



CHALMERS



Balansering av en inverterad pendel med ett reaktionshjul

Utveckling av ett självbalanseringssystem för elsparkcyklar

Examensarbete inom högskoleingenjörsprogrammet Mekatronik

Rasmus Ekedahl
Linnea Lundberg

INSTITUTIONEN FÖR ELEKTROTEKNIK

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORG, SVERIGE 2022

www.chalmers.se

EXAMENSARBETE 2022

Balansering av en inverterad pendel med ett reaktionshjul

Utveckling av ett självbalanseringssystem för elsparkcyklar

RASMUS EKEDAHL
LINNEA LUNDBERG



CHALMERS

Institutionen för Elektroteknik
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg, Sverige 2022

Balansering av en inverterad pendel med ett reaktionshjul
Utveckling av ett självbalanseringssystem för elsparkcyklar
RASMUS EKEDAHL, LINNEA LUNDBERG

© RASMUS EKEDAHL, LINNEA LUNDBERG, 2022.

Handledare: Björn Bergholm, Broccoli Engineering
Examinator: Veronica Olesen, Institutionen för Elektroteknik

Examensarbete 2022
Institutionen för Elektroteknik
Chalmers Tekniska Högskola
412 96 Göteborg
Telefon +46 31 772 1000

Framsida: Inverterad pendel med reaktionshjul

Göteborg, Sverige 2022

Balansering av en inverterad pendel med ett reaktionshjul
Utveckling av ett självbalanseringssystem för elsparkcyklar
RASMUS EKEDAHL & LINNEA LUNDBERG
Institutionen för Elektroteknik
Chalmers Tekniska Högskola

Sammanfattning

Elsparkcyklar har snabbt etablerats som ett nytt transportmedel i samhället och ett problem som uppstått på grund av detta är att elsparkcyklar för uthyrning parkeras olägligt och är i vägen för andra trafikanter. För att hitta en möjlig lösning på problemet ville företaget Broccoli Engineering undersöka möjligheten för elsparkcyklar att kunna parkera om sig själva. Ett första steg i denna undersökning blev att utforska möjligheten att konstruera ett system som möjliggör självbalansering av elsparkcyklarna vilket senare kan vidareutvecklas till ett autonomt parkeringssystem.

Syftet med projektet var att undersöka ett koncept för att balansera en mindre prototyp av en inverterad pendel samt att utvärdera dess möjligheter att skalas upp till att balansera en elsparkcykel. Ett flertal potentiella balanseringskoncept togs fram och utvärderades med en Kesselringmatris. Ett koncept baserat på att balansera en inverterad pendel med hjälp av ett reaktionshjul framstod som mest lovande och en prototyp utvecklades i syfte att undersöka om konceptet fungerade.

För att möjliggöra reglering samt att kontrollera rimligheten av konceptet föregicks konstruktionen av prototypen av en matematisk modellering och simulering. Konstruktionen av prototypen delades sedan in i två försök där det andra försöket tog lärdom av slutsatser från det första försöket. I det praktiska arbetet ingick införskaffning av lämpliga komponenter, mekanisk konstruktion av systemets delar och infästningar samt programmering av reglersystemet.

Projektet resulterade i en inverterad pendel som under en kortare period kan balansera i upprätt läge med hjälp av ett reaktionshjul och tillståndsåterkoppling. Prototypen kan återhämta sig från vinklar på cirka 15 grader och balansera kring sin instabila jämviktspunkt under en kortare period. Det som inte har uppnåtts är att stabilisera processen över tid eftersom pendeln alltid faller efter ett antal sekunder.

Sammanfattningsvis kan det konstateras att prototypens balanseringsförmåga har stora utvecklingsmöjligheter. Konceptet framgick däremot som besvärligt att skala upp och baserat på resultatet från detta försök ansågs lösningen att balansera elsparkcyklar med hjälp av reaktionshjul som otympligt då det inte uppfyller projektets krav på kompakthet.

Abstract

In recent years electric scooters for hire have increased in popularity in urban areas. While providing a convenient mobility option, the scooters have also brought about some unintended consequences. Scooters are commonly parked in inconvenient places where they obstruct the way for pedestrians and other road users. To find a solution to this problem Broccoli Engineering wanted to investigate the feasibility of creating an automated parking system for electric scooters. The first step in this process was to create a system that enables the two-wheeled scooters to balance in an upright position, which can subsequently be further developed into a fully automated parking system. The aim of the project was to develop a prototype of an inverted pendulum that can balance itself and evaluate the ability to scale up the system to balance an electric scooter. A number of concepts were developed and evaluated with a Kesslering matrix. The concept of balancing an inverted pendulum with a reaction wheel appeared to be the most feasible and a prototype of this concept was constructed.

In order to control the system and check the feasibility of the concept, the construction of the prototype was preceded by mathematical modelling and simulations of the system dynamics. The design and assembly of the prototype was divided into two separate attempts where the second was based on conclusions and observations from the first attempt. The practical work included, among other things, identifying suitable components, mechanical design of the prototype, and programming of the control system.

The resulting prototype was an inverted pendulum that can balance in an upright position during a short period of time with the help of a reaction wheel and state feedback control. The system can be initiated at around 15 degrees, recover to a vertical reference point and then balance there for a short while. The part of the project that has not been achieved is stable balancing over time as the pendulum always falls after a short period.

While many improvements to enhance the prototype's balancing ability could be further explored and implemented, the system would however still be unable to fulfill the project's initial requirements for compactness. The conclusion is that a self-balancing system based on the inverted pendulum concept would not be a suitable technique to scale up and implement on electric scooters.

Keywords: Inverted pendulum, Reaction wheel, Electric Scooter, Full state feedback control, LQR-control

Förord

Det här arbetet utfördes av två chalmersstudenter som examensarbete på högskoleingenjörsprogrammet Mekatronik. Examensarbetet motsvarar 15 högskolepoäng och utfördes på företaget Broccoli Engineering AB.

Vi vill tacka vår handledare Björn Bergholm, samt Ola Ljunggren och Elias Hakuni på Broccoli som har bidragit med expertis och goda råd till arbetet. Slutligen vill vi även tacka vår examinator Veronica Olesen som bidragit med stöd och support under arbetets gång.

Rasmus Ekedahl och Linnea Lundberg, Göteborg, 2022

Terminologi och förkortningar

Nedan presenteras en lista på de förkortningar som har används i rapporten. Dessa är sorterade i alfabetisk ordning.

BLDC motor	Borstlös likströmsmotor.
ESC	Electric Speed Controller
I/O	In- och utportar.
LQR	Linear Quadratic Regulator.
MISO	Multiple Input, Single Output
MEMS	Micro-Electro-Mechanical System
PWM	Pulsbreddsmodulering
RPM	Revolutions Per Minute

Innehåll

Terminologi och förkortningar	ix
Figurer	xv
Tabeller	xvii
1 Inledning	1
1.1 Bakgrund	1
1.2 Syfte	1
1.3 Avgränsningar	2
1.4 Precisering av frågeställning	2
2 Teoretisk referensram	3
2.1 Inverterad pendel	3
2.2 Reaktionshjul	3
2.3 Tillståndsmodell	4
2.4 Borstlös likströmsmotor	5
2.5 Motordrivare (ESC)	6
2.6 Magnetisk rotationsenkoder	6
2.7 MPU6050 - Accelerometer och gyroskop	7
3 Metod	9
3.1 Uppstartsfas och tidsplan	9
3.2 Konceptgenerering och utvärdering	9
3.3 Modellering och simulering	9
3.4 Konstruktion och test av hårdvara	10
3.5 Slutgiltig testning och kalibrering av system	10
4 Konceptgenerering och utvärdering	11
5 Modellering och simulering	13
5.1 Matematisk modellering	13
5.1.1 Det mekaniska systemet och differentialekvationer	13
5.1.2 Tillståndsmodell	15
5.1.3 Linjärisering	16
5.2 Simulering och beräkning av återkoppling	16
5.2.1 Styrbarhet	16

5.2.2	Simulering av linjärt system	17
5.2.3	Beräkning av återkoppling	18
6	Hårdvara	23
6.1	Motor och motordrivare	23
6.2	Vinkelsensor	23
6.3	Magnetisk rotationsgivare	24
6.4	Styrenhet	24
6.5	Nätaggat	24
6.6	Mekanisk design	25
6.6.1	Reaktionshjul	25
6.6.2	Pendelarm	25
7	Styrning och Programmering	27
7.1	Viktiga variabler	27
7.2	Programmets upplägg	27
7.2.1	Funktionen get_states	29
8	Konstruktion av prototyp	31
8.1	Sammankoppling av komponenter	31
8.2	Sammansättning av system	32
8.3	Resultat av första prototyp	32
8.4	Förändringar av första konceptet	33
8.4.1	Ny motor och motordrivare	33
8.4.2	Förändringar av mekanisk design	34
8.4.3	Sammankoppling av system	35
8.4.4	Filtrering av vinkeldata	37
9	Kalibrering av system	39
9.1	Optimering av storleken på reaktionshjulet	39
9.2	Kalibrering av återkopplingsförstärkning	42
10	Resultat	45
10.1	Resultat av försök 1	45
10.2	Resultat av försök 2	46
10.3	Svar på frågeställningar	48
11	Diskussion	49
11.1	Upplägg av arbetet	49
11.2	Val av koncept	49
11.3	Komponenter	50
11.3.1	MPU6050	50
11.3.2	Motor och motordrivare	50
11.4	Utvecklingsmöjligheter	51
11.5	Etik och Hållbarhet	51
	Litteratur	53

A	GANTT-schema	I
B	Matematiska beräkningar	III
B.1	Pendelns fall	III
B.1.1	Summering av vridmoment	IV
B.1.2	Tröghet kring pendelns fixa axel	IV
B.2	Reaktionshulets rotation	V

Figurer

2.1	Exempel på inverterad pendel. Från [3]. Återgiven med tillstånd.	3
2.2	Inrunner och Outrunner. Från [8] Återgiven med tillstånd.	5
2.3	Relation mellan varvtal och vridmoment baserat på KV-rating.	6
2.4	Koncept för enkoder med 6-polig permanentmagnet.	7
4.1	Kravspekifikation	11
4.2	Kesselringmatris för konceptgenerering.	12
5.1	Friläggning av inverterad pendel med reaktionshjul.	13
5.2	Modell för tillståndsåterkoppling i Simulink.	17
5.3	Vinkel θ vid 10° startvärde.	19
5.4	Vinkelhastighet $\dot{\theta}$ vid 10° startvärde.	20
5.5	Vinkelhastighet på reaktionshjul $\dot{\varphi}$ vid 10° startvärde.	20
5.6	Vridmoment från motor τ vid 10° startvärde.	20
6.1	Motor och motordrivare som användes vid första försöket.	23
6.2	Vinkelsensor MPU6050.	24
6.3	CAD-ritning för de 3D-printade komponenterna.	25
7.1	Flödesschema för programstruktur.	28
8.1	Förenklat kretschema över systemet.	31
8.2	Den första versionen av den sammankopplade inverterade pendeln.	32
8.3	Motor och motorparametrar.	33
	(a)	33
	(b)	33
8.4	Motordrivare 40A (ESC).	34
8.5	CAD-ritningar för första och andra designen. Förändringar kan ses på toppen av pendelarmen och centrum av reaktionshjulet.	34
8.6	Sammansatt prototyp.	35
8.7	Fäste av enkoder på pendel.	36
8.8	Vinkeldata från accelerometer, gyroskop samt complementary filter.	37
9.1	Olika storlekar på reaktionshjul.	39
9.2	Vinkeldata från tre tester med olika storlek på reaktionshjul.	40
9.3	Slutgiltigt reaktionshjul med extra massa applicerat.	41
9.4	Systemets poler och dess karaktäristik.	43

10.1	Slutgiltigt resultat för styrning av pendeln med den första motorn. . .	45
10.2	Slutgiltigt resultat för styrning av pendeln med den andra motorn. Startvinkel vid noll grader.	47
10.3	Slutgiltigt resultat för styrning av pendeln med den andra motorn. Startvinkel på 15 grader.	47
A.1	GANTT-schema för projektet.	II
B.1	Friläggning av inverterad pendel med reaktionshjul.	III

Tabeller

5.1	Lista över variabler som använts under beräkningarna.	14
5.2	Lista över tillståndsvariabler och styrsignaler.	15
5.3	Uppskattade variabelvärden för simulering.	18
7.1	Lista över de huvudsakliga variabler och konstanter som används i programmet.	27
7.2	Reglersystemets olika funktioner samt deras uppgifter.	29
8.1	Parametrar för prototypens delkomponenter.	36

1

Inledning

I det inledande kapitlet presenteras problemet som angripits under projektet och varför det är relevant att utforska. Detta innefattar bakgrund samt projektets syfte, avgränsningar och frågeställningar.

1.1 Bakgrund

Elsparcyklar för uthyrning har blivit allt mer förekommande i samhället som ett allmänt transportmedel. Dessa elsparkcyklar kan finnas samt parkeras var som helst inom ett bestämt område vilket ökar flexibiliteten och transportmöjligheterna. Ett problem som uppstår på grund av detta är att elsparkcyklar parkeras olägligt och riskerar att gå sönder samt hindra framfart för andra trafikanter.

Hållbarheten är också ett problem då frekvent och vårdslös användning kan resultera i skador och slitage på elsparkcyklarna. Enligt en rapport av Schellong et al. [1] beräknas en elsparkcykels livslängd vara några månader, vilket ökar resursförbrukning vid nyproduktion och ger höga kostnader för företagen som står för uthyrningen. I rapporten framgår det även att uthyrande företag måste hyra ut varje elsparkcykel i minst fyra månader för att investeringen ska vara lönsam och täcka alla utgifter.

Då en bidragande faktor till slitage på elsparkcyklar kan kopplas till felaktig parkering skulle en lösning kunna vara en inbyggd funktion hos elsparkcyklar att förflytta sig själva vid problematisk parkering. Detta skulle potentiellt kunna minska kostnad samt resursförbrukning för företagen som tillhandahåller uthyrning av elsparkcyklar. Baserat på detta vill Broccoli Engineering utforska möjligheterna att implementera denna typ av system på en elsparkcykel. För att avgränsa projektets omfattning kommer enbart ett system för självbalansering att utredas i detta projekt med potential för vidareutveckling till ett autonomt parkeringssystem.

1.2 Syfte

Syftet med examensarbetet är att skapa en mindre prototyp av en elsparkcykel som balanserar sig själv vid stillastående- och upprätt läge. Möjligheten att skala upp prototypen till en fullskalig självbalanserande elsparkcykel kommer också att utvärderas.

1.3 Avgränsningar

För att definiera projektets omfattning har följande avgränsningar fastställts.

- Projektet kommer inte innefatta att konstruera en självbalanserande elsparkcykel utan en mindre prototyp för att utforska konceptet.
- Konceptet med en självbalanserande elsparkcykel förutsätter att den endast balanserar sig själv. D.v.s. utan vikt eller förare på.
- Det är bara en av många möjliga tekniker för att balansera en inverterad pendel som kommer att utforskas på djupet.
- Möjligheten att balansera en elsparkcykel som kör framåt eller autonom framfart så som hinderdetektering eller att följa en designerad rutt kommer inte att utforskas.

1.4 Precisering av frågeställning

Under projektets gång ska följande frågor besvaras.

- Har det under projektet valda konceptet potential att skalas upp till att balansera en elsparkcykel?
- Hur stabilt kan systemet konstrueras?
- Till hur stor grad kan LQR användas för att kalibrera systemet?

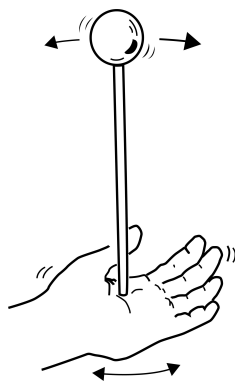
2

Teoretisk referensram

I följande kapitel beskrivs koncept, komponenter samt övrig teori som har utnyttjats i projektet.

2.1 Inverterad pendel

En inverterad pendel är ett klassiskt problem inom reglertekniken och bygger på att en massa ska balanseras på en stav i upprätt läge enligt figur 2.1. Denna typ av system är i grunden instabilt och kräver därmed återkoppling för att kunna hålla sig stabil i den önskade positionen [2].



Figur 2.1: Exempel på inverterad pendel. Från [3]. Återgiven med tillstånd.

Det finns många exempel på instabila processer som bygger på inverterade pendlar. I denna rapport kommer balansering av en sparkcykel behandlas som en inverterad pendel då den ej kan balanseras i upprätt läge utan ett implementerat återkopplat system.

2.2 Reaktionshjul

Principen bakom ett reaktionshjul bygger på Newtons tredje lag om rotation. För varje applicerat vridmoment uppstår ett lika stort och motriktat vridmoment. Acceleration av ett reaktionshjul i ena riktningen resulterar i ett motriktat moment som verkar på kroppen reaktionshjulet sitter applicerat på. Detta används bland annat för att stabilisera robotar under vatten [4], eller av NASA för att rotera

satelliter i tyngdlöshet [5]. Eftersom det är acceleration av reaktionshjulet och inte hastighet som genererar ett vridmoment så har konceptet en inbyggd begränsning då ett objekt inte kan accelerera eller retardera oändligt.

2.3 Tillståndsmodell

Tillståndsmodeller används för att beskriva linjära differentialekvationer på matrisform enligt ekvation (2.1). Tillståndsmodellen på formen (2.1) är ett sätt att uttrycka linjära differentialekvationer för att möjliggöra simulering [3].

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx + Du \quad (2.1)$$

I ekvationen ovan är A, B, C och D matriser, x är tillståndsvektorn och innehåller de tillstånd som regleras, u är regleringens styrsignaler och \dot{x} är derivatan av tillståndsvektorn. Metoden är vanligt förekommande vid modellering av komplexa system med exempelvis multivariabla in-/utsignaler och beskriver sambandet mellan dessa signaler vid varje tillstånd x och styrsignal u. Matriserna för tillståndsmodellen är konstanta där enbart tillståndsvektorn x och styrsignalen u påverkar modellens utsignal.

För reglering av processer på tillståndsform kan tillståndsåterkoppling användas för att uppnå ett återkopplat system. Det som återkopplas i det slutna systemet är tillståndsvektorn x och för att detta ska vara möjligt krävs det att systemets tillstånd är observerbara. Då detta villkor uppfylls kan ett system slutas och skrivas som en tillståndsmodell enligt (2.2) istället för (2.1) då de återkopplade tillstånd nu blir systemets insignal.

$$u = x \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = (A + B)x \quad (2.2)$$

För att kunna kontrollera alla tillstånd med hjälp av systemets insignal krävs det även att systemet är styrbart och därmed uppfyller ekvation (2.3) [6]. Om villkoret för styrbarhet uppfylls innebär detta att det återkopplade systemets insignal kan styra varje initialt tillstånd till alla nåbara tillstånd inom ett visst tidsintervall.

$$\det(W) = \det\left(\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\right) \neq 0 \quad (2.3)$$

För att stabilisera ett tillståndsåterkopplat system bör systemets poler placeras optimalt för att uppnå en balans mellan ett snabbt och stabilt system [6]. En metod för att beräkna en lämplig återkopplingsförstärkning är LQ-reglering (Linear-quadratic regulator) som utnyttjar två straffmatriser Q och R för att beräkna återkopplingsförstärkningen. Straffmatrisen Q gör det möjligt att påverka varje enskilt tillstånds prestation genom att bestraffa hur mycket varje tillstånd avviker från dess börvärde. Den andra straffmatrisen, R gör det möjligt att styra varje styrdons ansträngning. Detta möjliggör kontroll av hur stora styrsignaler som systemet får generera samt hur mycket energi som får användas. Straffmatriserna används därefter för att minimera kostnadsfunktionen (2.4) vilket betecknas som J. Hur återkopplingsförstärkningen K därefter matematiskt beräknas ur kostnadsfunktionen J ligger utanför rapportens omfång men kan beräknas med hjälp av Matlab.

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) \quad (2.4)$$

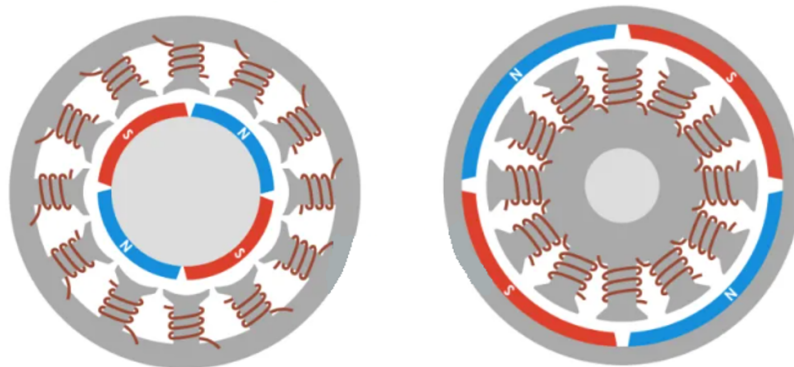
Återkopplingsförstärkningen K inkluderas i återkopplingen och tillståndsmodellen blir slutligen enligt (2.5). Här är vektorn K en förstärkning av felet mellan börvärdet och tillstånden vid stabilisering av ett system.

$$u = -Kx \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = (A - BK)x \quad (2.5)$$

2.4 Borstlös likströmsmotor

En likströmsmotor består av två huvudkomponenter, en stator och en rotor [7]. Statorn består av spolar vilket är lindningar av koppartråd och rotorn är ofta en permanentmagnet. Likströmsmotorn omvandlar elektrisk ström till rörelseenergi genom att strömsätta varje enskild spole efter varandra. Detta skapar ett magnetfält mellan stator och rotor vilket konverterar den elektriska styrsignalen till rotation av en motoraxeln.

Borstlösa likströmsmotorer kan delas upp i två kategorier, *inrunner*- samt *outrunner*-motorer [7]. Skillnaden i uppbyggnad av dessa två typer av motorer förtydligas i figur 2.2 .



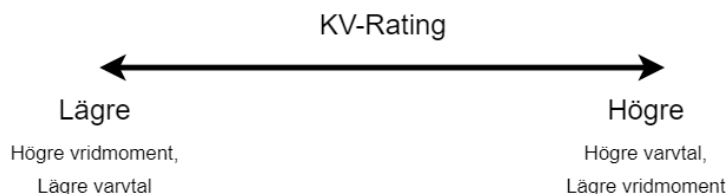
(a) Uppbyggnad av inrunner-motor där permanentmagneterna i rotorn är innanför spolarna i statorn

(b) Uppbyggnad av outrunner-motor där permanentmagneterna i rotorn är utanför spolarna i statorn.

Figur 2.2: Inrunner och Outrunner. Från [8] Återgiven med tillstånd.

En inrunner-motor har rotorn på insidan av statorn, d.v.s det är den inre axel i motorn som roterar. En outrunner-motor har istället rotorn på utsidan av statorn så att det yttre skalet roterar. Denna skillnad ger motortyperna en skild karaktäristik där inrunner-motorn generellt är snabbare men svagare än outrunner-motorn.

För att beskriva relationen mellan en motors varvtal och den applicerade spänningen används graderingssystemet *KV-rating* vars karakteristik förtydligas i figur 2.3.



Figur 2.3: Relation mellan varvtal och vridmoment baserat på KV-rating.

KV-rating är ett nyckeltal som då kan användas för att avgöra en motors karakteristik. En lägre KV-rating ger högre vridmoment men lägre hastighet, medan en högre KV-rating resulterar i högre maxhastighet på motorn men lägre vridmoment. En motors KV-rating kan beräknas med hjälp av (2.6) som beskriver relationen mellan KV-rating, varvtal och spänning.

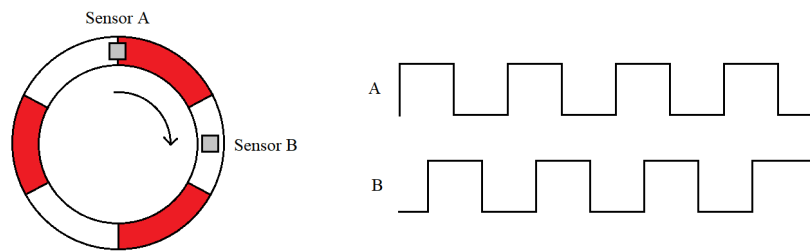
$$\text{KV-rating} = \frac{\text{Varvtal [RPM]}}{\text{Spänning [V]}} \quad (2.6)$$

2.5 Motordrivare (ESC)

En *Electric speed controller* (ESC) är en elektrisk varvtalsregulator som kopplas mellan likströmsmotorn, strömkällan och styrenheten. En ESC får PWM-signaler (pulsbreddsmodulering) från styrenheten och styr baserat på detta ordningen som motorns spolar strömförs. På detta sätt möjliggörs kontroll av en motors hastighet och riktning [9].

2.6 Magnetisk rotationsenkoder

I detta projekt har en magnetisk rotationsenkoder använts för att avläsa rotationshastighet och riktning för en borstlös likströmsmotor. Enkodern gör om rotationsrörelse till digitala signaler. För detta används två olika komponenter: en 6-polig magnet och en sensor som känner av hur magnetfältet förändras. Sensor-komponenten består i sin tur av två DRV5013 hall-effekt sensorer som sitter i 90° vinkel från varandra [10]. När magnetskivan roterar känner sensorerna av förändring i magnetfältet, där närhet till en sydpol ger låg signal och närhet till en nordpol ger hög signal. På grund av förskjutningen i vinkel får de två sensorerna (ofta nämnda kanal A och kanal B) en färförskjutning mellan de två digitala pulserna när magnetdisken roterar. Denna förskjutning varierar mellan -90° och +90° beroende på vilket håll magnetdisken snurrar åt och detta ger enkodern möjlighet att avgöra rotationsriktning.



Figur 2.4: Koncept för enkoder med 6-polig permanentmagnet.

2.7 MPU6050 - Accelerometer och gyroskop

För att mäta pendelns vinkel och vinkelhastighet har en MPU6050 använts. Det är en MEMS-komponent (*micro-electromechanical system*), det vill säga mikroelektronik med rörliga delar [11]. Sensorn mäter linjär acceleration samt rotationshastighet i alla tre dimensioner. Detta ger möjlighet att läsa av en kropps position och riktning i rummet, vilket används bland annat i smartphones.

En kropps vinkel i rummet kan avläsas ur antingen accelerometerdata eller gyroskopdata men båda sätt har sina nackdelar [11][12]. Data från accelerometern får mycket störningar både från den konstanta accelerationen från jordens gravitation och högfrekventa störningar från vibrationer. Vinkeln kan också beräknas genom att integrera rotationshastigheten från gyroskopet, men detta ger värdet på vinkeln en tendens att förskjutas över tid från integrationen. Ingen av dessa två sätt är på egen hand optimalt för att räkna ut vinkeln, men deras båda nackdelar går att minimera genom att kombinera båda typerna av data med ett filter [12].

2. Teoretisk referensram

3

Metod

Projektets arbetsprocess delas upp i ett flertal delmoment i syfte att effektivisera arbetet och samtidigt säkerställa att problem kan upptäckas och åtgärdas löpande. Nedan beskrivs i stora drag de olika delar som projektet innefattade och den metodik som användes.

3.1 Uppstartsfas och tidsplan

Projektet påbörjades med en planeringsfas kring upplägg och tidsåtgång. Ett GANTT-schema konstruerades enligt bilaga A för att planera tidsåtgång för de olika delmomenten. En kravspecifikation fastställdes därefter för att sätta krav och önskemål på en balanserande elsparkcykel. Under uppstartsfasen av projektet utfördes även en informationssamling kring inverterade pendlar och självbalanserade fordon.

3.2 Konceptgenerering och utvärdering

Nästa steg blev att generera koncept och idéer för balansering av en elsparkcykel. Dessa utvärderades för att fastställa vilket koncept som verkade mest lovande och som skulle tas vidare till en mindre fysisk prototyp. De koncept som togs fram utvärderades med hjälp av en Kesselringmatrix.

3.3 Modellering och simulering

Matematisk modellering användes för att beskriva hur en inverterad pendel rör sig vid ett fall. Detta genomfördes med hjälp av friläggning av sparkcykeln samt det valda konceptet för balansering. Därefter beräknades de dynamiska och kinematiska relationerna som beskriver hur de olika krafterna påverkar systemet vilket beskrevs med hjälp av differentialekvationer.

Efter att ha tagit fram differentialekvationer för pendelns dynamik kunde systemet simuleras med hjälp av Matlab och Simulink. I simuleringen kunde tillståndens karaktäristik analyseras och slutsatser kunde dras kring vilken hårdvara som var lämplig.

3.4 Konstruktion och test av hårdvara

Baserat på datorsimuleringens resultat och de framtagna begränsningarna för systemets styr signaler kunde lämpliga komponenter införskaffas samt konstrueras. Därefter testades alla komponenter separat för att minska felsökningen senare i projektet.

Sammansättningen av prototypen delades upp i två försök då den första motorn som implementerades inte kunde prestera efter önskemål. En ny motor införskaffades baserat på slutsatserna av det första försöket och resterande hårdvara anpassades därefter.

3.5 Slutgiltig testning och kalibrering av system

Till sist kunde det sammankopplade reglersystemet testas, där mjukvara och hårdvara justerades för att optimera dess stabilitet. Detta innebar bland annat optimering av reaktionshjul samt kalibrering av återkopplingsförstärkningen och analys av dess karaktäristik.

4

Konceptgenerering och utvärdering

Följande sex kapitel beskriver genomförandet av projektets olika delar och förtydligar de metoder, beräkningar samt beslut som gjorts under arbetet.

Projektet inleds med ett GANTT-schema för planering av upplägg (bilaga A) och en kravspecifikation som sammanställs av projektgruppen i samråd med handledaren (se figur 4.1). Kravspecifikationen innehåller de projektspecifika funktionerna, prestandan samt dimensioner och materialkrav som önskas av en balanserande elsparkcykel oavsett vilken teknisk lösning som skulle implementeras. Konzepten genereras anpassade för att kunna appliceras på en sparkcykel och som sedan kan skalas ner till en prototyp.

Kriterier	Målvärde	Krav/Onskemål	Verifieringsmetod	Kravställare	Prioritet
Funktion					
Balansering	Svängningsvinkel ± 5 grader	K	Testning	Projektgrupp & Broccoli	HÖG
Hantering av externa störningar	Ska hantera någorlunda stora externa störningar	O	Testning	Projektgrupp & Broccoli	MEDEL
Avstängnings funktion för skydd av komponenter	Justerbar maximal vinkel	K	Simulering och test	Projektgrupp & Broccoli	HÖG
Fallskydd för systemet	Fall ska inte skada systemet	O	Testning	Projektgrupp	MEDEL
Skydd för användaren	Skadeförebyggande skydd på systemet	K	Observation	Broccoli	MEDEL
Prestanda					
Balansering över tid	10 minuter	O	Observation	Projektgrupp & Broccoli	MEDEL
Energikonsumtion	Inte reducera drifttid för mycket för sparkcykelns vanliga system	K	Mätning	Projektgrupp & Broccoli	HÖG
Dimensioner					
Maximal bredd	0.4 m (Ej bredare än sparkcykelns styre)	K	Mätning	Projektgrupp	MEDEL
Systemets vikt	30kg	K	Vågning	Projektgrupp	MEDEL
Material					
Prioritera hållbart producerat material	100%	K	Informationssökning	Broccoli	HÖG
Återbrukningsbarhet	Isärtagbara komponenter	O	Observation	Projektgrupp	LAG

Figur 4.1: Kravspecifikation

Då kravspecifikationen var fastställd kan en fakta- och kunskapsinsamling genomföras för att ta fram vilka koncept som potentiellt skulle kunna implementeras i det aktuella fallet. De lösningar som tas vidare till konceptutvärderingen beskrivs kortfattat nedan:

- Gyroskop: Utnyttjar den gyroskopiska effekten av ett konstant roterande hjul.
- Reaktionshjul: Utnyttjar tröghetsmomentet i ett svänghjul för att skapa vridmoment.
- Transmission på styret: Förflyttar en massa längst sparkcykelns styre för att reglera tyngdpunktens placering i sidled.
- Dubbel pendel: En inverterad pendel placerad på elsparkcykelns styre som tappar åt motsatt håll för att motverka ett fall.

4. Konceptgenerering och utvärdering

Figur 4.2 visar en kesselringmatrix som har använts för att rangordna olika lösningsalternativ baserat på kriterier fastställda av projektgruppen.

Kriterier	Koncept											
		Ideal			Gyroskop		Reaktionshjul		Transmission på styret		Dubbel pendel	
	Vikt	Värde	Totalt (Vikt*Värde)	Värde	Totalt	Värde	Totalt	Värde	Totalt	Värde	Totalt	
Kompakt design	3	5	15	2	6	4	12	3	9	1	3	
Pris	3	5	15	2	6	4	12	4	12	2	6	
Genomförbarhet	5	5	25	3	15	4	20	3	15	3	15	
Säkerhet	2	5	10	3	6	5	10	2	4	1	2	
Potential	4	5	20	4	16	4	16	2	8	3	12	
Summa			85		49		70		48		38	

Figur 4.2: Kesselringmatrix för konceptgenerering.

Varje kriterie viktas baserat på kravspecifikationen samt antaganden om vad som är avgörande för resultatet. En kortare litteraturstudie görs sedan inom varje område för att sedan ge varje koncept ett värde. Slutligen sammanställs konceptens olika resultat multiplicerat med dess viktning vilket resulterar i en totalsumma som motsvarar de olika lösningarnas potential.

Baserat på resultatet från kesselringmatrisen kan ett koncept fastställas. Då konceptet baserat på ett reaktionshjul fick bäst resultat på nästan alla kriterier tas beslutet att gå vidare med detta. Baserat på det fastställda konceptet ska en liten prototyp skapas för att undersöka om det valda konceptet fungerar samt hur möjligt det vore att skala upp det till en fullstor elsparkcykel.

5

Modellering och simulering

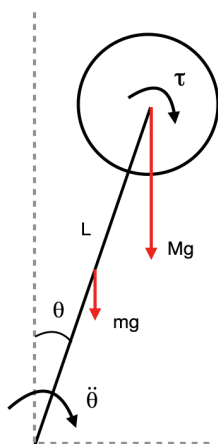
För att kunna undersöka och beskriva hur systemet rör sig görs matematiska modeller av det mekaniska systemet. Detta görs för att möjliggöra simulering i Matlab och Simulink både med och utan återkoppling för att se om systemet går att kontrollera samt se vilka styrsignaler som krävs av systemets komponenter. Med hjälp av modellen kan även återkopplingsparametrar optimeras.

5.1 Matematisk modellering

En matematisk modell av pendeln skapas i form av differentialekvationer som beskriver pendelns fall. Ekvationen görs sedan om till matrisform för att utgöra en tillståndsmodell. Då ena differentialekvationen som används är olinjär behöver systemet även linjäriseras.

5.1.1 Det mekaniska systemet och differentialekvationer

För att möjliggöra analys av systemet krävs differentialekvationer som beskriver hur pendeln faller. Dessa ekvationer beräknas genom att systemet friläggs enligt figur 5.1 där variablerna som används beskrivs i tabell 5.1. Vinkeln på pendeln representeras med θ och sätts som $\theta = 0^\circ$ då pendeln står rakt upp.



Figur 5.1: Friläggning av inverterad pendel med reaktionshjul.

Tabell 5.1: Lista över variabler som använts under beräkningarna.

Variabel	Beskrivning
θ	Vinkel på pendeln
$\dot{\theta}$	Vinkelhastighet på pendeln
$\ddot{\theta}$	Vinkelacceleration på pendeln
φ	Vinkel på reaktionshjul
$\dot{\varphi}$	Vinkelhastighet på reaktionshjul
$\ddot{\varphi}$	Vinkelacceleration på reaktionshjul
m_p	Massa på pendeln
m_r	Massa på reaktionshjul
m_m	Massa på motor till reaktionshjul
g	Gravitationskonstant
τ	Vridmoment från motor
L	Längd på pendeln
r	Radie på reaktionshjul
I_{tot}	Systemets totala tröghetsmoment kring rotationspunkten O
I_{PO}	Pendelns tröghetsmoment runt rotationspunkten O
I_{MO}	Motorns tröghetsmoment runt rotationspunkten O
I_{RO}	Reaktionshjulets tröghetsmoment runt rotationspunkten O
I_R	Reaktionshjulets tröghetsmoment runt sin egen centrumaxel

De fullständiga beräkningarna finns att följa i bilaga B och de slutliga differentialekvationerna beskrivs i ekvation (5.1) och (5.2).

$$\ddot{\theta} = \frac{(m_r + m_m + 0.5m_p)Lg \sin(\theta) - \tau}{\frac{m_p L^2}{3} + m_m L^2 + m_r r^2 + m_r L^2} \quad (5.1)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\tau}{m_r r^2} \quad (5.2)$$

Differentialekvationerna beskriver systemets två rörliga delar, pendeln och reaktionshjulet, där (5.1) beskriver hur pendelns vinkelacceleration $\ddot{\theta}$ beror på vinkeln på pendeln θ , trögheten runt pendelns rotationsaxel samt det vridmoment τ som appliceras från motorn. Ekvation (5.2) beskriver sambandet mellan vinkelaccelerationen på reaktionshjulet $\ddot{\varphi}$, trögheten på reaktionshjulet och vridmomentet τ från motorn.

5.1.2 Tillståndsmodell

För att lättare kunna implementera och analysera pendelns rörelse i mjukvara skrivs differentialekvationerna om på tillståndsform enligt ekvation (2.1). De tre tillstånden som regleras samt utsignalen för systemet listas i tabell 5.2.

Tabell 5.2: Lista över tillståndsvariabler och styrsignaler.

Tillståndsvariabel	Beskrivning
x_1	θ : Vinkel på pendeln
x_2	$\dot{\theta}$: Vinkelhastighet på pendeln
x_3	$\dot{\varphi}$: Vinkelhastighet på reaktionshjul
Styrsignaler	Beskrivning
u	τ : Vridmoment från motor.

Då målet med pendeln är att den ska stå stilla i upprätt läge behöver pendelns vinkel och vinkelhastighet kontrolleras. Båda är nödvändiga att reglera för att systemet ska veta både var pendeln befinner sig och vart den är på väg. Då accelerationen på reaktionshjulet är begränsad kontrolleras vinkelhastigheten $\dot{\varphi}$ för att hålla nere hastigheten på reaktionshjulet. Styrsignalen u är utsignalen från reglersystemet och skickas till motorn för att generera det vridmoment som motverkar pendelns fall. Reglersystemet i projektet blir ett MISO-system (*Multiple Input, Singular Output*) då det innefattat tre tillstånd (insignaler) enligt (5.3) och matar ut en styrsignal u.

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Det som ska analyseras är pendelrörelsen och därmed skrivs differentialekvationerna (5.1) och (5.2) om på tillståndsform vilket visas i ekvation (5.4).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & x_2 & 0 \\ \frac{(m_r+m_m+0.5m_p)Lg \sin(x_1)}{\frac{m_p L^2}{3} + m_m L^2 + m_r r^2 + m_r L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{m_r r^2} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

För att möjliggöra analys av alla tillstånd i simuleringen valdes alla tillstånd som utsignaler i sensormatrisen C. Matematiskt innebär detta att C-matrisen blir en enhetsmatris. D-matrisen sätts som noll då systemets inte ska ha någon framkoppling.

5.1.3 Linjärisering

Pendelarmens differentialekvation (5.1) är olinjär då den beror av en sinusfunktion. För att möjliggöra enklare simulering av den olinjära differentialekvationen linjäriseras A-matrisen med hjälp av en Jacobianmatris (5.7). Detta görs kring pendelns instabila jämviktsläge i upprätt läge där $\theta = 0$. För linjärisering kring $\theta \approx 0$ görs förenklingen:

$$\sin(\theta) \approx \theta = x_1 \quad (5.6)$$

Resultatet av den linjäriserade A-matrisen presenteras i (5.9). För djupare förståelse kring ämnet se följande källa [6].

$$\text{Jacobianmatrisen} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Med hjälp av (5.7) kan systemets olinjära tillstånd linjäriseras. I detta fall är det endast A matrisen som är olinjär vilket resulterar i följande linjärisering.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & x_2 & 0 \\ \frac{(m_r+m_m+0.5m_p)Lgx_1}{\frac{m_pL^2}{3}+m_mL^2+m_r r^2+m_rL^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Nu kan tillståndsvektorn brytas ut vilket ger följande linjära A-matris.

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{(m_r+m_m+0.5m_p)Lg}{\frac{m_pL^2}{3}+m_mL^2+m_r r^2+m_rL^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Systemets linjäriserade tillståndsform enligt (2.1) blir därmed:

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{(m_r+m_m+0.5m_p)Lg}{\frac{m_pL^2}{3}+m_mL^2+m_r r^2+m_rL^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{m_r r^2} \end{bmatrix} u \quad (5.10)$$

5.2 Simulering och beräkning av återkoppling

I följande avsnitt används den matematiska modellen för att möjliggöra datorsimulering av pendelns rörelse. Detta för att få en uppfattning om vilka styrsignaler som krävs och vilken karakteristik som därmed behövs av hårdvaran.

5.2.1 Styrbarhet

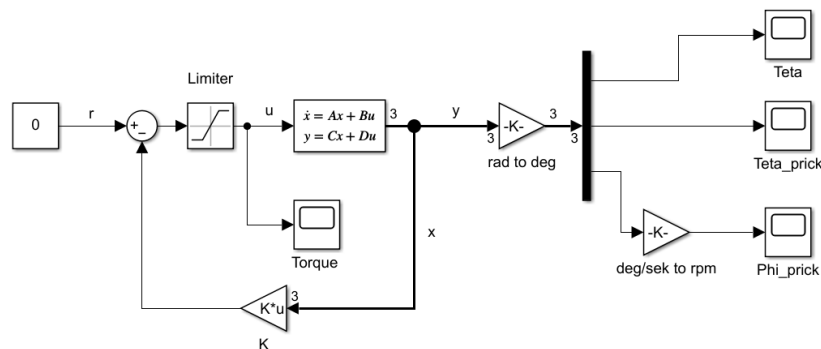
För att kunna styra alla tillstånden i modellen behöver systemet vara kontrollerbart. Detta kontrolleras genom att säkerställa att determinanten för kontrollmatrisen W är skild från noll (2.3).

$$\det(W) = \det\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & B_2 & 0 \\ B_2 & 0 & A_{21}B_2 \\ B_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{(m_r + m_m + 0.5m_p)Lg}{I_{tot}^3 I_R} \quad (5.11)$$

Styrbarheten av systemet beror därmed på om (5.11) inte är 0. Detta gäller så länge längden på pendeln, samt de olika massorna och tröghetsmomenten inte är noll, vilket alltid är fallet i ett verkligt system.

5.2.2 Simulering av linjärt system

För att få en uppfattning om vad som kommer att krävas av de olika komponenterna och storlek på styrsignaler så simuleras reglersystemet med hjälp av Matlab och Simulink. Då alla tre tillstånden θ , $\dot{\theta}$ och $\ddot{\theta}$ är mätbara på den fysiska prototypen används tillståndsåterkoppling i Simulink vilket visas i figur 5.2.



Figur 5.2: Modell för tillståndsåterkoppling i Simulink.

Figur 5.2 visar en modell av systemet med tillståndsåterkoppling. Simulering av modellen möjliggör analys av systemets alla tillstånd samt hur de förändras över tid. Värt att notera är att denna modell inte har någon referensförstärkning, vilket beror på att det inte har någon inverkan på systemet då börvärdet för alla tillstånden är 0.

Prototypens parametervärden uppskattas i syfte att kunna simulera systemet och få en uppfattning om hur väl ett system i denna storlek kan balanseras. Dessa parametrar ansätts baserat på prototypens estimerade storlek samt uppskattning av komponenters storlek och vikt. Tabell 5.3 visar vilka värden som använts i den första simuleringen.

Tabell 5.3: Uppskattade variabelvärden för simulering.

Variabel	Värde	Förklaring
m_p	100g	Massa på pendeln
m_r	70 g	Massa på reaktionshjul
m_m	150 g	Massa på motor
r	7,5 cm	Radie på reaktionshjul
g	9,82 m/s ²	Gravitationskonstant
L	20 cm	Längd på pendel

5.2.3 Beräkning av återkoppling

Den återkopplade förstärkningen av det slutna systemet är en vektor och betecknas som K i figur 5.2. Vektorn fungerar som en förstärkning av tillstånden i x , enligt (5.12).

$$u = -Kx \quad (5.12)$$

För att beräkna lämpliga återkopplingsparametrar i vektorn K implementeras en LQR funktion i Matlab. Hur mycket varje tillstånd avviker från börvärdet har olika stor betydelse för systemets funktionalitet. Därmed kan en straffmatris Q , definieras baserat på tillståndens prestation samt ett straffvärde R , som straffar hög ansträngning på systemets don.

$$Q = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} \quad R = [1] \quad (5.13)$$

I den första simuleringen har värdena i straffmatriserna valts baserat på hur kritiska de olika tillstånden är för regelsystemet. Då vinkeln θ är det tillstånd av störst vikt för systemet straffas detta värde hårdast, här med värdet 40 medan vinkelhastigheten på reaktionshjulet designeras lägst prioritet av tillstånden och straffas här med 0,3. R sätts som 1 då donets ansträngning inte anses vara av prioritet för projektet. Baserat på straffmatriserna i (5.13) beräknas därefter återkopplingsvektorn K i Matlab med hjälp av en LQR-funktion, där resultatet presenteras i (5.14).

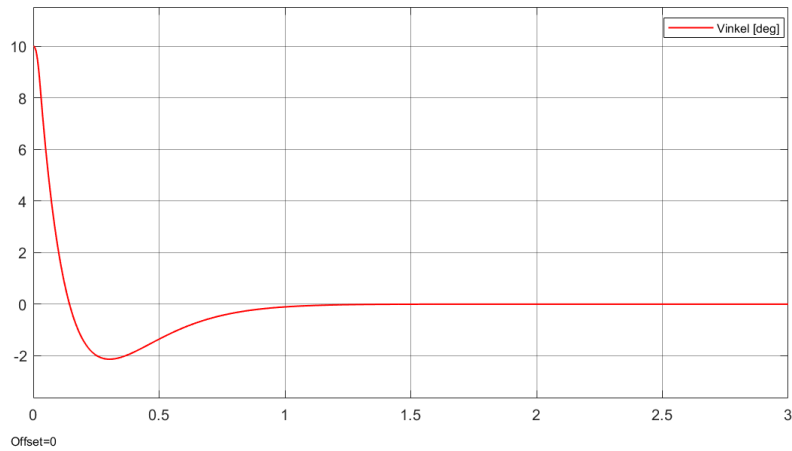
$$K = [-56.4864 \quad -8.3803 \quad -0.5477] \quad (5.14)$$

Efter beräkning av den återkopplande förstärkningen K kan systemets tillståndsekvation skrivas om enligt (5.15).

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx) = (A - BK)x \quad (5.15)$$

Den återkopplade modellens tillstånd kan nu simuleras vilket visas i figurer 5.3, 5.4, 5.5 och 5.6. Baserat på kravspecifikationens målvärde på 5 grader väljs en större vinkel att undersökas i den första simuleringen av systemet. Detta i syfte att undersöka hur stora styrsignaler som kommer krävas samt systemets karakteristik vid stabilisering. I detta fall väljs pendeln att initieras på $\theta = 10$ grader. Större vinklar än

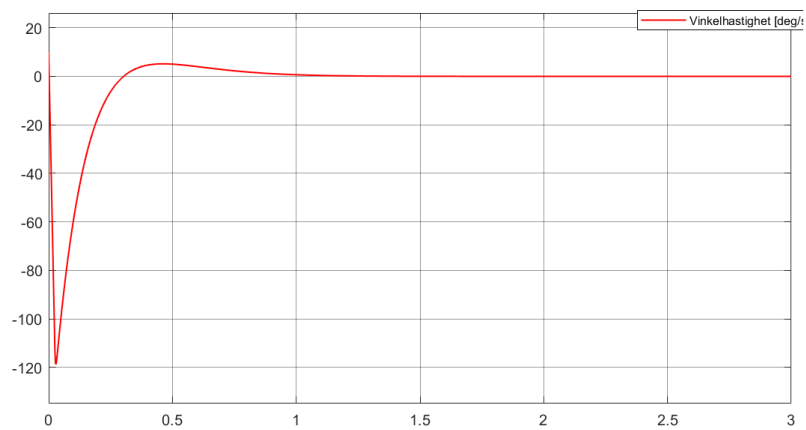
detta anses inte vara rimligt att simulera då systemet är linjäriserat kring punkten 0.



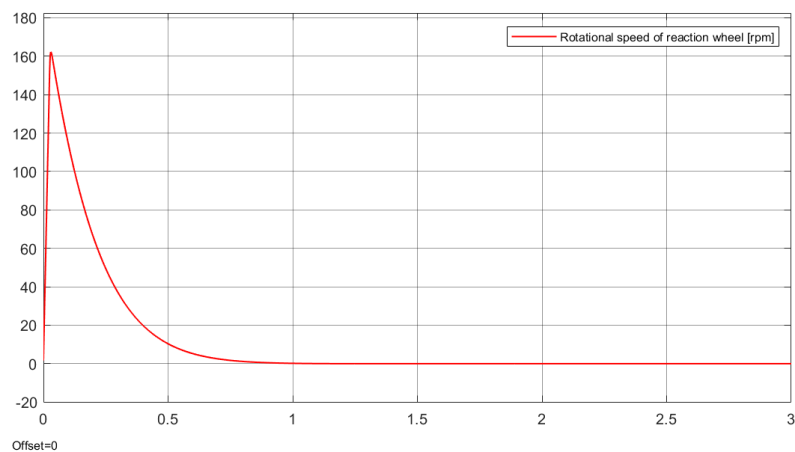
Figur 5.3: Vinkel θ vid 10° startvärde.

Figur 5.3 visar systemets återhämtning vid en initiering på 10 graders lutning. Systemet får då en översväng på ca 20 % och stabiliseras på cirka 1 sekund. Systemet får inte heller något kvarstående fel vilket beror på att återkopplingsparametern K_1 alltid fortsätter straffa vinklar som avviker från 0, vilket ger samma effekt som en integrerande verkan i systemet.

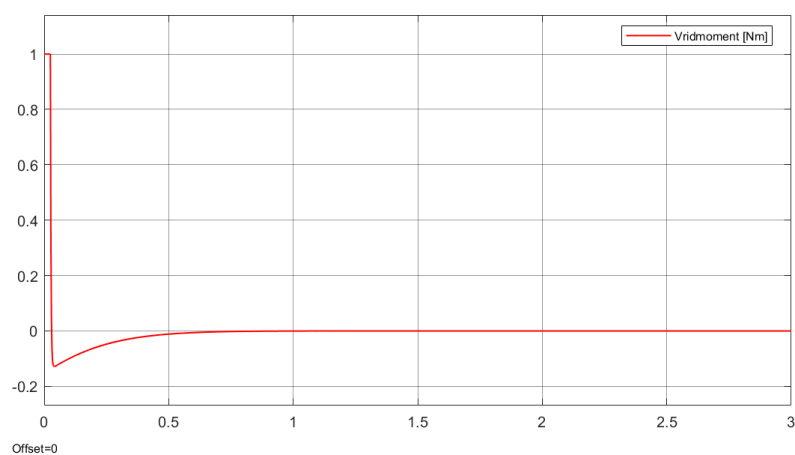
Då reaktionshjulet måste accelererar för att motarbeta ett fall är en viss översväng en önskvärd karaktäristik för systemet då det ger motorn möjlighet att bromsa in igen. Då detta är en ideal simulering av systemet antas även större översväng samt mer oscillation förekomma i det verkliga systemet.



Figur 5.4: Vinkelhastighet $\dot{\theta}$ vid 10° startvärde.



Figur 5.5: Vinkelhastighet på reaktionshjul $\dot{\phi}$ vid 10° startvärde.



Figur 5.6: Vridmoment från motor τ vid 10° startvärde.

Baserat på de uppskattade värdena i tabell 5.3 och resultaten i figur 5.5 och 5.6 kan en uppfattning bildas kring vad för karakteristik som krävs av motorn. Det krävs

ungefär en vinkelhastighet på motorn på 160 rpm och ett maximalt initialt vridmoment på 1 Nm för att hämma en vinkel på 10 grader.

Med hjälp av grafernas karakteristik samt storleken på de erfordrade styrsignalerna görs bedömningen att det är rimligt att konstruera en prototyp i denna skala. Den datorsimulerade pendeln stabiliserar sig snabbt vid vinkeln 0° och enligt figur 5.4 är den maximala vinkelhastigheten 120 grader/sek men reduceras också till 0 när pendeln stabiliseras. Reaktionshjulet accelererar snabbt upp till 160 rpm för att korrigera pendelns vinkel på 10° och retarderar sedan ner till 0 för att motarbeta översvängen. Dessa resultat verkar rimliga och ger också en god uppfattning av vilka krav som behöver ställas på komponenterna samt vad som behöver införskaffas.

6

Hårdvara

För att testa det system som simulerades i föregående kapitel konstrueras ett första koncept av systemet. Nedan specificeras den hårdvara som har valts att implementeras samt de delar som konstruerats.

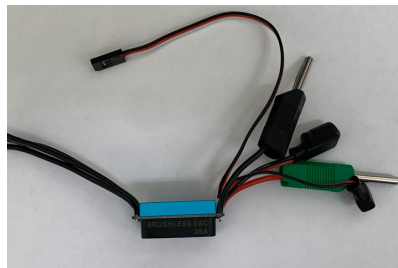
6.1 Motor och motordrivare

När det kommer till val av motor för systemet är acceleration och vridmoment de två viktiga parametrarna. Då Broccoli Engineering hade en motor i lämplig viktklass för systemet testas denna att implementeras i systemet. Motorn hade ett KV-tal på 3300, en maxspänning på 7.4 volt och maximal rotationshastighet på 24750 rpm.

Baserat på dessa parametrar införskaffas även en ESC för att möjliggöra styrning av motorns riktning samt PWM-modulering av styrsignalen. Motordrivaren som valts klarar av en maximal ström på 25 A vilket ansågs vara tillräckligt och visas i figur 6.1b.



(a) BLDC motor (inrunner)



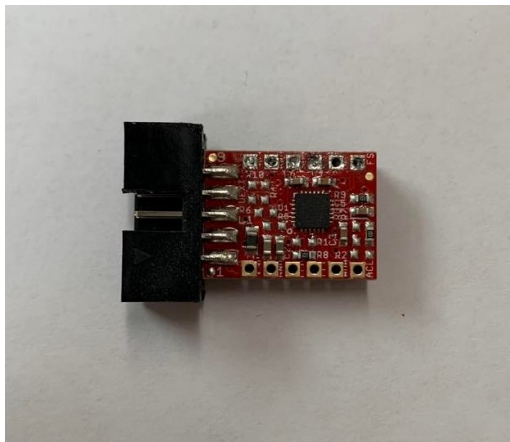
(b) Motordrivare (ESC)

Figur 6.1: Motor och motordrivare som användes vid första försöket.

6.2 Vinkelsensor

För att mäta pendelns vinkel θ och vinkelhastighet $\dot{\theta}$ valdes en MPU6050 vilket är ett chip med kombinerad gyroskop- och accelerometersensor som visas i figur 6.2. Sensorn valdes då chipet har en inbyggd processor vilket kan processera rådatan internt innan den skickas till styrenheten. Detta gjorde i sin tur att systemet blev snabbare jämfört med att processera all rådata på styrenheten. Val av sensor baserades även på att den var lättåtkomlig, billig samt enkel att integrera med vald styrenhet. Valet

av komponent möjliggjorde också en potentiell uppskalning av prototypen utan att en ny vinkelsensor skulle behöva införskaffas.



Figur 6.2: Vinkelsensor MPU6050.

6.3 Magnetisk rotationsgivare

För att mäta reaktionshjulets hastighet $\dot{\varphi}$ användes en magnetisk rotationsgivare. Då det är motorn som kontrollerar reaktionshjulets rotation fästes rotationssensorn på motorns stator och den tillhörande permanentmagneten fästes på motorns rotor. Sensorn kan på så sätt känna av både läge och hastighet på motorn, men i projektet mättes bara rotationshastighet. Den modell som användes var DRV5013 och valdes då komponenten är billig och har ett stort spann för tillåten spänning på 2.5 V till 38 V.

6.4 Styrenhet

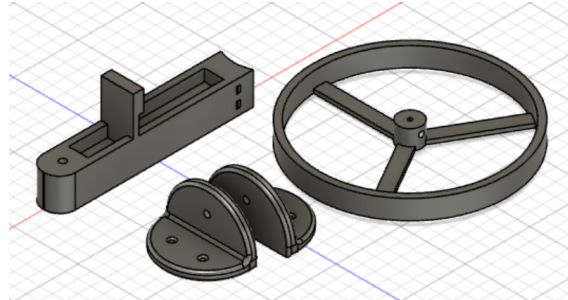
I detta projekt används en Arduino UNO med klockfrekvensen 16MHz som styrenhet för realtidssystemet [13]. En Arduino UNO är en programmerbar styrenhet som bygger på mikrokontrollern ATmega328P. Kortet har digitala och analoga I/O-pinnar samt implementerad möjlighet för PWM-styrning av exempelvis motorer.

6.5 Nätaggregat

För att flexibelt kunna förändra spänning- och strömförsörjning till systemets komponenter används ett nätaggregat vilket ska motsvara ett batteri då systemet implementeras på sparkcykeln. Det nätaggregat som använts i detta projekt kan ge en maximal ström på 25 A och en spänning på 15 V.

6.6 Mekanisk design

För att applicera reglersystemet i mindre skala konstrueras en prototyp till största delen med hjälp av 3D-skrivet material. Prototypens delar valdes att 3D-skrivas för att få ett system med låg massa samt för att kunna anpassa konstruktionen till de inköpta komponenterna. Ritningar över de 3D-skrivna delarna visas i figur 6.3.



Figur 6.3: CAD-ritning för de 3D-printade komponenterna.

En begränsning som är viktig att nämna gällande 3D-komponenterna är den maximala storleken som 3D-skrivare på Broccoli kunde producera. Denna skrivare kunde maximalt skriva ut en volym om 15x 15 x 15cm. Detta togs i beaktning vid beslut om prototypens storlek.

6.6.1 Reaktionshjul

Storleksbegränsningen på konstruktion hade störst påverkan på design av reaktionshjulet. Idealet vid konstruktion av reaktionshjulet bör vara ett högt tröghetsmoment då det kräver lägre vinkelacceleration av motorn för samma applicerade vridmoment. Detta innebär att systemet kan accelerera under en längre period innan motorn når maximal hastighet. Då motorn når maximal hastighet är systemet mättat och kan inte längre parera den fallande pendeln. Utöver detta bör även massan hållas låg för att göra ett så lätt system som möjligt.

Begränsningen från 3D-printern gav reaktionshjulet en maximal diameter på 15cm där den största delen av massan var samlad längst ut på hjulet för att maximera trögheten I_R . Den inre delen av hjulet består av infästning till motoraxeln samt tre tunna ekrar för att generera stabilitet i hjulet.

6.6.2 Pendelarm

Pendelarmen konstruerades som en rektangulär I-balk för att generera styvhet och stabilitet samtidigt som viktminimering eftersträvades. På pendelarmen skapades även en plattform där MPU6050-sensorn kunde placeras.

7

Styrning och Programmering

Följande kapitel går igenom den programstruktur som regleringen följer. All programmering har skett i Arduino IDE som är ett programspråk som bygger på C++.

7.1 Viktiga variabler

Ett antal variabler har används i programmet som anses vara viktiga för att förstå programmets funktion. De viktigaste av dessa och deras syfte listas i tabell 7.1.

Tabell 7.1: Lista över de huvudsakliga variabler och konstanter som används i programmet.

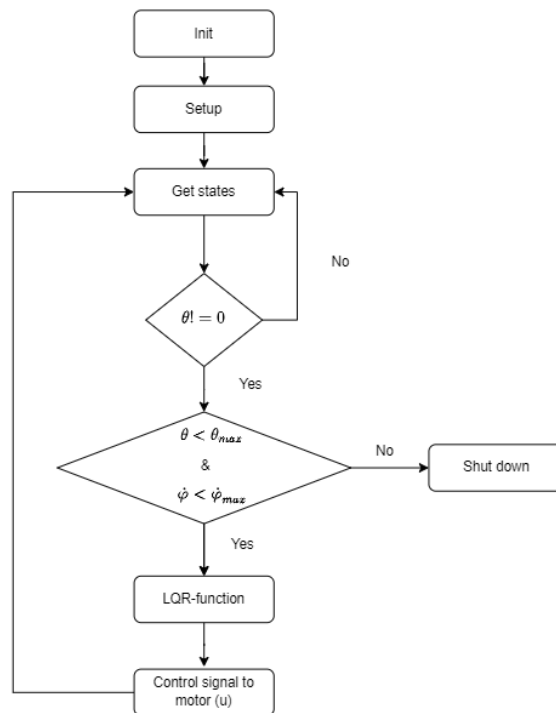
Variabelnamn	Variabeltyp	Beskrivning
theta	Float	Vinkel på pendeln i grader. Variabeln motsvarande θ och tillståndet x_1
theta_dot	Float	Vinkelhastigheten på pendeln i grader/sek. Variabeln motsvarande $\dot{\theta}$ och tillståndet x_2
phi_dot	Float	Vinkelhastigheten på reaktionshjulet i rpm. Variabeln motsvarande $\dot{\varphi}$ och tillståndet x_3
states[]	Array av float	Tillståndsvektorn. En array med tillstånden theta, theta_dot och phi_dot
u	Int	Styrsignal till motor baserat på tillstånden
max_vinkel	Int	Maximalt tillåten vinkel innan systemet avbryts
k_1, k_2, k_3	Float	Konstanter för förstärkning i återkopplingsloopen

7.2 Programmets upplägg

Ett flödesschema över reglersystemets programstruktur visas i figur 7.1. Tabell 7.2 listar de funktioner programmet är uppbyggt av och beskriver kort deras uppgift. Programmet börjar med att initiera variabler och setup av I/O-pinnar. Här kontrolleras framför allt att kontakt kan etableras med vinkelsensorn och då detta är konstaterat initieras motorn.

Efter setup går programmet in i huvudloopen som repeteras oändligt om inte vinkeln på pendeln blir för hög vilket avslutar programmet och stannar motorn. Detta för att skydda motorn från för stora styrsignaler vid en hög vinkel samt fortsatt körning vid fall. Huvudloopen börjar med att uppdatera värdena i tillståndsvektorn i funktionen `get_states`. Där läses sensorerna av och mätdata omvandlas till rätt enheter. Det nya värdet på vinkeln på pendeln kontrolleras så att den inte är högre än den maximalt tillåtna vinkeln. Om så är fallet kallas funktionen `shut_down` och programmet avslutas. Motorn stannas, pendeln faller och reglersystemet måste startas om för att reglera pendeln igen. Om vinkeln inte är större än maximalt tillåtet kallas istället funktionen `LQR_func` som räknar ut styrsignalen till motorn baserat på tillståndsvektorn och konstanterna i återkopplingsvektorn K . Styrsignalen skickas sedan till motorn och programmet börjar om igen med att uppdatera tillståndsvektorn.

Utanför huvudloopen finns dessutom en avbrottsrutin `isrA` (*interrupt service routine A*) som kallas varje gång enkoder-sensorn går från låg till hög. Avbrottsrutinen sparar tiden som gått i millisekunder sedan förra avbrottsanropet och den här tidskillnaden används sedan i funktionen `get_states` för att räkna ut hastigheten på reaktionshjulet.



Figur 7.1: Flödesschema för programstruktur.

Tabell 7.2: Reglersystemets olika funktioner samt deras uppgifter.

Namn	Beskrivning
setup	Initiering av variabler och I/O portar. Körs en gång vid uppstart.
loop	Huvudprogram. Alla andra funktioner kallas härifrån
get_states	Funktion som läser av värdet på sensorer och räknar ut värdet på tillstånden theta, theta_dot och phi_dot som sammanställs i arrayen states.
LQR_func	Den funktion som räknar ut styrsignalen på motorn baserat på tillstånden theta, theta_dot och phi_dot och återkopplingsvektorn K. Returnerar styrsignalen u
shut_down	Avslutningsfunktion som stannar motorn och avslutar programmet om vinkeln blir större än tillåtet.
isrA	Avbrottsrutin för enkodersensor.

7.2.1 Funktionen get_states

Då majoriteten av de komplexa beräkningarna i programkoden sker i funktionen get_states kommer den funktionen förklaras i mer detalj än de andra. Mycket av denna komplexitet kommer just vid hanteringen av data från accelerometer- och gyroskopsensorn MPU6050.

Sensorn mäter accelerationen och vinkelhastighet i alla tre dimensioner där accelerationen används för att beräkna tillståndet θ och vinkelhastigheten för $\dot{\theta}$. Vinkeln θ beräknas enligt följande .

$$\theta = \arctan\left(\frac{-accX}{\sqrt{accY^2 + accZ^2}}\right) * \frac{180}{\pi} \quad (7.1)$$

Där accX, accY och accZ utgör rå accelerationsdata från sensorn längs X-, Y- respektive Z-axeln i enheten g. Beräkningen (7.1) använder den linjära accelerationen i alla tre riktningarna för att beräkna vinkeln runt sensorns Y-axel. Samma beräkning går att göra för även X och Z, men Y valdes på grund av det håll sensorn fästes på pendeln. Vinkeln runt sensorns Y-axel motsvarar pendelns vinkel. Den inbyggda funktionen för arctangens i Arduino ger utdata i radianer så $\frac{180}{\pi}$ räknar om värdet till grader.

Tillståndet $\dot{\theta}$ fås direkt ur gyroskopsdatan som mäter vinkelhastighet. Även här används Y-axeln istället för X- och Z-axeln.

Det tredje tillståndet $\dot{\varphi}$ mäter vinkelhastigheten på reaktionshjulet. Här används istället data från den magnetiska enkodersensorn som fästs på motorn. Enkodern har sex poler varav tre nordpoler vilket ger tre höga signaler vid rotation ett helt varv. Tiden mellan två positiva flankar blir då tiden det tar för reaktionshjulet att rotera ett tredjedels varv. Detta sparas i variabeln ΔT av avbrottsrutinen isrA. Reaktionshjulets vinkelhastighet i rpm beräknas sedan enligt (7.2) nedan. Där 60000 är antalet millisekunder på en minut och $3 \cdot \Delta T$ är antalet millisekunder det tar för

reaktionshjulet att rotera ett helt varv.

$$\dot{\varphi} = \frac{60000}{3 \cdot \Delta T} \quad (7.2)$$

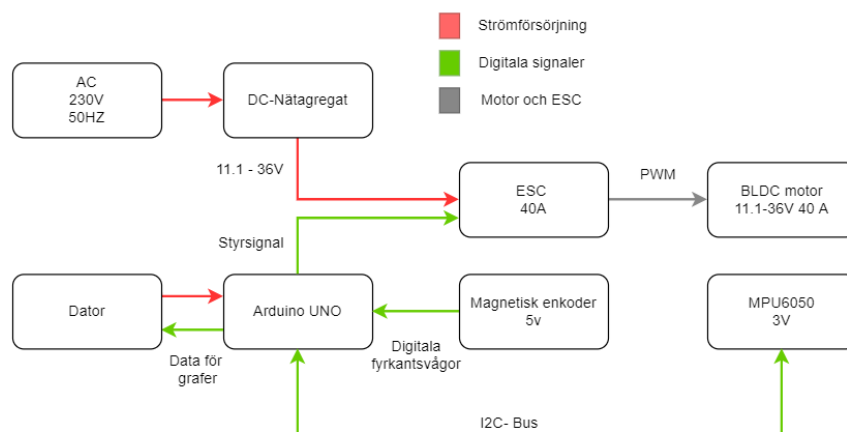
8

Konstruktion av prototyp

Då hårdvara och mjukvara är fastställt kan alla delar i systemet sammankopplas till en första prototyp. Detta görs för att validera beräkningar och simuleringar från modellen samt verifiera att all hårdvara uppfyller alla krav.

8.1 Sammankoppling av komponenter

Vid konstruktion av prototypen sammankopplas systemets komponenter som specificerats ovan. Detta visualiseras i ett förenklat kretsschema enligt figur 8.1.



Figur 8.1: Förenklat kretsschema över systemet.

Figuren visar hur de elektriska komponenterna är sammankopplade. Styrenheten som är en Arduino läser av data från rotationssensorn och MPU6050-sensorn vilka därefter plottas på den inkopplade datorn. Styr signaler beräknas och skickas till ESCn som sedan driver motorn som strömsätts av nättaggretaget inkopplat i vägguttaget.

8.2 Sammansättning av system

Då komponenterna är sammankopplade kan de fästas på den konstruerade pendeln enligt figur 8.2.



Figur 8.2: Den första versionen av den sammankopplade inverterade pendeln.

På en bottenplatta fästs de två infästningarna som bär en axel. Den nedre delen av pendelarmen fäster i den roterande axeln där friktionen mellan dessa har försumats då det inte antas ha någon inverkan på systemets balanseringsförmåga. Mitt på pendeln fästs MPU-sensorn och högst upp fästs motorn med reaktionshjulet. Rotationssensorn samt tillhörande permanentmagneten fästs på motoraxeln som sticker ut på baksidan av motorn. För att förhindra fysiska stötar mot reaktionshjulet vid fall placeras även två fallskydd av skumplast på båda sidorna om pendeln.

8.3 Resultat av första prototyp

Under testning av det sammankopplade systemet upptäcktes en del problematik som behövdes förbättras. Det framgick snabbt att motorn inte kunde generera tillräckligt mycket vridmoment tillräckligt snabbt vilket gjorde styrning av reaktionshjulet omöjligt.

Det blev tydligt att vinkelsensorn var väldigt känslig för brus. Dessa störningar genererades till stor del av vibrationer från motorn som transporterades genom den 3D-skrivna pendeln. Tillståndet θ påverkades mest av störningarna då vinkeln baseras på datan från en accelerometer-sensor.

Utöver detta var infästningen för rotationssensorn och permanentmagneten problematisk då mätdata vid flertalet tillfällen blev oläslig på grund av sporadiska glapp

i magnetfältet mellan sensorn och magneten. Det konstaterades därmed att det behövdes ett bättre sätt att fästa vinkelsensorn och permanentmagneten så att dessa hade samma centralaxel och ett fast avstånd mellan varandra.

8.4 Förändringar av första konceptet

Baserat på slutsatserna från första prototypen utfördes därefter ytterligare ett försök. Nedan specificeras de förändringar som har gjorts och hur dessa val påverkar prototypens beteende vid balansering.

8.4.1 Ny motor och motordrivare

Baserat på simuleringen och slutsatserna från föregående försök kunde tre huvudsakliga krav ställas på den nya motorn: god noggrannhet vid låga varvtal, ett högt initialt vridmoment samt en hög maximal hastighet. Då systemet vid små pendelrörelser antas kräva kort acceleration samt ett högt vridmoment för att rotera disken en kort sträcka med snabba vändningar är en god noggrannhet vid låga varvtal och ett högt initialt vridmoment viktiga parametrar. En hög maximal vinkelhastighet möjliggör också en större återhämtningsvinkel då det möjliggör acceleration av reaktionshjulet under en längre tid.

Då projektet även var tidsbegränsat behövdes en motor som kunde prestera bra utefter dessa krav samt levereras på kort tid. Den motor som valdes visas i figur 8.3a och är en borstlös outrunner-motor vars karaktäristik generellt genererar ett högt initialt vridmoment, snabb acceleration och hög hastighet. Även noggrannhet vid låga varvtal var bättre jämfört med föregående prototyp vilket överensstämde med de ställda kraven. Detaljerade specifikationer beskrivs nedan i tabell 8.3b.



(a)

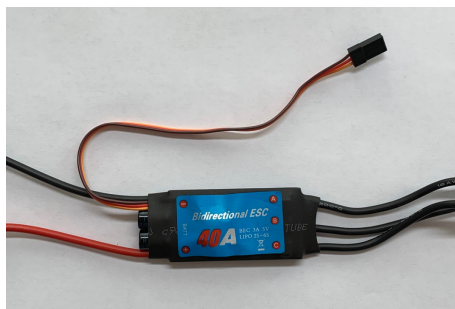
Parameter	Värde	Enhet
KV-värde	560	KV
Maxeffekt	1760	W
Spänning	11,1–36	V
Maxhastighet	6000–9000	RPM
Vridmoment	1–2	Nm
Initialt vridmoment	7–8	Nm
Maximal ström	40	A
Vikt	196	g

(b)

Figur 8.3: Motor och motorparametrar.

Något som är intressant att påpeka är spänningsområdet som motorn kan verka inom. Genom att förändra spänningen till motorn kan styrsignalernas styrka variera vilket kan vara eftertraktat vid senare kalibrering av systemet.

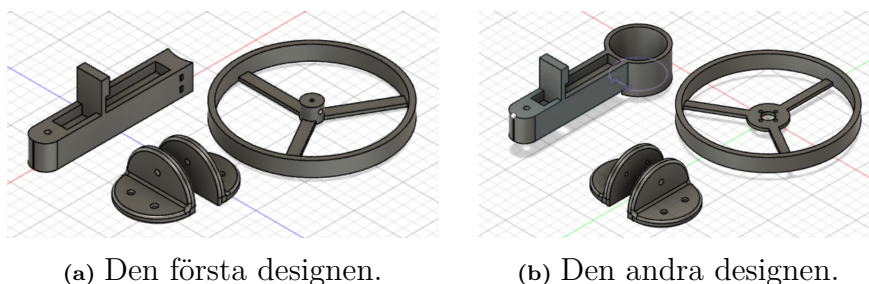
Baserat på den nya motorn valdes också en ny motordrivare. Då motorns maximala ström var 40 A eftersöktes en ESC som kunde hantera denna strömstyrka, gärna med lite marginal. På grund av tillgänglighet valdes en ESC med begränsningen 40 A som maximal strömstyrka vilket visas i figur 8.4. Då maximal strömstyrka inte kommer överskridas uppnår den valda komponenten kraven trots att en högre kapacitet var önskvärd.



Figur 8.4: Motordrivare 40A (ESC).

8.4.2 Förändringar av mekanisk design

Då den nya motorn hade andra mått och funktionalitet behövde pendelarmen och reaktionshjulet modifieras. De förändringar som gjorts visualiseras i figur 8.5b, med de första ritningarna i figure 8.5a för jämförelse.

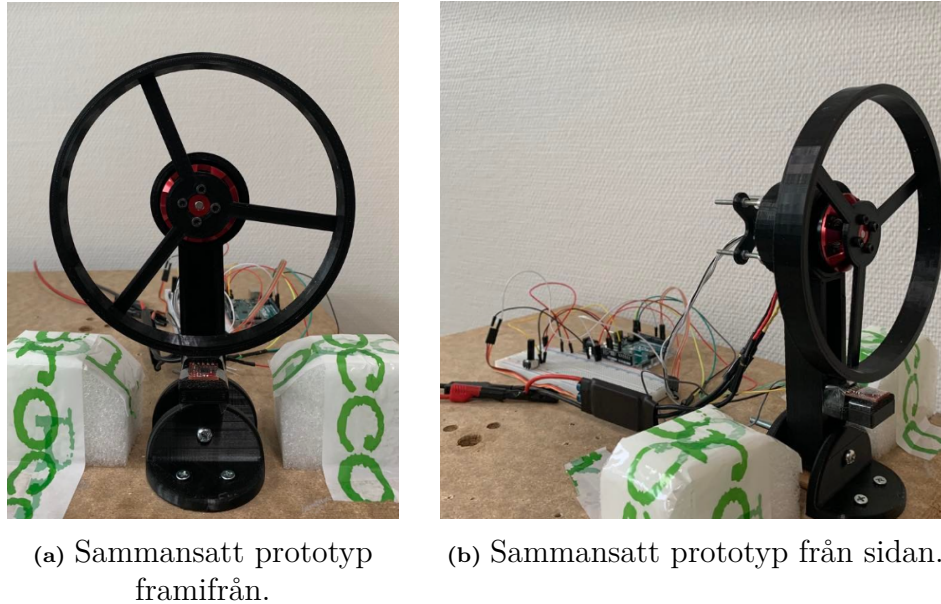


Figur 8.5: CAD-ritningar för första och andra designen. Förändringar kan ses på toppen av pendelarmen och centrum av reaktionshjulet.

För att bevara den konceptuella designen på systemets mekaniska konstruktion genomförs enbart förändringar som krävs för den nya motorn. Reaktionshjulets infästning i centrum görs om för att fästa i den nya motorn, vilket medför en viktminimering för m_r , vilket är eftertraktat. Pendelarmens övre del konstrueras om för att kunna fästa på den valda outrunner-motorn, vilket innebär att motorns statiska del skruvas fast i pendelns skopa. Den nya formen på pendelns övre del konstrueras i syfte att öka hållfastheten i hela systemet och få en mer jämn viktfördelning kring dess centrumaxel. Resterande delar av den mekaniska designen behålls från föregående prototyp.

8.4.3 Sammankoppling av system

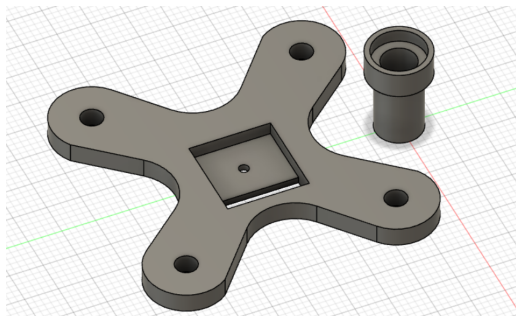
Baserat på det föregående försöket samt de hårdvaruförändringar som genomförts sammankopplades den nya prototypen enligt figur 8.6.



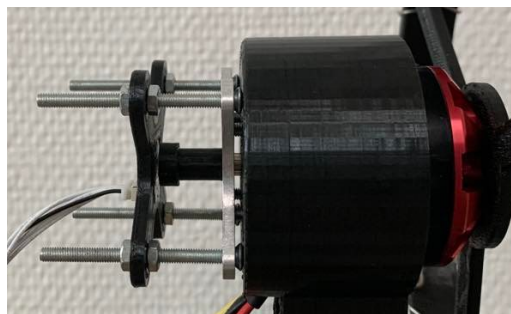
Figur 8.6: Sammansatt prototyp.

Systemets olika delar sammankopplas på liknande sätt som föregående prototyp. Det som förändrats är hur de olika komponenterna fäster i varandra samt små justeringar för att förbättra systemets prestation. För att reducera det brus som genereras i vinkelsensorn då den tidigare fäste direkt på pendeln, vadderas underlaget på sensorplattan. Detta gör att motorns vibrationer till mycket mindre utsträckning påverkar mätdatan.

För att möjliggöra en pålitlig mätning av det tredje tillståndet, reaktionshjulets vinkelhastighet $\dot{\varphi}$ konstrueras även ett nytt fäste baserat på den nya motorn vilket visas i figur 8.7.



(a) Ritning över 3D-printade material för fäste av enkoder och permanentmagnet.



(b) Fäste av enkoder på pendeln.

Figur 8.7: Fäste av enkoder på pendel.

Ett fäste för permanentmagneten konstruerades för att med hjälp av presspassning fästa permanentmagneten på motoraxeln som löpte fritt på motorns baksida. För att fästa enkodern på lämpligt avstånd konstruerades även en platta som höll sensorn på plats med hjälp av fyra skruvar. Avståndet till permanentmagneten kunde även justeras med hjälp av muttrar på båda sidorna av plattan för att möjliggöra kontinuerlig avläsning utan störningar.

Då systemet är sammankopplat kan slutgiltiga värden på vikt och storlek specificeras i tabell 8.1. Detta för att jämföra med de ansatta värdena i simuleringen och bedöma hur rimliga antagandena för simuleringen i kapitel 5 var.

Tabell 8.1: Parametrar för prototypens delkomponenter.

Variabel	Värde	Förklaring
m_p	84 g	Massa på pendelarm samt sensorer
m_r	40 g	Massa på reaktionshjul
m_m	196 g	Massa på motor
r	7.5 cm	Radie på reaktionshjul
L	15 cm	Längd på pendel

Jämfört med de ansatta värdena i tabell 5.3 är prototypen i ungefär samma storlek. De 3D-skrivna delarna är något lättare och motorn är något tyngre än uppskattat. Radien på reaktionshjulet har även ökat i relation till längden på pendeln. På det stora hela var de antaganden som togs för simuleringen rimliga.

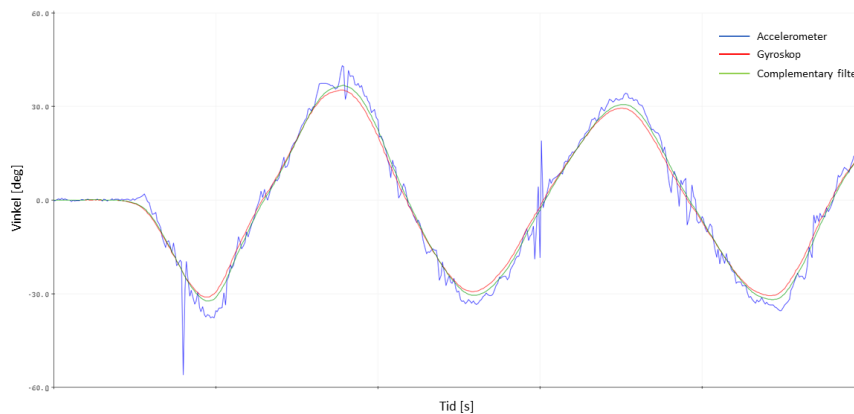
8.4.4 Filtrering av vinkeldata

I föregående del av projektet har vinkeln θ enbart baserats på accelerometerdata vilket var väldigt känsligt för brus. Ett alternativt sätt att mäta vinkeln är att använda MPU-sensors integrerade gyroskop, vars mätdata ej påverkas av brus men däremot tenderar att förskjutas över tid [11]. För att reducera brus och förbättra mätdata i MPU-sensorn över tid implementeras ett *complementary filter* enligt (8.1) vid avläsning av vinkeln θ . Fördelen med detta filter jämfört med exempelvis ett Kalmanfilter är att det är mindre komplext samt enkelt kan implementeras på den valda 8-bitars styrenheten .

$$\theta_{filtrerad} = 0.98 \cdot (\theta_{prev} + \dot{\theta} \cdot dt) + 0.02 \cdot \theta_{acc} \quad (8.1)$$

Där θ_{acc} är ny accelerometerdata från sensorn, $\theta_{filtrerad}$ är det nya filtrerade vinkeltillståndet och θ_{prev} är det filtrerade vinkeltillståndet från förra repetitionen. Konstanterna 0.98 och 0.02 är en procentsats av hur stor andel av den slutgiltiga vinkeln som ska baseras på gyroskop- och accelerometerdata. Dessa parametrar ger en relation mellan snabbhet på filtret samt brusreducering vilket kan ställas in för hand baserat på den önskvärda karakteristiken för systemet.

Figur 8.8 visar hur implementeringen av ett complementary filter kan jämföras med enskilda vinkelberäkningar från accelerometer- samt gyroskopdata.



Figur 8.8: Vinkeldata från accelerometer, gyroskop samt complementary filter.

Baserat på resultatet i figur 8.8 resulterar accelerometers vinkeldata i mycket brus och gyroskopets vinkeldata förskjuts. Den filtrerade vinkeln har lågt brus och inte heller någon tidsfördröjning vilket är eftertraktat i ett realtidssystem.

Viktigt att notera i detta experiment är att systemet vinklats manuellt och tar därmed inte hänsyn till det brus som genereras då motorn är i drift. De vinklar som genereras är även mycket större än de som kommer behandlas i det faktiska systemet och har enbart använts för att påvisa filtrets egenskaper.

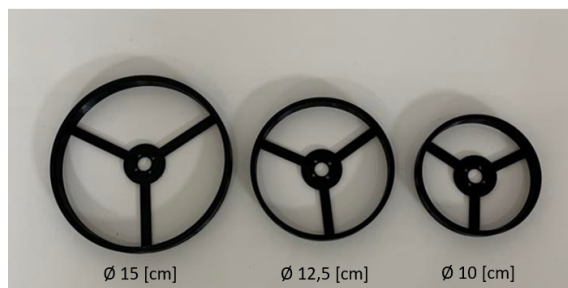
9

Kalibrering av system

För att optimera systemets prestanda finns det många aspekter att kalibrera. I detta kapitel har fokus lagts på att utforska vilken effekt storleken på reaktionshjulet har på pendelns beteende samt att kalibrera återkopplingsförstärkningen.

9.1 Optimering av storleken på reaktionshjulet

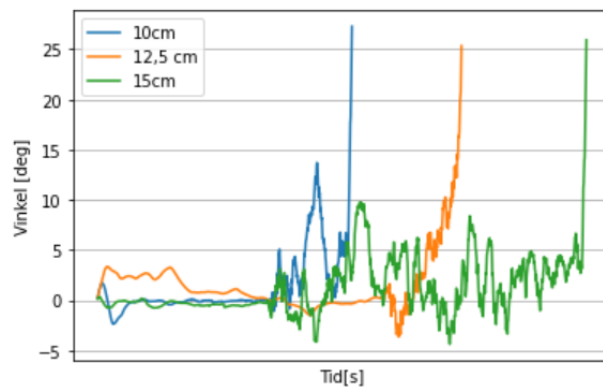
Efter sammankoppling av alla komponenter och test av den nya motorn framgick det att denna var mycket kraftigare än den förra. Den kunde med ett reaktionshjul på 15cm i diameter skapa ett såpass kraftigt vridmoment att pendeln inte bara motarbetade ett fall åt ena hållet utan föll okontrollerat över åt andra hållet. Då vridmomentet som appliceras på pendeln både beror på accelerationen från motorn och trögheten på reaktionshjulet enligt ekvation (5.2) varierades diametern på reaktionshjulet för att utforska vilken effekt detta har på vridmomentet och pendelns beteende. Tre olika reaktionshjul printades enligt figur 9.1.



Figur 9.1: Olika storlekar på reaktionshjul.

Alla reaktionshjul har samma design men olika diametrar vilket också resulterar i en förändrad massa och därmed ett förändrat tröghetsmoment. Detta innebär att diametern på varje reaktionshjul har en kraftig korrelation med det vridmoment som systemet kan skapa. Tanken är att ett mindre hjul hade gett mindre vridmoment och mindre översväng och därför eventuellt skulle kunna leda till ett stabilare system.

Alla tre reaktionshjulen testas med samma reglersystem och samma återkopplingsförstärkning. Resultatet för hur de olika hjulen balanserade visualiseras i figur 9.2.



Figur 9.2: Vinkeldata från tre tester med olika storlek på reaktionshjul.

Baserat på resultatet i figur 9.2 verkar teorin som tidigare presenterats i rapporten stämma. Alla tre försök börjar med att balansera pendeln runt noll grader men ökar väldigt drastiskt när pendeln faller. Ju större diameter på reaktionshjulet, desto längre balanserar pendeln så ett större tröghetsmoment verkar medföra att pendeln kan balansera längre i upprätt läge. Baserat på systemets prestation antas balansen kunna förbättras med hjälp av kalibrering av systemets återkoppling samt ytterligare ökning av hjulets tröghetsmoment.

Viktigt att notera är att systemets återkoppling ännu inte är kalibrerat och straffparametrarna i Q och R matriserna har valts att användas för att visa hur de olika hjulen påverkar systemets balans. Den återkopplande förstärkningen som används presenteras i (9.1) och uppnås då straffmatrisen Q är en enhetsmatris samt R är 1.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -85.2633 & -8.9579 & -1.0000 \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

Då det största reaktionshjulet balanserar bäst verkar ett större tröghetsmoment öka pendelns balanseringsförmåga. Ett större reaktionshjul hade möjligtvis balanserat ännu bättre. Då det största reaktionshjulet på 15cm i diameter uppnår den maximala diametern för vad som är möjligt att konstruera kan enbart massa adderas på hjulet för att öka dess tröghet och därmed systemets förmåga att generera större vridmoment. För att öka trögheten i reaktionshjulet ytterligare samtidigt som så lite massa som möjligt bör appliceras viras metalltråd längs med hjulets ytterkant vilket visas i figur 9.3.



Figur 9.3: Slutgiltigt reaktionshjul med extra massa applicerat.

Den extra massan som appliceras fördelas jämnt på reaktionshjulet för att undvika ojämnheter vid rotation. Detta ger ett bättre resultat än föregående test i figur 9.2 och beslutas därför att gå vidare med. Den slutgiltiga massan på reaktionshjulet blir då 54 g.

9.2 Kalibrering av återkopplingsförstärkning

För att analysera systemets karaktäristik vid kalibrering användes polerna för de tillstånd som återkopplats. Genom att analysera hur systemets poler är placerade kan en förståelse för systemets stabilitet, snabbhet och insvängning kring referenspunkten bildas.

För att systemet ska gå att stabilisera måste dessa poler ha en negativ realdel där en större negativ realdel genererar ett snabbare system. Om polerna har en imaginärdel får systemet en lägre dämpning ju längre ifrån polerna är det reela talplanet vilket innebär större översväng och mer oscillation.

För det konstruerade systemet är ett snabbt och stabilt system önskvärt för att kunna balansera pendeln. Det är också önskvärt med en viss mängd översväng för att reaktionshjulet ska kunna retardera så att motorn inte når upp till maximal hastighet. För att på ett mer intuitivt sätt hitta lämpliga poler appliceras därmed LQ-reglering vilket är en form av polplacering.

Val av lämpliga parametrar i straffmatriserna \mathbf{Q} och \mathbf{R} är en iterativ process där många försök genomförts. Det mest lämpliga parametrarna presenteras i (9.2).

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = [0.25] \quad (9.2)$$

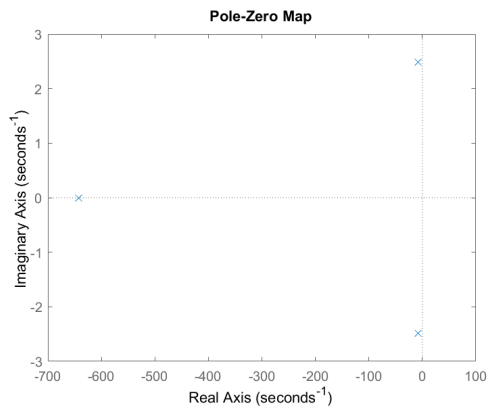
Då syftet med systemet är att snabbt balansera pendeln kring 0 grader är vinkelns tillstånd av störst vikt och straffas därmed högst. Tillståndet för vinkelhastighet behålls vid 1 då en ökning av dess straff ger en för liten översväng samt ett lägre straff ger för stor översväng. Precis som i simuleringen ges straffet för reaktionshjulets vinkelhastighet ett lågt värde då värdet på vinkelhastigheten rör sig i en annan skala än de andra tillstånden och behöver därmed vara låg för att inte ha för stor påverkan på styrsignalen.

För att uppnå ett snabbt system och samtidigt inte slita på styrdonet används ett relativt lågt värde på skalären \mathbf{R} . Detta anses ge en god snabbhet som inte resulterar i en för ryckig karaktäristik. Den slutliga tillståndsåterkopplingen presenteras i 9.3.

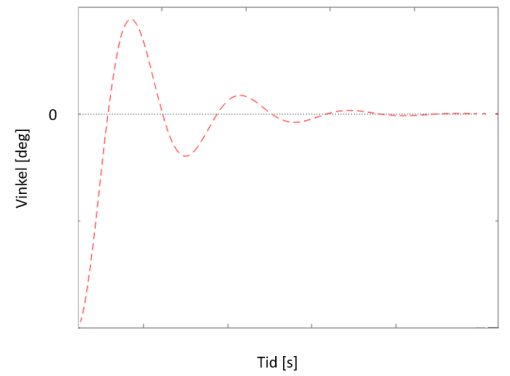
$$\mathbf{K} = [-57.2266 \quad -6.2663 \quad -0.6325] \quad (9.3)$$

Systemets karaktäristik kan undersökas med hjälp av dess poler vilket visualiseras i figur 9.4a. Den valda återkopplingsförstärkningen \mathbf{K} ger systemet polerna enligt (9.4). Detta visualiseras i figur 9.4a där dessa tydligt framgår som komplexa. För det konstruerade systemet är detta eftertraktat då det resulterar i en liknande karaktäristik enligt 9.4b vilket gör att pendeln kan stabiliseras vid noll grader och samtidigt behålla en låg hastighet på reaktionshjulet över tid.

$$\begin{aligned} & -642.45 + 0.00i \\ & -8.25 + 2.49i \\ & -8.25 - 2.49i \end{aligned} \tag{9.4}$$



(a) Systemets poler.



(b) Exempel på insvängning kring jämviktspunkt baserat på systemets poler.

Figur 9.4: Systemets poler och dess karaktäristik.

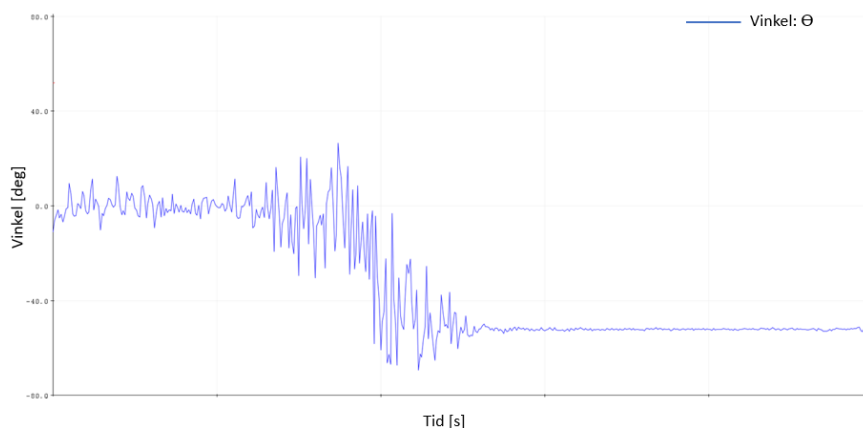
10

Resultat

Nedan presenteras arbetets resultat och projektets frågeställningar besvaras.

10.1 Resultat av försök 1

Nedan visas det slutgiltiga resultatet för försök 1. Figur 10.1 visar pendelns vinkel­förändring då systemet initieras vid upprätt läge och sedan släpps utan påverkan från yttre störningar.



Figur 10.1: Slutgiltigt resultat för styrning av pendeln med den första motorn.

Det går att läsa i figuren att pendeln startar vid 0 grader och sedan faller och stannar vid 45 grader. Redan vid initieringen kan stora mängder brus observeras i vinkeln θ . Detta beror till stor del på störningarna som är ett resultat av motorns vibrationer som färdas genom pendelarmen till accelerometern. Ett tydligt exempel på hur mycket brus som genereras då motorn är aktiv kan observeras då pendeln fallit och stannar vid 45 grader. Då är motorn inte längre är aktiv och bruset i grafen minskar drastiskt.

Det första försöket som redovisades i rapporten ledde aldrig till en fungerande prototyp. Pendeln föll direkt och motorn hade ingen möjlighet att motarbeta processen. Det som kunde hämtas från det första försöket blev snarare ett antal iakttagelser med förbättringspotential för ett andra försök.

Komponenterna fungerade väl vid testning var för sig men efter sammankoppling av prototypen blev det tydligt att vald motor inte hade tillräckligt vridmoment för att styra det valda reaktionshjulet. Motorn var snabb snarare än stark vilket ledde till att den under en längre tid kunde accelerera upp reaktionshjulet till höga hastigheter, men var inte stark nog att bromsa in eller byta riktning på reaktionshjulet snabbt, vilket var det önskvärda beteendet hos en motor i sammanhanget.

Ytterligare ett problem som visade sig under första försöket var att accelerometern i vinkelsensorn var mycket känslig för störningar, vilket ledde till mycket brus i tillståndet för vinkeln θ enligt figur 10.1. Detta behövde förbättras då tillståndet θ var det viktigaste av de tre återkopplade tillstånden.

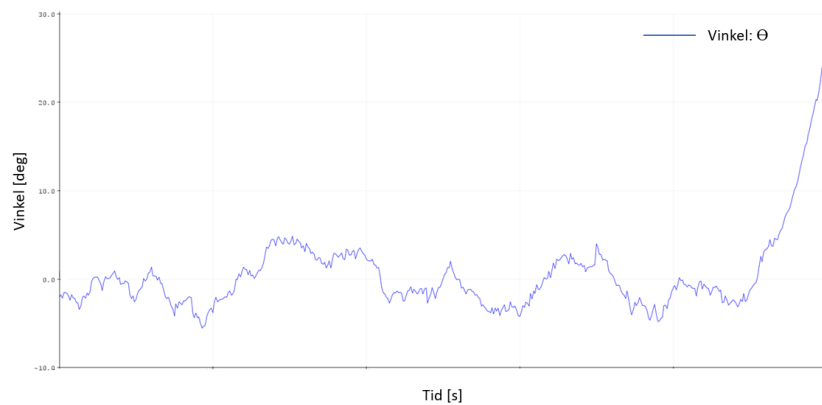
Dessutom innefattade försök 1 inget fungerande fäste för enkodersensorn, eftersom problematiken med motorn upptäcktes innan enkodern hann fästas på pendeln. Då fästansordningen förutsattes behöva förändras med en annan motor skapades inget fäste för enkodern för försök ett, men iakttagelser gjordes inför försök två. Centrumaxeln för sensorn och permanentmagneten behövde sammanfalla med rotationscentrum för motorn och reaktionshjulet. Minsta avsteg från centrum skapade ojämna rotationer och felaktig data. Enkodersensorn behövde utöver detta även sitta väldigt nära permanentmagneten för att läsa av data.

Stora mängder brus och en motor som inte genererar tillräckligt vridmoment är de största faktorerna till att systemet inte fungerar. Detta utvecklades och förbättrades i försök 2.

10.2 Resultat av försök 2

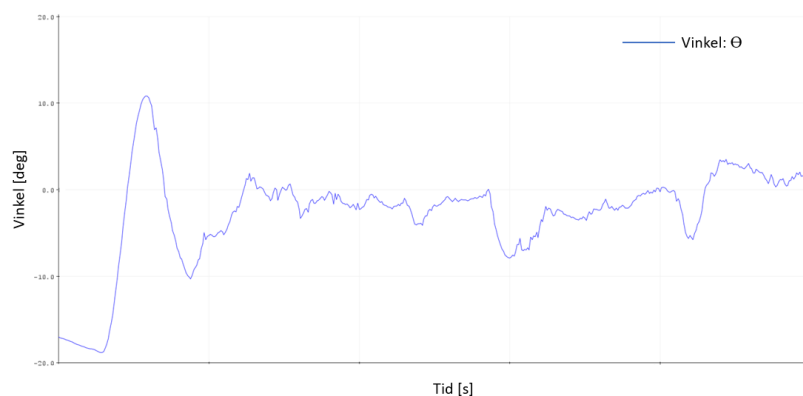
Resultatet av försök 2 är det slutgiltiga resultatet för projektet och är en vidareutveckling av det första konceptet där motor, motordrivare samt mekanisk konstruktion har förändrats. Pendeln kan återhämta sig från vinklar på cirka 15 grader och balansera i upprätt läge under en kort tidsperiod.

Det som inte uppnåtts är att stabilisera pendeln över tid då den maximalt kunde balansera en kort stund på runt 10 sekunder vilket antas till stor del bero på motorns karaktäristik. Resultatet av pendelns balansering samt återhämtning vid initiering av en stor vinkel presenteras i figur 10.2 och 10.3 nedan.



Figur 10.2: Slutgiltigt resultat för styrning av pendeln med den andra motorn. Startvinkel vid noll grader.

Figur 10.2 beskriver systemets balansering kring upprätt läge. Systemet kan som väntat inte stå helt stilla utan pendlar fram och tillbaka mellan några graders lutning åt båda hållen. Detta gör den under en period innan den faller.



Figur 10.3: Slutgiltigt resultat för styrning av pendeln med den andra motorn. Startvinkel på 15 grader.

Systemet kan även parera stora vinklar och åter balansera kring sin jämviktspunkt. Figur 10.3 visar då systemet initieras på cirka 15 graders lutning och svänger in sig mot 0 grader efter en stund av pendling.

Det slutgiltiga resultatet för projektet är därmed ett system som med återkopplingsparametrarna $K = [-57.2266 \ -6.2663 \ -0.6325]$ samt de tidigare specificerade komponenterna klarar av att balansera under en kort period kring sin jämviktspunkt. Detta är inte helt konsekvent och balanseringstiden varierar mellan några sekunder och ett tiotal sekunder som bäst. Efter en period faller pendeln och kan därefter inte återhämta sig och måste lyftas upp till ett startläge och startas på nytt för att åter börja balansera.

10.3 Svar på frågeställningar

- Hur stabilt kan systemet konstrueras?

Målet med projektet var att stabilisera en instabil process med hjälp av reglerteknik vilket åstadkommit till viss del. Med den hårdvara och kalibreringsmetoder som applicerats under projektet kan pendeln balansera i några sekunder men faller till slut ner till marken. Pendeln kan periodvis stå och balansera runt vinkeln 0° med små förändringar i vinkel på ett sätt som gör att reaktionshjulet alltid kan hållas på låga hastigheter. Även om pendeln till viss del uppvisar ett önskvärt beteende kan det inte klassificeras som ett stabilt system men anses vara en god bit på väg.

- Till hur stor grad kan LQR användas för att kalibrera systemet?

Under projektet valdes LQR att användas som kalibreringsmetod då den ska vara mer intuitiv att applicera än manuell polplacering. Detta beror på att polplacering kan ge svårigheter att förutsäga hur förändring av polerna påverkar systemet karaktäristik, medan LQR med sina justerbara straffmatriser ger ett mer användarvänligt sätt att uppnå samma resultat.

LQR var bra då det gav en bättre förståelse för hur ett förändrat straffvärde för ett visst tillstånd påverkade systemet. Under kalibreringsprocessen gav detta en intuition över vilka straffvärden som var passande att förändra närmast. Exempelvis om reaktionshjulet kom upp i för höga hastigheter kunde straffet på det tredje tillståndet ökas för att ge en kalibrering med ett något långsammare reaktionshjul. Trots detta innebär LQR ändå en stor del handkalibrering då alla straffvärden som testats har valts och justerats i en iterativ process för att hitta vilka värden som är mest lämpliga. LQR ger en intuitiv uppfattning om hur förändringar i kalibreringen kan påverka systemet men det kan fortfarande medföra att optimal kalibrering går förlorad.

- Har det under projektet valda konceptet potential att skalas upp till att balansera en elsparkcykel?

Under projektet har det framkommit att principen att balansera en inverterad pendel med ett reaktionshjul fungerar. En motor kan med ett reaktionshjul applicera den mängd vridmoment som behövs för att hålla pendeln stående upprätt. Då systemets resultat påvisar att konceptet fungerar är möjligheterna för att kunna balansera en sparkcykel med denna teknik goda. Dock krävs det förbättringar av det befintliga konceptet för att detta ska fungera under en längre period.

För att möjliggöra stabilisering av en större och tyngre inverterad pendel i form av en elsparkcykel kommer däremot både ett betydligt större reaktionshjul samt en starkare motor behövas. Med ett stort reaktionshjul tappar elsparkcykeln sin smidighet och möjlighet till att hållas så kompakt som tidigare önskat. Med en stor och kraftfull motor ökar både vikten och priset på elsparkcykeln. Detta väcker funderingar ifall sparkcykeln fortfarande är praktisk att använda eller ekonomiskt lönsam med ett sådant system, men det är frågor för ett framtida arbete.

11

Diskussion

I följande kapitel diskuteras resultatet, konceptet och upplägget av arbetet. Dessutom tas även framtida förbättringsmöjligheter upp samt etiska aspekter av arbetet.

11.1 Upplägg av arbetet

Projektet startades med skapandet av ett GANTT-schema med tidsplanering och deadlines för delfaser av projektet. Här ingick även en del buffertar för eventuella förseningar av leveranser eller andra tidstjuvar. På det stora hela har tidsplaneringen av projektet fungerat väl. Schemat lämnade mycket tid i början av projektet till att samla information och matematiskt modellera systemet vilket gav en fördelaktig grund att stå på under resten av projektet. De beställningar av komponenter som gjordes till försök 1 kom iväg snabbt och leveranser dök upp utan större dröjsmål.

Upplägget med försök 1 och försök 2 var inte planerat vid projektets start men har på det stora hela varit till fördel för slutresultatet. Den iterativa processen har gett stor praktisk erfarenhet som med största sannolikhet inte hade kunnat uppnås av ett upplägg med exempelvis ett större fokus på teoretisk kunskapssamling följt av ett enda praktiskt försök. Det gav erfarenhet med 3D-skrivning samt CAD, vilket förenklade skapandet av mekaniska lösningar för bland annat fästet för enkodern. Det gav också mycket erfarenhet av felsökning och en större förståelse för motorer. Även det faktum att prototypen hann sammankopplas innan den första motorn avfärdades var av fördel. Detta gav mycket praktisk erfarenhet av att koppla samman komponenter och testa dem tillsammans. I efterhand kan dock sägas att mer efterforskning på motorer och deras karaktäristik kunde ha genomförts då det är den enskilt viktigaste komponenten i systemet.

11.2 Val av koncept

Tidigt i projektet gjordes en informationssamling om liknande projekt för att balansera inverterade pendlar och en mängd olika koncept togs fram innan beslutet togs att styra pendeln med ett reaktionshjul. Konceptet som valdes är komplext och kräver en stor precision, både i val av komponenter samt kalibrering. Detta märktes tydligt då små förändringar på exempelvis reaktionshjulet och återkopplingen gav stora förändringar på resultatet. För maximera resultatet är därmed optimering någonting som är väldigt viktigt för denna typ av koncept.

11.3 Komponenter

Hårdvaran har varit avgörande för projektet och val av komponenter har haft en stor påverkan på resultatet. Här utvärderas de mest kritiska komponenterna: vinkelsensorn MPU6050 och motorn med tillhörande motordrivare.

11.3.1 MPU6050

Sensorn MPU6050 har använts för att mäta de två viktigaste tillstånden i regler-systemet, nämligen vinkeln och vinkelhastigheten på pendeln. Sensorn mäter linjär acceleration i g och vinkelrotation i rad/sek. Detta krävde en del beräkningar för att omvandlas till de önskade enheterna men utöver detta har sensorn generellt varit lättanvänd. Den största problematiken har varit sensorns känslighet för vibrationer vilket ledde till en hel del oönskat brus. Detta förbättrades markant genom att kombinera data från både sensorns accelerometer och gyroskop med ett integrerat complimentary filter. Dock medför detta filter en väldigt liten fördröjning av vinkeldatan vilket hade en liten påverkan på prototypens reaktionsförmåga vid förändringar av ärvärdet. Trots detta var resultatet från den filtrerade vinkeln bra och vinkelhastigheten var minimalt påverkad av brus.

11.3.2 Motor och motordrivare

En stor anledning till problematiken att få pendeln att balansera över tid var under projektet motorns karaktäristik. Att hitta lämplig motor i passande storlek med rätt parametrar var problematiskt då specifik information ofta saknades. Detta resulterade i att hitta rätt motor blev mer en iterativ process än först förväntat då en motors lämplighet för projektet först kunde utvärderas då den testats praktiskt.

Att hitta en lämplig motor i kombination med motordrivare var också en utmaning då detta sällan föreslogs och de olika delarna kunde ha väldigt skilda leveranstider. Detta krävde ytterligare informationssökning och tog en hel del tid från projektet då det var svårt att gå vidare utan dessa delar.

Den motor och ESC som användes i den andra iterationen av projektet verkade lovande och hade till stor del den karaktäristik som krävdes. Motorn hade en låg KV-rating och därför en låg hastighet och ett högt vridmoment. Den kunde då accelerera, retardera och byta håll på reaktionshjulet för att påverka vinkeln på pendeln. Detta gjordes dock ofta ryckigt då även det lägsta vridmoment som motorn kunde producera var för starkt i vissa situationer. Optimalt hade projektet haft möjlighet för ännu en iteration i motorval. Där en motor hade kunnat väljas med ännu lägre KV-rating. Potentiellt hade en sådan motor kunnat leda till mindre ryckiga rörelser och en mer kontrollerad pendelrörelse.

Något som inte hann utvärderas i projektet men som också hade kunnat leda till mindre ryckiga rörelser var hur en växel hade kunnat påverka systemet. Istället för

att leta efter en tredje motor hade en växel kunnat användas för att växla ner hastigheten och växla upp vridmomentet på motorn som redan används. I efterhand skulle en större informationssökning kring motorer, motordrivare samt växlar ha varit nödvändig tidigare i projektet. Med denna information tidigare hade ett mer välgrundat beslut kunnat göras vilket hade möjliggjort för ytterligare förbättringsarbete vid kalibreringsfasen.

11.4 Utvecklingsmöjligheter

Även om ett stabilt system inte helt uppnåtts under detta projekt finns det fortfarande många aspekter kvar att utforska innan möjligheten att balansera en inverterad pendel med ett reaktionshjul kan avfärdas. För att förbättra systemets reaktionsförmåga och minska fördröjningen av det första tillståndet hade ett alternativ varit att filtrera vinkeln med ett Kalmanfilter. Detta skulle öka filtrets komplexitet men skulle potentiellt kunna medföra bättre filtrerad data samt en mindre fördröjning av pendelns vinkel. Då komplexiteten ökar valdes detta bort i projektet men möjligheten hade kunnat utvärderas i framtiden.

För att få pendeln att balansera och stabiliseras bättre över tid bör motorn bytas ut alternativt bör en växel implementeras för att få mindre acceleration vid små rörelser på reaktionshjulet. Det uppmärksammades vid kalibrering att orsaken till pendelns fall ofta var till följd av en onödigt stor acceleration vilket medförde en väldigt ryckig pendling med den befintliga motorn. En nedväxlad motor antas kunna generera momentet som krävs till en lägre acceleration vilket skulle göra systemet mer stabilt.

För att förbättra prototypens prestation ytterligare skulle en mer genomgående optimering av prototypens olika parametrar kunna genomföras. Detta skulle bland annat kunna innebära optimering av reaktionshjulets massa och storlek. Ytterligare optimering skulle kunna innefatta den återkopplade förstärkningen som tidigare kalibrerats för hand.

Om prototypens balanseringsförmåga över tid skulle förbättras skulle konceptet kunna skalas upp och implementeras på en sparkcykel. Detta skulle kunna innebära att reglering vid framfart av sparkcykeln även blir aktuellt vilket antas underlätta balanseringen markant då det innebär fler frihetsgrader som systemet kan utnyttja för att parera fallet.

11.5 Etik och Hållbarhet

Hållbar utveckling har varit starkt förankrat i projektets arbete då projektet har strävat efter att hitta en lösning på ett hållbarhetsproblem. Bakgrunden till arbetet är de elsparkcyklar för uthyrning som blivit mer och mer populära och som oftast finns parkerade olägligt och på grund av detta utsätts för slitage. Målet med projektet var ett första steg i att utforska möjligheten att elsparkcyklar hade kunnat bli självbalanserade i ett försök att kunna hitta en lösning på problemet. En lösning

11. Diskussion

på dåligt placerade elsparkcyklar hade kunnat ha positiv påverkan på både social, miljömässig och ekonomisk hållbarhet.

Litteratur

- [1] D. Schellong, P. Sadek, C. Schaetzberger och T. Barrack, “The Promise and Pitfalls of E-Scooter Sharing,” *Boston Consulting Group*, [Online]. maj. 2019. Tillgänglig: URL: <https://www.bcg.com/publications/2019/promise-pitfalls-e-scooter-sharing>, (hämtad: 17/05/2022).
- [2] C. W. Anderson, “Learning to Control an Inverted Pendulum Using Neural Networks,” *IEEE Control Systems Magazine*, årg. 9, nr 3, s. 31–37, april 1989, ISSN: 02721708. DOI: 10.1109/37.24809.
- [3] Thomas B, *Modern Reglerteknik*, 5. utg. Stockholm, Sverige: Liber, 2018, s. 268–294.
- [4] P. Zhang, Z. Wu, H. Dong, M. Tan och J. Yu, “Reaction-Wheel-Based Roll Stabilization for a Robotic Fish Using Neural Network Sliding Mode Control,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, årg. 25, nr 4, s. 1904–1911, aug. 2020, ISSN: 1941014X. DOI: 10.1109/TMECH.2020.2992038.
- [5] Nasa, “Reaction/Momentum Wheel,” 2022. [Online]. Tillgänglig: URL: <https://spinoff.nasa.gov/spinoff1997/t3.html> (hämtad: 06/04/2022).
- [6] K. J. Åström och R. M. Murray, *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton, N.J, USA: Princeton University Press, 2008, s. 396, ISBN: 9780691135762.
- [7] R. Büchi, *Brushless Motors and Controllers*. Books on Demand GmbH, 2012, s. 1–50.
- [8] How To Mechatronics, “How Brushless Motor and ESC Work,” 2019. [Online]. Tillgänglig: URL: <https://howtomechatronics.com/how-it-works/how-brushless-motor-and-esc-work/> (hämtad: 06/05/2022).
- [9] Systems and methods for providing redundancy to electronic speed control systems, av L. Qiu och Z. Changxing. (2021, 26 januari). 10,901,414 [Online]. Tillgänglig: URL: <https://worldwide.espacenet.com/patent/search/family/061689287/publication/US10901414B2?q=10901414>.
- [10] *DRV5013 Digital-Latch Hall Effect Sensor*, Dallas, TX, USA, Texas Instruments. [Online]. Tillgänglig: URL: www.ti.com, Hämtad: 04/05/2022.
- [11] D. S. Fedorov, A. Y. Ivoylov, V. A. Zhmud och V. G. Trubin, “Using of Measuring System MPU6050 for the Determination of the Angular Velocities and Linear Accelerations,” *Automatics & Software Enginery*, årg. 1, nr 11, s. 75–81, jan. 2015, ISSN: 2312-4997.
- [12] O. J. Woodman, “An introduction to inertial navigation,” University of Cambridge, Cambridge, UK, tekn. rapport, aug. 2007, s. 3–17. DOI: 10.48456/tr-696. URL: <https://www.cl.cam.ac.uk/techreports/UCAM-CL-TR-696.html>.

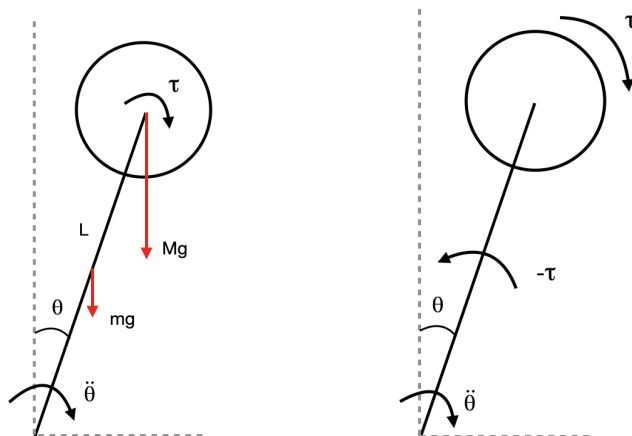
- [13] *Arduino UNO R3*, Monza, Italy: Arduino S.r.l. [Online]. Tillgänglig: URL: <https://docs.arduino.cc/resources/datasheets/A000066-datasheet.pdf>, Hämtad: 13/05/2022.
- [14] R. Grahn och P.-A. Jansson, *Mekanik: Statik och Dynamik*, 3. utg. Lund, Sverige: Studentlitteratur, 2013, s. 231–515, ISBN: 9789144085784.

B

Matematiska beräkningar

Den inverterade pendeln friläggs i figur B.1 och de två differentialekvationerna som används i projektet beräknas med hjälp av Newtons andra och tredje lag för roterande kroppar. Hela bilagan är baserad på teori ur [14].

B.1 Pendelns fall



(a) Vridmomentet τ från reaktionshjulet samt tyngdkraftens påverkan på pendelns olika massor.

(b) Vridmoment τ från reaktionshjul och motriktat reaktionsmoment $-\tau$.

Figur B.1: Friläggning av inverterad pendel med reaktionshjul.

Newtons andra lag för roterande kroppar säger att summan av alla vridmoment τ på en kropp är lika med kroppens vinkelacceleration $\ddot{\theta}$ runt en fix axel, multiplicerat med kroppens tröghetsmoment I runt samma fixa axel.

$$\sum \tau = I\ddot{\theta} \quad (\text{B.1})$$

Detta ger ett uttryck för vinkelaccelerationen.

$$\ddot{\theta} = \frac{\sum \tau}{I} \quad (\text{B.2})$$

För att få fram $\ddot{\theta}$ behövs summan av alla vridmoment och systemets tröghet kring den fixa axeln.

B.1.1 Summering av vridmoment

De vridmoment som påverkar den inverterade pendeln är den hävarm som uppstår från gravitationskraften när pendeln välter samt det reaktionsmoment $-\tau$ som uppstår kring rotationsaxeln av vridmomentet τ från reaktionshjulet.

Vridmomentet $\tau_{gravitation}$ blir gravitationens påverkan på pendelns olika massor multiplicerat med hävarmarna från vinkeln θ . Detta visualiseras i figur B.1a.

$$\tau_{gravitation} = (m_r + m_m)gL \sin(\theta) + m_p g 0.5L \sin(\theta) = (m_r + m_m + 0.5m_p)Lg \sin(\theta) \quad (\text{B.3})$$

Där m_r , m_m och m_p är massan för reaktionshjul, motor respektive pendelarmen. L är längden på pendelarmen och g är gravitationskonstanten. Vid ett oreglerat system är detta alla vridmoment som påverkar en inverterad pendel så att den faller. För att balansera pendeln läggs ett moment τ till via acceleration av reaktionshjulet. Här används Newtons tredje lag för roterande kroppar, vilket hävdar att för varje applicerat vridmoment uppstår ett lika stort motriktat vridmoment. När ett vridmoment τ appliceras runt reaktionshjulets rotationspunkt uppstår ett lika stort motriktat vridmoment $-\tau$ runt den fixa punkt där pendeln sitter fast. Dessa vridmoment och deras riktning vid positiv vinkel θ illustreras i figur B.1b.

Reaktionsmomentet $-\tau$ är lika stort och motriktat vridmomentet τ från reaktionshjulet och på den inverterade pendeln är det $-\tau$ som motverkar vinkelaccelerationen då pendeln faller. Detta innebär i praktiken att om vinkeln θ är positiv och pendeln faller åt höger behöver reaktionshjulet rotera medurs, samt om vinkeln är negativ och pendeln faller åt vänster behöver reaktionshjulet rotera moturs för att stabilisera fallet. Vridmomentet som påverkar pendeln från reaktionshjulet blir då:

$$\tau_{reaktionshjul} = -\tau \quad (\text{B.4})$$

Vilket ger summan av vridmomenten som påverkar pendeln till.

$$\sum \tau = \tau_{gravitation} + \tau_{reaktionshjul} = (m_r + m_m + 0.5m_p)Lg \sin(\theta) - \tau \quad (\text{B.5})$$

B.1.2 Tröghet kring pendelns fixa axel

Trögheten hos ett masssystem runt axel är lika med summan av de olika delsystemens tröghetsmoment runt samma axel. Den inverterade pendelns totala tröghet kring rotationspunkten är summan av pendelns, motorns och reaktionshjulets tröghet kring rotationspunkten.

$$I_{tot} = I_{PO} + I_{MO} + I_{RO} \quad (\text{B.6})$$

Trögheten I_{PO} för pendelarmen kring den fixa axeln anses här vara en smal rak stång.

$$I_{PO} = \frac{m_p L^2}{3} \quad (\text{B.7})$$

Trögheten I_{MO} för motorn kring fix axel. Motorns massa förenklas här till en punkt-massa.

$$I_{MO} = m_m L^2 \quad (\text{B.8})$$

Trögheten I_{RO} för reaktionshjulet kring den fixa axeln. Detta beräknas med parallellförflyttning där trögheten blir summan av reaktionshjulets tröghet runt centrumaxeln adderat med massan och pendelns längd i kvadrat.

$$I_{RO} = m_r r^2 + m_r L^2 \quad (\text{B.9})$$

Detta ger en total tröghet för den inverterade pendeln.

$$I_{tot} = \frac{m_p L^2}{3} + m_m L^2 + m_r r^2 + m_r L^2 \quad (\text{B.10})$$

Vinkelaccelerationen $\ddot{\theta}$ blir då.

$$\ddot{\theta} = \frac{(m_r + m_m + 0.5m_p)Lg \sin(\theta) - \tau}{\frac{m_p L^2}{3} + m_m L^2 + m_r r^2 + m_r L^2} \quad (\text{B.11})$$

B.2 Reaktionshjulets rotation

Även reaktionshjulets acceleration $\ddot{\varphi}$ beräknas med hjälp av Newtons andra lag.

$$\ddot{\varphi} = \frac{\sum \tau}{I_R} \quad (\text{B.12})$$

Där de vridmoment som verkar på reaktionshjulet är vridmomentet τ från motorn och tröghetsmomentet är reaktionshjulets tröghet kring centrumaxel.

$$I_R = m_r r^2 \quad (\text{B.13})$$

Det här ger differentialekvationen.

$$\ddot{\varphi} = \frac{\tau}{m_r r^2} \quad (\text{B.14})$$

INSTITUTIONEN FÖR ELEKTROTEKNIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg, Sverige
www.chalmers.se



CHALMERS