



Institutionen för Vattenbyggnad
Chalmers Tekniska Högskola

Department of Hydraulics
Chalmers University of Technology

DYNAMISK BERÄKNING AV EN
JACK-UP PLATTFORM

Beräkning av laster, randvillkor,
egenfrekvens och slutligen dess respons

av

Anders Pettersson

Examensarbete 1986:2

Göteborg 1986

Adress: Institutionen för Vattenbyggnad
Chalmers Tekniska Högskola
412 96 Göteborg

Telefon: 031/81 01 00

Förord

Examensarbete vid institutionen för Vattenbyggnad vid Chalmers Tekniska Högskola på uppdrag av Safe Offshore.

Jag vill också passa på att tacka Lars Bergdahl för all hjälp jag har fått med innehållet i denna rapport och Eva Lindstrand för hjälp med figurer.

Göteborg i september 1986.

Anders Pettersson

INNEHÅLL

Referat.....	5
1 INLEDNING.....	1.1
EXEMPEL PÅ EN JACK UPS BEN- OCH DÄCKSDIMENSIONER.....	1.2
PROBLEMOMRÅDEN VID DYNAMISK ANALYS.....	1.3
FLÖDESSCHEMA ÖVER RESPONSANALYS.....	1.4
2 MILJÖLASTER.....	2.1
VINDKRAFTER.....	2.1
<u>Dimensionerande vindhastighet.....</u>	2.2
STRÖMKRAFTER.....	2.2
VÅGKRAFTER.....	2.3
<u>Morisons ekvation.....</u>	2.3
Lyftkraft.....	2.3
<u>Virvelavlösning.....</u>	2.4
<u>Val av vågteori.....</u>	2.4
<u>Val av vågmiljö.....</u>	2.6
Energispektrummetoder.....	2.7
Val av spektrummetod.....	2.9
<u>Val av C_m, C_D och C_L.....</u>	2.10
<u>Fri vattenyta.....</u>	2.12
SAMVERKAN STRUKTUR OCH VATTEN.....	2.16
<u>Linearisering av Morisons ekvation.....</u>	2.17
Broydens approximation.....	2.17
Linearisering enligt C.C.Tung.....	2.18
Referenser.....	2.19
3 SAMVERKAN MELLAN STRUKTUR OCH JORD.....	3.1
PENETRATION.....	3.1
<u>Penetrationsmotstånd.....</u>	3.2
<u>Mantelfriktion.....</u>	3.2
<u>Spetsbärighet.....</u>	3.2
Grund penetration.....	3.2
<i>Empiriska korrektionsfaktorer.....</i>	3.2
Djup penetration.....	3.5
LATERAL RESISTANS.....	3.7
p y kurvor.....	3.7
<u>Modifiering p g a kraterbildning.....</u>	3.8
VRIDSTYVHET.....	3.8
<u>Vridstyvhet för ytligt fundament.....</u>	3.10
<u>Approximativ inspänningsnivå för djup penetration.....</u>	3.10
Referenser.....	3.11

4 STRUKTURANALYS	4.1
MODELLERING AV PLATTFORMEN	4.1
<u>Endimensionell modell</u>	4.1
<u>Tvådimensionell modell</u>	4.2
<u>Tredimensionell modell</u>	4.2
<u>Rörelseekvationen</u>	4.3
<u>Massa</u>	4.4
Konsistent massa	4.4
Koncentrerad massa	4.5
<u>Dämpning</u>	4.8
Experimentell beräkning av dämpning	4.8
<i>Fri svängningsmetoden</i>	4.8
<i>Halv kraftsmetoden</i>	4.9
Representation av dämpning	4.10
<i>Proportionell Rayleighdämpning</i>	4.10
<u>Styvhet</u>	4.10
BERÄKNING AV PLATTFORMENS EGENFREKVENNS	4.11
<u>Enfrihetsgradssystem (SDOF)</u>	4.11
Lösning med koncentrerad massa	4.11
Lösning med Galerkins metod	4.12
<u>Flerfrihetsgradssystem (MDOF)</u>	4.14
Invers iteration	4.14
<i>Skift</i>	4.16
<i>Gram-Schmidt ortogonalisering</i>	4.16
DYNAMISK RESPONS	4.17
<u>Enfrihetsgradssystem (SDOF)</u>	4.18
<u>Flerfrihetsgradssystem (MDOF)</u>	4.18
Modsuperposition	4.19
Referenser	4.22
5 SLUTSATSER	5.1

Referat

Denna rapport vill ge en vägledning i hur responsen kan beräknas för en jack up plattform. Rapporten är dock på inget sätt specialiserad på enbart jack up plattformar utan ger en generell lösningsmetodik.

Rapporten är indelad i en inledande del, tre huvuddelar och avslutas med en slutsats.

Det första kapitlet ger en inledning till problemet.

De tre följande kapitlen behandlar laster mot plattformen, penetration och vridstyvhet vid botten, och plattformens respons.

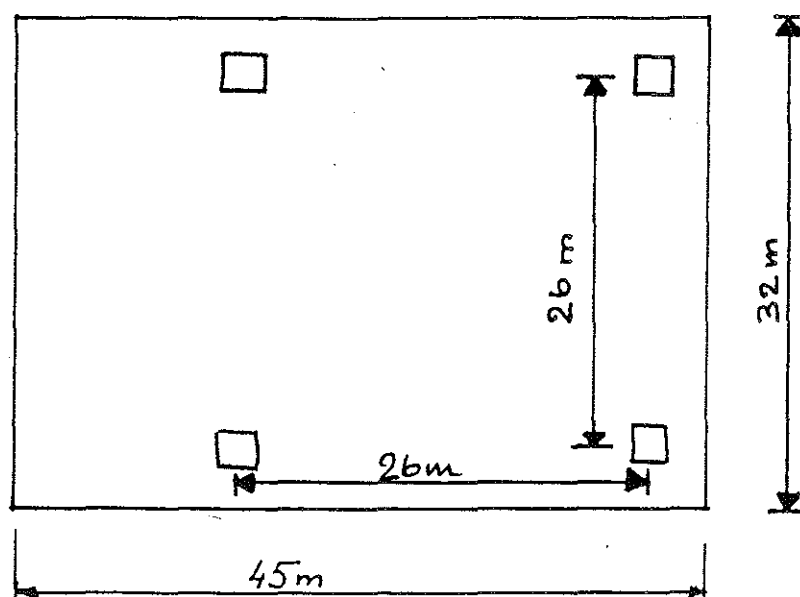
Det sista kapitlet tar upp begränsningar och antaganden som har gjorts.

1 INLEDNING

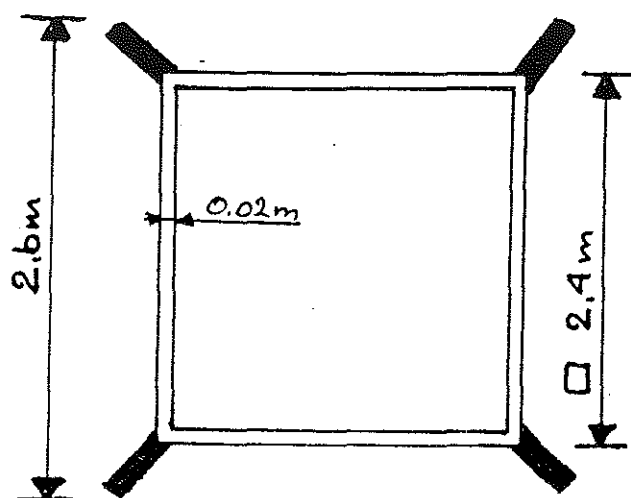
En jack up plattform skiljer sig från andra plattformstyper genom att den är bottenfast och mobil. Detta verkar vid första anblicken vara en paradox, men vid närmare eftertanke är det trots allt inte så konstigt.

Plattformens däck deplacerar på vattnet när benen, i detta fallet fyra stycken, men oftast endast tre, är upphissade. Efter att ha bogserats på plats så sänks benen ner med hjälp av motorer som driver ett kuggspel som går in i motsvarande kuggstänger på benen. Efter det att benens fötter har nått botten och penetrerat till full bärighet så hissas däcket upp till önskad höjd över vattenytan. Denna höjd är summan av vågtoppens höjd, beräknad sättning och det så kallade luftgapet. Luftgapet är den säkerhetsmarginal som återstår mellan vågtopp och plattformsdäckets underkant. Jack ups har tidigare uteslutande används i vattendjup upp till ca. 60 m. Man börjar nu använda dem på större djup och detta ställer krav på bättre beräkningsmetoder än tidigare eftersom man då ökar plattformens egenperiod. Problemet är att man då närmar sig miljölasternas dynamiska period, vilket ger en icke önskvärd dynamisk förstärkning av plattformens rörelser vilket i sin tur ökar instabiliteten och ger upphov till ökade påkänningar i strukturen. Större beräkningsmässig precision gör att man kan utnyttja plattformen optimalt. Detta leder till att randvillkoren för benes inspanning i botten nu börjar bli betydelsefulla för att kunna utnyttja plattformen maximalt. Vågornas period är ca. 5-10 sekunder. Vinsten ligger i att kunna närma sig vågperioden och lägga sig så nära den som möjligt. Till exempel vid en egenperiod T_N på 5 sekunder.

EXEMPEL PÅ EN JACK-UPS BEN- OCH DÄCKSDIMENSIONER (SAFE MARINIA)



Figur 1.1 Däcksdimensioner på Safe Marina



Figur 1.2 Bentvärsnitt

Benet i fig. 1.2 har följande hållfasthetsparametrar.

$$\text{Yttröghetsmomentet } I = 2BH^3/12 + 2Bt(H/2)^2 =$$

$$= 2 \cdot 0.02 \cdot 2.4^3/12 + 2 \cdot 2.4 \cdot 0.02(2.4/2)^2 = 0.184 \text{ [m}^4\text{]}$$

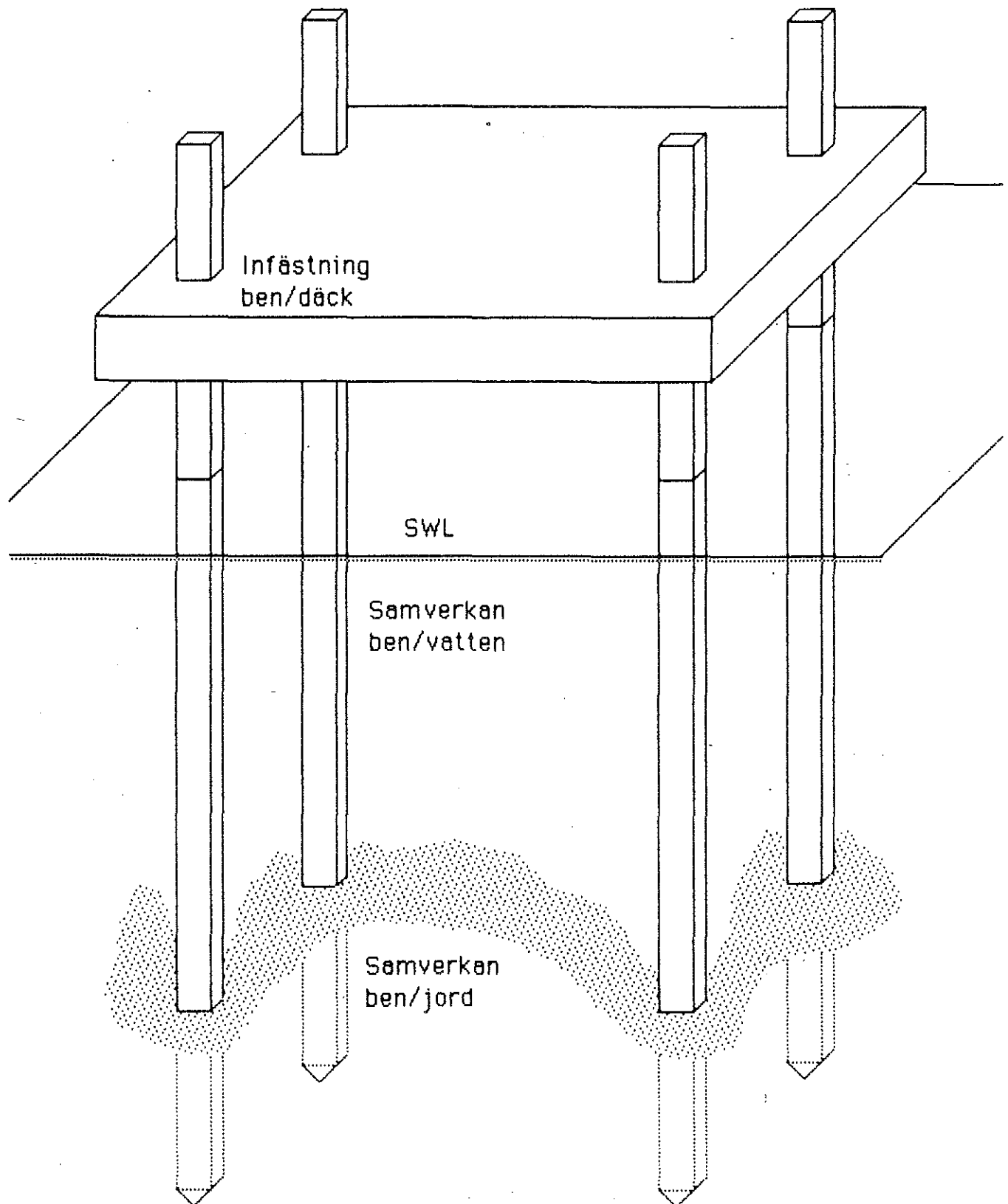
$$\text{Elasticitetsmodulen } E = 205 \cdot 10^9 \text{ [N/m}^2\text{]}$$

$$\text{Benlängd} = 57 \text{ [m]}$$

$$\text{Benvikt} = 171 \cdot 10^3 \text{ [kg]}$$

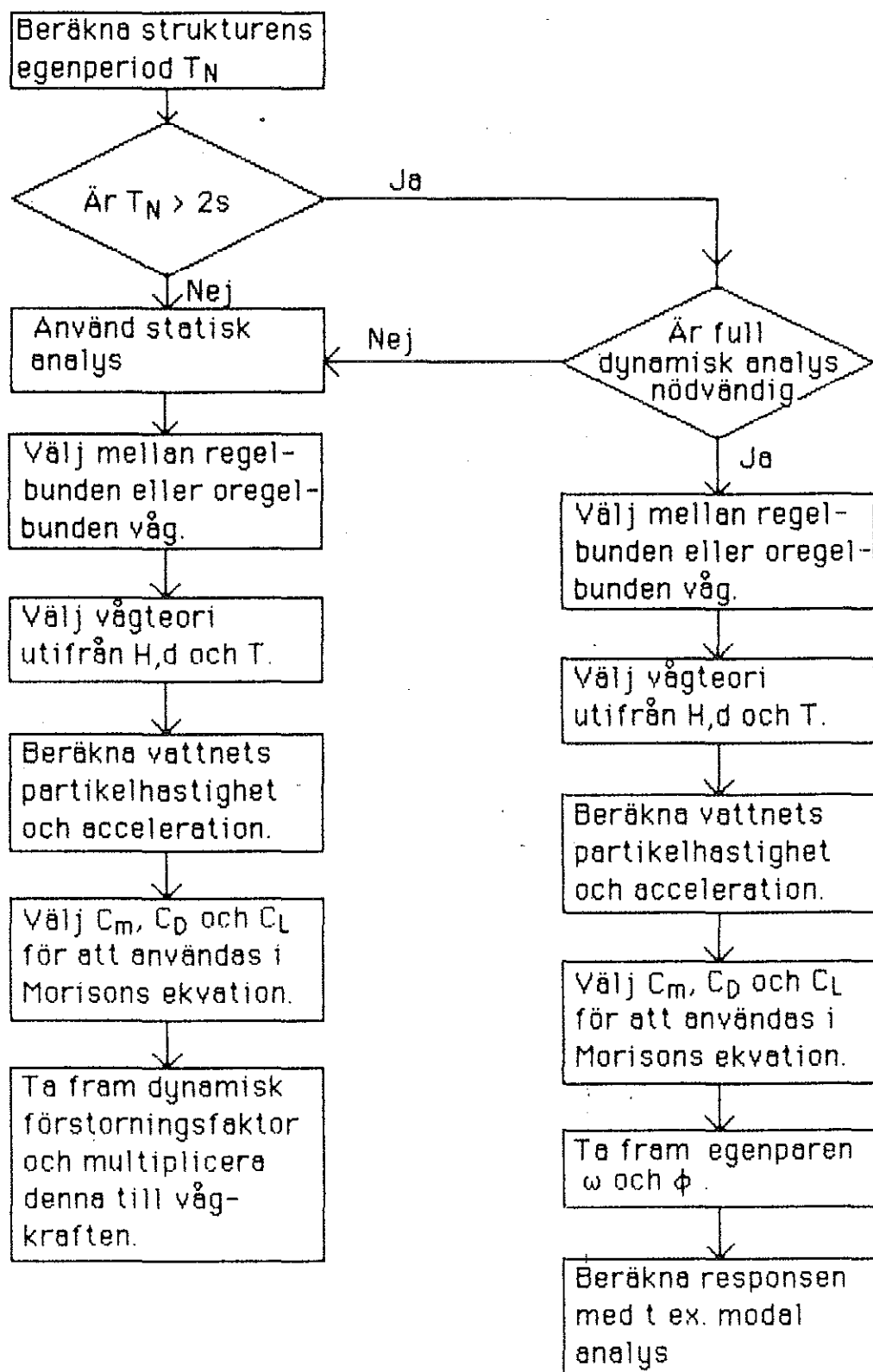
$$\text{Kontinuerlig massa } m = 171000/57 = 3000 \text{ [kg/m]}$$

$$\text{Maximal axiell belastning av däckets på varje ben} = 1300 \cdot 10^3 \text{ [kg]}$$



Figur 1.3 Jack up plattform

FLÖDESSCHEMA ÖVER RESPONSANALYS



2 MILJÖLASTER

Till miljölaster räknas vind, ström och vågkrafter.

Definitioner.

MWL = medelvattenyta och är medelvärdet mellan högsta och lägsta tidvattenyta.

SWL = lungnvattenyta och är medelvattenyta + tidvattenhöjning + stormförhöjning.

VINDKRAFTER

Vind och strömkrafter kan antas vara statiska och belastar alltså strukturen som en konstant kraft.

Vindkraften beräknas enligt Moberg (1982) ur följande formel.

$$F_W = 0.5\rho C V_Z^2 A \sin\alpha$$

där

F_W = vindkraft [N]

C = formmotståndskoefficient

V_Z = vindhastighet [m/s]

A = projicerad yta [m²]

α = vinkel mellan vindriktning och föremål

ρ = luftens densitet

Formmotståndet C väljs enligt följande formel då konstruktionsdelen är slank,

dvs. om $L/d \geq 5$, då är $C = C_S$

där

L = längden av elementet

d = tvärsnittsmåttet i vindriktningen

C_S = formmotståndets grundvärde. Se tabell 2.1

Om däremot $L/d < 5$ gäller följande samband för formmotståndet C .

$$C = C_S(0.5 + 0.1L/d)$$

$C_S = 2$ för stag, balkar etc.

$C_S = 1.5$ för rektangulära ytor

$C_S = 1.2$ för cylindriska ytor

$C_S = 0.7$ för cylindriska ytor med diameter ≥ 0.3 m

Tabell 2.1 Formmotståndets grundvärden

Dimensionerande vindhastighet

Vind kan uppdelas i odämpad vind och kastvind.

Vid odämpad vind är V_z medelvinden under 1 minut och beräknas enligt följande.

$$V_z = V_{10}(0.93+0.007z)^{0.5} \text{ [m/s]}$$

där

V_{10} = odämpad vindhastighet på 10 meter över SWL

z = nivån i meter över SWL för önskad vindhastighet

Då uppgifter om V_{10} saknas kan följande värden användas enligt DnV.

Typ av område	V_{10} [m/s]	
	Hela året	Sommar
Kustområde	40	
Öppet hav	45	
Svårt öppet hav	50	45
(Tex. Nordsjön och Norska havet)		
Extrema områden	55	

Tabell 2.2 Odämpad vindhastighet enligt DnV

Kastvind V_{zk} är medelvinden under 3 sekunder och beräknas enligt följande

$$V_{zk} = V_{10}(1.53+0.003z)^{0.5} \text{ [m/s]}$$

STRÖMKRAFTER

Liksom vindkraften antas strömkraften oftast vara statisk eftersom den vanligtvis varierar med en period som är stor och därför inte ger upphov till någon dynamisk förstoring, åtminstone inte hos bottenfasta strukturer. Det finns en mängd olika strömprofiler att välja mellan som anger strömhastighetsfördelningen från botten upp till vattenytan. Denna hastighet adderas till vattenpartikelhastigheten, från vågen, som en i tiden konstant hastighet. Se avsnittet under rubriken

Val av C_m , C_D , och C_L :

Total hastighet = strömhastighet + våginducerad hastighet

VÅGKRAFTER

Vid beräkning av vågkrafter delas vågaktiviteten upp i två komponenter.

- Vågdriftskomponent
- Oscillerande komponent

Vågdriftskraften orsakas av att konstruktionen förhindrar energitransporten i vågrörelsen och betraktas oftast som en konstant kraft. Den oscillerande kraften beror på vattenpartiklarnas cirkulerande rörelse. För konstruktioner med en utbredning mindre än 0.2-våglängden kan Morisons ekvation användas. I denna utnyttjas antagandet att vågkraften kan superponeras linjärt av en tröghetskraftskomponent och en släpkraftskomponent som fås från experimentella resultat.

Morisons ekvation

Kraften per längdenhet är för en slank fixerad konstruktion = $F_I + F_D$

$$F_I = (C_m + 1)\rho A \dot{u} = C_I \rho A \dot{u}$$

$$F_D = 0.5\rho C_D D |u|u$$

där

C_m och C_D är tröghets- respektive släpkraftskoefficienter och bestäms experimentellt. Se tab. 2.4

u och $\dot{u}$ är den horisontella partikelhastigheten respektive partikelaccelerationen i vågrörelsen.

D och A är arean respektive volymen av pelaren per längdenhet i vågens rörelseriktning.

ρ är vattnets densitet.

Lyftkraft

Strömning kring en påle ger också upphov till en oscillerande kraft F_L vinkelrätt hastighetsriktningen.

$$F_L = 0.5\rho C_L A u^2$$

där

C_L = lyftkraftskoefficienten

Resultande kraft

Resultande kraft F_R är då

$$F_R = [(F_I + F_D)^2 + F_L^2]^{0.5}$$

Virvelavlösning

Vid vattenströmning kring en påle uppstår en oscillerande rörelse hos pålen som beror på strömmens växlande avlösning på endera sidan (vinkelrätt strömningsriktningen) om pålen. Enligt DnV skall lyftkraften ovan multipliceras med en förstörningsfaktor DLF om frekvensen på virvelavlösningen sammanfaller med, eller är i närheten av, pelarens egenfrekvens.

$$DLF = (1/2\xi)(1 - e^{-2n\pi\xi})$$

där

ξ = strukturens dämpning (vanligtvis för stålstrukturer är $\xi=0.005$ i luft och 0.02 i vatten)

n = antal lastväxlingar (vid virvelavlösning p g a vind eller konstant ström skall n sättas = ∞)

Val av vågteori

Vågteorin väljs utifrån vattendjup d , våghöjd H och vågperiod T .

Med dessa parametrar kända fås korrekt vågteori ur fig. 2.3

Generellt kan man dock säga att Cnoidal vågteori används vid grunt vatten och Airys linjära vågteori vid vattendjup därutöver. Att använda sig av Airys vågteori vid större vattendjup än grunt vatten ger accelerationer och hastigheter som ligger tillräckligt nära de verkliga.

Försök av Moberg har till och med visat att den linjära teorin många gånger stämmer bättre överens med verkligheten än vad Stokes teorier gör även vid djupt vatten.

Vid beräkning av vågtoppens nivå tex. för säkerställande av luftgap mellan däck och vattenyta, måste valet av vågteori ske med större noggrannhet än vad som är beskrivet ovan. Detta beror på att våghöjden får en förskjutning uppåt, när botten grundar upp eller när vågen är brant på djupt vatten.

Se fig. 2.1



Figur 2.1 Vågens förskjutning vid grunt vatten

Relativt vattendjup	Grunt vatten $d/L < 1/25$	Övergångszon $1/25 < d/L < 1/2$	Djupt vatten $d/L > 1/2$
Vågprofil $\eta =$	$a \sin \theta$	$a \sin \theta$	$a \sin \theta$
Fashastighet $C =$	$(gd)^{1/2}$	$(gT/2\pi) \tanh kd$	$gT/2\pi$
Våglängd $L =$	$T(gd)^{1/2}$	$(gT^2/2\pi) \tanh(kd)$	$gT^2/2\pi$
Horisontell partikel hastighet $u =$	$a(g/d)^{1/2} \sin \theta$	$\frac{agk \cosh k(d+z)}{\omega \cosh kd} \sin \theta$	$awe^{kz} \sin \theta$
Horisontell partikel acceleration $\dot{u} =$	$a\omega(g/d)^{1/2}$	$-agk \frac{\cosh k(d+z)}{\cosh kd} \cos \theta$	$-a\omega^2 e^{kz} \cos \theta$

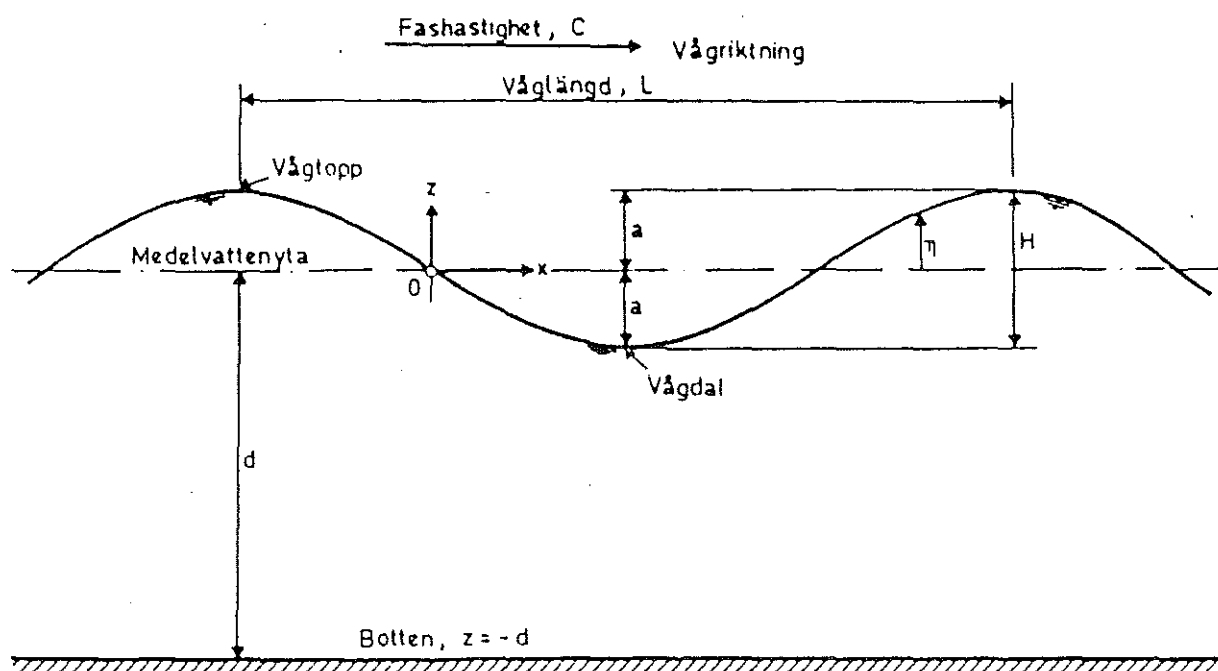
där

$k = \text{vågtalet} = 2\pi/L$

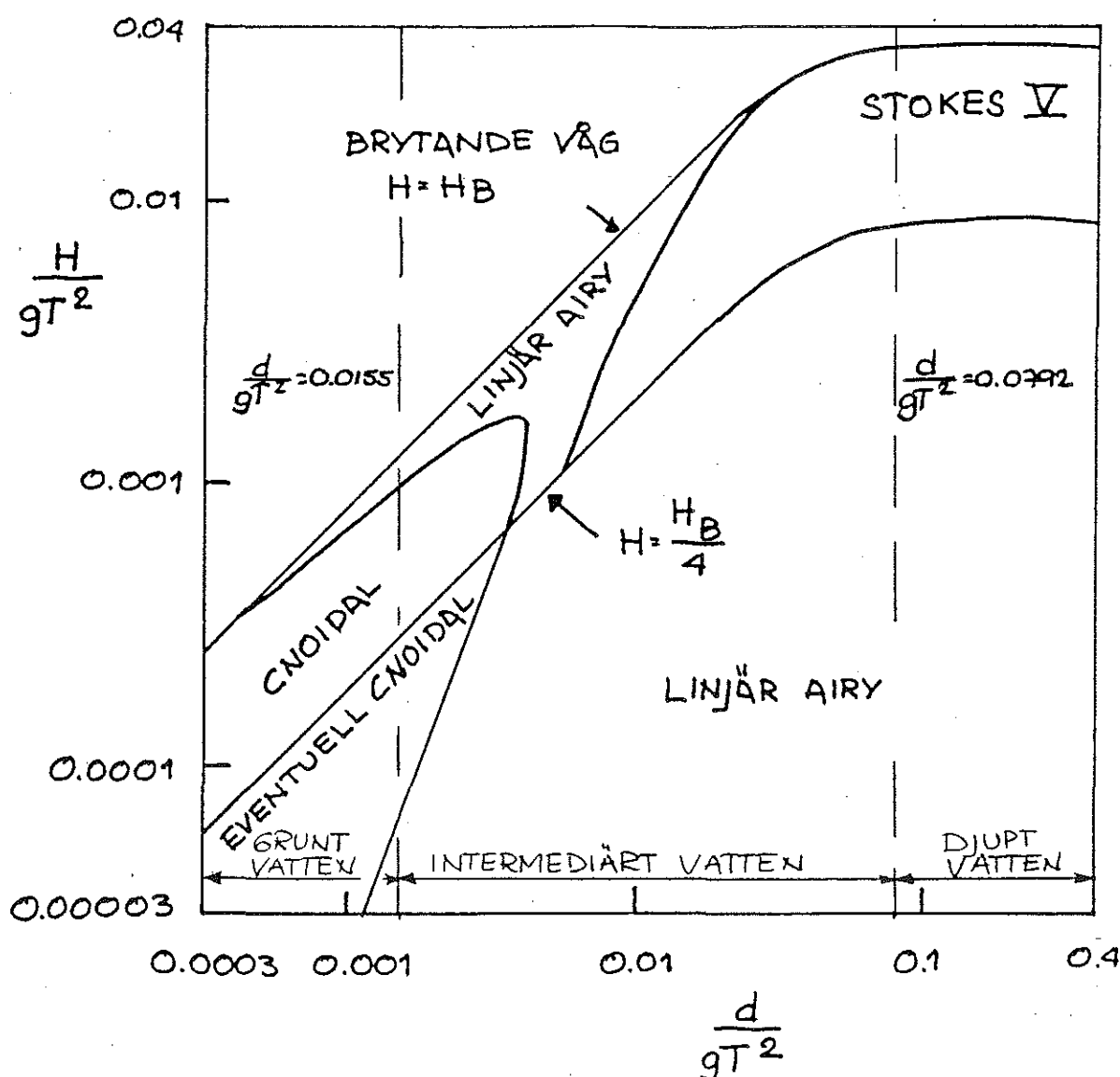
$\omega = 2\pi/T$

$\theta = kx - \omega t$

Tabell 2.3 Vågkaraktäristika för fortskridande sinusvåg enligt linjär teori.



Figur 2.2 Vågprofil (från A. Sjöberg 1983)



Figur 2.3 Val av vågteori

Val av vågmiljö

Det finns i huvudsak två olika sätt att representera vågor.

- Regelbundna vågor som kan beskrivas med en våghöjd och en period.
- Oregelbundna vågor som beskrivs med ett energispektrum.

Energispektra, se fig. 2.4, är baserade på ett antal parametrar såsom vindhastighet, varaktighet, stryklängd, formfaktorer etc.

Det bästa energispektret är det som är registrerat på plats, men eftersom detta sällan är möjligt så används ett antal spektrummodeller som försöker beskriva verkligheten på ett så riktigt sätt som möjligt.

Det finns två olika sätt att förutsäga ett vågtåg.

Den första är spektrummetoden och den andra är signifikanta vågmetoden.

Utifrån energispektret beräknas partikelhastighet och acceleration som funktion av tiden.

Den vanligaste enparametermodellen är Pierson-Moskowitz modell som baserar sig på signifikant våghöjd H_S eller på vindhastigheten U_W .

Det finns flera tvåparametermodeller.

De vanligaste är.

- Bretschneider
- Scott
- Scott-Wiegel
- ISSC och
- ITTC

JONSWAP är en femparametermodell, men vanligtvis är tre av parametrarna konstanter.

Ochi modellen använder sig av sex parametrar och ger två toppar i spektret eftersom den, förutom vindgenererade vågor, även tar hänsyn till dynningar. Vindgenererade vågor är vågor som bildas lokalt och dynningar är vågor som har bildats på någon annan plats.

Följande energispektra skall studeras närmare.

- Pierson - Moskowitz (P-M spektrum)
- JONSWAP
- Liu
- ISSC
- Bretschneider

Energispektrummetoder

P-M spektrum

P-M spektrum beskriver en fullt utbildad sjö då varaktigheten eller stryklängden är tillräckligt stora. Som parametrar kan antingen våghöjden H_S , vindhastigheten U_W eller perioden T_Z användas. P-M modellen används för att representera dimensionerande stormvågor.

Enligt Chakrabarti (1980) gäller.

$$S(f) = (2\pi)^{-4} \alpha g^2 f^{-5} e^{(-1.25(f/f_0)^{-4})}$$

där

f = frekvensen

α = Phillips parameter (=0.0081)

g = jordaccelerationen

f_0 = frekvensen för spekrets maximala energi = $(0.161g/H_S)^{0.5}/2\pi$

H_S = signifikanta våghöjden [m]

Alternativt:

$$f_0 = 4.4862/T_Z 2\pi$$

där

T_Z = nollkryssningsperioden

eller enligt Bergdahl, Melin (1985).

$$f_0 = 8.608/U_W 2\pi$$

där

U_W = vindhastighet [m/s] 19.5m över SWL

JONSWAP

Enligt Chakrabarti gäller följande formel för JONSWAPspektrum.

$$S(f) = S_{PM}(f) \gamma^e \frac{(- (f-f_0)^2 / 2\tau^2 f_0^2)}{}$$

där

$S_{PM}(f) = S(f)$ för ett P-M spektrum

γ = toppighetsparametern

τ = formparameter

f_0 = frekvensen för spektrets maximala energi [Hz]

Om stryklängden betraktas så är JONSWAP ett 2-parametersspektrum, då är.

$$\gamma = 3.30$$

$$\tau = 0.076 X_0^{-0.22}$$

$$f_0 = (g/U_W) X_0^{-0.33}$$

$$X_0 = gX/U_W^2$$

$$\tau = \begin{cases} 0.07 & \text{för } f \leq f_0 \\ 0.09 & \text{för } f > f_0 \end{cases}$$

där

X = stryklängd [m]

U_W = vindhastighet [m/s] 19.5m över vattenytan

Varierande parametrar är vindhastigheten U_W och stryklängden X .

Om stryklängd ej beaktas är JONSWAP ett 4-parametersspektrum.

Liu-spektrum

Modellen kommer ifrån de stora sjöarna i USA.

Den är snarlik P-M spektret, men tar hänsyn till stryklängden.

Enligt Chakrabarti är

$$S(f) = (2\pi)^{-4} \alpha g^2 X_0^{-0.25} f^{-5} e^{-(\beta f_0)/(f X_0^{8/15})}$$

där

$$\alpha = 0.0081$$

$$\beta = 5500$$

$$X_0 = gX/U_*^2$$

$$U_* = U_w^{5/3} / (gX^{1/3})$$

X = stryklängd [m]

U_w = vindhastighet [m/s]

Signifikant vågmetod.

Bretschneiders spektrum

Under antagande att våghöjd och vågperiod är raleighfördelade kan spektret beskrivas enligt följande.

$$S(f) = 0.3375 H_s^2 f_s^4 / f^5 e^{-0.675(f_s/f)}$$

där

$$f_s = 1/T_s$$

H_s = signifikant våghöjd

T_s = signifikant medelvågperiod

ISSC

ISSC-spektret använder sig, liksom Bretschneider, av de statistiska parametrarna H_s och T_s . Se Chakrabarti (1980).

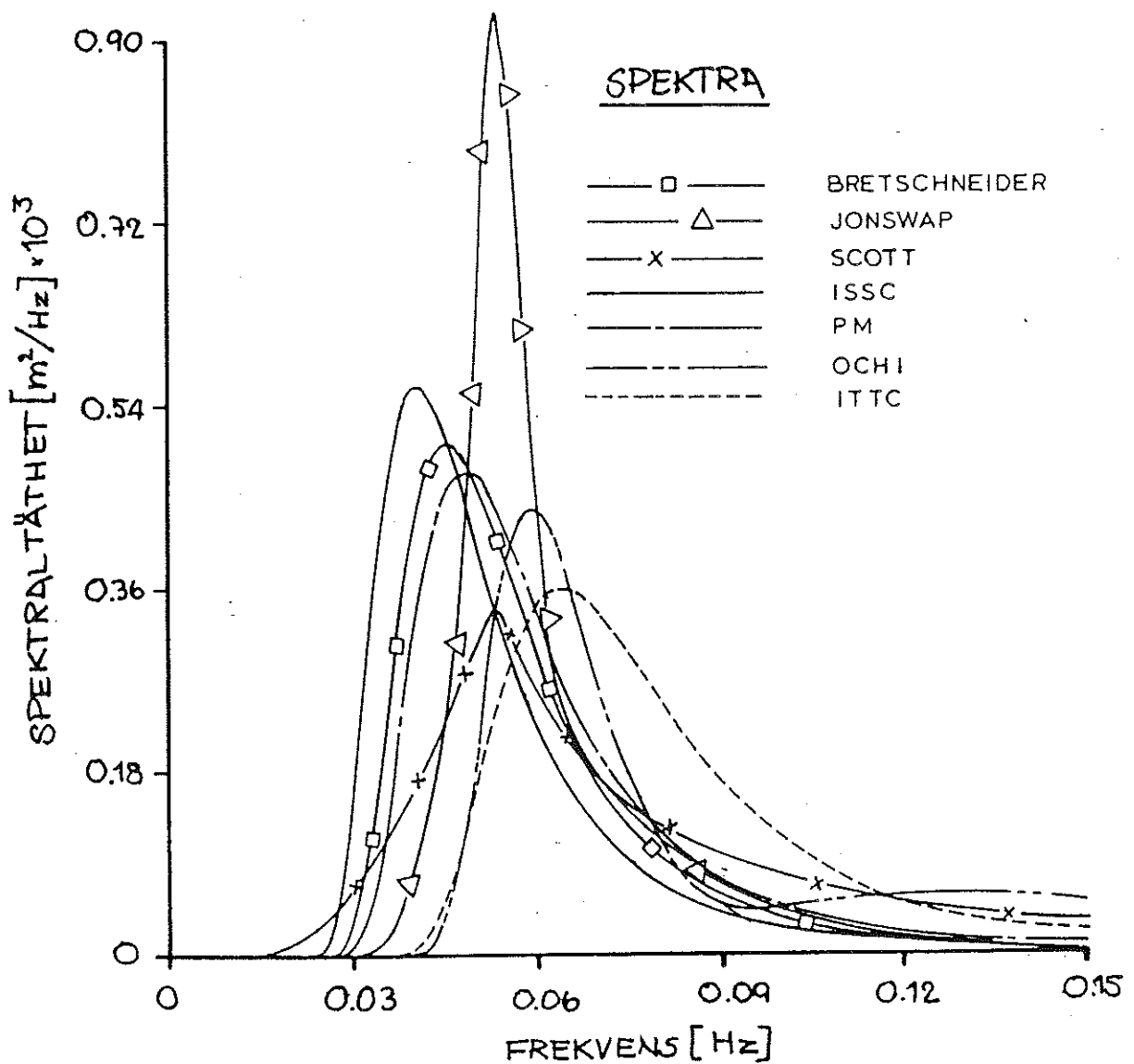
Val av spektrummetod

Att rekommendera någon metod framför en annan går ej, utan man får bedöma det utifrån vilken plats man skall använda den på.

Liu spektret lämpar sig bäst för platser med begränsad stryklängd.

P-M och Bretschneiders spektrummodeller är framtagna för fullt utbildad sjö, vilket sällan förekommer. Jämförelse mellan olika spektra visas i fig. 2.4 för signifikant våghöjd $H_s = 16\text{m}$ (enligt Chakrabarti 1980)

P-M spektrets stormvågsperiod (energispets) är ca. 22 sekunder för denna våghöjd, och JONSWAP som är framtagen speciellt för Norska havet har sin stormvågsperiod vid ca. 20 sekunder.



Figur 2.4 Några olika spektrummetoders spektraltäthet. (Chakrabarti 1980)

Val av C_m , C_D och C_L

C_m , C_D och C_L har befunnits vara funktioner av Reynolds tal (Re), ytans råhet (k/D) och i vågor även av Keulegan-Carpenters tal (KC).

$$Re = u_{\max} D / \nu \text{ och } KC = u_{\max} T / D$$

där

$$u_{\max} = \text{maximal flödes hastighet} = u_{\text{ström}} + u_{\text{våg}} = u_0 + \pi H / T$$

T = vågperiod

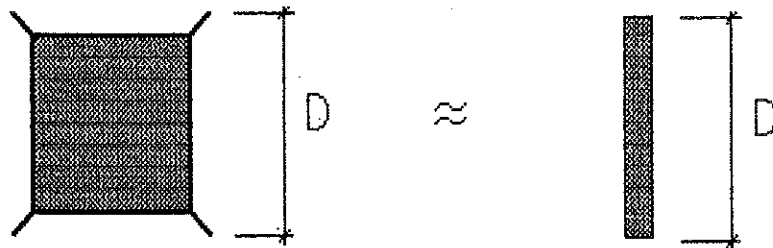
D = tvärsnittets bredd

H = våghöjd

ν = kinematisk viskositet

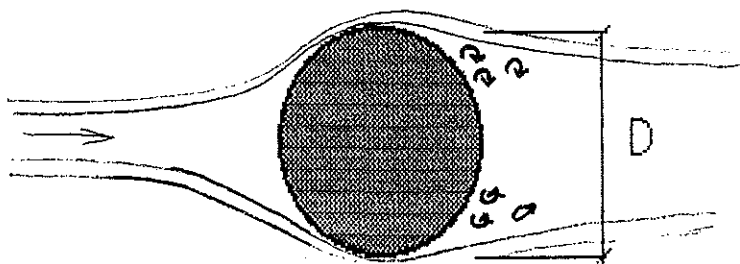
C_m , C_D och C_L är även funktioner av vågteori, avstånd till fri vattenyta, marin påväxt och vågornas stokastiska uppträdande.

Oftast är det bara Re , KC och k/d som styr valet av C_m , C_D och C_L . Vid kvadratiska tvärsnitt med skarpa hörn varirar värdet på C_D mycket litet för ovanstående parametrar eftersom tvärsnittet kan ersättas av en platta. Se fig. 2.5



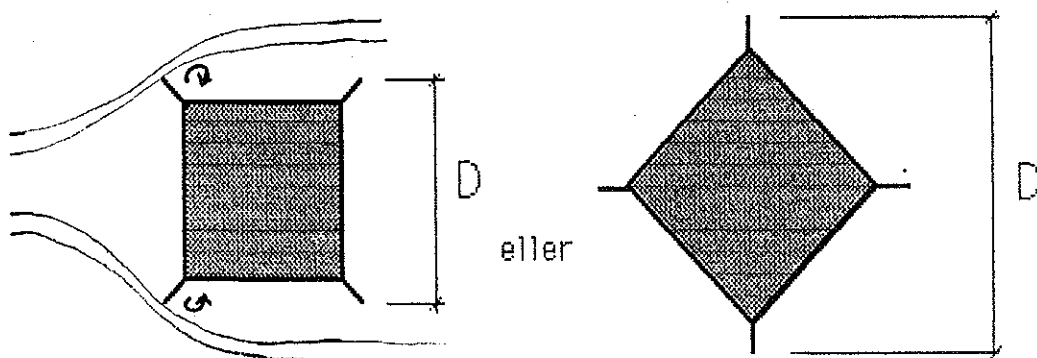
Figur 2.5 Tvärsnittets approximation vid val av C_D

Det övervägande största arbete som är gjort för att bestämma C_m , C_D och C_L är för cirkulära pelare. Det är också för cirkulära pelare som det är störst problem med att bestämma C_m , C_D och C_L korrekt eftersom man inte på förhand vet i vilken punkt som vi kommer att få avlösning av strömningen. Se fig. 2.6



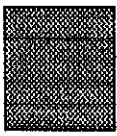
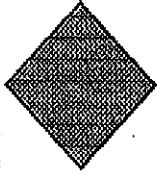
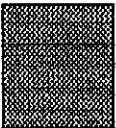
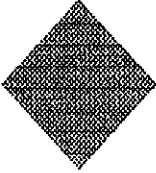
Figur 2.6 Vattenströmmens avlösning kring ett cirkulärt tvärsnitt

Det är lättare att bestämma C_m , C_D och C_L för kvadratiska pelare med skarpa hörn för där är avlösningspunkten entydigt bestämd och ändras inte vid ändrad vattenhastighet som är fallet för cirkulära pelare. Se fig 2.7



Figur 2.7 Vattenströmmens avlösning kring ett kvadratisk tvärsnitt

Det är först nyligen som man har fått överensstämmelse på C_m , C_D och C_L mellan olika försök, vilket inte har varit fallet om man läser äldre artiklar. Alltså skall man använda sig av de senaste artiklarna inom ämnet. De flesta försök är gjorda på cirkulära pelare och inte på kvadratiska slanka pelare. Vi är alltså hänvisade till något äldre publikationer. Detta gör dock inte så mycket eftersom, som sagts tidigare, det är lättare att bestämma C_m , C_D och C_L på kvadratiska pelare än på cirkulära så de äldre resultat som finns stämmer bra överens med verkligheten. Värden på C_m , C_D och C_L se tab. 2.4

Tvärsnitt	C_D	Tvärsnitt	C_m
  eller  	2.0	 	1.5
	1.5		1.2

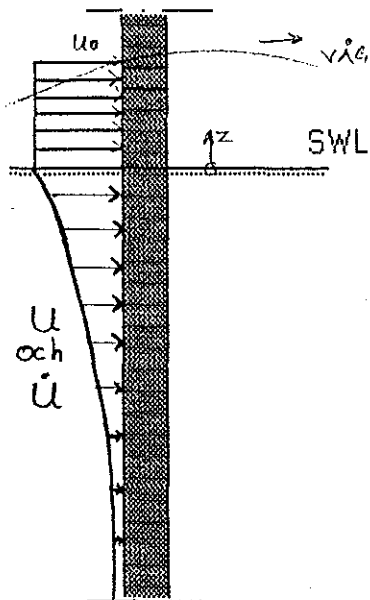
Tabell 2.4 Värden på C_m och C_D

$C_L = 0$ för ovanstående profiler eftersom det inte uppstår någon lyftkraft för strömning kring en symmetrisk profil. Det är när strömningen får en annan anfallsvinkel som profilen ej längre är symmetrisk.

Fri vattenyta

Vid större vågor kan vattenytans höjning, när vågen passerar, ej försummas utan måste tas med vid beräkning av partikelhastighet och acceleration. Vid Airys vågteori kan vattenytans höjning η på grund av vågtopp tas hänsyn till genom att integrera partikelhastigheten och partikelaccelerationen från botten och upp till vattenytan η istället för till SWL. Se fig. 2.8

Detta gör att partikelhastigheter och accelerationer och därför också responsen måste beräknas i tidsplanet istället för i frekvensplanet.



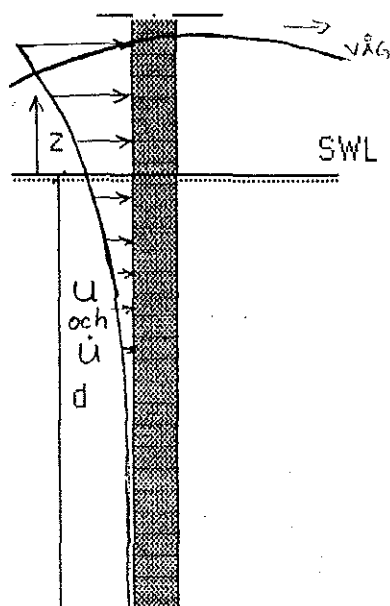
Figur 2.8 Hastighets och accellerationsfördelning utefter plattformsbenet.

$$\text{Total hastighet } u \text{ mot pålen} = \frac{H g k}{2 \omega} \left[-d \right]^0 (\cosh k(d+z) \sin \theta / \cosh k d) dz + \eta]$$

$$\text{Total acceleration } \dot{u} \text{ mot pålen} = - \frac{H g k}{2 \omega} \left[-d \right]^0 (\cosh k(d+z) \cos \theta / \cosh k d) dz + \eta]$$

Ovanstående ekvationer bygger på antagandet att hastigheten respektive accelerationen är konstant från SWL och upp till vågtoppen. Se fig.2.8

Om man istället antar att hastigheten och accelerationen ej är konstanta från SWL upp till vågtoppen utan är svagt exponentialfördelad kan följande ekvationer användas för partikelhastighet och acceleration enligt Chakrabarti (1980). Dessa ger hastighets och accelerationsfördelning enligt fig. 2.9



Figur 2.9 Hastighets respektive accellerationsfördelning utefter plattformsbenet enligt Chakrabarti

$$\text{Total hastighet } u \text{ mot pålen} = \frac{H g k}{2 \omega} \left[-d \right]^n (\cosh k(d+z) \sin \theta / \cosh k(d+\eta)) dz$$

$$\text{Total acceleration } \dot{u} \text{ mot pålen} = -\frac{H g k}{2 \omega} \left[-d \right]^n (\cosh k(d+z) \cos \theta / \cosh k(d+\eta)) dz$$

Ett tredje och enklare sätt är att helt enkelt integrera vår ursprungliga partikelhastighet respektive partikelacceleration upp till aktuell vattenyta η . Detta ger följande ekvationer vilka dock överskattar vågkraften något. Partikelhastigheten respektive partikelaccelerationen fördelar sig som i fig. 2.9, men något brantare exponentialfördelning än i ovanstående figur.

$$\text{Total hastighet } u \text{ mot pålen} = \frac{H g k}{2 \omega} \left[-d \right]^n (\cosh k(d+z) \sin \theta / \cosh kd) dz$$

$$\text{Total acceleration } \dot{u} \text{ mot pålen} = -\frac{H g k}{2 \omega} \left[-d \right]^n (\cosh k(d+z) \cos \theta / \cosh kd) dz$$

där

$$\theta = kx - \omega t$$

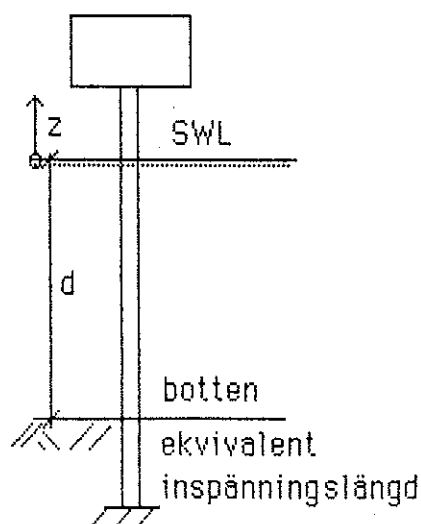
ω = vågvinkelfrekvens

k = vågtalet $= 2\pi/T$

H = våghöjd. Se fig. 2.2

Exempel:

Beräkning av total vågkraft mot ett plattformsben.



Figur 2.10 Endimensionellt plattformsben

Betrakta det kvadratiske plattformsbenet i fig. 2.10.

Tvärsnitt enligt fig. 1.2

Förutsättningar:

Linjär vågteori (tab. 2.3 gäller)

Reguljär våg med vågperioden $T = 5.0s$ och våghöjden $H = 4m$.

Vattendjup $d = 50m$

Antag att benet ej är flexibelt.

Är det djupt vatten ?

$$L_0 = gT^2/(2\pi) = 39.03m < 2d = 100m \quad \text{OK! Det är djupt vatten.}$$

En approximation för partikelhastigheten respektive partikelaccelerationen. Se tab.2.3

$$u = a\omega e^{kz} \sin \theta$$

$$\dot{u} = -a\omega^2 e^{kz} \cos \theta$$

Den totala kraften $F = F_I + F_D$ kan nu beräknas.

Eftersom benprofilen har kuggstänger som sticker ut från benet kan tröghetskraftskoefficienten C_M ej användas som vanligt, alltså att

$$C_I = (1 + C_M), \text{ utan blir istället } = (2.4^2/2.6^2 + C_M). \quad C_I = (0.85 + 1.5) = 2.35.$$

Detta ger tröghetskraften $F_I = \rho C_I A \int_{-d}^{\eta} \dot{u} dz =$

$$= 1025 \cdot 2.35 \cdot 2.6^2 \int_{-50}^{\eta} \dot{u} dz = 16283 (-a\omega^2) \int_{-50}^{\eta} e^{kz} \cos(kx - \omega t) dz =$$

$$16283 (-2.16) \int_{-50}^{\eta} e^{0.158z} \cos(kx - \omega t) dz =$$

$$= -0.05211 \cdot 10^6 / 0.158 [e^{0.158z}]_{-50}^{\eta} \cos(kx - \omega t) =$$

$$(\eta = a \sin \omega t) \text{ och } (x=0)$$

$$= -0.3298 \cdot 10^6 (3.7 \cdot 10^{-4} - e^{0.158(a \sin \omega t)}) \cos(-\omega t)$$

Släpkraften F_D blir.

$$F_D = 0.5 \rho C_D D \int_{-d}^{\eta} |u| dz = 0.5 \cdot 1025 \cdot 2.0 \cdot 2.6 \int_{-50}^{\eta} |u| dz =$$

$$2665 (a\omega)^2 \int_{-50}^{\eta} (e^{kz})^2 \sin(kx - \omega t) |\sin(kx - \omega t)| dz =$$

$$= 2665 (4.16)^2 / (2 \cdot 0.158) [e^{0.316z}]_{-50}^{\eta} \sin(kx - \omega t) |\sin(kx - \omega t)| =$$

$$(\eta = a \sin \omega t) \text{ och } (x=0)$$

$$= 0.54 \cdot 10^6 (1.37 \cdot 10^{-7} - e^{0.316(a \sin \omega t)}) \sin(-\omega t) |\sin(-\omega t)|$$

Programmera in ovanstående två funktioner som funktion av ωt och addera dem. Vi har då fått vår totala kraft mot benet.

För att lätt kunna ställa upp en tabell över kraften integrerar vi endast upp till vattenytan $\eta = 0$. Ekvationerna får då följande utseende.

$$F_I = -0.3298 \cdot 10^6 (3.7 \cdot 10^{-4} - 1) \cos(-\omega t) = 0.3298 \cdot 10^6 \cos(\omega t)$$

$$F_D = 0.54 \cdot 10^6 (1.37 \cdot 10^{-7} - 1) \sin(-\omega t) |\sin(-\omega t)| = -0.54 \cdot 10^6 \sin(-\omega t) |\sin(-\omega t)|$$

Kraften mot benet blir då för olika värden på ωt

ωt	F_D [kN]	F_I [kN]	F_{tot} [kN]
0	0	330	330
$\pi/4$	270	233	503
$\pi/2$	540	0	540
$3\pi/4$	270	-233	37
π	0	-330	-330
$5\pi/4$	-270	-233	-503
$3\pi/2$	-540	0	-540
$7\pi/4$	-270	233	-37
2π	0	330	330

SAMVERKAN STRUKTUR OCH VATTEN

För konstruktioner vars diameter D är liten i förhållande till våghöjden H är kraften mot konstruktionen släpkraftsdominerad.

Antag linjär vågteori och djupt vatten. Enligt Chakrabarti (1980) är förhållandet mellan släp- och tröghetskraft för en påle

$$F_D/F_I = (C_D/2\pi C_I)(H/D).$$

Antag

$$C_D = 2.0$$

$$C_I = (1 + C_m) = 2.5$$

$$D = 2.4 \text{ meter}$$

När släpkraften är 10% av tröghetskraften är våghöjden 1.9m

Detta ger att släpkraften kan försummas vid små våghöjder, vilket vi gärna gör eftersom släpkraften inte är linjär.

När vågorna angriper strukturen kommer denna i svängning. hastigheter respektive accelerationer i Morisons ekvation skall vara de relativa hastigheterna respektive accelerationerna.

Om strukturens hastighet och acceleration är x respektive $\dot{x}$ så kan Morisons ekvation nu skrivas $F = F_I + F_D$.

där

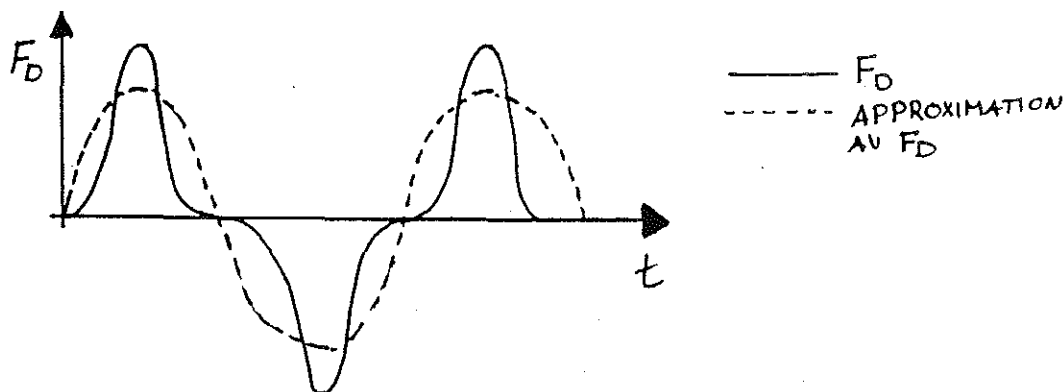
$$F_I = \rho C_M A \dot{u} - \rho C_m A \ddot{x}$$

$$F_D = 0.5 \rho C_D D |u - \dot{x}| (u - \dot{x})$$

Linearisering av Morisons ekvation

Eftersom släpkraften inte är linjär utan kvadratisk beroende på hastigheten kan det i praktiska sammanhang vara bra att kunna linearisera släpkraften. Detta kan göras på många olika sätt varav två beskrivs här.

(1) Broydens approximation



Figur 2.11 visande släpkraftens approximation

Enligt tidigare är släpkraften $F_D = 0.5 \rho C_D D |u - \dot{x}|(u - \dot{x}) = K_D |u - \dot{x}|(u - \dot{x})$

Sätt $|u - \dot{x}|(u - \dot{x}) \approx |u| |\dot{x}| \dot{x} \approx \frac{8}{3\pi} (u_0 u - \dot{x}_0 \dot{x})$

$F_D = (8/3\pi) K_D (u_0 u - \dot{x}_0 \dot{x})$ Se fig. 2.11
där

$u = u_0 \sin(\omega t + \varphi_1)$ och $x = x_0 \sin(\omega t + \varphi_2)$

$\dot{u} = \dot{u}_0 \cos(\omega t + \varphi_1)$ och $\dot{x} = \dot{x}_0 \cos(\omega t + \varphi_2)$

$\ddot{x} = \ddot{x}_0 \sin(\omega t + \varphi_2)$

u_0 och $\dot{x}_0 (= x_0 \omega)$ är hastighetsamplituder

$\dot{u}_0 (= u_0 \omega)$ och $\ddot{x}_0 (= -x_0 \omega^2)$ är accelerationsamplituder

Kraften F kan nu skrivas

$$F = K_D (u_0 u - \dot{x}_0 \dot{x}) 8/3\pi + \rho C_M A \dot{u} - \rho C_m A \ddot{x}$$

Rörelseekvationen $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(t)$ kan då skrivas

$$(M + \rho C_m A) \ddot{x} + (C + K_D \dot{x}_0 8/3\pi) \dot{x} + Kx = K_D (u_0 u) 8/3\pi + \rho C_M A \dot{u}$$

där

$(C + K_D \dot{x}_0 8/3\pi)$ är strukturell + hydrodynamisk dämpning.

Detta kan approximativt sättas till 2%
av kritisk dämpning i luft.

(2) Linearisering enligt C.C.Tung (1986)

Om strukturens hastighet kan anses vara mindre än vågens partikelhastighet kan följande antagande göras.

$$F_D = K_D |u - \dot{x}|(u - \dot{x}) \approx K_D (u|u| - 2u\dot{x})$$

där

u = tidsmedelvärde på beloppet av hastigheten över en vågcykel. =
 $Hgk \cosh k(d+z) / (\pi\omega \cosh kd)$

Fortsättningsvis förfars på samma sätt som för Broydens approximation

Referenser

Bergdahl, L., Melin, H. : Wavefield. Manual till ett program för beräkning av ytvattenvågor. Inst. f. vattenbyggnad, CTH. Rapport Serie B:46, 1985

Bergdahl, L. (1979) : Beräkning av Vågkrafter. Undervisningsskrift nr 1979:07, Inst f. vattenbyggnad CTH

Bergdahl, L. (1979) : Flytande förankrade konstruktioner. Rörelser och förankringskrafter. Kompendium i havsresursteknik för M4 och V4. Undervisningsskrift nr 1981:09, Inst f. vattenbyggnad CTH

Bergdahl, L. Olsson, G. (1981) : Konstruktioner i havet. Vågkrafter - Rörelser. En inventering av datorprogram. STU-rapport 79-5536. Slutrapport. Rapport Serie B:25, ISSN 0348-1069.

Chakrabarti, S. K. (1980) : Impact of analytical, model and field studies on the design of offshore structures. International Symposium on Ocean Engineering Ship Handling, Swedish Maritime Research Center, SSPA, Gothenburg.

Det norske Veritas : Self Elevating Units, 1983

Hallam, M. G. et al, (1978) : Dynamics of marine structures, Report UR 8, CIRIA Underwater Group

Korvin-Kroukovsky, B.V. (1961) : Theory of Seakeeping. Ship Structure Committee. The Society of Naval Architects and Marine Engineers.

Moberg, G. : Anläggningar för oljeutvinning till havs. Konstruktionstyper, dimensioneringskriterier och positioneringssystem. Inst. f vattenbyggnad, CTH. Rapport Serie B:29, 1982

Olson (1980) : Essentials of Engineering Fluid Mechanics. Harper & Row, Publ. , N. Y.

Sjöberg, A. (1983) : Vindvågor. Utkast till del av kompendium i
Hamnbyggnad. Undervisningsskrift nr 1983:3, Inst. f.
Vattenbyggnad

Sergio, O. , Gilberto, B. , Edison, C. , Breno, O. , José, L. : Dynamic analysis
of jack-up platforms.

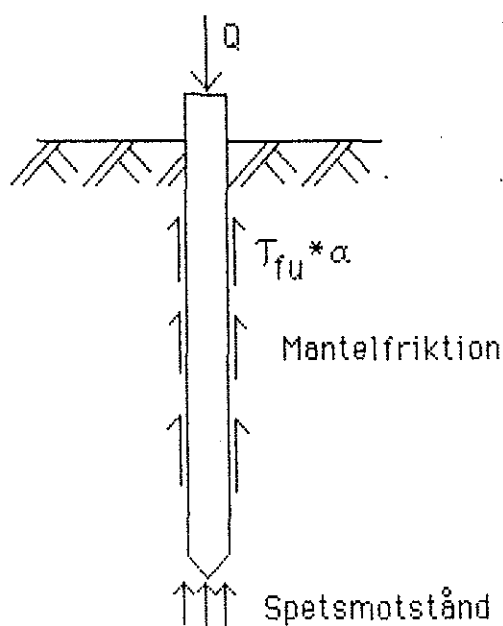
Tung, C. C. (1986) : A study of response and response spectra of offshore
structures to regular waves.

3 SAMVERKAN MELLAN STRUKTUR OCH JORD

När plattformen är bogserad på plats så sänks benen ned till botten där de penetrerar. Beroende på botten fasthet så kan benen antingen vara som de är (i detta fallet med en spetsig avslutning) eller försedda med så kallade fötter. Fötter (eng. spud cans) är stora plattor som sättes i underkant på varje ben för att öka deras bärighet. Penetrationen kan i extrema fall uppgå till cirka 20m. Plattformen penetrerar med en förbelastning (eng. preloading) som motsvarar den dubbla operationella överlasten. För att bestämma plattformens operationella djup så utförs en dynamisk analys. Det är i denna analys som det är av stort intresse att känna den laterala resistansen i jorden eftersom det är den som bestämmer benets vridstyvhet nere vid botten. Vridstyvheten kan variera från fast inspänt till ledat.

PENETRATION

Penetrationsdjupet kan teoretiskt beräknas genom att beräkna det djup för vilket penetrationsmotståndet motsvarar den pålagda axiella lasten. Motståndet delas upp i två delar, ett spetsmotstånd och en friktionsdel där α är en friktionskonstant. α varierar mellan 0 och 1 beroende på hur stor del av skjuvhållfastheten som tas upp genom friktion. Se fig. 3.1



Figur 3.1 Penetrationsmotstånd

Penetrationsmotstånd

Penetrationsmotståndet $R = \text{Spetsmotstånd} + \text{Mantelfriktion}$

$$R = q_b A_{\text{spets}} + \alpha \tau_{fu} A_{\text{mantel}} \quad [\text{N}]$$

där

q_b är spetsbärighet $[\text{N}/\text{m}^2]$

A_{spets} är sammanlagd spetsarea $[\text{m}^2]$

α är reduktionsfaktor för vidhäftning stål/lera $0 \leq \alpha \leq 1$

τ_{fu} är lerans skjuvhållfasthet (för sand är $\tau_{fu} = 0$) $[\text{N}/\text{m}^2]$

A_{mantel} är sammanlagd mantelarea $[\text{m}^2]$

Mantelfriktion

Det finns många olika sätt att ta hänsyn till mantelfriktion, men här används endast den enklaste där man får bedömma från fall till fall, eller utifrån försök till havs, hur stor α är. Tilläggas bör att α även beror på om benets nederände är försedd med fötter eller ej, speciellt vid kohesionsjordar.

Spetsbärighet

Grund penetration

Då $D/B \leq 1$ är bärigheten för ett oändligt långt fundament med bredden $B =$
 $= c N_c s_c d_c b_c + q N_q s_q d_q b_q + g \rho (B/2) N_\gamma s_\gamma d_\gamma b_\gamma = q_b$ se fig. 3.2

där

c = lerans skjuvhållfasthet $[\text{N}/\text{m}^2]$

q = effektiv överlast $[\text{N}/\text{m}^2]$

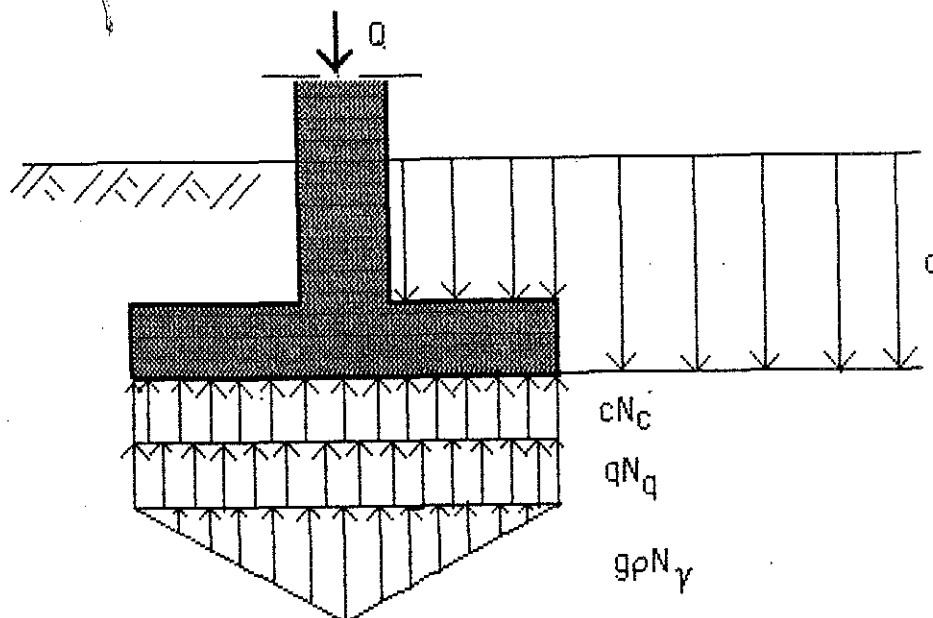
ρ = effektiv densitet hos jordarten $[\text{kg}/\text{m}^3]$

s, d och b = empiriska korrektionsfaktorer

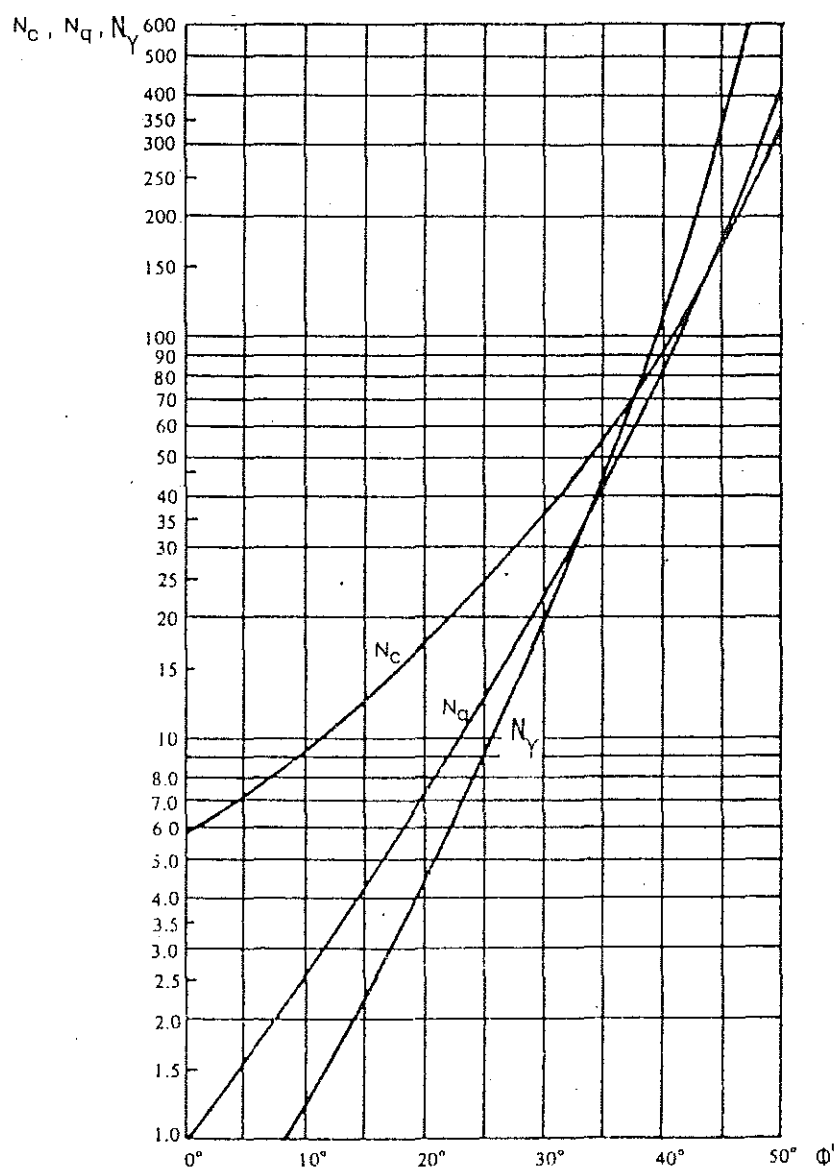
N = hållfasthetskstanter. Se fig. 3.3

Empiriska korrektionsfaktorer

Bärighetsformeln ovan gäller för en plan långsträckt platta på horisontell markyta. Om någon eller några av dessa förutsättningar ej är uppfyllda kan bärighetsformeln ändå användas genom att man korrigerar den enligt följande



Figur 3.2 Antagen kontakttrycksfördelning

Figur 3.3 Hållfasthetsparametrarna N_c , N_q och N_γ som funktion av friktionsvinkeln ϕ

Inverkan av fundamentsform

Om plattan ej är oändligt lång skall en för bärigheten gynnsam korrektion (utom för N_γ som minskar) göras eftersom vi då har en tredimensionell spänningsfördelning istället för en tvådimensionell. Följande korrigeringar skall göras på N_q , N_c och N_γ enligt Brinch-Hansen och Meyerhof.

$$s_q = 1 + 0.2B/L$$

$$s_c = 1 + 0.2B/L$$

$$s_\gamma = 1 - 0.4B/L$$

där

B är plattans bredd

L är plattans längd

Inverkan av grundläggningsdjup

Om benet penetrerar ner genom botten uppstår en gynnsam överlast av jorden. Detta tas direkt med i bärighetsformel, men när överlasten består av jorden själv bör dess inre hållfasthet tas med. Detta görs enligt Brinch-Hansen och Meyerhof med följande formler.

$$d_q = d_c = 1 + 0.35D/B$$

$$d_\gamma = 1$$

där

B är plattbredden

D är penetrationsdjupet

Inverkan av lutande basyta

Om benets undersida lutar minskar bärigheten eftersom jordens brottyta blir mindre. Se fig. 3.4 Följande korrigeringar skall göras.

$$b_q = e^{-2v \tan \phi}$$

$$b_c = 1 - 2v/(2+\pi) \quad \text{Gäller endast för } \phi=0$$

$$b_\gamma = e^{-2.7v \tan \phi} [1 - \{1 - 1.8v/3\pi\}H/(V+B \cot \phi)]$$

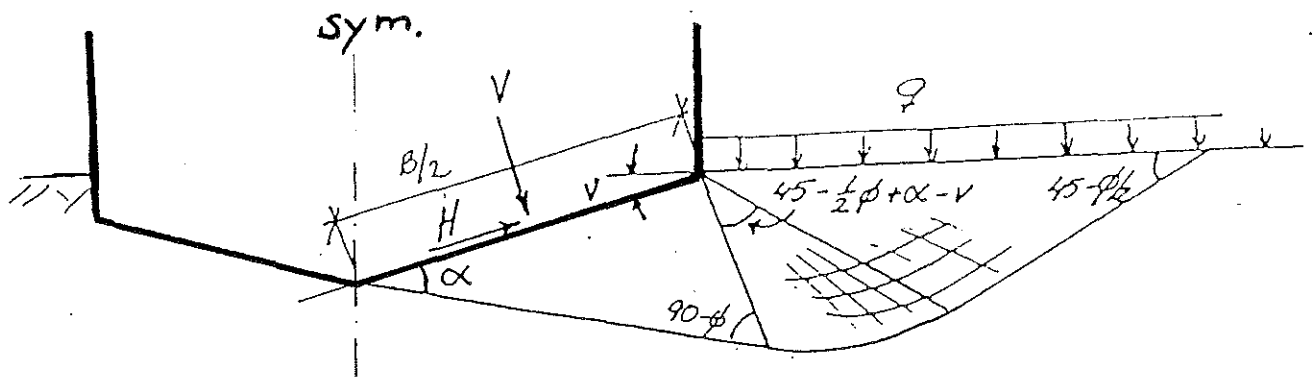
där

v är basytans lutning. Se fig. 3.4

ϕ är skjuvvinkeln

V är lasten vinkelrätt basytan. Se fig. 3.4

B är basytans bredd. Se fig. 3.4



Figur 3.4 Antagen brottfigur när basytan lutar

Djup penetration

Då $D/B > 1$ är bärighetsformeln enligt följande. Enligt Meyerhof.

För kohesionsjord (lera).

$$q_b = cN_{cq} + \rho g D$$

För friktionsjord (sand).

$$q_b = \rho g B N_{\gamma q} / 2$$

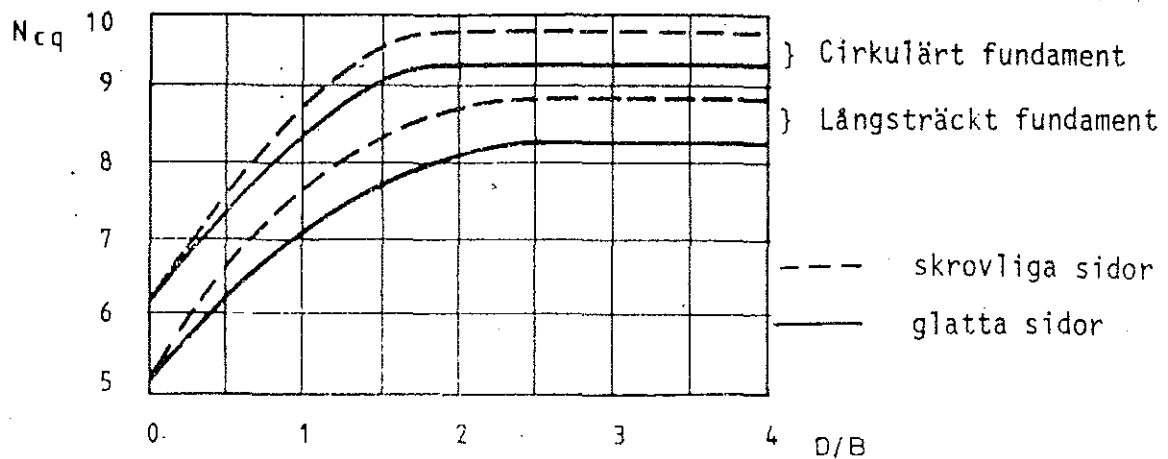
där

c är lerans skjuvhållfasthet $= \tau_{fy}$ $[N/m^2]$

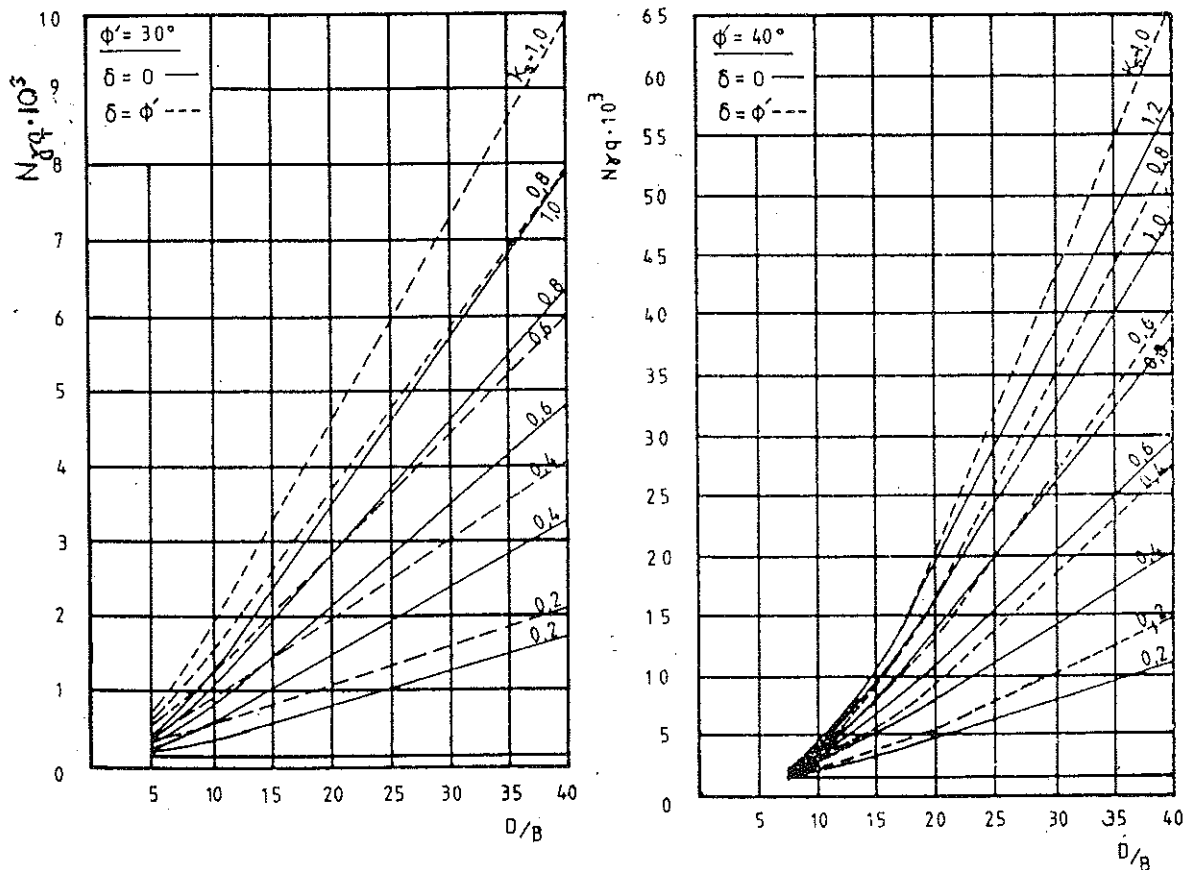
ρ är jordartens densitet $[kg/m^3]$

D och B penetrationsdjup respektive plattbredd.

N_{cq} respektive $N_{\gamma q}$ se fig. 3.5 respektive 3.6

Figur 3.5 Bärighetsfaktorn N_{cq} som funktion av förhållandet D/B enligt

Hänsyn till rektangulärt fundament tas genom att multiplicera N_{cq} för långsträckta fundament med $(1 + 0.15B/L)$.

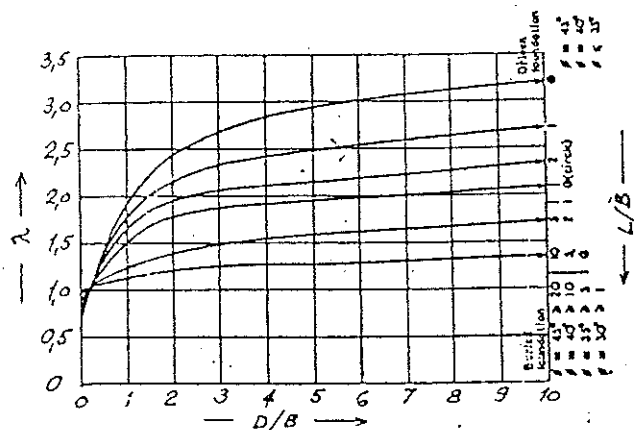


Figur 3.6 Bärighetsfaktorn $N_{\gamma q}$ som funktion av förhållandet D/B samt jordtryckskoefficienten K_s enligt Meyerhof.

$\delta = 0$ är lika med en glatt yta och $\delta = \phi'$ är lika med en vägg med full vidhäftning till jorden.

K_s är förhållandet mellan vertikal och horisontell spänning σ_h/σ_v och fås från fältförsök.

Hänsyn till rektangulärt fundament tas genom att multiplicera $N_{\gamma q}$ för långsträckta fundament med λ enligt fig. 3.7



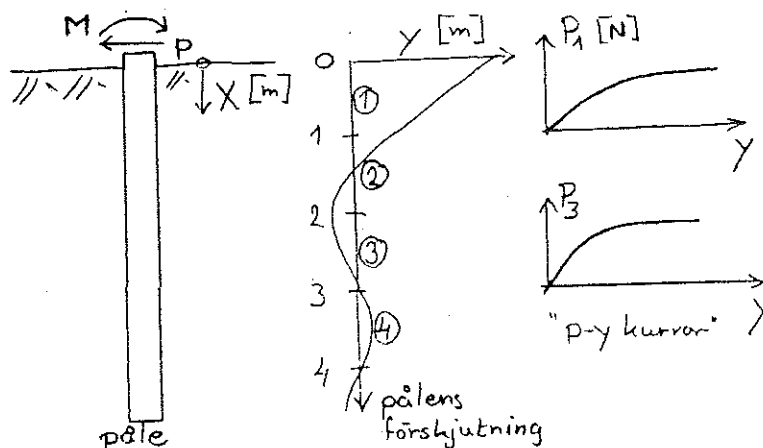
Figur 3.7 Förstoringsfaktorn λ för $N_{\gamma q}$ för rekrangulärt fundament enligt Meyerhof.

LATERAL RESISTANS

Plattformsbenet som har penetrerat kan definitionsmässigt nu ersättas med en påle. Lateral resistans på pålar förekommer inte så ofta i litteraturen eftersom det vanligtvis är axiell bärighet som är intressant, men inom offshoregrenen av geotekniken finns det en del litteratur som beskriver lateral resistans. För pålar kan man beräkna den laterala resistansen genom att rita upp så kallade "p-y kurvor". En annat, betydligt enklare, sätt är att utifrån typ av jordart sätta en ekvivalent inspänningsnivå.

p-y kurvor

För att få fram responsen mellan ben och jord kan man använda sig av "p-y kurvor" (last- förskjutnings kurvor). De härrör från Winklerhypotesen (fjädrande bädd). Det förutsätts att vid varje djup utefter pålen finns ett förhållande mellan laterallast och jordtrycket mot pålen. Se fig. 3.8



Figur 3.8 Elementindelning av en påle med tillhörande "p-y kurva"

Algoritm:

- Dela in pålen i ett antal element
- Varje element kommer att få en tillhörande "p-y kurva".
- Kraften F på varje element p g a. jordtrycket p fås av formeln

$$F = p B \Delta L$$

där

F = kraften på elementet.

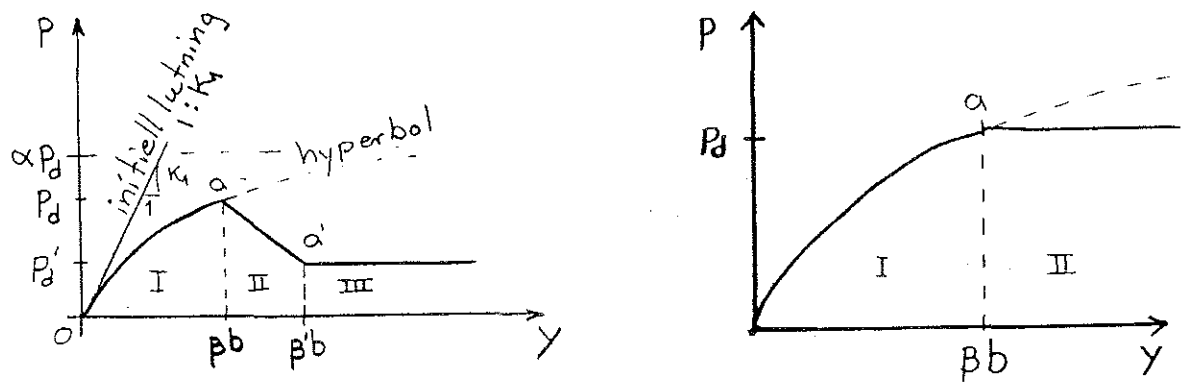
p = jordtrycket på elementet.

B = pålbredden.

ΔL = längden på elementet.

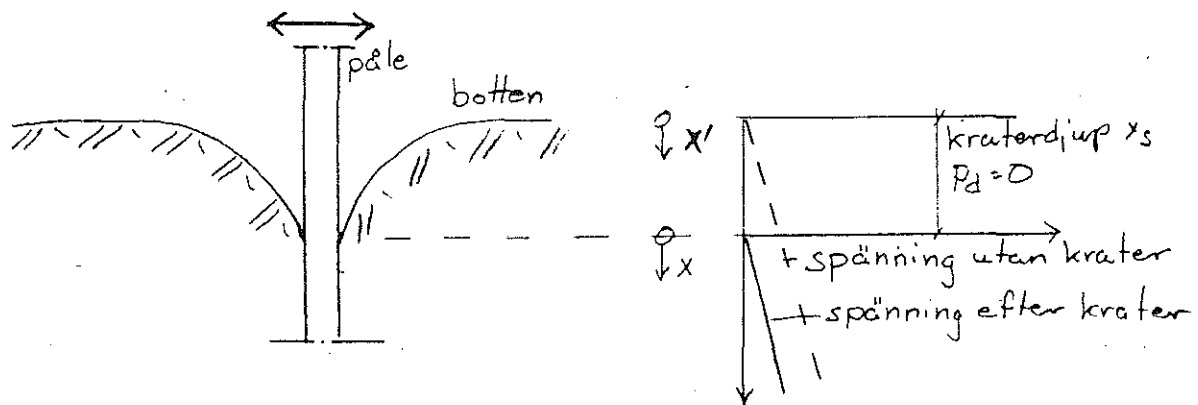
För konstruktion av "p-y kurvor" hänvisas till DnV appendix F.

Typiska "p-y kurvor" för lera respektive sand se fig. 3.9



Figur 3.9 "p-y kurvor" för lera respektive sand.

Modifiering på grund av kraterbildning



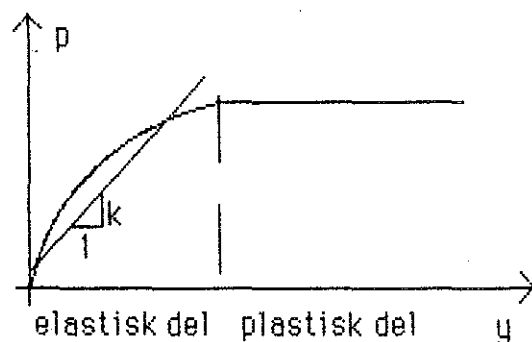
Figur 3.10 Kraterbildning

När benet svänger i lateral riktning så kan en borttransport av jordmaterial ske (kraterbildning). Se fig. 3.10 Beräkningsmässigt tar man hänsyn till kraterbildning genom att anse att botten ligger vid kraterbotten. Se fig. 3.10 Jordmaterialet ovanför den nya botten ger upphov till en gynnsam överlast p_0 som det tas hänsyn till vid beräkning av lateral konstruktionsresistans p_d .

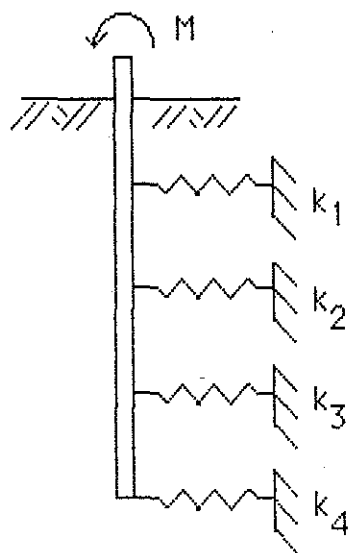
VRIDSTYVHET

När "p-y kurvorna" är uppritade för varje element utefter pålen beräknas den ekvivalenta fjäderstyvheten. Fjäderstyvheten för den elastiska zonen fås genom att dra en sekant utefter hyperbeln. Se fig. 3.11 Detta för att få fjäderkraften linjär. Fjäderstyvheten är då lika med sekantens lutning.

Det är nu möjligt att med hjälp av en förskjutningsmetod få en vridstyvhet på valfri nivå. Vanligtvis på nivån under botten där benet kan anses vara fast inspänt eller vid markytan och då med en vridstyvhet. Se fig. 3.13

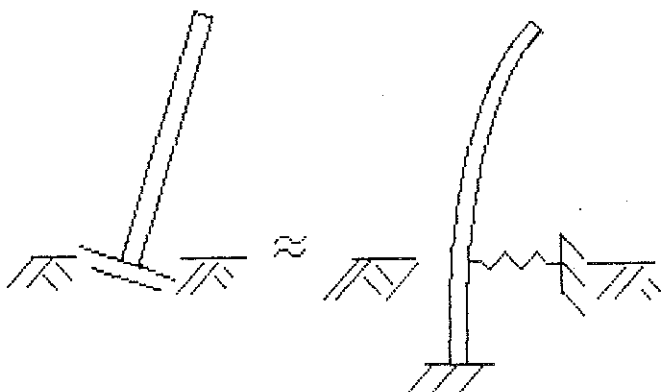


Figur 3.11 "p-y kurva" för sand



Figur 3.12 Från "p-y kurvorna" erhållna linjära fjädra på respektive nivå.

Det moment M som krävs för att vrida balken ovan 1 enhet vid ytan är motsvarande vridstyvhet vid ytan. Se fig. 3.12 Eventuellt väljes inspänningen representerad med en ekvivalent inspänningsnivå. Se fig. 3.13



Figur 3.13 Vridstyvhet vid bottennivån och ekvivalent inspänningsnivå

Vridstyvhet för yttligt fundament

För ben med fötter kan vridstyvheten vid foten sättas till, enligt DnV,

$$k_s = \frac{8Gr^3}{3(1-\nu)}$$

där

G = skjuvmodulen

ν = Poissons tal

r = radien av en cirkulär fot

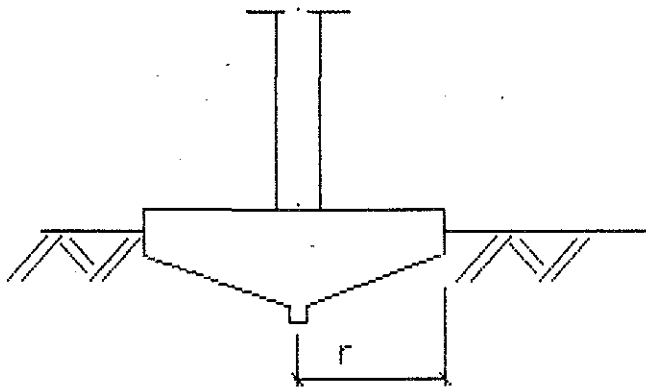
För rektangulära fötter kan r sättas till $(BL^3/3\pi)^{1/4}$

där

B = bredden av fot

L = längden av fot

Foten måste penetrera till full radie annars skall den aktuella radien användas. Se fig. 3.14



Figur 3.14 Yttlig penetration av fot

Approximativ inspänningsnivå för djup penetration

Hallam, M.G. (1978) med flera föreslår att ekvivalen fast inspänningsnivå fås ur följande tabell för cirkulära tvärsnitt.

Styva leror	Inspänningsnivå under botten = 3.5 till 4.5 gånger diametern.
Lös silt	Inspänningsnivå under botten = 7 till 8.5 gånger diametern.
Generellt	Inspänningsnivå under botten = 6 gånger diametern.

För kvadratiska tvärsnitt är diametern D = projicerade bredden. Se fig. 3.7

Tabell 3.1 Ekvivalent inspänningsnivå

Referenser

Det norske Veritas. (1977) : Rules for the design construction of offshore structures. Appendix F (Foundations).

Hallam, M. G. et al, (1978) : Dynamics of marine structures, Report UR 8, CIRA Underwater Group.

Hansbo, S. (1981) : Grundläggning av byggnader och maskinfundament.

Hansbo, S. et al, (1984) : Geoteknik del B för V3.

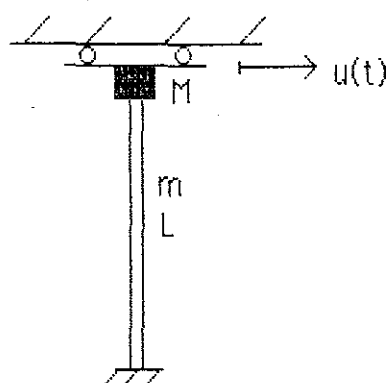
STRUKTURANALYS

En plattformens respons kan delas in i tre fysikaliska problemområden. Dessa är samverkan mellan ben/jord, ben/vatten och infästningen mellan ben/däck. Se fig. 1.3 Förutsättningarna för de två första problemen har diskuterats tidigare i denna rapport och det tredje problemet nämns i texten som följer men någon direkt lösning på infästningen mellan ben/däck ges inte i denna rapport.

MODELLERING AV PLATTFORMEN

Plattformen består av ett deplacerande däck och fyra ben. Benen kan höjas och sänkas relativt däckets med hjälp av kuggstänger i däckets motsvarande kuggstänger. Däcket, med tjocklek 5m, är så styvt i förhållande till benen att däckets antas vara en oändligt styv kropp (eng. rigid body). Detta antagande bör eventuellt kontrolleras. Betydligt svårare är det att bestämma styvheten mellan däck och ben. Även här är det antagligen så att benens böjstyvhet är betydligt mindre än rotationsstyvheten i infästningspunkten, men att denna ändå ej kan sättas till ett oändligt värde. Ovanstående rotationsstyvhet leder inte till något större besvär vid en datorberäkning när den väl är bestämd korrekt. Försök gjorda av VBB, på deras trebenta plattform, visade att antagandet om fast inspänning mellan däck och ben jämfört med verklig minskade egenperiodtiden med ca. 15%. Benen antas i denna rapport vara fast inspända i däckets. Inspänningsgraden vid botten ansätts i följande modeller och exempel som en ekvivalent inspänningsnivå under botten. Vid en datormodell är det inget större problem att använda sig av den mer korrekta modellen med en vridstyvhet vid bottennivån.

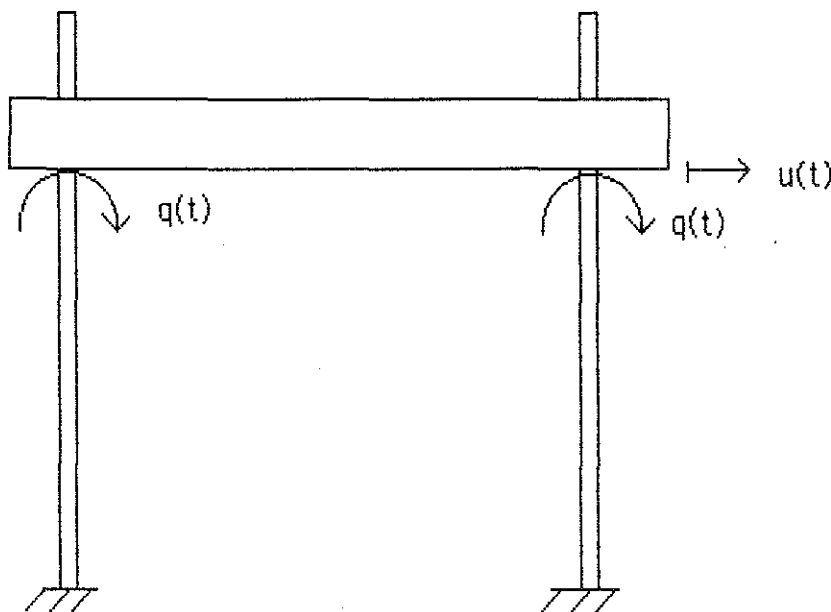
Endimensionell modell



Figur 4.1 Endimensionell modell

Den endimensionella modellen med en frihetsgrad (SDOF) används för att förenkla egenvärdeslösningen och för att göra en parameterstudie av någon, i den dynamiska responsen, ingående parameter. Den efterföljande responsberäkningen förenklas också.

Tvådimensionell modell

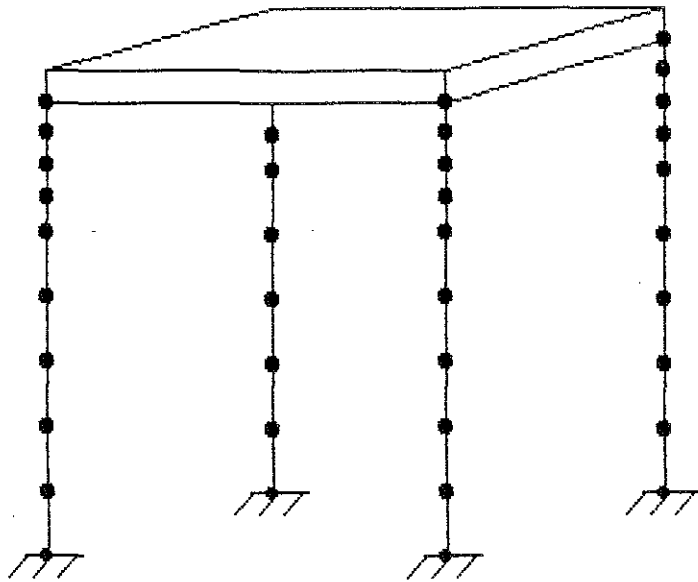


Figur 4.2 Tvådimensionell modell

Det är i den tvådimensionella modellen möjligt att även ta hänsyn till rotationen vid infästningen mellan ben och däck. Vi får då ett flerfrihetsgradssystem (MDOF). Eftersom vi har antagit att däcket är oändligt bøjstyvt (rigid body) och full inspänningsgrad mellan ben och däck reduceras den tvådimensionella modellen till en endimensionell modell. För en bra datormodell kan en liknande elementindelning som i den tredimensionella modellen göras. Matriserna assembleras utifrån en plan balkmodell.

Tredimensionell modell

För en flexibel plattform, som en jack up är vid större djup, är en tredimensionell modell att föredra vid en fullständig dynamisk analys. Även om plattformen har flera symmetriplan är denna modell att föredra framför den en- eller tvådimensionella modellen eftersom det då är möjligt att belasta plattformen med de hydrodynamiska lasterna korrekt. Dessutom fås samtliga egenmoder endast med denna modell.

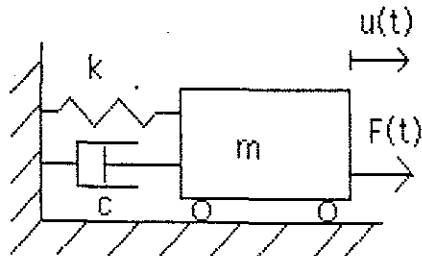


Figur 4.3 Tredimensionell modell

För att minska problemet med vattenytans höjning och sänkning vid en våg som orsakar ett momentant varierande moment göres elementindelningen något tätare kring SWL.

Rörelseekvationen.

Betrakta det diskreta enfrihetsgradssystemet nedan.



Figur 4.4 Diskret enfrihetsgradssystem

Jämviktsekvation för massan.

$$F_I + F_D + F_S + F(t) = 0$$

där

$$F_I = -m\ddot{u}$$

$$F_D = -c\dot{u}$$

$$F_S = -ku$$

Vi har fått vår rörelseekvation $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t)$

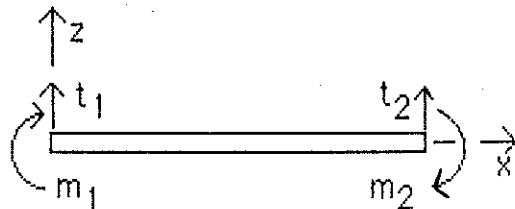
För system med flera frihetsgrader är massan M , dämparen C och styvheten K matriser, lasten F en vektor och rörelserna $\ddot{x}$, $\dot{x}$ och x är accelerations-, hastighets- och förskjutningsvektorer. Rörelseekvationer för ett flerfrihetsgradsystem. $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = P(t)$.

Massa

En massmatris kan vara konsistent eller diagonal. En konsistent massmatris beskriver ett balksystem med kontinuerliga massor. Detta ger en full- eller bandad massmatris. En diagonal massmatris beskriver ovanstående system med koncentrerade massor och masströgheter i nodpunkter. Matrisen blir då diagonal med nollor i övrigt. Denna metod, att koncentrera massorna, ger ett enklare system att lösa, men kräver för tillräcklig noggrannhet ett relativt stort antal nodpunkter vilket ett system med konsistent massmatris ej behöver. Oftast används den diagonala massmatrisen eftersom det är snabbt och enkelt att använda sig av många nodpunkter vid beräkning med dator.

Konsistent massa

Studera den fria balken i figuren nedan.



Figur 4.5 Plant balkelement med fyra frihetsgrader

Balkens förskjutningsfunktioner är följande. (Dessa är basfunktioner i FEM)

$$N_{t1} = 2(x/L)^3 - 3(x/L)^2 + 1$$

$$N_{m1} = -x(1 - (x/L))^2$$

$$N_{t2} = -2(x/L)^3 + 3(x/L)^2$$

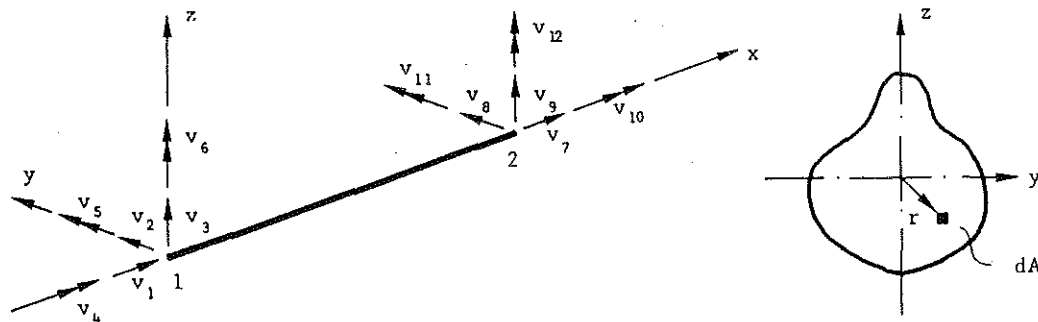
$$N_{m2} = (x^2/L)(1 - (x/L))$$

Massmatrisen ställs upp på följande sätt.

$M = \int m N^T N dx$ detta ger följande plana massmatris.

$$M = (mL/420) \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ -22L & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ 54 & -13L & 156 & 22L \\ 13L & -3L^2 & 22L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ m_1 \\ t_2 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

För en tredimensionellt balkelement ökar antalet frihetsgrader till 12 stycken. Se fig. 4.6. Vanligtvis försummas axialdeformationerna och problemet är reducerat till 10 frihetsgrader.



Figur 4.6 Balkelement med 12 frihetsgrader (från Bergan 1981).

Ovanstående balkelement ger följande massmatris där I_p är det polära masströghetsmomentet (från Bergan 1981).

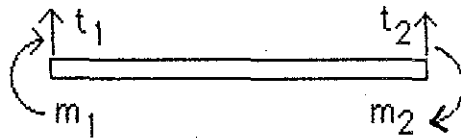
$$M = m l \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & 0 & 0 & 0 & \frac{11l}{210} & 0 & \frac{9}{70} & 0 & 0 & 0 & -\frac{13l}{420} \\ 0 & 0 & \frac{13}{35} & 0 & -\frac{11l}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{70} & 0 & \frac{13l}{420} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_p}{3A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_p}{6A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11l}{210} & 0 & \frac{l^2}{105} & 0 & 0 & 0 & -\frac{13l}{420} & 0 & -\frac{l^2}{140} & 0 \\ 0 & \frac{11l}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{105} & 0 & \frac{13l}{420} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l^2}{140} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & 0 & 0 & 0 & \frac{13l}{420} & 0 & \frac{13}{35} & 0 & 0 & 0 & -\frac{11l}{210} \\ 0 & 0 & \frac{9}{70} & 0 & -\frac{13l}{420} & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{35} & 0 & \frac{11l}{210} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_p}{6A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_p}{3A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13l}{420} & 0 & -\frac{l^2}{140} & 0 & 0 & 0 & \frac{11l}{210} & 0 & \frac{l^2}{105} & 0 \\ 0 & -\frac{13l}{420} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l^2}{140} & 0 & -\frac{11l}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{105} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \\ V_{10} \\ V_{11} \\ V_{12} \end{bmatrix}$$

Koncentrerad massa

För att förenkla beräkningarna kan man koncentrera massorna för en balk i ett antal nodpunkter. Det finns ingen generell metod för denna klumpning av massa utan det får bedömas för det aktuella problemet. Noggrannheten att fördela massan korrekt i varje nod minskar med ökat antal noder.

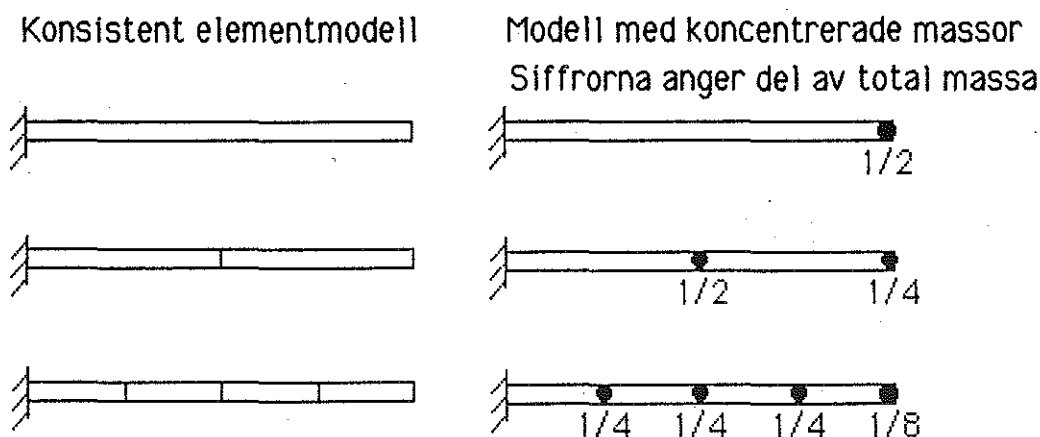
Vanligtvis fördelar man hälften av massan för ett balkelement i de båda noderna i varsin ände på balkelementet. Eventuella rotationströgheter sätts ofta till noll. Rotationströgheten för ett balkelement med den kontinuerliga massan m kan sättas till $mL^3/420$. Massmatrisen får då följande utseende. Se fig. 4.7

$$M = mL/420 \begin{bmatrix} 210 & & & \\ & L^2 & & \\ & & 210 & \\ & & & L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ m_1 \\ t_2 \\ m_2 \end{bmatrix}$$



Figur 4.7 Balkelement med fyra frihetsgrader

Exempel på massklumpning av en konsolbalk med olika antal element



Figur 4.8 Jämförelse mellan konsistent- och koncentrerad massmodell med konstant styvhet och massfördelning längs balken.

Exemplet skall visa att konsistent massmatris ger bättre resultat än koncentrerad massmatris och att lösningen förbättras med ökat antal element. Se tab. 4.1

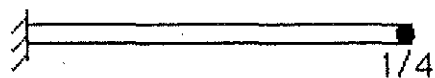
Antal element	Konsistent massa		Koncentrerad massa		Exakt		
	ω_1	ω_2	ω_1	ω_2	ω_1	ω_2	
1	3.533	34.81	2.449	-	3.516	22.03	$(EI/mL^4)^{0.5}$
2	3.518	22.22	3.156	16.26			
4	3.516	22.06	3.418	20.09			

Tabell 4.1 Egenvinkelfrekvenser för en konsolbalk

Massklumpningen ger ganska stora fel om vi inte ökar antalet element till åtminstone 4 stycken. Vi ser även att vi inte uppnår tillräcklig noggrannhet i andra svängningsmoden med endast fyra element.

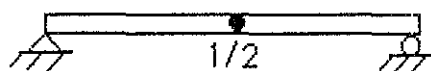
Detta gör dock inte så mycket eftersom det är den lägsta formen som är intressant och för lösning med invers iteration har vi möjligheter att göra en mycket tät elementindelning eftersom vi då använder oss av en dator.

För en konsolbalk hade det varit bättre med en annan massfördelning än den ovan. Följande fördelning ger ett mycket bättre resultat än ovan. Lägg endast 1/4 av den totala massan i änden av konsolen. Se fig. 4.9 Denna modell ger $\omega_1 = 3.464(EI/mL^4)^{0.5}$



Figur 4.9 Exempel på klumpad massa för en konsolbalk. Del av total massa

För en fritt upplagd balk ger följande massklumpning exakt värde för den lägsta svängningsformen. Se fig. 4.10

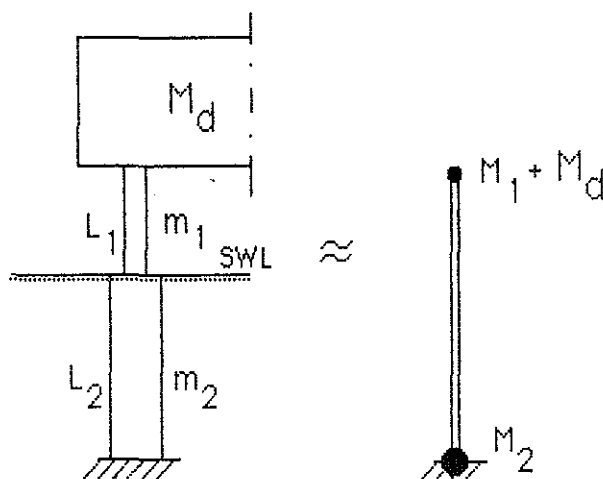


Figur 4.10 Klumpad massa för en fritt upplagd balk. Del av total massa

Massklumpningen kompliceras ytterligare när en balk har olika massfördelning utefter sin längd vilket är fallet för ben delvis under vatten. Se fig. 4.11 Hallam föreslår att massan skall klumpas på följande sätt.

$$M_1 = [m_2 L_2^2 / 2 + m_1 L_1 (L_2 + L_1 / 2) / (L_1 + L_2)] + \text{Eventuell massa av överdel.}$$

$$M_2 = [m_1 L_1^2 / 2 + m_2 L_2 (L_1 + L_2 / 2) / (L_1 + L_2)]$$



Figur 4.11 Exempel på klumpning av massa för ett i vatten delvis nedsänkt ben

Dämpning

Dämpning anges ofta som procent av kritisk dämpning, alltså den relativa dämpningen ξ . $\xi = C/C_{kr}$. Kritisk dämpning $C_{kr} = 2M\omega$. Detta ger då att dämpningen $C = 2\xi M\omega$. Dämpningen har liten effekt på responsens frekvens då dämpningen är måttlig. Den dämpade egenfrekvensen $\omega_d = \omega(1-\xi^2)^{1/2}$. Desto större effekt har dämpningen på responsen. Den dynamiska förstärkningsfaktorn $D = 1/[(1-(\omega/\Omega)^2)^2 + (2\xi\omega/\Omega)^2]^{1/2}$ som vid resonans $= 1/[2\xi(1-\xi^2)]$. Där Ω = resonansfrekvensen och ω = aktuell frekvens. Att analytiskt bestämma dämpningen korrekt är ofta mycket svårt. Om man inte vill antaga en dämpning kan den bestämmas utifrån praktiska försök varav två skall beskrivas här.

Approximativt antagen dämpning

Den totala dämpningen på plattformen kan delas in i tre huvudgrupper. Dessa är enligt DnV.

	Dämpning ξ
Strukturell dämpning som är inre dämpning i stålet och yttre dämpning av hissmekanismen till benen, benens konstruktion och övriga konstruktionsdetaljer.	1-3%
Dämpning i jorden som beror på typ av jordart, penetrationsdjup och typ av fot under benet.	0-2%
Hydrodynamisk dämpning som beror på släpkraftskoefficienten och relativ vattenhastighet.	2-4%
Detta ger en total dämpning på.	3-9%

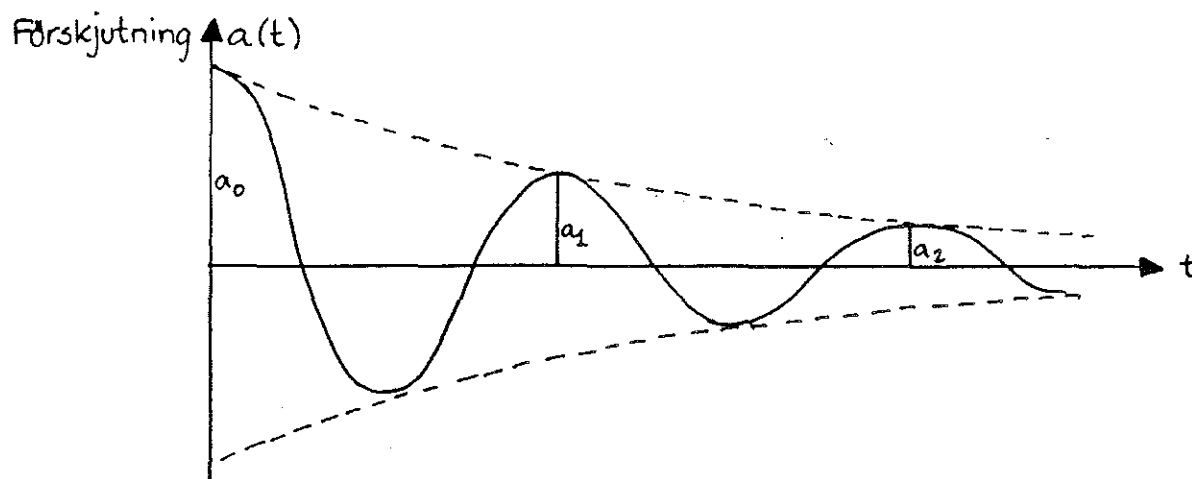
Ovanstående värden på den relativa dämpningen ξ verkar dock vara något för stora eftersom dämpningen av enbart stål i luft endast är ca. 0.5%. Ett bättre värde på den relativa dämpningen i vatten om vi försummar dämpningen av jorden (strukturell- + hydrodynamisk dämpning) är ca. 2%. Anledningen till skillnaden kan vara att DnV tar hänsyn till friktion i t e x kuggstänger mellan t e x ben och däck.

Experimentell bestämning av dämpning på ett enfrihetsgradssystem

Frisvängningsmetoden

Den antagligen vanligaste metoden att bestämma dämpningen experimentellt är att mäta den fria svängningens transienta (avklingande) respons. Detta beror på dess enkelhet och minimala utrustning. Excitera strukturen så att den kommer i fri svängning.

Registrera svängningsförloppet som funktion av tiden. Se fig. 4.12



Figur 4.12 Fri svängning efter excitation.

Den relativa dämpningen ges av följande ekvation.

$$\xi = \delta_l / (2\pi l (\omega / \omega_d)) \text{ som för liten dämpning } = \delta_l / 2\pi l$$

där

δ_l är det logaritmiska dekrementet $\delta_l = \ln(a_n / a_{n+l})$. Se fig. 4.12

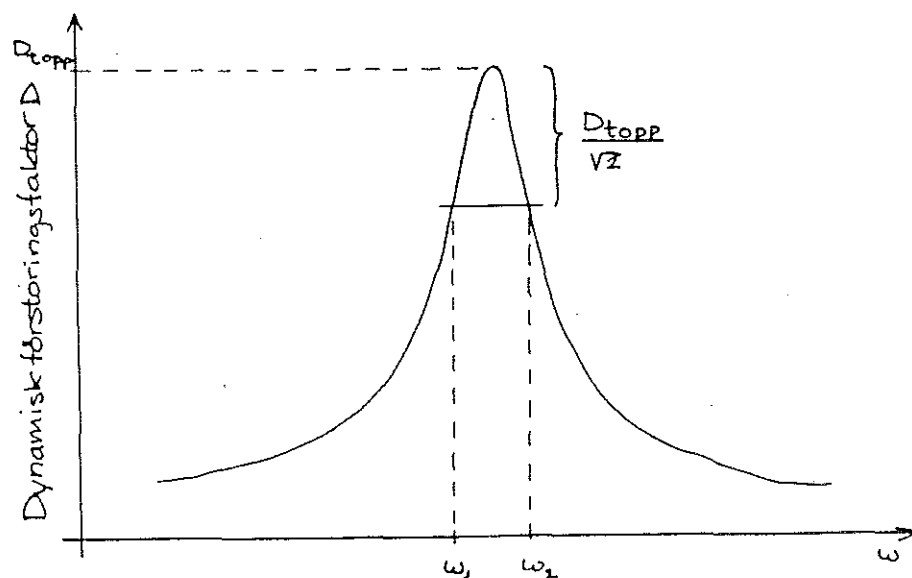
n är aktuell mätpunkt $n = 0, 1, 2, \dots$

l är antalet cykler mellan mätpunkterna $l = 1, 2, 3, \dots$

ω / ω_d är förhållandet mellan den odämpade egenfrekvensen och den dämpade som för liten till måttlig dämpning $= 1$

Halvkrafts metoden

Desto större dämpningen är desto flackare blir vår frekvensrespons. Genom att svepa över resonansfrekvensen med exciteringskällan fås en frekvensresponskurva. När frekvensresponskurvan är känd fås dämpningen från ekvationen $\xi = (\omega_2 - \omega_1) / (\omega_1 + \omega_2)$ där ω_1 och ω_2 är frekvenserna på vardera sidan om responsmaxima. Se fig. 4.13



Figur 4.13 Bestämning av dämpning enligt halvkraftsmetoden

Representation av dämpning

Proportionell Rayleighdämpning

Vid proportionell dämpning är dämpmatrisen $C = \alpha_1 M + \alpha_2 K$.

Alltså en konstant bråkdel av mass- och styvhetsmatrisen. Då den relativa dämpningen ξ väl är känd från två olika svängningsformer fås konstanterna α_1 och α_2 från ekvationen.

$$2\omega_i \xi_i = \alpha_1 + \alpha_2 \omega_i^2$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Exempel

Antag att man för de två egenfrekvenserna $\omega_1 = 2$ och $\omega_2 = 3$ mätt upp den relativa dämpningen $\xi_1 = 2\%$ och $\xi_2 = 10\%$. Bestäm C under antagande om proportionell dämpning. Då fås följande två ekvationer

$$2 \cdot 2 \cdot 0.02 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2^2$$

$$2 \cdot 3 \cdot 0.10 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 3^2$$

vars lösning är $\alpha_1 = -0.336$ och $\alpha_2 = 0.104$. Vi får då för alla värden på ω_i , $\xi_i = -0.168/\omega_i + 0.052\omega_i$ och C blir, $C = -0.336M + 0.104K$

För en del lösningsmetoder är det inte nödvändigt att ställa upp dämpmatrisen C utan det räcker med den relativa dämpningen ξ . Till exempel vid modal superpositionsteknik där man utnyttjar C -ortogonalitet hos de odämpade egenmoderna.

Styvhet

Styvheten K för 1 frihetsgradssystemet modellen ovan = $12EI/L^3$

För flerfrihetsgradssystemet assembleras en styvhetsmatris. Detta görs som för förskjutningsmetoden vid statisk analys. Alltså genom att låsa alla frihetsgrader utom en och förskjuta denna 1 enhet. För balkelementet i fig. 4.5 som beskriver en tvådimensionell modell så blir styvhetsmatrisen för de fyra frihetsgraderna som följer.

$$K = 2EI/L^3 \begin{bmatrix} 6 & -3L & -6 & -3L \\ -3L & 2L^2 & 3L & L^2 \\ -6 & 3L & 6 & 3L \\ -3L & L^2 & 3L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ m_1 \\ t_2 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

För en rymddragnmodell (tredimensionell) ökar antalet frihetsgrader till 12 stycken. Se fig. 4.6 Vanligtvis försummas axialdeformationerna och problemet är reducerat till 10 frihetsgrader.

Balkelementet ger följande styvhetsmatris där GI_T är torsionsstyvhets

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3}z & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2}z & 0 & -\frac{12EI}{l^3}z & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2}z \\ 0 & 0 & \frac{12EI}{l^3}y & 0 & -\frac{6EI}{l^2}y & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{l^3}y & 0 & \frac{6EI}{l^2}y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_T}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_T}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2}y & 0 & \frac{4EI}{l}y & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2}y & 0 & \frac{2EI}{l}y & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{l^2}z & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{l}z & 0 & -\frac{6EI}{l^2}z & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{l}z \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3}z & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{l^2}z & 0 & \frac{12EI}{l^3}z & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{l^2}z \\ 0 & 0 & -\frac{12EI}{l^3}y & 0 & \frac{6EI}{l^2}y & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI}{l^3}y & 0 & \frac{6EI}{l^2}y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_T}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_T}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI}{l^2}y & 0 & \frac{2EI}{l}y & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2}y & 0 & \frac{4EI}{l}y & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{l^2}z & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{l}z & 0 & -\frac{6EI}{l^2}z & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{l}z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \\ V_{10} \\ V_{11} \\ V_{12} \end{bmatrix}$$

BERÄKNING AV PLATTFORMENS EGENFREKVENS

Enfrihetsgradssystem (SDOF)

Lösning av egenvärdesproblemet $(K - \omega^2 M)x = 0$ för ett enfrihetsgradssystem kan lösas på många sätt varav två skall beskrivas här.

Lösning med koncentrerad massa.

Om massan av benet i fig. 4.1 koncentreras till toppen respektive foten så att benet blir masslöst kan egenfrekvensen ω lösas ur $\omega = (K/M)^{0.5}$

Exempel:

Gör följande antaganden om modellen i fig. 4.1

Ekvivalent inspänningslängd under botten = 13 [m]

Penetrerande längd = 6 [m]

Vattendjup = 30 [m]

Luftgap = 10 [m]

Detta ger en fiktiv total benlängd L_f på 53 [m]

och en total längd på 46 [m]

Yttröghetsmomentet $I = 0.184 [m^4]$

E-modulen = $205 \cdot 10^9 [N/m^2]$

Koncentrerad massa av överdel = 1300 [kg]

Kontinuerlig massa utefter benet över vattnet $m_1 = 3 \cdot 10^3 [kg/m]$

Kontinuerlig massa utefter benet i vattnet $m_2 = 10.6 \cdot 10^3 [kg/m]$

Koncentrera massan enligt fig. 4.11

Observera att vi inte kan använda oss av total fiktiv längd vid beräkning av koncentrerad toppmassa utan det är den totala längden som skall ingå, men hur mycket av det penetrerande benets massa ger bidrag till svängningen?

Antag att halva den penetrerande benmassan ger bidrag till svängningen. Massan utefter den penetrerande benlängden bör vara samma som för ben under vatten eftersom vatten och jord svänger med under bottennivån

Koncentrerad massa vid toppen $M_1 =$

$[m_2 L_2^2/2 + m_1 L_1(L_2 + L_1/2)/(L_1 + L_2) + \text{Eventuell massa av överdel} =$

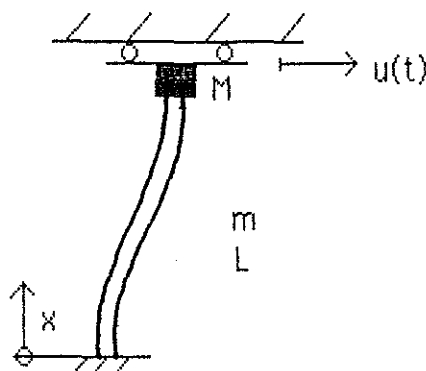
$$[10600 \cdot 36^2/2 + 3000 \cdot 10(36 + 10/2)]/(46) + 1.3 \cdot 10^6 = 176 \cdot 10^3 + 1.3 \cdot 10^6 = 1476 \cdot 10^3 [\text{kg}]$$

$$K = 12EI/L^3_f = 12 \cdot 205 \cdot 10^9 \cdot 0.184/53^3 = 3040 \cdot 10^3 [\text{N/m}]$$

Egenperioden fås då ur $K - \omega^2 M = 0$: detta ger att $\omega = (K/M)^{0.5} =$

$$= (3040 \cdot 10^3 / 1476 \cdot 10^3)^{0.5} = 1.435 [\text{rad/s}] = 2\pi/T_N \text{ detta ger } T_N = 4.37 [\text{s}]$$

Lösning med Galerkins metod



Figur 4.14 Benets utböjning

Galerkins metod som är en energimetod och grundar sig på virtuella arbetets princip. Denna metod använder sig av samma basfunktioner som vid FEM lösning, men eftersom vi här endast har ett element med en frihetsgrad så kan man lösa problemet direkt.

Metodik:

Ansätt en utböjningsfunktion $\phi(x)$ som är lika med balkens utböjningslinje.

Utböjningsfunktionen $\phi(x)$ måste satisfiera de geometriska randvillkoren

som för balken i fig. 4.14 är $w(L) = 1$ och $w(0) = w'(0) = w'(L) = 0$

där w är utböjningen som funktion av x .

$\phi(x)$ är för balken i fig. 4.14 $= -2(x/L)^3 + 3(x/L)^2$ och det ses direkt att denna funktion uppfyller ovanstående geometriska randvillkor.

Lös egenvärdesproblemet $(K^* - \omega^2 M^*)x = 0$

där

$$K^* = \int_0^L EI(x) \phi''(\phi'')^T dx$$

$$M^* = \int_0^L m(x) \phi \phi^T dx + M \phi(L) \phi^T(L)$$

Då endast en utböjningsfunktion används som i vårt fall (en frihetsgrad) kan Rayleighkvoten nedan användas.

$$\omega^2 = \frac{\int_0^L EI(x) (\phi'')^2 dx}{\int_0^L m(x) \phi^2 dx + M \phi^2(L)}$$

Exempel:

Gör likadana antaganden som för exemplet innan.

Basfunktionen är som tidigare

$$\phi(x) = -2(x/L)^3 + 3(x/L)^2$$

Derivera:

$$\phi'(x) = -(6/L)(x/L)^3 + (6/L)(x/L)^2$$

$$\phi''(x) = (6/L^2)(1-2x/L)$$

Beräkna täljare och nämnare i Rayleighkvoten:

Eftersom styvheten är konstant utefter benet blir styvheten som följer.

$$\begin{aligned} K^* &= EI \int_0^L (\phi'')^2 dx = EI (6/L^2)^2 \int_0^L (1-2x/L)^2 dx = \\ &= 36EI/L^4 \int_0^L (1 + 4x^2/L^2 - 4x/L) dx = \underline{12 EI/L^3} = 3040 \cdot 10^3 \text{ (vilket vi kunde} \\ &\text{ana att det skulle bli från exemplet innan)} \end{aligned}$$

Massan är konstant utefter varje benelement på vardera sidan om vattenytan. Integrera från underkant ben ($x=0$) upp till vattenytan ($x=36\text{m}$) och sedan från vattenytan upp till underkant däck ($x=46\text{m}$).

$$\begin{aligned} M^* &= m_2 \cdot \int_0^{36} \phi^2 dx + m_1 \cdot \int_{36}^{46} \phi^2 dx + M \phi^2(L) \\ \phi^2 &= (-2(x/L)^3 + 3(x/L)^2)^2 = 9(x/L)^4 - 12(x/L)^5 + 4(x/L)^6 \\ \int 9(x/L)^4 - 12(x/L)^5 + 4(x/L)^6 dx &= \\ &= [(9L/5)(x/L)^5 - (12L/6)(x/L)^6 + (4L/7)(x/L)^7] \\ M^* &= 10600[(9 \cdot 46/5)(x/46)^5 - (12 \cdot 46/6)(x/46)^6 + (4 \cdot 46/7)(x/46)^7]_0^{36} + \\ &+ 3000[(9 \cdot 46/5)(x/46)^5 - (12 \cdot 46/6)(x/46)^6 + (4 \cdot 46/7)(x/46)^7]_{36}^{46} + \\ &1.3 \cdot 10^6 \cdot 12 = 10600 \cdot 7.897 + 3000 \cdot (17.0857 - 7.897) + 1.3 \cdot 10^6 = \\ &111.2 \cdot 10^3 + 1.3 \cdot 10^6 = \underline{1411.2 \cdot 10^3} \end{aligned}$$

$$\omega^2 = K^*/M^* = 3040 \cdot 10^3 / 1411.2 \cdot 10^3 = 2.154$$

$$\omega = (2.154)^{0.5} = 1.467 \text{ [rad/s]} = 2\pi/T_N \text{ detta ger } T_N = 4.28 \text{ [s]}$$

Flerfrihetsgradsystem (MDOF).

För flerfrihetsgradssystem (två- och tredimensionella modeller) kan egenparen beräknas med ett flertal olika metoder varav en, invers iteration, kommer att beskrivas här.

Invers iteration

Invers iteration används för att beräkna egenvektorer med tillhörande egenvärden till problemet $(K - \omega^2 M)x = 0$

Förutsättningar

Antag att styvhetsmatrisen är positivt definit. Är den inte det kan skift användas. Massmatrisen M är antingen diagonal, med en eller flera nollor i diagonalen eller bandad.

Algoritm:

Välj en startvektor x_1

Beräkna $\bar{x}_{k+1}$ ur

$$K\bar{x}_{k+1} = Mx_k \quad k=1,2,3 \dots,$$

M -ortonomera den approximativa egenvektorn enligt följande.

$$x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} / (\bar{x}_{k+1}^T M \bar{x}_{k+1})^{1/2} \quad \text{Sätt in i ekvationen ovan.}$$

Om M ej är M -ortogonal mot den sanna egenvektorn ϕ_1 , alltså att $x_1 M \phi_1 = 0$, så gäller att $x_{k+1} \rightarrow \phi_1$ då $k \rightarrow \infty$.

När iterationen är avbruten och den approximativa vektorn x_{k+1} till ϕ_1 är funnen fås egenvärdet ur ekvationen.

$$\lambda = \omega^2 = \phi_1^T K \phi_1$$

Algoritmen ovan beskriver grunden för invers iteration.

Exempel:

Beräkna ett egenpar för problemet $K\phi = \lambda M\phi$

$$\text{Sätt } K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad M = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Välj startvektorn $x_1^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$

Lös för $k=1$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Detta ger $\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$; $\bar{x}_2^T M \bar{x}_2 = 136$

$$x_2 = 1/(136)^{1/2} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Lös för k = 2

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1/(136)^{1/2} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_3 = 1/(136)^{1/2} \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 48 \\ 56 \end{bmatrix} ; \quad \bar{x}_3^T M \bar{x}_3 = 6336/136$$

$$x_3 = 1/(6336)^{1/2} \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 48 \\ 56 \end{bmatrix}$$

Vi har slutligen fått $x_3 = \begin{bmatrix} 0.251 \\ 0.503 \\ 0.603 \\ 0.704 \end{bmatrix}$

Som ligger mycket nära det exakta värdet ϕ_1 . Se nedan.

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0.250 \\ 0.500 \\ 0.602 \\ 0.707 \end{bmatrix}$$

För datorimplementering används en annorlunda algoritm som är något effektivare.

Algoritm:

Välj en startvektor x_1

Sätt $y_1 = Mx_1$

$K\bar{x}_{k+1} = y_k \quad k = 1, 2, 3, \dots$

$\bar{y}_{k+1} = M\bar{x}_{k+1}$

$\rho(\bar{x}_{k+1}) = (\bar{x}_{k+1}^T y_k) / (\bar{x}_{k+1}^T \bar{y}_{k+1})$

$y_{k+1} = \bar{y}_{k+1} / (\bar{x}_{k+1}^T \bar{y}_{k+1})^{1/2}$

Där, förutsatt att $y_{k+1}^T \phi_1 \neq 0$, $y_{k+1} \rightarrow M\phi_1$ och $\rho(\bar{x}_{k+1}) \rightarrow \lambda_1$ då $k \rightarrow \infty$
där

$\rho(\bar{x}_{k+1})$ är approximation till egenvärdet $\lambda = \omega^2$

För att testa om iterationen konvergerar testas egenvärdet genom

$|\rho(\bar{x}_{k+1}) - \rho(\bar{x}_k)| / \rho(\bar{x}_{k+1}) \leq \epsilon$

där

ϵ = konvergenznoggrannheten = 10^{-2s} då approximationen till λ_1 skall ha överensstämmelse i $(2s)$ siffran. Då får egenvektorn noggrannhet i ca. (s) siffran. När vi har uppnått tillräcklig noggrannhet har vi tillslut

$\lambda_1 = \rho(\bar{x}_{l+1})$

där

l är sista iterationen

Egenvektorn ϕ_1 är då $x_{l+1} / (x_{l+1}^T y_{l+1})^{1/2}$

Egenvärdet fås från ekvationen $\lambda = \phi_1^T K \phi_1$

Skift

För att öka konvergenshastigheten vid invers iteration används skift. Två andra tillämpningar är då K är positiv semidefinit eller då högre egenvärden söks. Studera det skiftade egenvärdesproblemet $(K - (\eta_i + \mu)M)x = 0$ eller omskrivet $(K - \mu M)\phi = \eta_i M\phi$. Man inser att egenvektorerna behålles. Egenvärdena fås ur $\eta_i = \lambda_i + \mu$ där $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Därefter förfars på samma sätt som för invers iteration. Det viktiga med skift tekniken är att välja μ så nära vårt sökta, men inte precis på, egenvärde som möjligt.

Gram-Schmidt ortogonalisering

Vi har i den inversa iterationen fått fram ett egenpar. För att försäkra oss om att inte konvergera mot redan funna egenpar när vi söker nästa egenpar måste vi antingen ändra massmatrisen eller iterationsvektorn. En ändring av iterationsvektorn kan göras med Gram-Schmidts metod. Den går ut på att vi kan M -ortogonalisera en startvektor x_1 så att iterationen inte konvergerar mot någon av våra tidigare egenpar. Detta görs enligt följande.

$$x_s = x_1 - \sum \alpha_i \phi_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

där

x_1 är vår startvektor

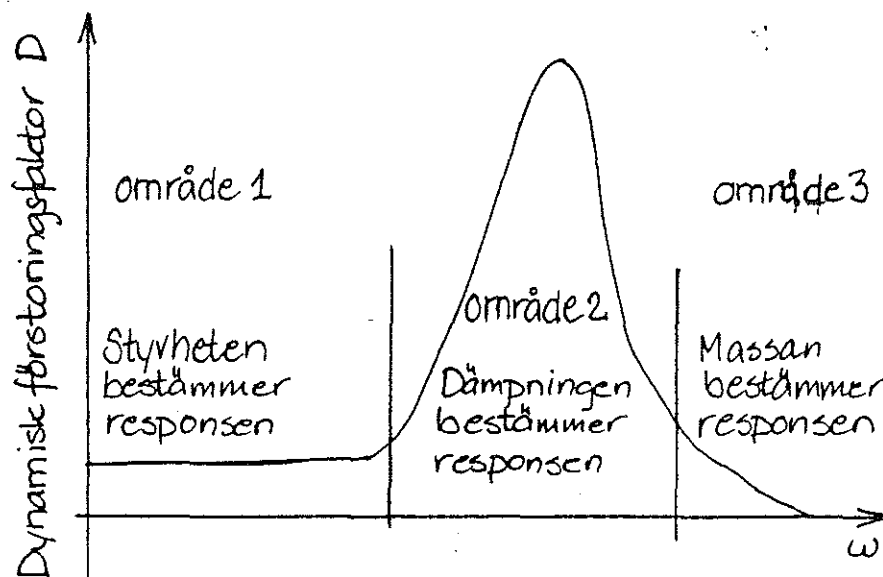
x_s är vår nya M-ortogonala startvektor

$$\alpha_i = \phi_i^T M x_1$$

ϕ_i är våra redan funna egenvektorer

DYNAMISK RESPONS

Den dynamiska responsberäkningen kan delas in i tre stycken frekvensintervall. Se fig. 4.15



Figur 4.15 Responsens frekvensberoende

Område 1)

Om lasten har låg frekvens styrs responsanalysen av strukturens styvhet. Det uppträder inte någon dynamisk förstoring i detta område utan responsen anses vara statisk. Desto närmare område 2 vi kommer ju större fel ger ovanstående antagande. Förskjutningen x beskrivs av sambandet $x = \text{kraften } F / \text{styvheten } K$ då frekvensen $\omega \rightarrow 0$

Område 2)

Frekvensen i närheten av, eller på, resonansfrekvensen. Dämpningen har stor betydelse för responsens storlek.

Förskjutningen $x =$

$$= \text{kraften } F / (\text{styvheten } K \cdot [(1 - (\omega/\Omega)^2)^2 + (2\xi\omega/\Omega)^2]^{1/2})$$

$$\text{som vid resonans} = F / (K \cdot 2\xi(1 - \xi^2)).$$

Där Ω = resonansfrekvensen och ω = aktuell frekvens.

Då dämpningen $\xi \rightarrow 0$ går $x \rightarrow \infty$ för $\omega = \Omega$.

Område 3)

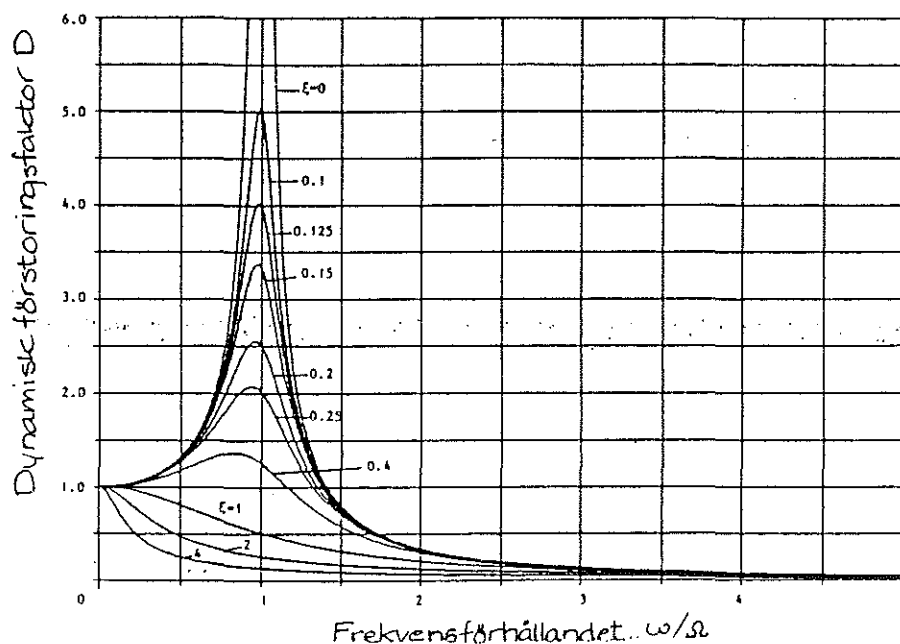
Frekvensen väl över resonansfrekvensen. Massan är den dominerande parametern för förskjutningen. Responsen är liten. Förskjutningen $x =$ kraften $F/(\text{massan } M \cdot \omega^2)$

Utmattningen är nu dimensionerande.

Följande lösningar av responsen kommer att inrikta sig på område 2) eftersom det är detta område som styr plattformens operationella djup.

Enfrihetsgradssystem (SDOF)

När resonansfrekvensen Ω , våglastens frekvens ω och dämpningen ξ är kända fås den dynamiska förstöringsfaktorn D från ordinatan genom att gå in på abscissan med frekvensförhållandet ω/Ω och in på rätt kurva för den relativa dämpningen ξ i fig. 4.16



Figur 4.16 Dynamiska förstöringsfaktorns beroende av frekvens och dämpning

Flerfrihetsgradssystem

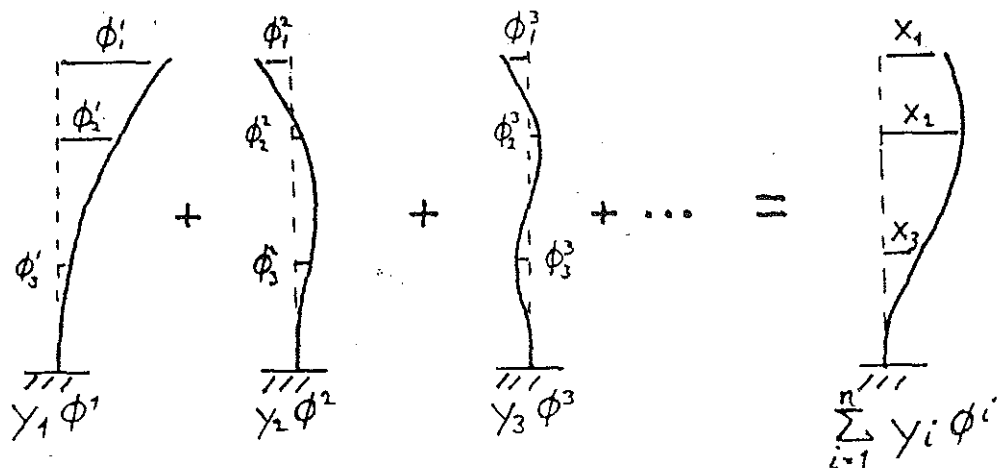
Responsen för ett flerfrihetsgradssystem kan beräknas på ett flertal sätt. Om responsen antas vara linjär kan den beräknas m h a modsuperposition.

Modsuperposition

När vi har fått fram våra egenpar ω och ϕ kan den totala responsen för aktuell last beräknas med hjälp av modalanalys. Modalanalys är en indirekt formulering av vår rörelseekvation till skillnad från en direkt formulering t ex. numerisk integration. En indirekt formulering är när man frikopplar ekvationerna i en kopplad differentialekvation till ett antal okopplade ekvationer. Man kan säga att vi gör om vårt flerfrihetsgradssystem till flera enfrihetsgradssystem. Detta kan åstadkommas med modsuperposition av odämpade egenmoder, där egenmoderna är ortogonala på mass-, dämpnings- och styvhetsmatrisen. Det är p g a denna ortogonalitet som den kopplade differentialekvationen går att frikoppla.

Det är sedan möjligt att beskriva vår svängning vid en viss frekvens som en linjär kombination av ett antal egenformer. Se fig. 4.17

Metoden är exakt när alla svängningsformerna används, men det räcker ofta med att använda de lägsta (t ex de 10 lägsta) formerna eftersom det är dessa som dominerar responsen.



Figur 4.17 Förskjutningen som en linjärkombination av egenmoder

Betrakta rörelseekvationen.

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = P(t)$$

Av ovanstående ortogonalitet hos egenmoder har vi att

$$\phi_i^T M \phi_j = \begin{cases} M_i^* & \text{om } i = j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases} \quad \text{där } M_i^* \text{ kallas den modala massan i den } i\text{:te moden}$$

Vid utnyttjande av proportionell dämpning är

$$\phi_i^T C \phi_j = \begin{cases} 2\omega_i \xi_i M_i^* & \text{om } i = j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases}$$

Eftersom $(\omega^*)^2 = K^*/M^*$ är

$$\phi_i^T K \phi_j = \begin{cases} \omega^2 M_{ij}^* & \text{om } i = j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases}$$

$$\phi_i^T P(t) = P_i^*(t) \quad \text{där } P_i^*(t) \text{ kallas den modala lasten}$$

Egenmoderna M-ortonormeras vanligtvis, alltså att $M^* = 1$.

Detta görs med följande ekvation.

$$\phi_{\text{norm}} = \phi_k / (\phi_k^T M \phi_k)^{1/2}$$

Utveckla rörelseekvationens x vektor i Fourierserien

$$x(t) = \sum y_i(t) \phi_i \quad \text{Sätt in i rörelseekvationen och förmultiplicera med } \phi_i^T$$

$$M_{ii}^* \ddot{y}_i + 2\omega_i \xi_i M_{ii}^* \dot{y}_i + \omega_i^2 M_{ii}^* y_i = P_i^*(t)$$

Vi har kopplat isär vår differential ekvation.

Om vi har M-ortonormerat egenvektorerna enligt ovan så får ekvationen följande utseende.

$$\ddot{y}_i + 2\omega_i \xi_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = P_i^*(t) \quad \text{som har lösningen}$$

$$y_i(t) = e^{-\xi_i \omega_i t} [y_i(0) \cos \omega_{di} t + (y_i(0) + \xi_i \omega_i y_i(0)) \sin \omega_{di} t / \omega_{di}] +$$

$$+ (1/M_{ii}^* \omega_{di}) \int_0^t P_i^*(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{di} (t-\tau) d\tau$$

där

$$\omega_{di} = \omega_i (1 - \xi_i^2)^{1/2}$$

För det stationära fallet ($t \rightarrow \infty$) är

$$y_i(t) = (1/M_{ii}^* \omega_{di}) \int_0^t P_i^*(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{di} (t-\tau) d\tau$$

Ovanstående integral kallas Duhamels integral och löses m h a numerisk integration. Detta beskrivs i Bergan (1981), Clough (1985) och Runesson (1983).

När vektorn y är löst fås den totala svängningsformen x ur serien

$$x(t) = \sum y_i(t) \phi_i \quad \text{Se fig. 4.16}$$

Exempel: Modsuperponering

Vi har våra två egenpar $\omega_1 = 1$ [rad/s] $\phi_1^T = [1.0, 0.707]$ och

$\omega_2 = 2$ $\phi_2^T = [-1.0, 0.707]$, med dämpningen 2% i båda moderna.

Lasten är i de båda noderna $F_1 = 10 \sin \omega t$ och $F_2 = 20 \sin \omega t$ [N]

Eftersom våra egenvektorer är M-ortonormerad blir vår modala massa = 1

$$\phi^T M \phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Det ger att

$$\phi^T C \phi = \begin{bmatrix} 2\omega_1 \xi_1 & 0 \\ 0 & 2\omega_2 \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.08 \end{bmatrix} \quad \text{och}$$

$$\phi^T K \phi = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\phi^T F = \begin{bmatrix} (1+0.707)10\sin\omega t \\ (-1+0.707)20\sin\omega t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.07\sin\omega t \\ -2.93\sin\omega t \end{bmatrix}$$

Lös följande differentialekvation

$$\ddot{y}_1 + 0.04\dot{y}_1 + 1y = 17.07\sin\omega t$$

$$\ddot{y}_2 + 0.08\dot{y}_1 + 4y = -2.93\sin\omega t$$

Den stationära lösningen till dessa differentialekvationer fås ur

$$y_1 = (1/1*1) \int_0^t 17.07\sin\omega\tau e^{-0.02*1(t-\tau)} \sin 1(t-\tau) d\tau \quad \text{och}$$

$$y_2 = (1/1*2) \int_0^t -2.93\sin\omega\tau e^{-0.02*2(t-\tau)} \sin 2(t-\tau) d\tau$$

Eftersom dämpningen är liten sätts här att $\omega_j = \omega_{jd}$.

Ovanstående integraler löses m h a numerisk integration.

Referenser

Bathe, K-J: Finite Element In Engineering Analysis. Prentice-Hall
Engelwood Cliffs (1982)

Bergan, P. G. , Larsen P. K. , Mollestad, E. : Svingning Av Konstruktioner.
Tapir (1981)

Clough, R. W. , Penzien, J. : Dynamics Of Structures, McGraw-Hill (1985)

Runesson, K. Byggnadsmekanikens Svängningsproblem (1983) Inst. f.
byggnadsmekanik, CTH, Undervisningsskrift nr. 83/84: 3

Wiberg, N. E. (red) Finita Elementmetodens Tillämpningar inom olika
teknikområden. (1980)

5 SLUTSATSER

För att beräkna en plattforms respons måste först de angripande lasterna beräknas. Dessa är vind-, ström- och vågkrafter. Det har antagits att endast vågkraften har en tillräckligt kort periodtid för att anses vara en dynamisk kraft. Därför har också merparten av arbetet i kapitel 2 lagts på beräkning av vågkrafter. Att beräkna kraften genom integration från botten och upp till den fria ytan, istället för upp till SWL, gör att vågkraften och därför också den efterföljande responsberäkningen analyseras i tidsplanet och inte i frekvensplanet. Om en plattform sätts i rörelse vid excitation bör den relativa hastigheten mellan struktur och vattenpartikel användas istället för den absoluta partikelhastigheten vid beräkning av släpkraft, men för bottenfasta plattformar är strukturens rörelse mycket mindre än vattenpartiklarnas och man behöver därför ej ta hänsyn till denna effekt. Likadant gäller för accelerationen vid beräkning av tröghetskraft.

Att veta plattformens penetration är av betydelse då den totala benlängden kan vara en begränsning av plattformens operationella djup.

Att på förhand veta hur strukturer beter sig på olika jordarter är mycket svårt. Oftast måste försök göras. Inom off-shore är det därför vanligt med ett konpenetrationstest för att få reda på plattformars penetration. Detta är beskrivet av DnV. Speciellt vid friktionsjord (sand) uppstår stora problem att beräkningsmässigt få fram penetrationen. Problemen uppstår, då penetrationen är djup, när man skall ta hänsyn till friktion och vid framtagande av hållfasthetsparametern $N_{\gamma q}$ då jordtryckskoefficienten K_s måste vara känd.

Benens vridstyvhet vid botten kan beräknas med avancerade metoder som bygger på finita differenser. Inom off-shore däremot är det vanligt med så kallade "p-y kurvor" (last-förskjutningskurvor). Att rita upp dessa kurvor beskrivs utförligt av DnV. Det enklaste sättet att ta hänsyn till jordens inspänning av benen är att utifrån jordart helt enkelt anta en ekvivalent inspänningsnivå.

För att få fram samtliga egenmoder till den efterföljande modsuperponeringen måste en tredimensionell modell användas. Denna modell är också nödvändig när plattformens tyngdpunkt inte sammanfaller med dess vridcentrum. Alltså en asymmetrisk modell. Det finns ett flertal olika metoder att beräkna en plattforms dynamiska respons på. En av dessa metoder är modsuperposition som är mycket effektiv när responsen kan beskrivas med de lägsta egenmoderna, vilket den kan för en jack-up. En nackdel med modsuperposition är att den endast gäller för linjära system, men eftersom de flesta system är linjära skall detta inte innebära något större problem.