gates in particular have proved somewhat difficult to implement with satisfactory speed and precision. In this study, we optimised the two-qubit *iSWAP* and *CZ* gates with respect to fidelity using the Python package QuTiP. This was done by numerically modelling the setup currently used at Chalmers for implementing two-qubit gates, consisting of two superconducting qubits coupled to each other via a tunable coupler. In this architecture, two-qubit gates are applied by modulating the external magnetic flux $\Phi(t)$ to change the characteristic frequency of the coupler. Our optimisation yielded an iSWAP gate with fidelity 0.9967 and operation time 95 ns, and a CZ gate with fidelity 0.9991 and operation time 114 ns. These operation times are significantly faster than current state-of-the-art gates using this architecture, and the fidelities are significantly better than what has previously been realised as well.

Keywords: quantum computer, superconducting qubits, two-qubit gates, gate fidelity, optimisation, iSWAP, CZ, Python, QuTiP.

Sammandrag

Just nu pågår en kapplöpning om att bygga den största, snabbaste och mest stabila kvantdatorn. Förutom att realisera kvantbitarna själva på ett stabilt sätt är en annan stor utmaning att implementera kvantgrindarna som ska operera på kvantbitarna så perfekt som möjligt. Särskilt flerkvantbitsgrindar har visat sig vara svåra att implementera med tillfredsställande snabbhet och precision. I denna studie optimerade vi tvåkvantbitsgrindarna $iSWAP$ och CZ med avseende på grindfidelitet med hjälp av Python-paketet QuTiP. Mer specifikt gjordes detta genom att numeriskt modellera uppställningen som i nuläget används på Chalmers för att implementera tvåkvantbitsgrindar, bestående av två supraledande kvantbitar och en ställbar kopplare. Med denna uppställning appliceras tvåkvantbitsgrindar genom att modulera det externa magnetiska flödet $\Phi(t)$ för att förändra den ställbara kopplarens karakteristiska frekvens. Vi lyckades uppnå en iSWAP-grind med fidelitet 0.9967 och operationstid 95 ns, och en CZ-grind med fidelitet 0.9991 och operationstid 114 ns. Dessa operationstider är avsevärt snabbare än nuvarande implementationer, och fideliteterna är betydligt högre än vad som tidigare realiserats.

Nyckelord: kvantdator, supraledande kvantbitar, tvåkvantbitsgrindar, grindfidelitet, optimering, iSWAP, CZ, Python, QuTiP.

Förord

Först och främst vill vi tacka våra handledare Anton Frisk Kockum och Jorge Fernández Pendás. De har varit en fantastisk tillgång, och utan deras stöd och tålmodiga svar på våra många frågor hade detta kandidatarbete inte varit möjligt att genomföra. Vidare vill vi tacka Wallenbergcentret för kvantteknologi på Chalmers för möjligheten att skriva ett kandidatarbete kopplat till avancerad forskning i dess absoluta framkant. Vi vill också rikta ett tack till Knut och Alice Wallenbergs stiftelse för deras bidrag till den högkvalitativa forskningen som utförs på Wallenbergcentret. Vi vill även tacka Johan Zander för att han försåg oss med den datorkraft vi behövde för att kunna genomföra alla de simuleringar och optimeringar som denna studie bygger på. Slutligen vill vi tacka Lina Wincent och Erik Magnusson för deras respons, som hjälpte oss att finslipa rapporten.

Författarna, Göteborg, maj 2021

Innehåll

1

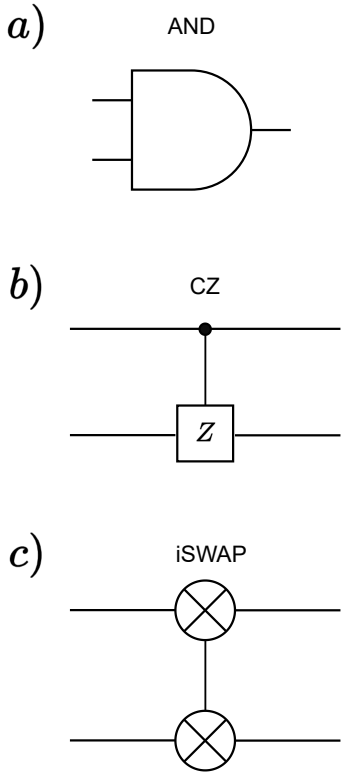
Inledning

Funktionen hos dagens halvledardatorer bygger helt på att med hjälp av olika grindar utföra operationer på de binära bitarna, som utgör de minsta informationsenheterna i systemet. Samma sak gäller även kvantdatorer, vars minsta informationsenhet är kvantbiten. För att dessa datorer ska fungera pålitligt behöver man även grindar som gör det, vilket motiverar denna studie, vars syfte är att optimera funktionen hos kvantgrindarna iSWAP och CZ mellan två kvantbitar. Hur väl en grind fungerar bestäms dels av dess kretsimplementering, dels av den styrsignal som appliceras på grinden när den aktiveras. Då kretsens påverkan på grindens funktion bestäms under tillverkningsfasen kommer denna studie att fokusera på styrsignalens utseende.

1.1 Bakgrund

Runtom i världen pågår det just nu en kapplöpning om vem som kan bygga den största, snabbaste och mest stabila kvantdatorn. Det långsiktiga målet är att kvantdatorerna ska kunna användas för att lösa vissa typer av beräkningstunga problem som dagens halvledardatorer har svårt att lösa under rimliga tidslängder. Ett förhållandevis känt exempel på ett sådant problem är det så kallade *handelsresandeproblemet*, som handlar om att optimera en handelsresandes rutt mellan ett antal städer så att den blir så kort som möjligt. Klassiska datorer tacklar problemet genom att undersöka en lösning i taget, medan kvantdatorer kan utnyttja *superponering* för att undersöka alla lösningar samtidigt [1]. Den svenska kvantdatorsatsningen, som leds från Wallenbergcentret för kvantteknologi (WACQT) på Chalmers, har som mål att konstruera en kvantdator med 100 kvantbitar. Bakom projektet finns en miljardsatsning från Knut och Alice Wallenbergs stiftelse som sträcker sig över en period på 12 år [2].

I halvledardatorer är grundenheten för information de klassiska bitarna, som har de två tillstånden hög eller låg spänning (som svarar mot värdena 1 respektive 0). För att man ska kunna implementera algoritmer och program behöver man, utöver de klassiska bitarna, även så kallade logiska grindar. Alla dessa grindar byggs upp av transistorer [3, s. 45-53], vilka kan ses som elektriska strömbrytare, och tar in en eller flera bitar som påverkar vad den resulterande biten antar för tillstånd. Några exempel på klassiska grindar är bland annat NOT-, AND- och OR-grindarna, varav AND-grindens sanningstabell och symbol illustreras i figur 1.1a [3, s. 45-53].



Input	Output
0 0	0
1 0	0
0 1	0
1 1	1

Input	Output
$\|00\rangle$	$\|00\rangle$
$\|10\rangle$	$\|10\rangle$
$\|01\rangle$	$\|01\rangle$
$\|11\rangle$	$-\|11\rangle$

Input	Output
$\|00\rangle$	$\|00\rangle$
$\|10\rangle$	$-i\|01\rangle$
$\|01\rangle$	$-i\|10\rangle$
$\|11\rangle$	$\|11\rangle$

Figur 1.1: Kretsvisualisering samt sanningstabell för (a) AND-grind, (b) CZ-grind och (c) iSWAP-grind.

För att kunna implementera godtycklig boolesk logik (och därmed godtyckliga algoritmer och program) behövs ett *komplett grindset* [3, s. 67]. Ett sådant består av ett antal logiska grindar som tillsammans kan utföra alla operationer inom boolesk algebra.

I kvantdatorer används istället så kallade *kvantbitar* (qubits på engelska) som grundenhet för information. Dessa kan fortfarande anta värdena 0 eller 1, representerade av två olika kvanttillstånd $|0\rangle$ och $|1\rangle$. Till skillnad från en klassisk bit kan en kvantbit dock även vara i "båda tillstånden samtidigt", dvs en så kallad *superposition*

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \tag{1.1}$$

där $|\psi\rangle$ är kvantbitens tillstånd och koefficienterna α och β är komplexa tal som uppfyller att $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ [4, s. 113-116]. Vid mätning av en kvantbits tillstånd kollapsar den till antingen $|0\rangle$ eller $|1\rangle$ med sannolikheten $|\alpha|^2$ respektive $|\beta|^2$ [4, s. 113-116, 102–104].

En viktig skillnad mellan klassiska grindar och kvantgrindar är att antalet ut- och ingångar måste vara lika för en kvantgrind [5, s.18-22], vilket inte är fallet för klassiska grindar. Vidare medför kvantfysikens unitära egenskap att alla kvantgrindar är reversibla, då det rent teoretiskt alltid går att bestämma varje kvantgrinds invers. En annan viktig skillnad är att på kvantdatorer, till skillnad från halvledardatorer, går det inte att med en finit mängd grindar konstruera ett komplett grindset. Det går däremot att göra en godtyckligt noggrann approximation av varje operation utan att antalet olika sorters grindar som krävs blir särskilt stort [6]. Ett universellt kvantgrindset kan konstrueras av ett komplett set med enkvantbitsgrindar samt en godtycklig sammanflätande tvåkvantbitsgrind [5, s. 18-22], [7], [8].

Det är två sammanflätande tvåkvantbitsgrindar som Chalmers undersöker möjligheterna att

implementera, nämligen den så kallade *CZ*-grinden, som redan lyckats implementeras tillfredsställande på Chalmers nuvarande kvantdator [9], samt den så kallade *iSWAP*-grinden. Symbolerna för dessa samt deras sanningstabeller illustreras i figur 1.1b och 1.1c.

1.2 Syfte

När kvantdatorer ska skalas upp till ett stort antal kvantbitar blir bristfällig implementering av kvantgrindar en flaskhals. Specifikt är det av mycket stor vikt att de i praktiken implementerade grindarna påverkar kvantbitar på ett sätt som är så likt de ideala grindarna som möjligt. Dessutom är det viktigt att grindarna har en så kort operationstid som möjligt, eftersom kvantbitarnas så kallade *koherenstid*, efter vilken informationen lagrad i kvantbitarna går förlorad, generellt är i storleksordningen 100 µs för supraledande kvantbitar [10].

Syftet med denna studie är därför att optimera både iSWAP- och CZ-grindarna så att de blir tillfredsställande snabba samt så ideala som möjligt. Specifikt optimerar vi styrsignaler för att implementera grindarna i ett system bestående av två supraledande kvantbitar sammankopplade med en ställbar kopplare. Detta ämnar vi åstadkomma genom att parametrarna hos grindarnas styrsignal optimeras för så hög grindfidelitet som möjligt, samtidigt som den maximala tillåtna operationstiden för grindarna begränsas till under 250 ns. Enligt ovan motsvarar detta att mer än cirka 400 grindoperationer hinns med under en koherenstid.

1.3 Avgränsningar

Den viktigaste avgränsningen i denna studie är att vi endast undersöker styrsignaler på formen $\Phi(t) = \Theta + \delta(t)\cos(\omega_\Phi t)$, där $\delta(t)$ är en fyrkantspuls med sinusformade ändar. Vidare inkluderar vi endast de olika parametrarna som bestämmer styrsignalens utseende, samt den ställbara kopplarens ostörda frekvens $\omega_{\mathrm{TB},0}$ i optimeringen. Detta diskuteras mer utförligt i metodavsnittet.

De modeller som används i denna studie bygger på ett antal förenklingar och approximationer, men ingen grundlig analys av exakt hur dessa påverkar resultatet kommer att genomföras. Ett exempel på en förenkling som gjorts är att hamiltonianerna för alla system som undersöks trunkeras till maximalt fyra energinivåer. Detta görs för att uppnå en erforderligt noggrann modell utan att nödvändiga simuleringar blir alltför långsamma.

2

Teori

För att förstå denna rapports innehåll behövs vissa förkunskaper, främst om den bakomliggande kvantmekaniken som ligger till grund för tekniken som ska optimeras. I detta avsnitt beskrivs det mest relevanta av grunderna i kvantmekanik, hur den så kallade Blochsfären förenklar visualiseringen av kvanttillstånd, kvantgrindar samt kvantmekaniska oscillatorer och hur dessa kan användas för att modellera supraledande kvantbitar. Vi tar även upp vad grindfidelitet är och hur den beräknas, samt hur tvåkvantbitsgrindar som iSWAP och CZ implementeras rent fysiskt i den hårdvara som Chalmers använder.

2.1 Tidsutveckling av kvanttillstånd

Tidsutvecklingen för ett kvantmekaniskt tillstånd $|\psi\rangle$ sker enligt (den tidsberoende) Schrödingerekvationen [4, s. 16],

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle. \tag{2.1}$$

Detta är en första ordningens linjär differentialekvation som innehåller systemets tillstånd $|\psi(t)\rangle$ vid tiden t, den reducerade Plancks konstant $\hbar = h/2\pi$ samt den så kallade *Hamiltonoperatorn* (alternativt *hamiltonianen*) $\hat{H}$, som beror på vilket kvantmekaniskt system som undersöks. Som synes bestämmer hamiltonianen entydigt tidsutvecklingen för $|\psi\rangle$, varför den måste vara (åtminstone approximativt) känd för att man ska kunna lösa Schrödingerekvationen numeriskt. Genom att lösa Schrödingerekvationen går det att härleda [4, s. 262-267] att ett godtyckligt initialt tillstånd $|\psi(0)\rangle$ utvecklas enligt

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle, \tag{2.2}$$

där den så kallade tidsutvecklingsoperatorn $\hat{U}(t)$ ges av

$$\hat{U}(t) = \exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \hat{H}(t)\,\mathrm{d}t\Big), \tag{2.3}$$

vilket förenklas till

$$\hat{U}(t) = \exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\Big) \tag{2.4}$$

för tidsoberoende hamiltonianer.

Även om man känner till och kan räkna på tidsutvecklingen av ett kvanttillstånd kan man dock inte vara säker på vad någon given mätning på kvanttillståndet kommer att ge för resultat. Detta beror på att kvantmekaniken bara ger förutsägelser i termer av sannolikheter, vilket är en av de största skillnaderna jämfört med klassisk mekanik.

2.2 Observabler, egentillstånd och egenenergier

Inom den klassiska fysiken ger alltid mätningar av observerbara storheter samma värden givet samma initialtillstånd. Om vi har en partikel i rörelse kan vi till exempel mäta dess position, hastighet samt acceleration och alltid få samma mätvärden om partikeln har samma begynnelsevärden. Kvantmekanikens statistiska natur medför att samma sak inte gäller för kvantmekaniska observabler, även om partikeln börjar i samma initialtillstånd. Observabler inom kvantmekaniken är alltid representerade av hermiteska operatorer [4, s. 94-96] och väntevärdet för en observabel O ges av

$$\langle O \rangle = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle , \tag{2.5}$$

där $|\psi\rangle$ är kvanttillståndet som mätningen sker på och $\hat{O}$ är den hermiteska operatorn som hör till observabeln O.

Om en mätning av en observabel O för ett tillstånd $|\psi_e\rangle$ alltid ger samma värde e, kallas tillståndet $|\psi_e\rangle$ för ett *bestämbart tillstånd* [4, s. 94-96]. Det följer från detta att tillståndet $|\psi_e\rangle$ är ett egentillstånd till operatorn $\hat{O}$ med egenvärde e [4, s. 94-96], enligt

$$\hat{O} | \psi_e \rangle = e | \psi_e \rangle . \tag{2.6}$$

Det följer även att $\langle O \rangle = e$ samt att variansen $\sigma_e^2 = 0$. Egenvärdena är alltså de observerbara värdena som vi kan mäta på ett tillstånd, som vid en mätning kollapsar till ett relaterat egentillstånd [4, s. 97-101]. Förståelsen för detta blir viktig när energioperatorn $\hat{H}$ och dess egenvärden (egenenergier) diskuteras i avsnitten nedan.

En viktig egenskap för egentillstånden till en hermitesk operator är att de är ortogonala sinsemellan, vilket innebär att de kan användas som en bas för systemet [4, s. 97-101]. Eftersom hamiltonianens egentillstånd inte utvecklas i tiden förutom att deras faser ändras (vilket man enkelt kan visa genom att applicera tidsutvecklingsoperatorn på dem), och dessutom är bestämbara, är det ofta praktiskt att använda dem som bas. Denna bas kommer fortsättningsvis att benämnas egenbasen. Eftersom hamiltonianens egenvärden är egentillståndens energier kallas de även systemets *egenenergier*. I och med att egentillstånden som bygger upp egenbasen alla svarar mot en egenenergi E_n får vi (förutsatt att egenenergierna är unika) ett naturligt sätt att ordna egenbasen. Vi kan alltså i så fall numrera egentillstånden $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$, osv, efter stigande egenenergi. Denna notation, där hamiltonianens egentillstånd betecknas $|n\rangle$, är särskilt praktisk för att beskriva kvantbitar och de kvantmekaniska system som används för att implementera dem i verkligheten. Det blir till exempel väldigt intuitivt att använda tillstånden $|0\rangle$ och $|1\rangle$ som kvantmekaniska motsvarigheter till 0 och 1 i halvledardatorer.

2.3 Blochsfären: att visualisera kvanttillstånd

I en ideal kvantbit, ett system som endast har två egentillstånd $|0\rangle$ och $|1\rangle$ (med unika egenenergier), får vi, som nämnt i avsnitt 1.1 ovan, att alla möjliga kvanttillstånd kan uttryckas som en linjärkombination av $|0\rangle$ och $|1\rangle$ enligt

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle , \tag{2.7}$$

där de komplexa koefficienterna α och β uppfyller att $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ [4, s. 113-116]. På grund av detta villkor på α och β kan de parametriseras med hjälp av endast tre parametrar. En

sådan parametrisering, som använder parametrarna θ, φ och φ_0, är

$$\alpha \equiv e^{i\varphi_0} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \beta \equiv e^{i(\varphi_0+\varphi)} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \tag{2.8}$$

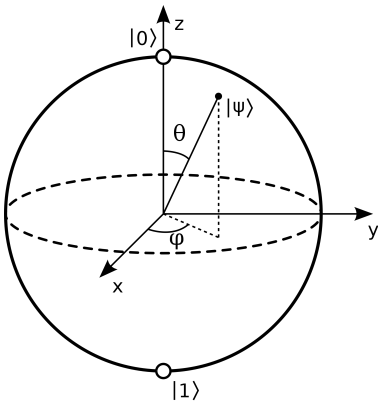
Med denna parametrisering kan ekvation (2.7) skrivas som

$$|\psi\rangle = e^{i\varphi_0}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle\right]. \tag{2.9}$$

Eftersom den så kallade *globala fasen* $\varphi_0 = \arg\alpha$ inte är en observabel [5, s. 10-11] är den ofta ointressant, särskilt när man bara har en kvantbit att ta hänsyn till. Om vi helt sonika stryker den kan vi skriva vår kvantbits tillstånd som

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle\,. \tag{2.10}$$

Denna parametrisering har en naturlig tolkning (vilket är hela anledningen till att vi gjorde den): Om vi betraktar $|\psi\rangle$ som en punkt i rummet och θ samt φ som sfäriska vinkelkoordinater enligt figur 2.1, ser vi att de kvanttillstånd som vår kvantbit kan befinna sig i motsvarar precis enhetssfären! Denna representation av kvanttillstånd i tvånivåsystem kallas *Blochsfären*.



Figur 2.1: Visualisering av ett kvanttillstånd $|\psi\rangle$ med hjälp av Blochsfären [11]. CC-BY-SA.

Denna representation av en kvantbits tillstånd gör det också mycket lättare att visualisera vad en *kvantgrind* är och hur den påverkar olika kvanttillstånd, vilket vi kommer att se i nästa avsnitt.

2.4 Kvantgrindar

I avsnitt 1.1 ovan beskrev vi kvantgrindar som den kvantmekaniska motsvarigheten till klassiska logikgrindar. Detta säger dock inte egentligen så mycket om vad de är eller hur de fungerar. Om vi lutar oss mot Blochsfärsrepresentationen av kvantbitar kan vi göra kvantgrindar mycket mer konkreta.

2.4.1 Enkvantbitsgrindar

Den enklaste typen av kvantgrindar är *enkvantbitsgrindar*, som förändrar varje givet enkvantbitstillstånd till ett annat specifikt (eller samma) enkvantbitstillstånd. De kan med andra

ord ses som funktioner som avbildar varje punkt på Blochsfären på en annan (eller samma) punkt på Blochsfären. Tre vanliga enkvantbitsgrindar är de så kallade X-, Y- och Z-grindarna, som svarar mot en rotation av π radianer runt x-, y- respektive z-axlarna på Blochsfären. Operatorerna svarande mot dessa kvantgrindar är de så kallade *Paulioperatorerna* $\hat{\sigma}^X$, $\hat{\sigma}^Y$ och $\hat{\sigma}^Z$. Om vi uttrycker ett tillstånd $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ som en vektor $\begin{bmatrix}\alpha & \beta\end{bmatrix}^T$ får vi att $\hat{\sigma}^X$, $\hat{\sigma}^Y$ och $\hat{\sigma}^Z$ i denna bas motsvarar Paulimatriserna [5, s. 18-22]:

$$\hat{\sigma}^X = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}^Y = \begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}^Z = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

2.4.2 Tvåkvantbitsgrindar

För att beskriva tillståndet för ett system bestående av flera kvantbitar måste man ta hänsyn till varje enskild kvantbits tillstånd. Detta görs vanligen med hjälp av den så kallade kroneckerprodukten $\otimes$ [12, s. 242-254], definierad så att kroneckerprodukten av en $m \times n$-matris A och en $p \times q$-matris B ges av $pm \times qn$-blockmatrisen

$$A \otimes B = \begin{bmatrix}a_{11}B & \dots & a_{1n}B\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B\end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Om vi har två kvantbitar som befinner sig i tillstånden $|\psi_1\rangle$ respektive $|\psi_2\rangle$ kan vi alltså med hjälp av kroneckerprodukten skriva systemets totala tillstånd som $|\psi_{\text{tot}}\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. Om vi ser enkvantbitstillstånden som tvådimensionella vektorer (enligt avsnitt 2.4.1 ovan) får vi att det totala tillståndet kan beskrivas som en fyrdimensionell vektor, med den naturliga basen

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = |00\rangle_{\text{BB}}, \quad \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} = |01\rangle_{\text{BB}}, \quad \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = |10\rangle_{\text{BB}}, \quad \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = |11\rangle_{\text{BB}}, \tag{2.13}$$

där $|ij\rangle_{\text{BB}}$ används som ett kortfattat sätt att skriva $|i\rangle \otimes |j\rangle$. Denna bas, den *bara* basen, är dock inte nödvändigtvis samma som egenbasen för det totala systemets hamiltonian, eftersom hamiltonianen kan innehålla termer som motsvarar interaktioner mellan de två kvantbitarna! Eftersom det i allmänhet (se avsnitt 2.2) är önskvärt att arbeta i egenbasen definierar man ofta helt enkelt

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = |00\rangle_{\text{EB}}, \quad \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} = |01\rangle_{\text{EB}}, \quad \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = |10\rangle_{\text{EB}}, \quad \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = |11\rangle_{\text{EB}}, \tag{2.14}$$

där $|ij\rangle_{\text{EB}}$ är det egentillstånd som ligger närmast tillståndet $|i\rangle \otimes |j\rangle$ energimässigt. Om inget annat sägs är det denna bas, egenbasen för den totala hamiltonianen, ordnad på detta vis, som används i matriser, och med notationen $|ij\rangle$ åsyftas om inget annat sägs $|ij\rangle_{\text{EB}}$. Värt att notera är dock att hamiltonianer om inget annat sägs anges i den bara basen, eftersom det är basen i vilken deras utseende enklast härleds. I de flesta verkliga kvantbitar (inklusive transmonkvantbitarna som diskuteras i avsnitt 2.8) finns fler än två energinivåer, och vektorrummet som spänns upp av egentillstånden för hamiltonianen som beskriver två sammankopplade kvantbitar har därför dimension högre än 4. Underrummet med dimension 4 som spänns upp av $\{|ij\rangle_{\text{EB}}\} : i, j \in \{0, 1\}$ kallas *beräkningsunderrummet*.

Helt analogt med hur det totala tillståndet beskrivs som en kroneckerprodukt av enkvantbitstillstånd kan man även skapa tvåkvantbitsgrindar genom att kombinera olika enkvantbitsgrindar. Vi skulle till exempel kunna applicera en X-grind på första kvantbiten och en Z-grind på andra kvantbiten. En sådan "XZ"-grind kan beskrivas som en kroneckerprodukt av de två enkvantbitsgrindarna, med en matrisrepresentation

$$\hat{\sigma}_1^X \otimes \hat{\sigma}_2^Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

Även om denna tvåkvantbitsgrind kan delas upp i enkvantbitsgrindar gäller det inte i allmänhet för tvåkvantbitsgrindar, som kan se ut som vilken unitär 4×4-matris som helst. Av särskilt intresse för oss är de två sammanflätande tvåkvantbitsgrindarna iSWAP och CZ.

iSWAP-grinden påverkar varken $|00\rangle$ eller $|11\rangle$, men avbildar $|01\rangle$ på $-i\,|10\rangle$ och $|10\rangle$ på $-i\,|01\rangle$, vilket innebär att dess matrisrepresentation blir

$$U_{iSWAP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

Namnet kommer av att grinden gör så att excitationer byts mellan de två kvantbitarna, och får en fasförskjutning $-i$.

CZ-grinden, där CZ står för *Controlled Z*, svarar å andra sidan mot att applicera en Z-grind på kvantbit nummer två om den första kvantbiten är i tillstånd $|1\rangle$. Detta innebär att den varken påverkar $|00\rangle$, $|01\rangle$ eller $|10\rangle$, men avbildar $|11\rangle$ på $-\,|11\rangle$. Därför blir dess matrisrepresentation

$$U_{CZ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

2.5 Grindfidelitet

När man implementerar grindar i verkligheten är det mycket svårt, för att inte säga omöjligt, att åstadkomma en grind som överensstämmer exakt med den ideala. För att komma så nära som möjligt behövs ett mått på hur lika den faktiska och ideala grinden är. Ett ofta använt sådant mått är den så kallade *grindfideliteten* F, som är ett tal mellan 0 och 1. En fidelitet på 1 motsvarar att den faktiska grinden är identisk med den ideala grinden, och ju lägre fideliteten är, desto sämre är implementeringen.

Fideliteten för en implementerad grindoperation $\mathcal{G}_f$ definieras [13] som

$$F(\mathcal{G}_f) = \int \mathrm{d}\,|\psi\rangle\ \langle\psi|\mathcal{G}_f\Big[\mathcal{G}_{id}^{-1}(|\psi\rangle\langle\psi|)\Big]|\psi\rangle\,, \tag{2.18}$$

där $\mathcal{G}_{id}$ motsvarar den ideala grindoperationen. Här är $\mathcal{G}_{id}$ och $\mathcal{G}_f$ definierade enligt

$$\mathcal{G}_{id}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \hat{U}\,|\psi\rangle\langle\psi|\,\hat{U}^\dagger \text{ och } \mathcal{G}_f(|\psi\rangle\langle\psi|) = \hat{M}\,|\psi\rangle\langle\psi|\,\hat{M}^\dagger, \tag{2.19}$$

där $\hat{U}$ och $\hat{M}$ är tidsutvecklingsoperatorerna för den ideala respektive faktiskt implementerade grinden, och $\hat{O}^\dagger$ betecknar det hermiteska konjugatet av operatorn $\hat{O}$. Istället för att evaluera integralen i ekvation (2.18) explicit kan vi dock beräkna den på ett enklare sätt. Det går att visa [14] att grindfideliteten kan skrivas på sluten form som

$$F = \frac{\left|\mathrm{Tr}\left(MU^\dagger\right)\right|^2 + \mathrm{Tr}\left(M^\dagger M\right)}{N(N+1)}, \tag{2.20}$$

där U är matrisrepresentationen av $\hat{U}$ [ekvation (2.16) för iSWAP och (2.17) för CZ], och M är matrisrepresentationen av $\hat{M}$, projicerad på beräkningsunderrummet. Talet N är dimensionen av detta rum, vilket innebär att U och M båda är $N \times N$-matriser. För en tvåkvantbitsgrind spänns beräkningsunderrummet upp av egentillstånden $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ och $|11\rangle$, dvs $N = 4$.

Så länge kvantbitarnas hamiltonian inte är perfekt anpassad för att implementera specifika grindar får elementen i M extra, oönskade faser, som måste kancelleras i efterhand med hjälp av enkvantbitsgrindar. I och med att den inte är en observabel kan även den globala fasen kancelleras. Faskorrigerande enkvantbitsgrindar (som brukar betecknas Z_θ [5]) ser ut som

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}, \tag{2.21}$$

varför vi kan anse att alla M som går att skriva på formen

$$U' = e^{i\varphi} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_1} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} e^{i\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\varphi+\theta_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(\varphi+\theta_1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i(\varphi+\theta_1+\theta_2)} \end{bmatrix} U \tag{2.22}$$

har fidelitet 1. För att ta hänsyn till detta bör U' användas istället för U i ekvation (2.20). Värt att notera är att Z_θ-grindar kan implementeras virtuellt utan kostnad i mjukvaran som kontrollerar experimenten på Chalmers [15].

2.6 Den roterande referensramen

I verkliga kvantbitar innehåller ofta hamiltonianen (som vi kommer att se) konstanta termer som endast bidrar till att tillstånd påverkas på ett enkelt, förutsägbart sätt, till exempel i form av rotationer runt z-axeln på Blochsfären. Därför kallas denna del av hamiltonianen ofta för *rotationsdelen*. I och med att dessa termer inte kan anpassas efter vilken grind man vill applicera är det enklast att kompensera för dem i efterhand och se till att resten av hamiltonianens termer, interaktionsdelen, genererar en tidsutveckling motsvarande en grindoperator. För att få en klarare bild av hur interaktionsdelen påverkar tillståndet kan man med fördel byta referensram till en som följer med tidsutvecklingen genererad av rotationsdelen, den *roterande* referensramen.

För att gå över till den roterande referensramen börjar vi med att dela upp hamiltonianen $\hat{H}$ i sina två delar, rotationsdelen $\hat{H}_0$ och interaktionsdelen $\hat{H}_1$. För att mer tydligt se effekterna av $\hat{H}_1$ kancellerar vi helt enkelt den del av tidsutvecklingen som kommer från $\hat{H}_0$, genom att applicera dess tidsutvecklingsoperator [framtagen enligt ekvation (2.3) med $\hat{H} = \hat{H}_0$], fast med plus istället för minus i exponenten, enligt

$$\hat{U}_{\mathrm{rf}}(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_0^t \hat{H}_0(t)\,\mathrm{d}t\right). \tag{2.23}$$

I fallet då $\hat{H}_0$ är tidsoberoende kan ekvation (2.23) förenklas till

$$\hat{U}_{\text{rf}}(t) = \exp\Big(\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t\Big). \tag{2.24}$$

I den roterande ramen transformeras ett tillstånd $|\psi(t)\rangle$ alltså till

$$|\psi(t)\rangle_{\text{rf}} = \hat{U}_{\text{rf}}(t)\,|\psi(t)\rangle\,, \tag{2.25}$$

och en godtycklig tidsoberoende operator $\hat{O}$ transformeras enligt

$$\hat{O}_{\text{rf}} = \hat{U}_{\text{rf}}(t)\hat{O}\hat{U}^{\dagger}_{\text{rf}}(t). \tag{2.26}$$

Hamiltonianen i denna nya referensram erhålls genom att derivera $|\psi\rangle_{\text{rf}}$ och utnyttja ekvation (2.25) samt Schrödingerekvationen, enligt

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle_{\text{rf}} &= i\left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_{\text{rf}}\right)|\psi\rangle + i\hat{U}_{\text{rf}}\left(\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle\right) \\ &= i\dot{\hat{U}}_{\text{rf}}\hat{U}^{\dagger}_{\text{rf}}|\psi\rangle_{\text{rf}} + \hat{U}_{\text{rf}}\frac{\hat{H}}{\hbar}|\psi\rangle = \underbrace{\left(i\dot{\hat{U}}_{\text{rf}}\hat{U}^{\dagger}_{\text{rf}} + \hat{U}_{\text{rf}}\frac{\hat{H}}{\hbar}\hat{U}^{\dagger}_{\text{rf}}\right)}_{\frac{1}{\hbar}\hat{H}_{\text{rf}}}|\psi\rangle_{\text{rf}}\,. \end{aligned} \tag{2.27}$$

I den roterande ramen ges alltså hamiltonianen av $\hat{H}_{\text{rf}} = i\hbar\dot{\hat{U}}_{\text{rf}}\hat{U}^{\dagger}_{\text{rf}} + \hat{U}_{\text{rf}}\hat{H}\hat{U}^{\dagger}_{\text{rf}}$, vilket reducerar till

$$\hat{H}_{\text{rf}} = \hat{U}_{\text{rf}}\hat{H}_1\hat{U}^{\dagger}_{\text{rf}}. \tag{2.28}$$

Med detta i bagaget är det dags att gå in på hur verkliga, supraledande kvantbitar kan implementeras och modelleras.

2.7 Harmoniska och anharmoniska oscillatorer

För att implementera kvantbitar i verkligheten används ofta kvantmekaniska oscillatorer [5, s. 3], och därför är det av stort intresse att förstå hur dessa fungerar. Den enklaste typen av oscillator är den *harmoniska* oscillatorn. Som vi kommer att se är den harmoniska oscillatorn inte en särskilt bra kvantbit, men den är ändå värd att förstå i och med att andra typer av kvantmekaniska oscillatorer beter sig på liknande sätt. Hamiltonianen för en harmonisk oscillator, i form av en partikel med massa m i en parabolisk potential, ges av

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \tag{2.29}$$

där $\hat{x}$ och $\hat{p}$ är operatorerna svarande mot position respektive rörelsemängd och ω är oscillatorns karakteristiska vinkelfrekvens (hädanefter bara "frekvens"), som beror på hur brant potentialen är [4, s. 39-54]. Detta kan skrivas om som

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \frac{1}{2}\right), \tag{2.30}$$

där $\hat{a}$ och $\hat{a}^{\dagger}$ är annihilations- och kreationsoperatorerna, definierade [4, s. 39-54] enligt

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\Big(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\Big), \quad \hat{a}^{\dagger} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\Big(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\Big). \tag{2.31}$$

Namnen på $\hat{a}^\dagger$ och $\hat{a}$ kommer från att operatorerna i fråga skapar och förstör energi i systemet. När dessa operatorer opererar på ett egentillstånd $|n\rangle$ hamnar vi nämligen [4, s. 39-54] i ett egentillstånd som ligger ett steg över respektive under initialtillståndet (multiplicerat med en skalfaktor), enligt

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,, \quad \hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,. \tag{2.32}$$

Detta medför att vi får en oändlig följd av egentillstånd svarande mot $n = 0, 1, 2, \ldots$, vars egenenergier ökar linjärt med n enligt

$$E_n = \hbar\omega\Big(n + \frac{1}{2}\Big). \tag{2.33}$$

Skillnaden mellan intilliggande egenenergier, $\Delta E = \hbar\omega$, är med andra ord konstant. Att så är fallet innebär dock att det är omöjligt att få någon specifik övergång – till exempel $|0\rangle \to |1\rangle$ – att ske, utan varje process som exciterar $|0\rangle$ till $|1\rangle$ kommer även att excitera $|1\rangle$ till $|2\rangle$, $|2\rangle$ till $|3\rangle$, och så vidare. Detta är anledningen till att den harmoniska oscillatorn inte är en speciellt bra kvantbit. För att lösa problemet i fråga måste man använda en *anharmonisk* oscillator, där potentialen inte är parabolisk och ΔE inte är oberoende av n. En av de enklaste anharmoniska oscillatorerna är den så kallade *Duffingoscillatorn*, vars hamiltonian ges [5, s. 5] av

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hbar\alpha}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}, \tag{2.34}$$

där $\hat{a}$ och $\hat{a}^\dagger$ är definierade så att de uppfyller ekvation (2.32), och

$$\alpha = \frac{1}{\hbar}(\Delta E_{1\to 2} - \Delta E_{0\to 1}) \tag{2.35}$$

är den så kallade *anharmoniciteten* för oscillatorn. Med hjälp av det som står i ekvation (2.32) går det förhållandevis enkelt att visa att denna hamiltonian kan skrivas om som

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{\hbar\alpha}{2}\Big(1 - \hat{a}^\dagger\hat{a}\Big)\hat{a}^\dagger\hat{a}. \tag{2.36}$$

Som vi kommer att se i avsnitt 2.8 nedan är specifikt Duffingoscillatorn en bra approximation av den typ av supraledande kvantbitar som används på Chalmers.

2.8 Supraledande kvantbitar

I detta avsnitt beskriver vi till att börja med den supraledande linjära LC-kretsen, en harmonisk oscillator realiserad som en supraledande krets. Därefter går vi vidare till den typ av supraledande kvantbit som kallas *transmonen* och hur man kan använda en ställbar kopplare i form av en så kallad *split-transmon* för att realisera tvåkvantbitsgrindar.

2.8.1 Från harmoniska oscillatorer till transmonkvantbitar

För att få en bättre förståelse för den underligande dynamiken för supraledande kvantbitskretsar är en bra utgångspunkt den elektroniska versionen av en klassisk harmonisk oscillator, nämligen en linjär LC-krets, bestående av en spole med induktans L och en kondensator med kapacitans C, enligt figur 2.2. Det går att visa att hamiltonianen för en sådan linjär LC-krets ges av

$$\hat{H} = \frac{\hat{Q}^2}{2C} + \frac{\hat{\Phi}^2}{2L}, \tag{2.37}$$

motsvarande summan av energierna lagrade i kondensatorn respektive spolen, där $\hat{Q}$ och $\hat{\Phi}$ är operatorerna svarande mot laddningen i kondensatorn och det magnetiska flödet genom spolen [5, s. 4]. För en mer noggrann härledning av detta hänvisas till appendix A. Detta uttryck påminner mycket om hamiltonianen för en harmonisk oscillator, ekvation (2.29) ovan, om Q och Φ byts ut mot position x respektive rörelsemängd p. Faktum är att vi får ett identiskt uttryck om vi definierar $\omega = 1/\sqrt{LC}$ och $m = L$. Detta innebär även att vi kan skriva hamiltonianen för LC-kretsen som

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{2.38}$$

enligt avsnitt 2.7 ovan, om vi definierar kreations- och annihilationsoperatorerna för den linjära LC-kretsen som

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\omega L}{2\hbar}}\left(\hat{Q} + \frac{i}{\omega L}\hat{\Phi}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega L}{2\hbar}}\left(\hat{Q} - \frac{i}{\omega L}\hat{\Phi}\right). \tag{2.39}$$

För att förenkla vissa uttryck som uppkommer brukar man införa de reducerade flödes- och laddningsoperatorerna

$$\hat{\phi} = \frac{2\pi\hat{\Phi}}{\Phi_0}, \quad \hat{n} = \frac{\hat{Q}}{2e}, \tag{2.40}$$

där $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ är det magnetiska flödeskvantat [5, s. 4]. Uttryckt i $\hat{\phi}$ och $\hat{n}$ blir hamiltonianen

$$\hat{H} = 4E_C\hat{n}^2 + \frac{1}{2}E_L\hat{\phi}^2, \tag{2.41}$$

där

$$E_C = \frac{e^2}{2C}, \text{ och } E_L = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2\frac{1}{L}. \tag{2.42}$$

Att använda harmoniska oscillatorer som kvantbitar fungerar dock inte, som vi kom fram till i avsnitt 2.7 ovan. För att åstadkomma en anharmonisk oscillator kan vi byta ut den linjära induktorn i figur 2.2a mot en så kallad *Josephsonövergång*, bestående av två supraledande lager åtskilda av en tunn isolator, enligt figur 2.2b. Denna fungerar som en icke-linjär induktor, för vilken spänningen och strömmen ges av Josephsonrelationerna [5, s. 5]

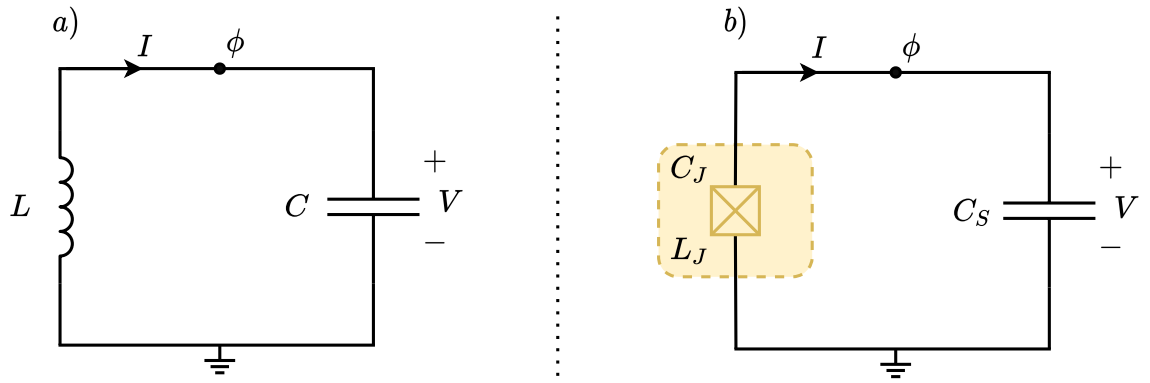
$$I = I_c\sin\hat{\phi}, \quad V = \frac{\hbar}{2e}\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}t}, \tag{2.43}$$

där I_c är den så kallade *kritiska strömmen* för Josephsonövergången. En härledning helt analog med den i appendix A, fast med dessa uttryck för I och V, ger att hamiltonianen för systemet blir

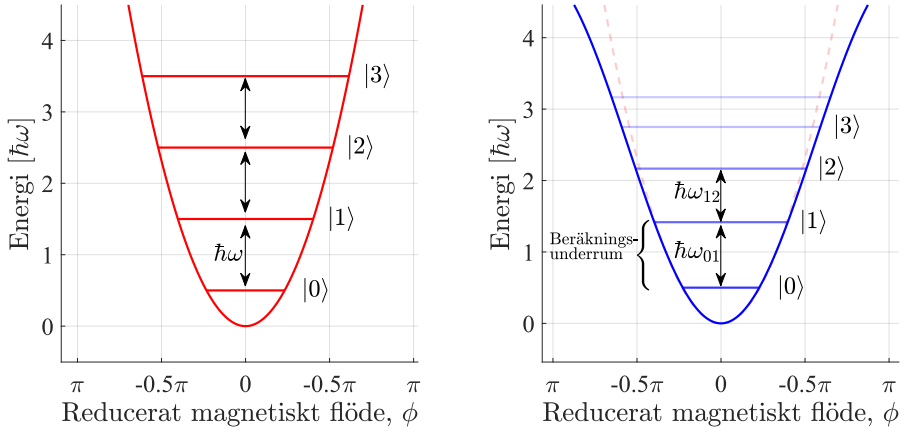
$$\hat{H} = 4E_C\hat{n}^2 - E_J\cos\hat{\phi}. \tag{2.44}$$

Här är $E_C = e^2/(2C_\Sigma)$, där $C_\Sigma = C_S + C_J$ är den totala kapacitansen (se figur 2.2) och $E_J = I_c\Phi_0/2\pi$ är Josephsonenergin.

I samband med att forskningen på supraledande kvantbitar har fortskridit har praxis konvergerat mot att designa kvantbitskretsar sådana att $E_J \gg E_C$ [5, s. 5], för att göra kvantbiten mindre känslig för laddningsstörningar [16]. Ett sätt att åstadkomma detta är att se till att $C_S \gg C_J$, då det gör att laddningsenergin E_C blir mycket liten. Denna typ av kvantbit kallas för en *transmon* [17], och en jämförelse av potentialen och energinivåerna för transmonen och en harmonisk oscillator kan ses i figur 2.3.



Figur 2.2: Kretsrepresentation av (a) en linjär LC-oscillator med induktans L och kapacitans C, och (b) en transmonkvantbit bestående av en Josephsonövergång (i gult) med icke-linjär induktans L_J och kapacitans C_J, parallellkopplad med en kondensator med kapacitans C_S. Figuren är inspirerad av figur 1a och 1c i [5].



Figur 2.3: Diagram över potentialen för en harmonisk oscillator (till vänster) och en transmonkvantbit (till höger), med energinivåer för egentillstånden utritade. Figuren är inspirerad av figur 1b och 1d i [5].

2.8.2 Introduktion av Duffingoscillator-approximationen

För att lättare kunna modellera ekvation (2.44) kan vi göra en Maclaurin-utveckling av $\cos\hat{\phi}$ [5, s. 5] och skriva om transmonens hamiltonian som

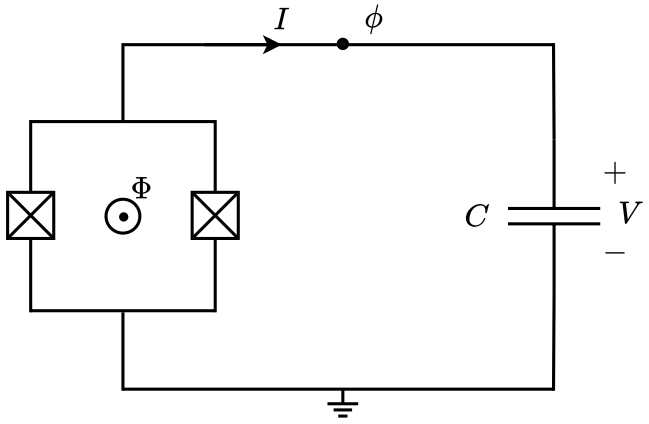
$$\hat{H} = 4E_C\hat{n}^2 + E_J\left[\frac{1}{2}\hat{\phi}^2 - \frac{1}{24}\hat{\phi}^4 + \mathcal{O}\left(\hat{\phi}^6\right)\right], \tag{2.45}$$

där vi strukit den konstanta termen eftersom den inte påverkar dynamiken. Om vi trunkerar (2.45) efter $\hat{\phi}^2$-termen får vi en harmonisk oscillator, varför vi måste inkludera även $\hat{\phi}^4$-termen. Detta ger oss en Duffingoscillator [5, s. 6]! Med andra ord kan vi approximera hamiltonianen för en transmonkvantbit väl med ekvation (2.36). I och med att koefficienten framför $\hat{\phi}^4$-termen är negativ kommer även anharmoniciteten α att vara det.

2.8.3 SQUID och ställbara transmoner

I vanliga transmonkvantbitar är den karakteristiska frekvensen ω fix. Detta gör det mycket svårt, för att inte säga omöjligt, att implementera tvåkvantbitsgrindar med kort operations-

tid – det är helt enkelt för svårt att påverka kvanttillståndet i kvantbiten utifrån på rätt sätt. Det finns dock ett välkänt sätt att konstruera transmoner där ω går att ändra dynamiskt genom att applicera ett externt magnetfält. För att åstadkomma detta byter man ut Josephsonövergången mot två identiska parallellkopplade Josephsonövergångar, vilket bildar en så kallad *supraledande kvantinterferensenhet*, eller SQUID [18, s. 224-234]. På grund av interferens mellan SQUID:ens två armar kommer den effektiva kritiska strömmen i båda armarna att kunna sänkas genom att applicera ett externt magnetiskt flöde Φ genom slingan [5, s. 6], enligt figur 2.4. Detta innebär att man kan reglera E_J med hjälp av det magnetiska flödet, vilket i sin tur medför att transmonens karakteristiska frekvens ω kan justeras. En transmonkvantbit med en SQUID istället för en enkel Josephsonövergång kallas för en *split-transmon* [5, s. 6].



Figur 2.4: Kretsrepresentation av en symmetrisk transmonkvantbit. Figuren är inspirerad av figur 2a i [5].

Specifikt får vi [5, s. 8] att hamiltonianen för en split-transmon ges av

$$\hat{H} = 4E_C\hat{n}^2 - \tilde{E}_J(\Phi)\cos\hat{\phi}, \tag{2.46}$$

där

$$\tilde{E}_J(\Phi) = 2E_J\left|\cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)\right|, \tag{2.47}$$

och under antagandet att $\tilde{E}_J \gg E_C$, vilket är giltigt så länge inte Φ kommer mycket nära $(\frac{1}{2}+n)\Phi_0$ för något heltal n, gäller [17] att kvantbitens karakteristiska frekvens ges av

$$\omega = \frac{\sqrt{8\tilde{E}_J E_C} - E_C}{\hbar} \approx \frac{\sqrt{8\tilde{E}_J E_C}}{\hbar}. \tag{2.48}$$

Med andra ord får vi approximativt att

$$\omega(\Phi) = \omega_0\sqrt{\left|\cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)\right|}, \tag{2.49}$$

där ω_0 är den karakteristiska frekvensen vid $\Phi = 0$. Att den karakteristiska frekvensen för en split-transmon beror på det yttre magnetfältet Φ innebär dock att kvantbiten är känslig för störningar i detsamma. Detta medför att split-transmonens kvanttillstånd inte är lika stabilt som kvanttillstånd i vanliga transmonkvantbitar, utan snabbare kollapsar på grund av interaktion med omgivningen. Med andra ord har kvanttillstånd i split-transmoner lägre *koherenstid* än transmoner med fix frekvens.

2.8.4 Tvåkvantbitsgrindar med ställbara kopplare

För att åstadkomma en kort operationstid utan att kompromissa alltför mycket med koherenstiden kan man använda flera kvantbitar med fix frekvens, ihopkopplade med en *ställbar kopplare* i form av en split-transmon [19, s. 6-7]. Detta innebär enligt ekvation (2.49) ovan att den ställbara kopplarens karakteristiska frekvens approximativt ges av

$$\omega_{\mathrm{TB}}[\Phi(t)] = \omega_{\mathrm{TB},0}\sqrt{\left|\cos\left(\frac{\pi\Phi(t)}{\Phi_0}\right)\right|}, \tag{2.50}$$

där $\omega_{\mathrm{TB},0}$ är den ställbara kopplarens ostörda karakteristiska frekvens. För att excitationer i kvantbitarna med fix frekvens inte ska kunna flytta sig till kopplaren (och därmed lämna beräkningsunderrummet) måste $\omega_{\mathrm{TB},0}$ väljas tillräckligt långt ifrån kvantbitarnas frekvenser ω_i. Specifikt måste $|\omega_{\mathrm{TB},0} - \omega_i|$ vara mycket större än de så kallade *kopplingskoefficienterna* g_i (beskrivna nedan). Att excitationer lämnar beräkningsunderrummet är i allmänhet inte önskvärt, eftersom en kvantdator bara tar hänsyn till information som finns *i* beräkningsunderrummet. Att $|\omega_{\mathrm{TB},0} - \omega_i| \gg g_i$ innebär att kopplaren är *dispersivt* kopplad till kvantbitarna. Genom att variera det externa magnetiska flödet Φ kan vi påverka systemets tidsutveckling, och därigenom implementera tvåkvantbitsgrindar som iSWAP och CZ.

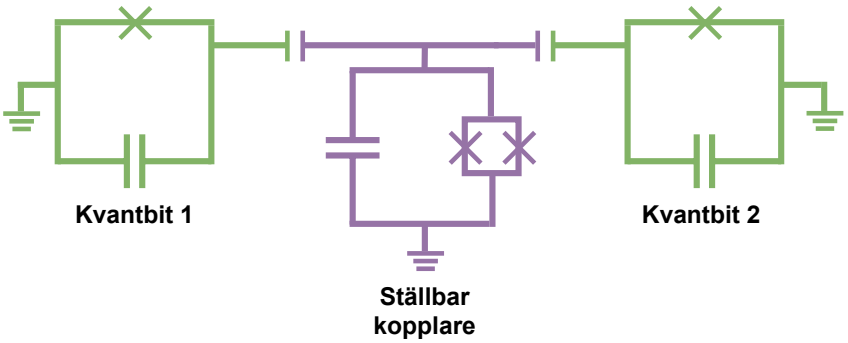
Hamiltonianen för N kvantbitar med fix frekvens, sammanlänkade genom kapacitiv koppling till en och samma ställbar kopplare av denna typ kan, i enlighet med delavsnitt 2.8.2 ovan, approximeras väl [19, s. 6-7] som

$$\begin{aligned}\frac{\hat{H}}{\hbar} = &\sum_{i=1}^{N}\left[\omega_i\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i - \frac{\alpha_i}{2}\big(1-\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i\big)\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i\right] \\ &+ \omega_{\mathrm{TB}}[\Phi(t)]\hat{a}_{\mathrm{TB}}^\dagger\hat{a}_{\mathrm{TB}} - \frac{\alpha_{\mathrm{TB}}}{2}\big(1-\hat{a}_{\mathrm{TB}}^\dagger\hat{a}_{\mathrm{TB}}\big)\hat{a}_{\mathrm{TB}}^\dagger\hat{a}_{\mathrm{TB}} \\ &+ \sum_{i=1}^{N} g_i\big(\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i\big)\big(\hat{a}_{\mathrm{TB}}^\dagger + \hat{a}_{\mathrm{TB}}\big).\end{aligned} \tag{2.51}$$

Här är alla inblandade kvantbitar modellerade som Duffingoscillatorer och all koppling mellan dem har försummats utom den kapacitiva koppling som finns mellan varje kvantbit och den ställbara kopplaren (svarande mot den sista termen). För en mer noggrann förklaring av denna terms utseende hänvisas till appendix B. I figur 2.5 syns ett kretsschema över systemet, med $N = 2$. I och med att även den ställbara kopplaren är en kvantbit, även om den inte betraktas som en ur ett informationsperspektiv, måste även kopplarens energinivå anges för att specificera ett egentillstånd. Vi använder oss hädanefter av notationen $|ijk\rangle$ för det egentillstånd som motsvarar att kvantbit ett och två är i tillstånden $|i\rangle$ och $|j\rangle$, medan kopplaren är i tillstånd $|k\rangle$.

Styrkan på kopplingen mellan kopplaren och respektive kvantbit bestäms av kopplingskoefficienterna g_i, som ofta väljs så att $g_i/2\pi$ är mellan 30 MHz och 100 MHz. Anledningen till detta är att om $g_i/2\pi \ll 30\,\mathrm{MHz}$ blir det svårt att implementera grindar snabba nog att vara användbara, och om $g_i/2\pi \gg 100\,\mathrm{MHz}$ slutar kopplingen mellan den ställbara kopplaren och kvantbitarna att vara dispersiv, eftersom $\omega_{\mathrm{TB},0}/2\pi$ och $\omega_i/2\pi$ typiskt båda är i storleksordningen några GHz [10], [19], [20].

För att kunna använda hamiltonianen i ekvation (2.51) numeriskt behöver den trunkeras till ett ändligt antal energinivåer – helst så få som möjligt. Detta beror på att matrisrepresentationen av $\hat{H}$ (i godtycklig bas) har storleken $L^{N+1} \times L^{N+1}$ om varje kvantbit trunkeras till L energinivåer, och det är mycket beräkningstungt att hantera matriser av de storlekar som fås för stora N och L.



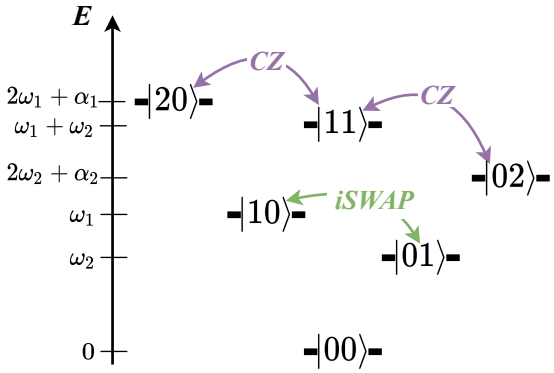
Figur 2.5: Kretsschema över vårt system, bestående av två transmonkvantbitar med fix frekvens (gröna), kapacitivt kopplade till en ställbar kopplare i form av en split-transmon (lila).

2.8.5 Tvåkvantbitsgrindars implementering

Genom att trunkera alla kvantbitar till två energinivåer, göra ett antal ytterligare approximationer samt gå över till den roterande referensramen kan man visa [5], [19] att det går att uppnå en effektiv hamiltonian

$$\frac{\hat{H}}{\hbar} \propto \left(\hat{\sigma}_1^X \hat{\sigma}_2^X + \hat{\sigma}_1^Y \hat{\sigma}_2^Y\right), \tag{2.52}$$

vilket implementerar en iSWAP-grind, genom att överföra $|01\rangle$ på $|10\rangle$ och vice versa. Denna metod har verifierats experimentellt [19] – för att uppnå den effektiva hamiltonianen i fråga modulerade man Φ med en frekvens $\omega_\Phi \approx |\omega_1 - \omega_2|$, svarande mot energiskillnaden mellan $|01\rangle$ och $|10\rangle$. Om man istället trunkerar systemet till tre nivåer kan man på ett liknande sätt troliggöra att CZ går att implementera genom att modulera Φ med en frekvens $\omega_\Phi \approx |\omega_1 + \alpha_1 - \omega_2|$ eller $\omega_\Phi \approx |\omega_1 - (\omega_2 + \alpha_2)|$, i syfte att överföra energi mellan tillstånden $|11\rangle$ och $|20\rangle$ respektive $|02\rangle$ [5], [21]. Även för CZ har denna metod verifierats experimentellt [21]. I figur 2.6 nedan syns energinivåerna för de ovan nämnda tillstånden, vilka man kan driva övergångar mellan för att implementera iSWAP och CZ.



Figur 2.6: Diagram över energinivåerna för de två kopplade kvantbitarna med övergångar som kan användas för att implementera iSWAP- och CZ-grindarna markerade.

3

Metod

Detta avsnitt ämnar klargöra hur studien genomfördes samt ge en överblick av mjukvarans struktur. Sammanfattningsvis skapades mjukvara i Python som kan optimera iSWAP- och CZ-grindar till så hög fidelitet som möjligt, genom simuleringar av en given krets. Alla simuleringar av det kvantmekaniska systemet som diskuteras nedan utförs med hjälp av Python-paketet *QuTip* [22], [23]. Andra Python-paket som också används i mjukvaran är *Numba* [24], *Matplotlib* [25], *SciPy* [26] och *NumPy* [27]. En fullständig version av mjukvaran finns på GitHub [28].

3.1 Det magnetiska flödet $\Phi(t)$

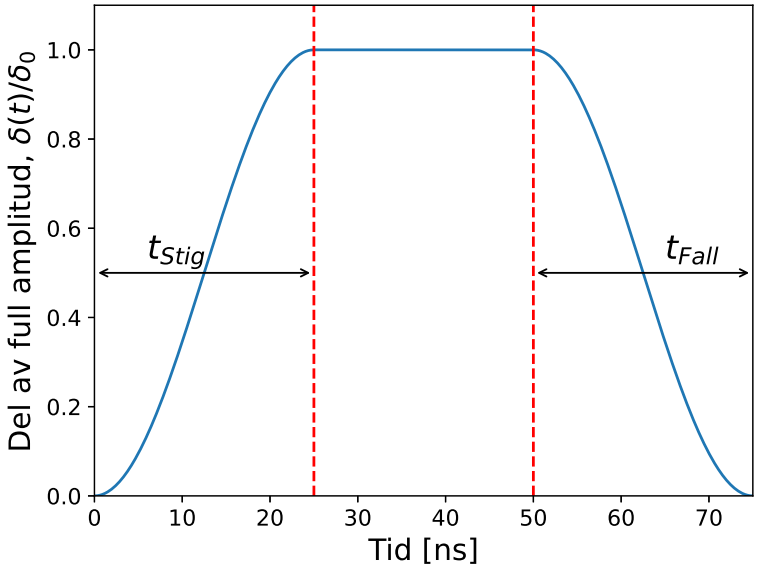
I och med att de modeller som används inom denna studie bygger på ett flertal approximationer kan man inte förvänta sig att våra resultat går att använda rakt av, utan de måste sannolikt finjusteras manuellt när grindarna ska implementeras i verkligheten. För att denna finjustering ska vara möjlig att genomföra inom rimliga tidslängder är det av stor vikt att det magnetiska flödet $\Phi(t)$, är parametriserad med endast ett fåtal parametrar. I denna studie används ett magnetiskt flöde på formen

$$\Phi(t) = \Theta + \delta(t)\cos(\omega_\Phi t), \tag{3.1}$$

vilket är en parametrisering som använts i tidigare studier om detta sätt att implementera tvåkvantbitsgrindar [19, s. 2]. I ekvation (3.1) är Θ det konstanta flödet, $\delta(t)$ den oscillerande delens amplitud och ω_Φ oscillationens vinkelfrekvens. Amplituden $\delta(t)$ är en överlagring mellan en konstant δ_0 och en lådfunktion med enhetsamplitud samt sinusformade ändar, vilket illustreras i figur 3.1. Stig- och falltiden för denna puls, tiden från att $\delta(t) = 0$ till dess att $\delta(t) = \delta_0$ och vice versa, väljs till 25 ns. Anledningen till att den inte väljs till ett lägre värde är för att begränsa mängden högfrekvent brus som uppkommer när signalen realiseras i verkligheten, eftersom det kan leda till minskad grindfidelitet genom att andra övergångar, utöver de tilltänkta, kan aktiveras (se figur 2.6). Den totala tiden för hela pulsen betecknas fortsättningsvis som t_{MOD}.

3.2 Enhetsval i mjukvaran

För att underlätta simuleringen av hamiltonianer på den form som beskrivs i ekvation (2.51) kommer vi att arbeta i enheter sådana att $\hbar$ och Φ_0 båda är ett. Att använda SI-enheter för $\hbar$ (som är $\sim 10^{-34}$ J s) och Φ_0 (som är $\sim 10^{-15}$ Wb) i en numerisk beräkning tillför inget vad gäller lösningarnas utseende, utan gör endast hanteringen av alla flyttal mer komplicerad och tvingar oss att hålla reda på två extra konstanter. Med hamiltonianerna och enhetsvalen



Figur 3.1: Pulsformen för det oscillerande flödets amplitud, $\delta(t)$.

klara går vi vidare till hur styrsignalen $\Phi(t)$ kan optimeras för att implementera de två beaktade grindarna.

3.3 Kostnadsfunktionen

För att skilja på en bättre och en sämre lösning använder vi en kostnadsfunktion. Denna tar in en lista x med parametrar som bestämmer utseendet på styrsignalen och returnerar ett tal som är mindre för bättre lösningar. Specifikt använder vi oss av en lista x på formen

$$x = [\Theta,\ \delta_0,\ \omega_\Phi,\ \omega_{\mathrm{TB},0},\ t_{\mathrm{MOD}}]. \tag{3.2}$$

Notera att även $\omega_{\mathrm{TB},0}$ används som en optimeringsparameter, trots att den inte är direkt kopplad till styrsignalen. Det beror på att den likväl påverkar $\omega_{\mathrm{TB}}[\Phi(t)]$. Det returnerade värdet från kostnadsfunktionen består av ett viktat medelvärde av den negerade grindfideliteten för den av användaren valda grinden (antingen CZ eller iSWAP), evaluerad vid fyra olika tidpunkter (ungefär t_{MOD}, $t_{\mathrm{MOD}} + 8.5\,\mathrm{ns}$, $t_{\mathrm{MOD}} + 17\,\mathrm{ns}$ samt $t_{\mathrm{MOD}} + 25.5\,\mathrm{ns}$). Grindfideliteten vid t_{MOD} viktas med en faktor 2, och grindfideliteten vid resterande tidpunkter viktas med en faktor 1. Beräkningen av grindfideliteten sker enligt ekvation (2.20) och anledningen till att kostnaden för en lösning bildas genom ett medelvärde av fideliteter, är att vissa lösningar kan vara väldigt instabila efter att det oscillerande flödet har stängts av. Denna instabilitet kommer från den så kallade *ZZ-kopplingen*, som är en högre ordningens interaktion i störningsutvecklingen för kopplingen mellan kvantbitarna. Denna koppling får faserna för den ena kvantbitens tillstånd att utvecklas olika snabbt beroende på den andras tillstånd, och vice versa. Detta gör att det avstängda systemets tidsutveckling avviker från det förväntade. Om kopplingen är stark kan den ge upphov till en snabb fasutveckling som i sin tur kan medföra en både kraftig och snabb minskning i fidelitet efter $t = t_{\mathrm{MOD}}$. Lösningar med stark ZZ-koppling är därför inte önskvärda, då de är praktiskt oanvändbara. För att optimera kostnadsfunktionen kan redan implementerade algoritmer användas, vilket diskuteras närmare i nästa avsnitt.

3.4 Optimeringsalgoritmer

Vi fattade tidigt under utvecklingen av mjukvaran beslutet att endast redan implementerade optimeringsalgoritmer skulle användas, för att minimera tiden som utvecklingen skulle ta. Python-paketet *SciPy* har ett antal globala optimeringsfunktioner, varav vissa använder gradientbaserade och andra använder gradientlösa algoritmer [26]. Gradientbaserade algoritmer bygger på att gradienten för kostnadsfunktionen är känd eller kan approximeras. För vår kostnadsfunktion (beskriven i avsnitt 3.3) är det omöjligt att beräkna gradienten exakt, och mycket beräkningstungt att beräkna den approximativt, då varje evaluering av kostnadsfunktionen bygger på simuleringar av fyra olika kvanttillstånds tidsutvecklingar. Ett annat problem med gradientbaserade algoritmer är att de har en tendens att fastna vid lokala minima till kostnadsfunktionen. Detta blir speciellt problematiskt i oregelbundna kostnadslandskap, vilket vi inte vet ifall vi har. Därför valde vi redan i ett tidigt stadium att använda oss av en gradientlös algoritm.

Gradientlösa algoritmer kräver inte att gradienten är känd, varken exakt eller approximativt. Det är vanligt att dessa algoritmer bygger på stokastiska processer, vilket innebär att sannolikhetsmodeller används för att hitta det globala minimumet. Tre gradientlösa algoritmer undersöktes under mjukvaruutvecklingens gång, nämligen *Simplicial Homology Global-*, *Dual Annealing-* och *Differential Evolution*-algoritmerna från SciPy-paketet, och den algoritm som till slut användes var Differential Evolution-algoritmen. Detta val grundade sig främst på att den visade sig hitta optimum snabbare än de andra algoritmerna, och dessutom stödjer den parallellisering, vilket möjliggjorde att flera processorkärnor kunde användas samtidigt av optimeringsalgoritmen för att ytterligare snabba på exekveringen.

Differential Evolution-algoritmen är en evolutionär algoritm, dvs den bygger på naturligt urval, där de bästa individerna i en grupp av lösningar påverkar nästa generation av individer i en större utsträckning än de mindre bra individerna. När tillräckligt många av dessa individer konvergerar till en punkt i parameterlandskapet så avslutas algoritmen, och en gradientbaserad optimeringsalgoritm tar över för att finslipa lösningen. En påtaglig nackdel med denna algoritm är att dess stokastiska egenskap medför att man inte kan förvänta sig att finna samma minimum varje gång algoritmen körs med identiska begynnelsevillkor. Man kan därför behöva köra algoritmen flera gånger på samma kostnadsfunktion för att nå en tillfredsställande bra lösning. I denna studie ansåg vi att detta var en rimlig uppoffring.

3.4.1 Parameterlandskapet

Differential Evolution-algoritmen som används för att optimera kostnadsfunktionen behöver inget initialvärde. Istället avgränsas optimeringen till ett specificerat parameterlandskap, vilket i mjukvaran har definierats enligt intervallen i tabell 3.1. Inom detta parameterlandskap initialiseras sedan den första generationen av individer genom en slumpmässig process.

Parameter	Θ [Φ_0]	δ_0 [Φ_0]	$\omega_\Phi/2\pi$ [GHz]	$\omega_{\mathrm{TB},0}/2\pi$ [GHz]	t_{MOD} [ns]
Undre gräns	-0.5	0	0	$27.5/2\pi \approx 4.4$	50
Övre gräns	0.5	0.25	$5/2\pi \approx 0.8$	$47.5/2\pi \approx 7.6$	Specificeras av användaren.

Tabell 3.1: Parameterintervallen som definierar det område som optimeringsalgoritmen söker efter minima på. Maxgränsen för t_{MOD} valdes som olika värden mindre än eller lika med 250 ns för olika optimeringar.

4

Resultat

För samtliga lösningar som presenteras i detta avsnitt har alla kretsparametrar som inte ingår i optimeringen, men som krävs för att specificera hamiltonianen, valts enligt tabell 4.1. För att dessa ska vara rimliga har vi tagit inspiration från ett tidigare genomfört experiment på Chalmers [9]. Nedan presenteras två lösningar som stack ut från mängden, genom snabba operationstider samt höga fideliteter, av de lösningar som hittades med hjälp av mjukvaran. Samtliga grafer i avsnitten nedan har tagits fram genom simuleringar av systemet med hamiltonianer trunkerade till fyra energinivåer per kvantbit. Ett större urval av lösningar som hittades med hjälp av mjukvaran finns i filen `main.py` på projektets GitHub [28].

Parameter	Värde
$\{g_1,\, g_2\}/2\pi$	$50\,\mathrm{MHz}$
$\{\alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_{\mathrm{TB}}\}/2\pi$	$-150\,\mathrm{MHz}$
$\omega_1/2\pi$	$4.2\,\mathrm{GHz}$
$\omega_2/2\pi$	$3.8\,\mathrm{GHz}$

Tabell 4.1: Parametrarna som inte ingår i optimeringen men behövs för att fullt specificera hamiltonianen för systemet [9].

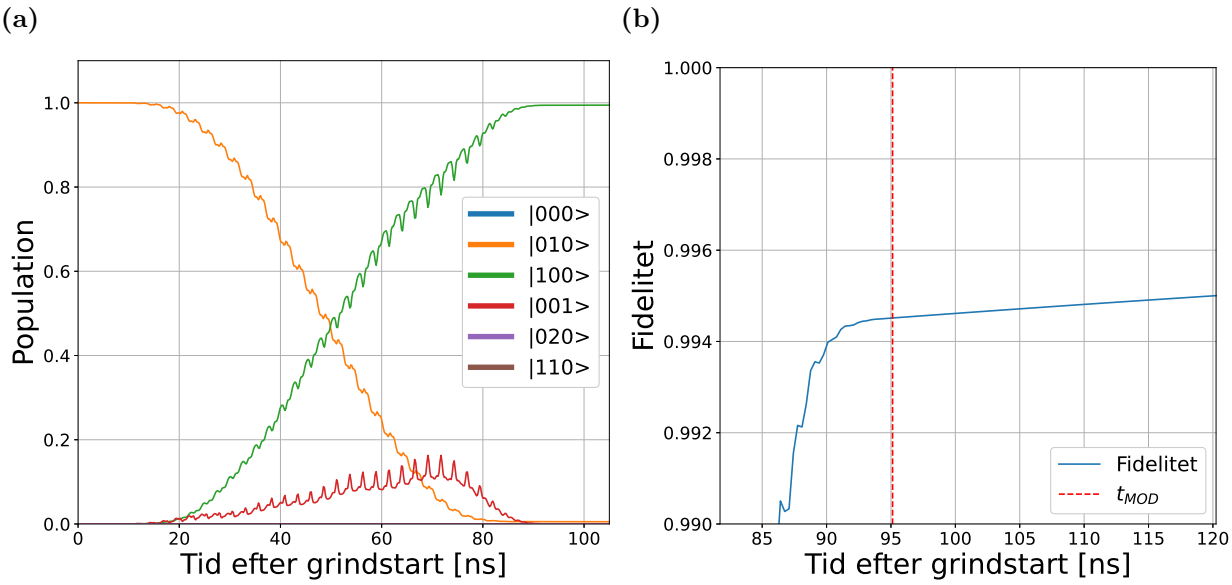
4.1 Speciellt intressant lösning för iSWAP-grinden

En speciellt intressant lösning för iSWAP-grinden som identifierades av mjukvaran presenteras i tabell 4.2. Värt att notera för denna lösning är att $\omega_\Phi/2\pi = 390.2\,\mathrm{MHz} \approx |\omega_1 - \omega_2|/2\pi = 400\,\mathrm{MHz}$.

Parameter	Värde
Θ $[\Phi_0]$	-0.3237
δ_0 $[\Phi_0]$	$3.743 \cdot 10^{-2}$
$\omega_\Phi/2\pi$ [MHz]	390.2
$\omega_{\mathrm{TB},0}/2\pi$ [GHz]	6.40
$\omega_{\mathrm{TB}}(\Theta)/2\pi$ [GHz]	4.64
t_{MOD} [ns]	95.1
Fidelitet vid t_{MOD}	0.9945

Tabell 4.2: Parametrarna för den speciellt intressanta lösningen på styrsignalen som realiserar en iSWAP-grind.

Då iSWAP-grinden ska verkställa en tillståndsövergång blir det intressant att studera populationen för hamiltonianens olika egentillstånd, varför denna information finns att tillgå i figur 4.1a. Då det i avsnitt 3.3 klargjordes att fidelitetens tidsutveckling kring t_{MOD} är intressant för att avgöra en lösnings stabilitet, presenteras detta i figur 4.1b.



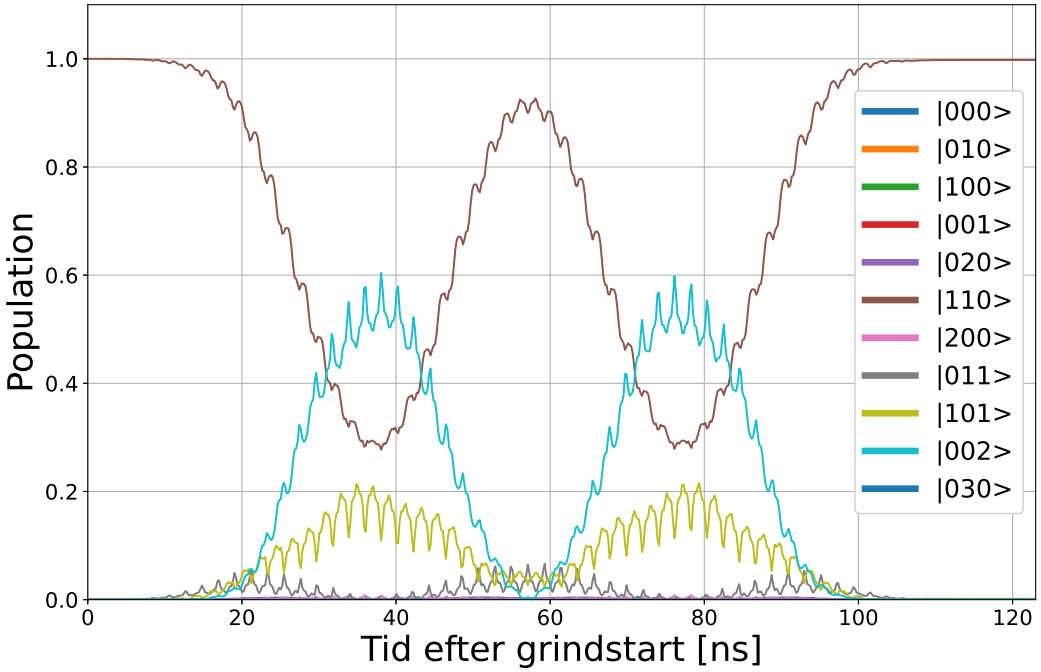
Figur 4.1: (a) Tidsutvecklingen för populationen i de olika egenstillstånden då initialtillståndet är $|010\rangle$-egentillståndet. Tillståndet som tidsutvecklas har transformerats till den roterande referensramen. (b) Tidsutvecklingen för grindfideliteten kring tiden t_{MOD} för den intressanta lösningen till iSWAP-grinden.

4.2 Speciellt intressant lösning för CZ-grinden

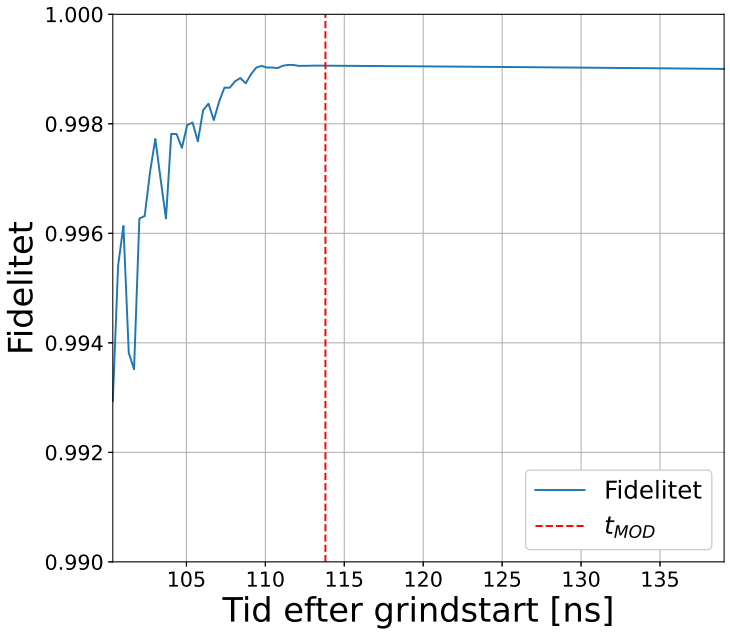
Den speciellt intressanta lösning för CZ-grinden som identifierades av mjukvaran presenteras i tabell 4.3. Värt att notera för denna lösningen är att parametern $\omega_\Phi/2\pi = 473\,\text{MHz}$, vilket kan jämföras med de förväntade övergångsenergierna $|\omega_1 + \alpha_1 - \omega_2|/2\pi = 250\,\text{MHz}$ och $|\omega_1 - (\omega_2 + \alpha_2)|/2\pi = 550\,\text{MHz}$. Som vi kan se i figur 4.2 har detta sin förklaring i att denna lösning inte använder vare sig $|11\rangle \leftrightarrow |20\rangle$- eller $|11\rangle \leftrightarrow |02\rangle$-övergången. Tidsutveckling av CZ-grindens fidelitet kring t_{MOD} för den presenterade lösningen är precis som innan intressant ur stabilitetssynpunkt, och presenteras därför i figur 4.3. Fideliteten för denna lösning verifierades även för ett system där kvantbitarna var trunkerade till fem energinivåer vardera, och det resulterade inte i någon märkbar förändring vad gäller fideliteten.

Parameter	Värde
Θ $[\Phi_0]$	-0.3427
δ_0 $[\Phi_0]$	$5.142 \cdot 10^{-2}$
$\omega_\Phi/2\pi$ [MHz]	0.473
$\omega_{\text{TB},0}/2\pi$ [GHz]	7.0
$\omega_{\text{TB}}(\Theta)/2\pi$ [GHz]	4.82
t_{MOD} [ns]	113.8
Fidelitet vid t_{MOD}	0.999

Tabell 4.3: Parametrarna för den speciellt intressanta lösningen på styrsignalen som realiserar en CZ-grind.



Figur 4.2: Tidsutvecklingen för populationen i de olika egentillstånden då initialtillståndet är $|110\rangle$-egentillståndet. Tillståndet som tidsutvecklas har transformerats till den roterande referensramen.



Figur 4.3: Tidsutvecklingen för grindfideliteten kring tiden t_{MOD} för den intressanta lösningen till CZ-grinden.

5

Diskussion och slutsatser

De fideliteter och operationstider som presenteras i avsnitt 4 är mycket bra jämfört med de fideliteter och operationstider som hittills demonstrerats experimentellt för CZ- och iSWAP-grindar i denna arkitektur. För att jämföra grindimplementationer med fideliteter nära 1 är det mer praktiskt att använda sig av det så kallade *grindfelet*, definierat som $\varepsilon = 1 - F$, där F är grindfideliteten. De i nuläget bästa CZ- och iSWAP-grindarna som realiserats i denna arkitektur har $\varepsilon_{\text{CZ}} = 8.9 \cdot 10^{-3}$ och $\varepsilon_{\text{iSWAP}} = 1.3 \cdot 10^{-2}$ [20], medan våra lösningar har $\varepsilon_{\text{CZ}} = 9.4 \cdot 10^{-4}$ och $\varepsilon_{\text{iSWAP}} = 5.5 \cdot 10^{-3}$ vid $t = t_{\text{MOD}}$. Faktum är att fideliteten för vår iSWAP-grind fortsätter att öka i cirka 212 ns efter $t = t_{\text{MOD}}$, och vi uppnår ett minimalt grindfel som är ännu lägre (ungefär $3.3 \cdot 10^{-3}$). För att en grind ska vara praktiskt användbar måste den [29] ha ett grindfel på under cirka $1 \cdot 10^{-2}$.

Utöver att de har hög fidelitet är våra grindar, med operationstider på 114 ns för CZ och 95 ns för iSWAP, betydligt snabbare än de som hittills demonstrerats i praktiken i vår arkitektur. De ovan nämnda grindarna med $\varepsilon_{\text{CZ}} = 8.9 \cdot 10^{-3}$ respektive $\varepsilon_{\text{iSWAP}} = 1.3 \cdot 10^{-2}$ hade till exempel operationstider på 188 ns respektive 130 ns [20]. Det finns dock anledningar att tro att våra lösningar är lite väl optimistiska. Den främsta av dessa är att den modell av kretsen i figur 2.5 som vi använt i vår mjukvara bygger på ett antal approximationer. En annan är att vi inte tagit hänsyn till det bidrag till grindfelet som kommer från dekoherens. Enligt en ännu opublicerad studie [30] är dekoherensbidraget till grindfelet dock troligen mindre än 10^{-3} för grindar i vår arkitektur med operationstid under 100 ns, givet att våra kvantbitar har en koherenstid i storleksordningen 100 µs.

Ett exempel på en approximation vi gör är att vi modellerar alla transmonkvantbitar som Duffingoscillatorer. Som nämnt i teoridelen borde detta inte ge upphov till speciellt stora fel, eftersom Duffingapproximationen av transmonens potential är korrekt upp till $\mathcal{O}(\hat{\phi}^6)$. Dessutom trunkerar vi dock varje Duffingoscillator till fyra energinivåer, men inte heller detta borde ge upphov till mer än små fel. I en nyligen genomförd studie visade det sig till exempel att man genom att trunkera hamiltonianen till fem energinivåer istället för fyra endast förändrade grindfideliteten för iSWAP- och CZ-grindar med operationstider på cirka 400 ns med $1.6 \cdot 10^{-7}$ respektive $9.8 \cdot 10^{-6}$ [31].

Vidare försummar vi de så kallade *utläsningsresonatorernas* påverkan på kretsen. Dessa är supraledande linjära LC-kretsar som via en svag kapacitiv koppling till kvantbitarna kan användas för att läsa av kvantbitarnas tillstånd. Deras påverkan på systemet är liten – i den ovan nämnda studien ledde deras inkludering exempelvis till en förändring i fidelitet på upp till ca $1 \cdot 10^{-2}$ för grindarna med operationstider på cirka 400 ns [31]. I och med att grindarna i fråga hade grindfel i storleksordningen $1 \cdot 10^{-2}$ (betydligt högre än våra grindfel) så är det inte uppenbart att fideliteten för våra grindar skulle förändras lika mycket. Exakt hur liten utläsningsresonatorernas påverkan är på systemet bör undersökas närmare

i framtida forskning. Ytterligare en sak vi försummar i vår mjukvara är den koppling mellan kvantbitarna i systemet som inte sker via den ställbara kopplaren. Enligt våra handledare [32] är dock den arkitektur vi modellerar designad så att kopplingen mellan kvantbitarna via den ställbara kopplaren är flera storleksordningar starkare än all annan koppling mellan kvantbitarna. Följaktligen borde det inte heller vara ett problem att vi försummar all koppling mellan kvantbitarna som inte sker via den ställbara kopplaren.

Något annat som bör nämnas är att ekvation (2.50) inte håller när $\Phi(t)$ kommer i närheten av $0.5\Phi_0$, eftersom det är en approximation som endast gäller då $\tilde{E}_J/E_C \gg 1$ för den ställbara kopplaren. För de två lösningar som presenteras i avsnitt 4 ovan når vi maximalt $\Phi_{\max} = 0.361\Phi_0$ för iSWAP och $\Phi_{\max} = 0.394\Phi_0$ för CZ. Insättning av detta tillsammans med $E_C/2\pi\hbar = |\alpha_{\text{TB}}|/2\pi = 150\,\text{MHz}$ i (2.49) och (2.48) ger att vår iSWAP-grind som lägst når $\tilde{E}_J/E_C \approx 103$, medan vår CZ-grind som lägst når $\tilde{E}_J/E_C \approx 96$. Med andra ord lär approximationen i fråga inte leda till några signifikanta fel för just dessa lösningar, men om lösningar med $\Phi_{\max}$ mycket nära $0.5\Phi_0$ tas fram med hjälp av vår mjukvara bör de tas med en nypa salt. Sådana lösningar lär dessutom vara svåra att realisera i verkligheten, eftersom det är svårt att få till perfekt symmetriska split-transmoner, vilket leder till ytterligare avvikelser från beteendet som förutspås av ekvation (2.50) för Φ i närheten av $0.5\Phi_0$ [5, s. 5-6].

Utöver den låga operationstiden och höga fideliteten för grindarna i avsnitt 4 är det något annat som är anmärkningsvärt, nämligen att vår CZ-grind inte använder något av de ω_Φ som man förväntar sig utifrån teorin (se avsnitt 2.8.5). Utifrån värdena i tabell 4.1 förutspår teorin att $\omega_\Phi/2\pi = 250\,\text{MHz}$ och $\omega_\Phi/2\pi = 550\,\text{MHz}$ kan användas för att realisera en CZ-grind, medan vår CZ-grind använder $\omega_\Phi/2\pi \approx 473\,\text{MHz}$. Detta kan jämföras med vår iSWAP-grind, som använder $\omega_\Phi \approx 390\,\text{MHz}$, vilket ligger nära det förväntade värdet $\omega_\Phi = 400\,\text{MHz}$. Att vår lösning för CZ inte använder ett ω_Φ i närheten av det förväntade syns också på tidsutvecklingen för populationen i de olika egentillstånden (se figur 4.2). Ingen populationsöverföring sker mellan vare sig $|110\rangle$ och $|200\rangle$ eller $|110\rangle$ och $|020\rangle$. Istället verkar en partiell populationsöverföring $|110\rangle \leftrightarrow |002\rangle$, $|110\rangle \leftrightarrow |101\rangle$ samt $|110\rangle \leftrightarrow |011\rangle$ ske, men hur detta ger upphov till en bra CZ-grind är oklart och bör utforskas närmare i vidare forskning. Det är möjligt att vår CZ-grind helt eller delvis fungerar tack vare ZZ-kopplingen som diskuteras i metodavsnittet. Även denna möjlighet bör undersökas mer noggrant i framtida forskning.

Summa summarum finns det anledning att tro att våra lösningar inte är riktigt lika bra i verkligheten som de ser ut att vara i vår mjukvara. Det bör dock finnas grindar med hög fidelitet för liknande värden på parametrarna. Det enda sättet att komma fram till om så verkligen är fallet är dock att experimentellt undersöka parameterrummet i närheten av våra lösningar. Skulle det visa sig att inga bra lösningar går att hitta behövs antagligen en bättre modell – till exempel bör möjligheterna att använda en bättre approximation för $\omega_{\text{TB}}(\Phi)$ vid $\Phi \approx 0.5\Phi_0$ undersökas. För att få en bild av robustheten för lösningarna som vår mjukvara hittar skulle mjukvaran kunna utökas med funktionalitet för att undersöka parameterrummet kring dem. Hur som helst utgör den mjukvara vi skapat en utmärkt startpunkt för framtida optimering av tvåkvantbitsgrindar. I och med att man måste anpassa styrsignalen efter de grindparametrar man har lär det i vilket fall vara svårt att implementera specifikt de CZ- och iSWAP-grindar som presenterades i avsnitt 4 ovan. Istället får man mäta vilka grindparametrar man har och sedan optimera styrsignalen utefter dem.

Litteraturförteckning

[1] A. Ambainis. (2014). "What Can We Do with a Quantum Computer?" URL: https://www.ias.edu/ideas/2014/ambainis-quantum-computing#:~:text=Quantum%5C%20parallelism%5C%20is%5C%20used%5C%20to,a%5C%20large%5C%2Dscale%5C%20quantum%5C%20computer. (hämtad 2021-05-08).

[2] *Wallenberg Centre for Quantum Technology*. URL: https://www.chalmers.se/en/centres/wacqt/about%20us/Pages/default.aspx (hämtad 2021-04-25).

[3] R. Johansson, *Grundläggande Datorteknik*. Lund, Sverige: Studentlitteratur AB, aug. 2016, ISBN: 9789144076508.

[4] D. J. Griffiths och D. F. Schroeter, 3. utg. Cambridge, Storbritannien: Cambridge University Press, 2018, ISBN: 9781107189638.

[5] P. Krantz m. fl., "A quantum engineer's guide to superconducting qubits," *Applied Physics Reviews*, årg. 6, nr 2, s. 021 318, juni 2019, ISSN: 1931-9401. DOI: 10.1063/1.5089550. URL: http://dx.doi.org/10.1063/1.5089550.

[6] C. M. Dawson och M. A. Nielsen, "The Solovay-Kitaev Algorithm," *Quantum Information and Computation*, årg. 6, nr 1, juni 2006, ISSN: 1533-7146. URL: https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0505030.pdf (hämtad 2021-04-25).

[7] A. Barenco m. fl., "Elementary gates for quantum computation," *Phys. Rev. A*, årg. 52, nr 5, nov. 1995. DOI: 10.1103/PhysRevA.52.3457. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.52.3457.

[8] M. A. Nielsen och I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*, 10. utg. New York, USA: Cambridge University Press, 2011, ISBN: 9781107002173.

[9] A. Bengtsson m. fl., "Improved Success Probability with Greater Circuit Depth for the Quantum Approximate Optimization Algorithm," *Phys. Rev. Applied*, årg. 14, 3 sept. 2020. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.14.034010. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevApplied.14.034010.

[10] M. Kjaergaard m. fl., "Superconducting Qubits: Current State of Play," *Annual Review of Condensed Matter Physics*, årg. 11, nr 1, s. 369–395, 2020. DOI: 10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605. eprint: https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605. URL: https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605.

[11] Smite-Meister. (jan. 2009). "Bloch sphere." [Digital bild], URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bloch_sphere.svg (hämtad 2021-05-31).

[12] R. A. Horn och C. R. Johnson, i *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge, Storbritannien: Cambridge University Press, 1991. DOI: 10.1017/CBO9780511840371. URL: https://doi.org/10.1017/CBO9780511840371.

[13] M. A. Nielsen och I. L. Chuang. Cambridge, Storbritannien: Cambridge University Press, 2010. DOI: 10.1017/CBO9780511976667. URL: https://doi.org/10.1017/CBO9780511976667.

[14] D. Willsch, "Supercomputer simulations of transmon quantum computers," juli 2020. DOI: 10.18154/RWTH-2020-08027. URL: https://publications.rwth-aachen.de/record/795008.

[15] D. C. McKay m. fl., "Efficient Z gates for quantum computing," *Phys. Rev. A*, årg. 96, s. 022 330, 2 aug. 2017. DOI: 10.1103/PhysRevA.96.022330. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.96.022330.

[16] H. Paik m. fl., "Observation of High Coherence in Josephson Junction Qubits Measured in a Three-Dimensional Circuit QED Architecture," *Physical Review Letters*, årg. 107, nr 24, dec. 2011, ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.107.240501. URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.240501.

[17] J. Koch m. fl., "Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box," *Phys. Rev. A*, årg. 76, s. 042 319, 4 okt. 2007. DOI: 10.1103/PhysRevA.76.042319. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.76.042319.

[18] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*. Mineola, New York, US: Dover Publications, juni 2004, ISBN: 9780486435039.

[19] D. C. McKay m. fl., "Universal Gate for Fixed-Frequency Qubits via a Tunable Bus," *Phys. Rev. Applied*, årg. 6, 6 dec. 2016. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.6.064007. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevApplied.6.064007.

[20] M. Ganzhorn m. fl., "Benchmarking the noise sensitivity of different parametric two-qubit gates in a single superconducting quantum computing platform," *Phys. Rev. Research*, årg. 2, s. 033 447, 3 sept. 2020. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.2.033447. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.2.033447.

[21] S. A. Caldwell m. fl., "Parametrically Activated Entangling Gates Using Transmon Qubits," *Phys. Rev. Applied*, årg. 10, s. 034 050, 3 sept. 2018. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.10.034050. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevApplied.10.034050.

[22] J. R. Johansson m. fl., "QuTiP: An open-source Python framework for the dynamics of open quantum systems," *Computer Physics Communications*, årg. 183, nr 8, s. 1760–1772, 2012, ISSN: 0010-4655. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cpc.2012.02.021. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465512000835.

[23] ——, "QuTiP 2: A Python framework for the dynamics of open quantum systems," *Computer Physics Communications*, årg. 184, nr 4, s. 1234–1240, 2013, ISSN: 0010-4655. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cpc.2012.11.019. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465512003955.

[24] S. K. Lam m. fl., "Numba: A LLVM-Based Python JIT Compiler," i *Proceedings of the Second Workshop on the LLVM Compiler Infrastructure in HPC*, ser. LLVM '15, Austin, Texas: Association for Computing Machinery, 2015, ISBN: 9781450340052. DOI: 10.1145/2833157.2833162. URL: https://doi.org/10.1145/2833157.2833162.

[25] J. D. Hunter, "Matplotlib: A 2D graphics environment," *Computing in Science & Engineering*, årg. 9, nr 3, s. 90–95, 2007. DOI: 10.1109/MCSE.2007.55.

[26] P. Virtanen m. fl., "SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python," *Nature Methods*, årg. 17, s. 261–272, 2020. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.

[27] C. R. Harris m. fl., "Array programming with NumPy," *Nature*, årg. 585, nr 7825, s. 357–362, sept. 2020. DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2. URL: https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2.

[28] *quantum-gate-optimization*, GitHub Repository, 2021. URL: https://github.com/HenrikZander/quantum-gate-optimization.git.

[29] R. Barends, J. Kelly och A. Megrant, "Superconducting quantum circuits at the surface code threshold for fault tolerance," *Nature*, april 2014. DOI: 10.1038/nature13171. URL: https://www.nature.com/articles/nature13171#citeas.

[30] T. Abad m. fl., *Titel ej färdigställd*, 2021.

[31] Y. Al-Latif, "Optimizing numerical modelling of quantum computing hardware," examensarb., maj 2021. URL: http://urn.kb.se/resolve?urn=urn%3Anbn%3Ase%3Aumu%3Adiva-182659.

[32] A. Frisk Kockum och J. Fernández Pendás, *Personlig kommunikation*, maj 2021.

A

Härledning av hamiltonianen för en linjär LC-krets

I en LC-krets oscillerar energin mellan att lagras som magnetisk energi i en spole med induktans L och elektrisk energi i en kondensator med kapacitans C. Den ögonblickliga tidsberoende energin för varje kretselement kan uttryckas som

$$E(t) = \int_{-\infty}^{t} V(t')I(t')\,\mathrm{d}t'\,, \tag{A.1}$$

där $V(t')$ och $I(t')$ betecknar spänningen över respektive strömmen genom kretselementet i fråga. Kretsens tillstånd kan beskrivas med generaliserade koordinater, i form av det magnetiska flödet Φ genom spolen, samt dess tidsderivata $\dot{\Phi}$. Det magnetiska flödet ges av tidsintegralen av spänningen, enligt

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} V(t')\,\mathrm{d}t'\,. \tag{A.2}$$

Genom att utnyttja de kända relationerna

$$V = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{A.3}$$

och

$$I = C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \tag{A.4}$$

för spänning och ström, i kombination med ekvation (A.1) och (A.2), kan vi uttrycka kretsens "kinetiska" energi som

$$\mathcal{T}_C = \frac{1}{2}C\dot{\Phi}^2, \tag{A.5}$$

och dess "potentiella" energi som

$$\mathcal{U}_L = \frac{1}{2L}\Phi^2. \tag{A.6}$$

Skillnaden mellan dessa är lagrangianen för kretsen, som entydigt bestämmer systemets tidsutveckling [5, s. 3-4], och även kan användas för att beräkna systemets hamiltonian. Lagrangianen för systemet blir med andra ord

$$\mathcal{L} = \mathcal{T}_C - \mathcal{U}_L = \frac{1}{2}C\dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2L}\Phi^2. \tag{A.7}$$

Systemets hamiltonian ges sedan av lagrangianens Legendretransformation [5, s. 3-4], enligt

$$H = \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\dot{\Phi}}\dot{\Phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}C\dot{\Phi}^2 + \frac{1}{2L}\Phi^2. \tag{A.8}$$

Då laddningen Q i kondensatorn är relaterad till Φ genom $Q = C\dot{\Phi}$ går detta att skriva om till

$$H = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L}. \tag{A.9}$$

Eftersom Q och Φ uppfyller Poissonparentesrelationen

$$\{\Phi, Q\} = \frac{\delta\Phi}{\delta\Phi}\frac{\delta Q}{\delta Q} - \frac{\delta Q}{\delta\Phi}\frac{\delta\Phi}{\delta Q} = 1 - 0 = 1 \tag{A.10}$$

kommer deras operatormotsvarigheter i den kvantmekaniska linjära LC-kretsen att uppfylla kommutationsrelationen

$$\left[\hat{\Phi}, \hat{Q}\right] = \hat{\Phi}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{\Phi} = i\hbar. \tag{A.11}$$

B

Hamiltonianen för en sammanlänkande kondensator

Hamiltonianen för en kondensator som kopplar ihop två transmonkvantbitar ges av operatormotsvarigheten till den lagrade energin. Med andra ord får vi, om kapacitansen för kondensatorn är C_g, att

$$\hat{H} = \frac{1}{2}C_g(\hat{V}_1 - \hat{V}_2)^2 = \frac{1}{2}C_g\Big(\hat{V}_1^2 + \hat{V}_2^2 - 2\hat{V}_1\hat{V}_2\Big), \tag{B.1}$$

eftersom $\hat{V}_1$ och $\hat{V}_2$ kommuterar. Om kretsarna som kopplas ihop är transmonkvantbitar med kapacitanser C_1 och C_2 gäller

$$\hat{H} = \frac{1}{2}C_g\left(\frac{\hat{Q}_1^2}{C_1^2} + \frac{\hat{Q}_2^2}{C_2^2}\right) - \frac{C_g}{C_1C_2}\hat{Q}_1\hat{Q}_2, \tag{B.2}$$

då $\hat{Q}_i = C_i\hat{V}_i$. De två termerna med $\hat{Q}_1^2$ och $\hat{Q}_2^2$ kan bakas in i de delar av hamiltonianen som beskriver respektive kvantbit genom att ändra deras effektiva karakteristiska frekvenser. Om $C_g \ll C_1, C_2$ är justeringen av de karakteristiska frekvenserna som krävs dock mycket liten. Den återstående termen ges av

$$\hat{H}' = -\frac{C_g}{C_1C_2}\hat{Q}_1\hat{Q}_2, \tag{B.3}$$

vilket enligt ekvation (2.39) kan uttryckas som

$$\hat{H}' = g_{12}\Big(\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger\Big)\Big(\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger\Big) \tag{B.4}$$

för en viss kopplingskoefficient g_{12}.

INSTITUTIONEN FÖR MIKROTEKNOLOGI OCH NANOVETENSKAP
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg, Sverige
www.chalmers.se

CHALMERS
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY