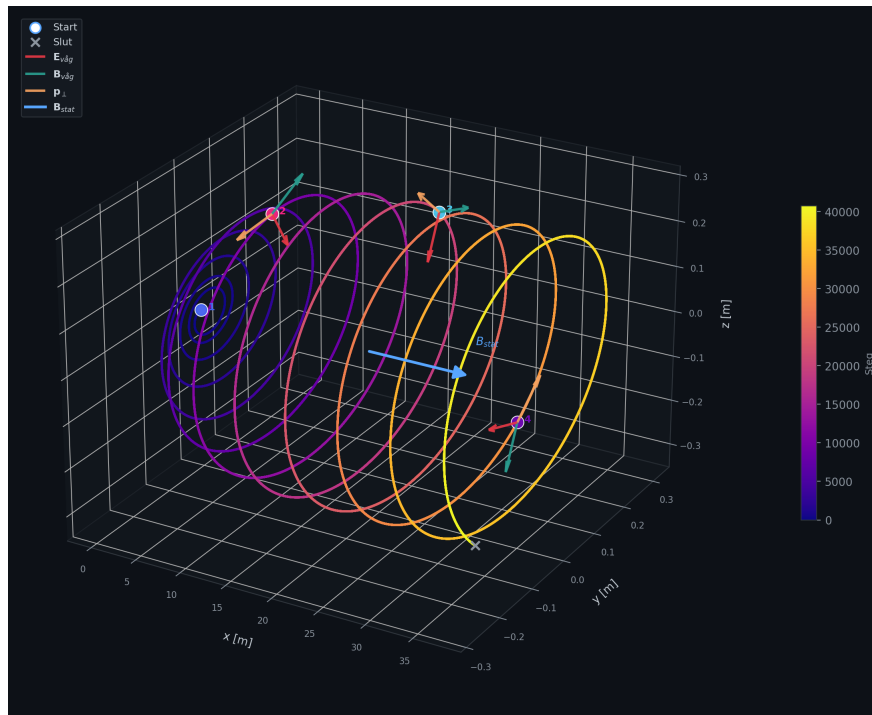




CHALMERS



Modellering av elektrondynamik i magnetosfären hos en neutronstjärna

Modeling electron dynamics in the magnetosphere of a neutron star

Kandidatarbete vid Institutionen för Fysik och Astronomi

TIFX11-VT26-15A
MATILDA BRAGDE PETTERSSON
ELLA EGEDAL HENRYSSON
EMMA ERIKSSON
CHARLOTTE SVENSSON

INSTITUTIONEN FÖR FYSIK OCH ASTRONOMI

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg, Sverige 2026
www.chalmers.se

Modellering av elektrondynamik i magnetosfären hos en neutronstjärna
MATILDA BRAGDE PETTERSSON, ELLA EGEDAL HENRYSSON, EMMA ERIKSSON, CHARLOTTE SVENSSON

© MATILDA BRAGDE PETTERSSON, ELLA EGEDAL HENRYSSON, EMMA ERIKSSON, CHARLOTTE SVENSSON, 2026.

Handledare: Tom Blackburn, Institutionen för Fysik och Astronomi
Examinator: Magnus Hörnqvist Colliander, Institutionen för Fysik och Astronomi

Kandidatarbete 2026
Institutionen för Fysik och Astronomi
Chalmers Tekniska Högskola
SE-412 96 Göteborg
Telefon +46 31 772 1000

Omslagsbild: Visualisering av rörelsen av en elektron i det kombinerade fältet av en cirkulärpolariserad våg och ett konstant magnetfält.

Skriven i L^AT_EX

Göteborg, Sverige 2026

Modellering av elektrondynamik i magnetosfären hos en neutronstjärna
Matilda Bragde Pettersson, Ella Egedal Henrysson, Emma Eriksson, Charlotte Svensson

Institutionen för fysik
Chalmers tekniska högskola

Sammandrag

Syftet med denna rapport är att undersöka partikeldynamiken i neutronstjärnors magnetosfärer. För att begränsa omfattningen analyseras en elektrons rörelse i en elektromagnetisk våg och ett statisk magnetfält, inklusive effekter av strålningsdämpning. Analytiska lösningar har använts, där det är möjligt, och jämförts med numeriska simuleringar. De numeriska simuleringarna har grundats på en algoritm som består av leapfrog- och Boris-push-metoder.

För de fallen där den elektromagnetiska vågen och det statiska magnetfältet betraktades var för sig, stämde de analytiska och numeriska lösningarna väl överens. Men resultaten visade att fallen var för sig inte är fullständiga för att beskriva den verkliga rörelsen hos elektronen. Generella analytiska lösningar saknades för det kombinerade fallet, där den elektromagnetiska vågen och det statiska magnetfältet betraktades tillsammans, men kunde hittas i ett jämviktsläge där energin är konstant. När lösningen betraktades hittades en resonanspunkt, där energin blev oändlig, vilket kan anses som fysikaliskt orimligt. Men när strålningsdämpning togs hänsyn till försvinner existensen av en resonanspunkt med ofysikalisk energitillväxt.

Den approximativa elektrontäthet som behövs för att plasman i magnetosfären skall absorbera utkommande elektromagnetiska vågor (så kallade FRB) räknades fram. Denna jämfördes med en faktiskt elektrontäthet hos en neutronstjärna. Som visade att neutronstjärnors magnetosfär borde absorbera FRBs eftersom den verkliga elektrontätheten överstiger den beräknade. Men då de kan observeras från jorden, visade resultaten att modelleringen av en elektron i magnetosfären med en elektromagnetisk våg och ett statiskt magnetfält, där effekterna av strålningsdämpning inkluderas, inte är tillräcklig för att beskriva verkligheten och bör därför kompletteras.

Nyckelord: Boris-push, elektrontäthet, leapfrog, resonans, strålningsdämpning, symmetri.

Abstract

The purpose of this report is to study the particle dynamics in the magnetosphere of a neutron star. To limit the scope, the motion of a single electron in an electromagnetic wave and a static magnetic field, including the effects of radiation reaction, was analyzed. Analytical solutions were used when possible and compared to numerical simulations. The numerical simulations were based on an algorithm built on the leapfrog and Boris-push methods.

For the cases where the electromagnetic wave and the static magnetic field were considered separately, the analytical solutions corresponded with the numerical simulations. However, the results indicated that the individual cases were not sufficient to describe the actual motion of the electron. For the combined case where the electromagnetic wave and the static magnetic field were considered, there is a lack of general analytical solutions, but could be found in an equilibrium state where the energy is constant. When the solution was considered, a resonance point could be found where the energy became infinite, which can be considered unphysical. However, when radiation was included, the resonance point that created the unphysical energy increase ceased to exist.

The approximate electron density required for the plasma in the magnetosphere to absorb outgoing electromagnetic waves (called FRBs) was calculated. The value was then compared with the actual electron density of a neutron star magnetosphere, which showed that neutron star magnetospheres should absorb FRBs, since the actual electron density exceeds the calculated value. However, because FRBs can be observed from Earth, the results suggest that the modelling of an electron in the magnetosphere interacting with an electromagnetic wave and a static magnetic field, including the effects of radiation, is not sufficient to fully describe the physical reality and therefore should be further extended.

Keywords: Boris-push, electron density, leapfrog, resonance, quantum radiation reaction, symmetry.

Förord

Vi vill rikta ett stort tack till vår handledare, Tom Blackburn, för hans stöd och vägledning under arbetets gång. Hans kunskap, återkoppling och råd har varit värdefulla för projektets utveckling och har bidragit till att föra arbetet i rätt riktning.

Matilda Bragde Pettersson, Ella Egedal Henrysson, Emma Eriksson, Charlotte
Svensson, Göteborg, juni 2026

Nomenklatur

Nedan är nomenklaturen för relevanta index, konstanter, parametrar, variabler och akronymer.

Index

μ, ν	Fritt och summerande index
------------	----------------------------

Konstanter

c	Ljusets hastighet
e	Elementarladdningen
m	Elektronmassan
μ_0	Vakuumpermeabiliteten
ϵ_0	Vakuumpermittiviteten
E_{crit}	Kritiska fältet
$\hbar$	Plancks reducerade konstant
τ_C	Comptontiden
α	Finstrukturkonstanten

Parametrar

γ	Lorentzfaktorn
ω_0	Vinkelfrekvensen för vågen
ω_g	Gyrofrekvensen
χ	Kvantparametern
ξ	Symmetri

Variabler

x, y, z	Positionerna i rummet
p	Rörelsemängden

Akronymer

FRB	Fast Radio Bursts
RFD	Radiation-free direction

Innehåll

Nomenklatur	viii
1 Inledning	1
1.1 Syfte	2
1.2 Avgränsningar	2
1.3 AI	2
1.4 Översikt	2
2 Numerisk metod	3
2.1 Numeriska algoritmer för simulering av partikelrörelse	3
2.1.1 Leapfrog	3
2.1.2 Boris-push	4
2.2 Rampfunktion	5
3 Grundläggande fall	7
3.1 Teori	7
3.1.1 Elektromagnetisk våg	7
3.1.2 Rent statiskt magnetfält	8
3.2 Numerisk metod	8
3.3 Resultat	9
3.3.1 Elektromagnetisk våg	9
3.3.2 Rent statiskt magnetfält	10
3.4 Diskussion	12
4 En förenklad magnetosfär: våg och magnetfält	13
4.1 Teori	13
4.1.1 Fyrvektorer och index	13
4.1.2 Symmetrier	14
4.1.3 Integrerbarhet	15
4.2 Numerisk metod	15
4.3 Resultat	16
4.3.1 Bevarade storheter	16
4.3.1.1 Involution	17
4.3.2 Jämviktsläge	17
4.3.3 Resonans	19
4.4 Diskussion	20

5	Strålningsdämpning	23
5.1	Teori	23
5.1.1	Klassisk och kvantmekanisk strålningsdämpning	23
5.1.2	Radiation-free direction	24
5.2	Numerisk metod	24
5.3	Resultat	24
5.3.1	Bevarade storheter	25
5.3.2	Radiation-free direction	25
5.3.3	Klassisk och kvantmekanisk strålningsdämpning	26
5.3.4	Energi och χ	27
5.4	Diskussion	29
6	Slutsats	31
6.1	Numerisk diskussion	32
6.2	Vidare studier	32
	Litteratur	35
A	Analytiska beräkningar	I
A.1	Elektromagnetisk våg	I
A.1.1	Beräkning av elektronens position	I
A.1.2	Beräkning av elektronens energi	II
A.1.3	Beräkning av jämviktsläget	II
A.1.4	Beräkning av elektrontätheten	III
A.1.5	Beräkning av kvantparametern	III
A.1.6	Figurer	IV
A.2	Rent statiskt magnetfält	VI
A.2.1	Beräkning av elektronens position	VI
A.2.2	Beräkning av elektronens energi	VII
A.2.3	Beräkning av kvantparametern	VII
A.3	Kombinerat fall	VII
A.3.1	Gauge-potentialen för bakgrundsfältet	VII
A.3.2	Bevarade storheter	VIII
A.3.3	Storheter i involution	X
A.3.4	Jämviktsläge	X
A.3.5	Resonans	XII
A.4	Strålningsdämpning	XIII
A.4.1	Radiation-free direction	XIII
A.4.2	Gaunt-faktor=1	XIV
B	Pythonkod	XV

1

Inledning

Neutronstjärnor kan betraktas som ett av de mest extrema objekten i universum [1]. De bildas i slutstadiet av massiva stjärnors livscykel, då fusionen i stjärnans kärna successivt omvandlar väte till järn [2]. När järnkärnan blir tillräckligt massiv kollapsar den och resulterar i en supernovaexplosion. Den kvarvarande kärnan komprimeras till en neutronstjärna, som kännetecknas av starka magnetiska och elektromagnetiska fält, samt en hög rotationshastighet [1].

Det finns olika typer av neutronstjärnor [1]. När neutronstjärnans magnetfält är särskilt starkt kallas den för magnetar. Neutronstjärnor som roterar och vars regelbundna pulser kan observeras från jorden kallas för pulsarer. Korta och kraftiga radioblixtar från neutronstjärnor, som kan observeras med radioteleskop, kallas för fast radio bursts, FRB [3].

Under de senaste decennierna har fenomenet FRB blivit ett av de snabbast växande områdena inom astrofysik [3]. Observationer har påvisat kopplingar mellan vissa FRB och magnetarer, vilket har stärkt hypotesen att magnetarer kan vara en möjlig källa till dem [4]. Samtidigt har observationer av strålning gett stöd till att magnetarer har "twisted magnetospheres", alltså att magnetosfärerna inte är statiska som tidigare trott, utan dynamiska och komplexa [5]. Trots dessa framsteg är de bakomliggande mekanismerna fortfarande inte fullständigt kartlagda. Särskilt finns det en brist på förståelse för hur laddade partiklar accelereras och hur dessa extrema miljöer ger upphov till strålning.

Rörelsen hos laddade partiklar i sådana miljöer styrs av Lorentzkraften, som beskriver hur magnetiska och elektriska fält påverkar partiklars rörelse [6]. När partiklar accelereras sänder de dessutom ut strålning och förlorar energi, vilket är ett fenomen som kallas för strålningsdämpning. Dessa är processer som spelar en central roll i magnetosfärens dynamik. I denna rapport betraktas ett urval av effekter, medan andra processer utelämnas till följd av avgränsningar.

På grund av de extrema förhållandena neutronstjärnor har, kan miljöerna inte återskapas i laboratoriemiljöer på jorden. Därför grundas forskningen till stor del på teoretiska modeller och numeriska simuleringar.

I denna rapport undersöks hur elektroner rör sig i magnetfält och elektromagnetiska fält, som storleksmässigt motsvarar neutronstjärnans miljöer. Det görs genom analys av rörelseekvationerna samt simuleringar i Python, där fälten och de olika processerna inkluderas stegvis. Genom att analysera partiklars rörelseekvationer och simulera deras rörelse kan man bidra till förståelsen av samspelet mellan strålning, magnetfält och plasma i extrema astrofysiska objekt, som då bidrar med kunskap för att främja utveckling av modeller samt ge en tydligare bild av begränsningarna extrema miljöer sätter på fundamental fysik.

1.1 Syfte

Syftet med rapporten är att analysera och modellera elektrondynamiken i neutronstjärnors magnetosfärer för att öka förståelsen för hur starka magnetfält, elektromagnetiska vågor och strålningsdämpning påverkar den.

1.2 Avgränsningar

För att färdigställa arbetet inom tidsramen har avgränsningar i form av förenklingar vidtagits. Både styrkan av magnetfältet och densiteten har antagits vara konstanta inom magnetosfären. Vidare begränsades arbetet till att endast analysera en elektron i magnetosfären, istället för plasma av elektroner och positroner. Begränsningarna i noggrannhet på de numeriska simuleringarna bestämdes genom ett avvägande mellan noggrannhet och tidseffektivitet.

1.3 AI

AI har använts som hjälpmedel för att hitta källor, förklara koncept i litteraturen och reda ut oklarheter med hjälp av följdfrågor som kanske inte explicit står i litteraturen, men som kan bekräftas när man väl förstår dem. Vid informationssökningen inför arbetet kunde promptar såsom ”Är en pulsar ett tillstånd av en neutronstjärna, medan en magnetar är en typ av neutronstjärna?” användas, med syftet att få ens uppfattning förklarad intuitivt.

Vid kodning har AI använts som ett verktyg för att resonera kring idéer, optimera kod, samt felsöka vid tillfällen där koden inte fungerat eller inte verkat ge korrekta resultat. AI har även hjälpt till med att skapa plottar och för att skriva om analytiska ekvationer till programmeringsspråk för att spara tid.

1.4 Översikt

Projektet består av delmoment där vi stegvis har undersökt fler faktorer i kapitlen. Dessa olika faktorer har både undersökts analytiskt och numeriskt, där resultaten har jämförts. Varje kapitel börjar med en teori där all bakgrundsfakta samlas. Sedan fortsätter metoden, där allt kring den numeriska metoden beskrivs. Vidare presenteras de analytiska resultaten tillsammans med de erhållna figurerna från de numeriska simuleringarna. Slutligen kommer en diskussion som analyserar resultatet som tagits fram.

Kapitel 2 handlar om den numeriska metoden och vilken algoritm som används. Kapitel 3 beskriver två separata fall, som handlar om elektronens dynamik i en ensam elektromagnetisk våg respektive i ett rent statiskt magnetfält. Kapitel 4 slår ihop de enkla fallen och undersöker hur elektronen påverkas när båda dessa samexisterar. Vidare läggs strålningsdämpningsprocessen till i kapitel 5. Rapporten avslutas med kapitel 6, där en avslutande diskussion och slutsats förs och förslag för framtida studier presenteras.

2

Numerisk metod

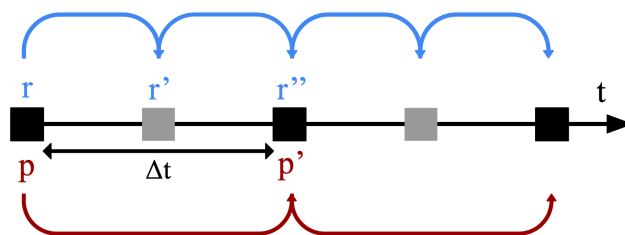
Nedan presenteras den numeriska metoden som används i simuleringar.

2.1 Numeriska algoritmer för simulering av partikelrörelse

Den numeriska analysmetoden som användes var en leapfrog-algoritm med en Boris-push-algoritm integrerad.

2.1.1 Leapfrog

En leapfrog-algoritm är en numerisk tidsintegreringsmetod som används för att simulera rörelse och position för en laddad partikel som påverkas av elektromagnetiska fält [7]. Partikelns rörelse simuleras rekursivt genom att relevanta parametrar beräknas för en punkt, vilka därefter används för att simulera partikeln framåt ett tidssteg Δt . Det som utmärker denna version av leapfrog är att beräkningar av position sker varje halvt tidssteg, medan rörelsemängden beräknas utefter den senaste positionen varje helt tidssteg. De positionsberoende fälten $\vec{E}$ och $\vec{B}$ beräknas tillsammans med positionen. Denna idé illustreras i figur 2.1.



Figur 2.1: Figuren illustrerar skillnaden i tidssteg för simulering av position och hastighet enligt leapfrog-metoden. Positionen $\vec{r}$, samt fältstyrkorna, beräknas varje halva tidssteg, medan rörelsemängden $\vec{p}$ beräknas varje hela tidssteg Δt .

Fördelen med beräkningar vid halva tidssteg är att de bättre approximerar en kontinuerlig rörelse än beräkningar vid endast hela tidssteg [7]. De sistnämnda är mindre stabila, med numeriska fel som ackumuleras genom iterationer. Medan leapfrog-metoden är en *andragradsmetod*, vilket innebär att dess fel är i andra gradens storleksordning $(\Delta t)^2$ [8].

Rörelsemängden $\vec{p}$ beräknas över hela tidsstegen Δt , och behöver alltså ett medelvärde för fältstyrkorna över denna tid, vilket approximeras med värdet vid ett halvt tidssteg [7].

```

1 def Leap_Frog(r, p, dt, E_vec, B_vec, t):
2
3     r_start = np.array(r, dtype=float)
4     p_start = np.array(p, dtype=float)
5
6     gamma_half = beräkna_gamma(p) # räkna ut lorentzfaktor för
7     r_half = r_start + p_start*dt/(2*gamma_half*m)
8
9     t_half = t+dt/2 # beräknar tiden i mitten av tidssteget
10    E_half = np.array(E_vec(r_half, t_half), dtype=float)
11    B_half = np.array(B_vec(r_half, t_half), dtype=float)
12
13    p_half = Boris_Push(p, q, dt, E_half, B_half)
14
15    gamma_prim = beräkna_gamma(p_half)
16    r_half = r_half + p_half*dt/(2*gamma_prim*m)
17
18    t_prim = t + dt
19
20    E_half = np.array(E_vec(r_half, t_prim), dtype=float)
21    B_half = np.array(B_vec(r_half, t_prim), dtype=float)
22
23    return r_half, p_half, t_prim, E_half, B_half, E_half, B_half

```

2.1.2 Boris-push

Boris-push-algoritmen används för att beräkna rörelsemängden (vilket illustreras av de röda linjerna i figur 2.1). Teorin bakom metoden är att det elektriska och magnetiska fältet påverkar partikeln på olika sätt. Det förstnämnda för partikeln framåt, medan det sistnämnda roterar partikeln runt fältlinjen. Boris-push delar upp bidragen från fälten och applicerar dem successivt på rörelsemängden [9]: först ena halvan av det elektriska fältet, sedan hela det magnetiska fältet och till sist andra halvan av det elektriska fältet. Anledningen till denna uppdelning är att skapa en symmetri i tidsreversering, alltså att beräkningen blir densamma baklänges. Detta gör simuleringen mer stabil.

```

24
25 def Boris_Push(p, q, dt, E, B):
26     p = np.array(p, dtype=float)
27     E = np.array(E, dtype=float)
28     B = np.array(B, dtype=float)
29
30     p_1 = p + q*dt/2*E
31

```

```

32     gamma_1 = beräkna_gamma(p_1) #
33     s = q*dt/(2*m*gamma_1)*B
34
35     p_2 = p_1 + 2/(1+np.dot(s,s))*(np.cross(p_1,s)+np.cross(
        np.cross(p_1,s),s))
36
37     p_prim= p_2+q*dt/2*E
38     return p_prim

```

2.2 Rampfunktion

I simuleringarna för den elektromagnetiska vågen används en rampfunktion som gör att amplituden ökar successivt utefter en specifik funktion. I början av arbetet användes en rampfunktion som hade formen

$$s(\phi) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\phi}{32}\right), & \phi < 16\pi \\ 1, & \text{annars,} \end{cases} \quad (2.1)$$

där ϕ är fasen hos vågen. De elektriska och magnetiska fälten kunde då skrivas som

$$\begin{aligned} E_y &= E_w \sin(\phi) s(\phi), & E_z &= -E_w \cos(\phi) s(\phi), \\ B_y &= B_w \cos(\phi) s(\phi), & B_z &= B_w \sin(\phi) s(\phi). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Men vid simulering över längre tid observerades en förskjutning i partikelns rörelse i y och z -led. Felsökning av modellen visade att det berodde på rampens form.

För att skapa en ny rampfunktion som inte skulle orsaka en förskjutning, utgick vi från att integralen multiplicerad med det cirkulärt polariserade fältet skulle bli noll. Ett sätt att få en funktion som uppfyller det kravet är att välja rampfunktionen som derivatan av en funktion som ger 0 i rampens start- och ändpunkt. Utöver det behöver rampfunktionen vara kontinuerlig, vilket betyder att den i slutet av rampen ska ge det cirkulärt polariserade fältet. Eftersom y - och z -komponenterna i fältet skiljer sig åt, är det rimligt att uttrycka rampfunktionen som en vektor, och ett naturligt val är

$$f(\phi) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{d}{d\phi}(-\cos \phi s(\phi)) \\ \frac{d}{d\phi}(-\sin \phi s(\phi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\cos \phi \cos\left(\frac{\phi}{32}\right) \sin\left(\frac{\phi}{32}\right)}{16} + \sin \phi \sin^2\left(\frac{\phi}{32}\right) \\ -\frac{\sin \phi \cos\left(\frac{\phi}{32}\right) \sin\left(\frac{\phi}{32}\right)}{16} - \cos \phi \sin^2\left(\frac{\phi}{32}\right) \end{pmatrix}, & \phi < 16\pi \\ \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \end{pmatrix}, & \text{annars.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Med den definitionen skrivs fälten som

$$E_y = E_w f_1(\phi), \quad E_z = E_w f_2(\phi), \quad B_y = -B_w f_2(\phi), \quad B_z = B_w f_1(\phi), \quad (2.4)$$

där f_1 och f_2 betecknar de två komponenterna i vektorn $f(\phi)$.

Vid en ny simulering observerades att den nya formuleringen av rampfunktionen eliminerade den observerade driftkomponenten.

3

Grundläggande fall

För att förstå hur en laddad partikel rör sig i en neutronstjärnas magnetosfär betraktar vi två förenklade fall. Det första är när elektronen endast påverkas av en elektromagnetisk våg med en viss styrka. Vågen som betraktas har frekvensen $f = 1$ GHz, alltså i radioområdet, vilket är vad som observeras från jorden. Sedan betraktas fallet där elektronen, som först accelereras av den elektromagnetiska vågen, endast påverkas av magnetfältet från neutronstjärnan, som är parallellt med vågens färdriktning. Magnetfältet antas vara statiskt, det vill säga det har samma styrka oavsett avstånd från neutronstjärnan.

3.1 Teori

Nedan presenteras Lorentzkraften som verkar på elektronen, de fält som påverkar partikeln samt definitioner av viktiga parametrar.

3.1.1 Elektromagnetisk våg

I den här delen analyseras en elektrons rörelse som påverkas av en elektromagnetisk våg.

En laddad partikel i en neutronstjärnas magnetosfär påverkas av Lorentzkraften,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (3.1)$$

där $q = -e$ är elektronens laddning. Elektronen accelereras av det elektriska fältet till relativistiska hastigheter. Rörelseekvationen för en partikel som påverkas av Lorentzkraften och som når relativistiska hastigheter kan skrivas

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{\vec{p}}{\gamma m}, \quad (3.2)$$

där $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ är Lorentzfaktorn, uttryckt med ljusets hastighet c [6].

Fältet betraktas som en högercirkulärt polariserad våg som färdas längs x -axeln. Komponenterna av fältet i varje riktning är

$$\begin{aligned} E_y &= E_w \sin \phi, & E_z &= -E_w \cos \phi, \\ B_y &= B_w \cos \phi, & B_z &= B_w \sin \phi, \end{aligned} \quad (3.3)$$

med $E_x = B_x = 0$. $E_w = cB_w$ är amplituden på vågen och fasen är $\phi = \omega_0(t - \frac{x}{c})$, där ω_0 är vinkelfrekvensen. För $f = 1$ GHz blir $\omega_0 = 6.28 \cdot 10^9$ rad/s.

Det starka elektromagnetiska fältet hos neutronstjärnan ger mycket hög energi till partikeln. Den energin beräknas genom att använda formeln för relativistisk energi, $\mathcal{E}^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$, där p är normen på rörelsemängden och m är partikelns massa. När all energi som ska överföras till partikeln har överförts, har ett jämviktsläge uppnåtts, där energin är konstant, $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$.

För att bestämma hur många partiklar som krävs för att absorbera den totala energin i vågen använder vi energitätheten, som beskriver mängden energi per volymenhet i fältet,

$$u = \frac{B_w^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 E_w^2}{2}, \quad (3.4)$$

med vakuumpermeabiliteten, μ_0 , och vakuumpermittiviteten, ϵ_0 [10].

Fälten i en neutronstjärna är så starka att klassisk fysik inte räcker för att beskriva partiklarnas rörelse. Vi tittar på kvantparametern χ , som beskriver hur stor påverkan kvanteffekter har i starka fält,

$$\chi = \frac{\gamma}{E_{crit}} \sqrt{(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})^2 - (\vec{E} \cdot \frac{\vec{v}}{c})^2}, \quad (3.5)$$

där $E_{crit} \approx 1,3 \cdot 10^{18}$ V/m, vilket är det kritiska fältet där vakuum kan skapa elektron-positronpar [11]. Den sätter en skala för när kvanteffekter blir viktiga. När $\chi \ll 1$, betraktas systemet klassiskt. Å andra sidan, om $\chi \gg 1$ blir kvanteffekter viktiga, och systemet betraktas kvantmekaniskt.

3.1.2 Rent statiskt magnetfält

Vi antar nu att partikeln först accelereras av det elektriska fältet från vågen och sedan endast påverkas av magnetfältet från neutronstjärnan. Magnetfältet är parallellt med vågens färdriktning, $\vec{B} = B_n \hat{x}$.

Rörelseekvationen för en partikel som endast påverkas av ett magnetfält och som når relativistiska hastigheter är densamma som ekvation (3.2), med $\vec{E} = 0$. Denna ekvation kan lösas för att få fram elektronens position i varje riktning.

Vinkelfrekvensen för en elektron som endast påverkas av ett statiskt magnetfält kallas för gyrofrekvensen $\omega_g = \frac{eB_n}{\gamma m}$.

Energien hos partikeln uttrycks med samma formel för relativistisk energi, och kvantparametern uttrycks på samma sätt som i (3.5), med $\vec{E} = 0$.

3.2 Numerisk metod

För att få fram resultaten användes både analytiska beräkningar, utefter teorin ovan, samt numeriska simuleringar. I simuleringen för fallet om elektronen som påverkas av endast en elektromagnetisk våg användes 500 tidssteg per vågperiod.

I fallet av ett statiskt magnetfält användes 100 tidssteg per gyroperiod. Startvärdena för simulering av elektronen i ett statiskt magnetfält ges av startvärdena i den analytiska lösningen för rörelse i en elektromagnetisk våg.

Simuleringstiden som användes i båda fallen var $5 \cdot 10^{-8}$ sekunder.

För att se detaljerad beskrivning av den numeriska metoden, se avsnitt 2 och appendix B.

3.3 Resultat

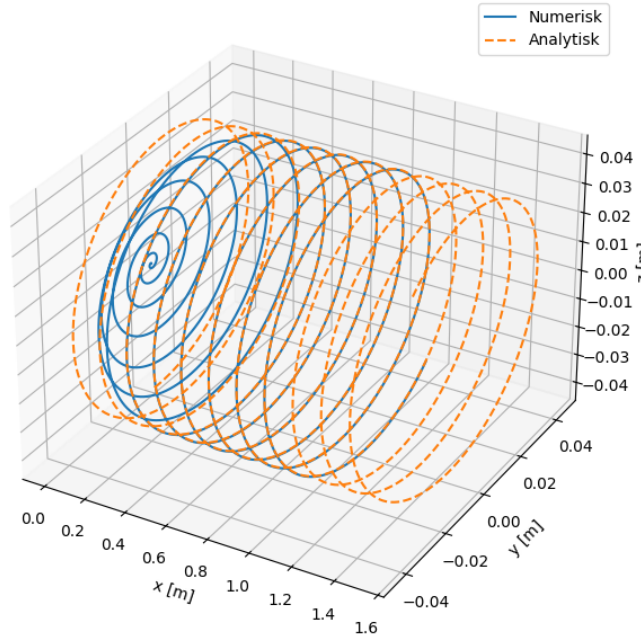
Nedan presenteras resultaten i form av lösningar för rörelseekvationerna i båda fallen. Även jämförelser mellan de analytiska beräkningarna och de numeriska simuleringarna illustreras. Energin $\mathcal{E}$ och kvantparametern χ beräknas i båda fallen.

3.3.1 Elektromagnetisk våg

Genom att lösa rörelseekvationen med hjälp av vågens komponenter i (3.3) får vi rörelsemängden i varje riktning, som sedan integreras för att få positionerna

$$x(t) = \frac{E_w^2 e^2}{2\gamma\omega_0^2 m^2 c} t, \quad y(t) = -\frac{qE_w}{\gamma m\omega_0^2 (1 - \frac{v_x}{c})} \sin \phi, \quad z(t) = \frac{qE_w}{\gamma m\omega_0^2 (1 - \frac{v_x}{c})} \cos \phi, \quad (3.6)$$

där vi antar att elektronen börjar i vila, vilket är fysikaliskt korrekt på grund av att magnetosfären i neutronstjärnan är relativt ostörd före FRB (se appendix A.1.1 för detaljerad uträkning). Rörelsen är högerorienterad för en elektron, med $q = -e$. Figur 3.1 visar hur denna analytiska lösning för elektronens rörelsebana stämmer väl överens med den numeriskt beräknade lösningen.



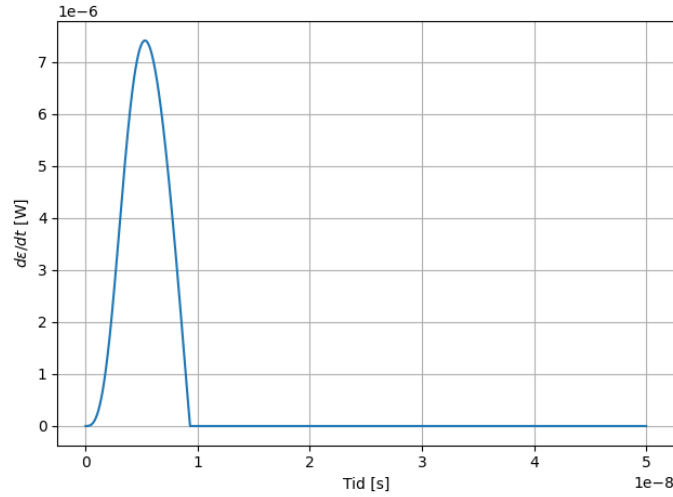
Figur 3.1: Jämförelse av den analytiskt och numeriskt beräknade rörelsebana för en elektron i en cirkulärt polariserad elektromagnetisk våg, som funktion av tid, där fältstyrkan är $E_w = 10^7$ V/m.

Energin hos partikeln beräknas enligt formeln för relativistisk energi och är

$$\mathcal{E} = mc^2 + \frac{E_w^2 e^2}{2m\omega_0^2}, \quad (3.7)$$

(se appendix A.1.2 för detaljerad uträkning). I fallet med $E_w = 10^7$ V/m är energin 0,73 MeV. Figur A.1 visar hur den analytiskt beräknade energin stämmer överens med den numeriskt beräknade.

Jämviktsläget fås när $q\vec{v} \cdot \vec{E} = 0$ (se appendix A.1.3). Det betyder att det elektriska fältet och hastigheten hos partikeln är ortogonala. Figur 3.2 visar den simulerade energiöverföringen från vågen till elektronen.



Figur 3.2: Numeriskt beräknade energiöverföring som funktion av tid för en elektron i en cirkulärt polariserad elektromagnetisk våg, där fältstyrkan är $E_w = 10^7$ V/m.

Från ekvation (3.4) hittas uttrycket för elektrontätheten,

$$n_e = \frac{2\epsilon_0 m \omega_0^2}{e^2}, \quad (3.8)$$

(se appendix A.1.4). I fallet med $E_w = 10^7$ V/m har elektrontätheten värdet $n_e = 2,46 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3}$, vilket motsvarar antalet elektroner som behövs per volymenhet för att absorbera all energi från vågen. Figur A.2 visar hur väl den analytiskt beräknade elektrontätheten stämmer överens med den numeriskt beräknade.

Kvantparametern bestäms från (3.5) och är

$$\chi = \frac{E_w}{E_{crit}}, \quad (3.9)$$

(se appendix A.1.5 för detaljerad uträkning). För $E_w = 10^7$ V/m är $\chi = 7,69 \cdot 10^{-12}$. Figur A.3 visar hur väl den analytiskt beräknade kvantparametern stämmer överens med den numeriskt beräknade.

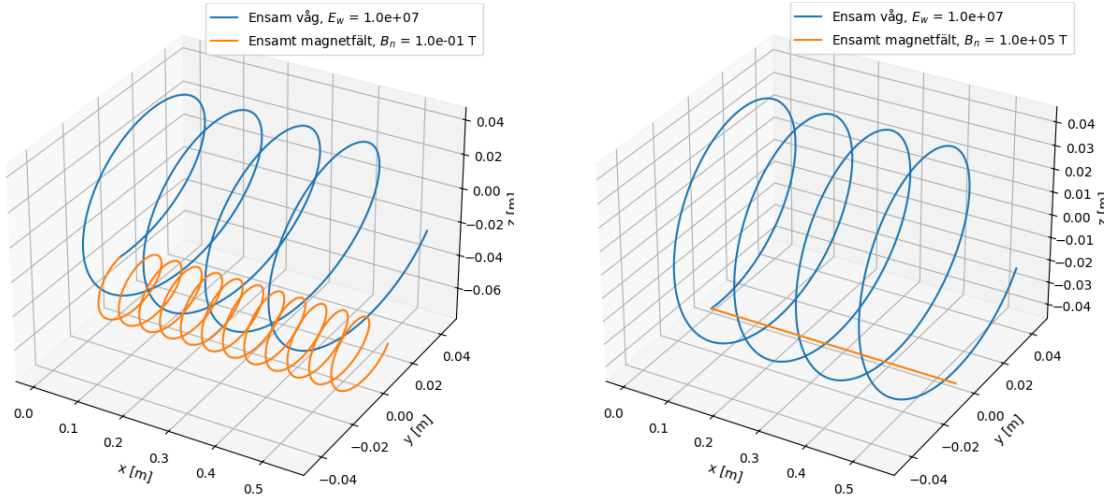
3.3.2 Rent statiskt magnetfält

Genom att lösa rörelseekvationen för det aktuella fältet fås rörelsemängderna som integreras för att få positionerna

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{p_{x0}}{\gamma m} t + x_0, \\
 y(t) &= \frac{p_{y0}}{q B_n} \sin(\omega_g t) + \frac{p_{z0}}{q B_n} (1 - \cos(\omega_g t)) + y_0, \\
 z(t) &= \frac{p_{y0}}{q B_n} (\cos(\omega_g t) - 1) + \frac{p_{z0}}{q B_n} \sin(\omega_g t) + z_0,
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

där $\omega_g = \frac{e B_n}{\gamma m}$ är gyrofrekvensen och p_{x0} , p_{y0} , p_{z0} , x_0 , y_0 och z_0 är konstanter som bestäms av startvillkor (se appendix A.2.1 för detaljerad beräkning). Rörelsen är högerorienterad i fallet av en elektron, med $q = -e$. Att både vågen och magnetfältet ger upphov till högerorienterade rotationer kommer att få stor betydelse i avsnitt 4.3.3.

I figurerna 3.3a och 3.3b visas rörelsebanorna för elektronen som påverkas av en elektromagnetisk våg jämfört med ett statiskt magnetfält.



(a) Rörelsebana med $B_n = 0,1$ T.

(b) Rörelsebana med $B_n = 10^5$ T.

Figur 3.3: Rörelsebanor för en elektron som påverkas av en ensam våg jämfört med ett statiskt magnetfält. Styrkan hos vågen är $E_w = 10^7$ V/m och styrkan hos magnetfältet är $B_n = 0,1$ T respektive $B_n = 10^5$ T.

Energien uttrycks på samma sätt, med formeln för relativistisk energi,

$$\mathcal{E} = \sqrt{\frac{E_w^4 e^4}{4 \omega_0^4 m^2} + p_{y0}^2 c^2 + p_{z0}^2 c^2 + m^2 c^4}. \tag{3.11}$$

Om startvärdena på p_{y0} och p_{z0} i (A.2) används, är denna energi lika med energin i fallet av en ensam våg, eftersom magnetfältet utför inget arbete på partikeln.

Genom att räkna ut kvantparametern i fallet där partikeln endast påverkas av ett magnetfält fås

$$\chi = \frac{B_n}{E_{crit} m} \frac{E_w e}{\omega_0}, \tag{3.12}$$

(se appendix A.2.3 för detaljerad beräkning). Kvantparametern är större än i fallet med en elektromagnetisk våg, detta syns i tabell 3.1 för olika styrkor på magnetfältet.

B_n (T)	χ ($E_w = 10^7$ V/m)
0, 1	$2, 15 \times 10^{-11}$
10^5	$2, 15 \times 10^{-5}$
10^8	$2, 15 \times 10^{-2}$

Tabell 3.1: Exempelvärden för $\chi = \frac{B_n}{E_{crit} m} \frac{E_w e}{\omega_0}$ med $E_w = 10^7$ V/m, $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^9$ s⁻¹, $E_{crit} = 1,3 \cdot 10^{18}$ V/m och elektronmassan $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg.

3.4 Diskussion

I fallet av en elektromagnetisk våg är kvantparametern mycket mindre än ett. Det innebär att kvanteffekterna är mycket låga och att strålningsdämpning sker enligt klassisk teori, vilket medför att det inte skulle vara någon parbildning i magnetosfären och därmed ingen plasma eller utstrålning. Det kan inte stämma i verkligheten då strålning kan ses från jorden. I fallet av ett rent magnetfält ser vi att kvantparametern blir större, vilket innebär att kvanteffekterna är större än i fallet av en elektromagnetisk våg.

Simuleringarna för rörelsebanan hos elektronen i båda fallen visar en högerorienterad rörelse, vilket stämmer överens med analysen av rörelseekvationen och de beräknade positionerna. Att rörelsen är högerorienterad i båda fallen kan leda till resonans, vilket kommer att synas när våg och magnetfält kombineras i nästa del. Radien på rörelsebanan för ett magnetfält minskar med magnetfältets styrka, men energin förblir konstant.

Simuleringarna för en elektromagnetisk våg visar att de numeriska lösningarna för energi, elektrontäthet och kvantparametern konvergerar mot de analytiska lösningarna (se figurer A.1, A.2 och A.3 i appendix). Simuleringarna för det statiska magnetfältet visar också att den numeriska lösningen motsvarar våra analytiska resultat för energi och kvantparameter, som är konstanta.

Dessa två enkla fall stämmer inte var för sig för att beskriva partikelns rörelse i en neutronstjärnas magnetosfär, men de ger en bra grund för kommande numeriska simuleringar, eftersom de analytiska beräkningarna stämmer överens med de numeriska. Dessa modeller kombineras i nästa avsnitt för att ge en mer realistisk modell för elektrondynamiken i en neutronstjärna.

4

En förenklad magnetosfär: våg och magnetfält

I det föregående kapitlet analyserades en elektrons rörelse i två separata fall, vid påverkan av en ren elektromagnetisk våg respektive ett rent statiskt magnetfält. Dessa är idealiserade modeller som visar hur respektive fält påverkar elektronen, men de är inte tillräckliga för att beskriva partikelns rörelse i neutronstjärnors magnetosfärer.

En neutronstjärnas magnetfält i en förenklad dipolmodell liknar jordens, med fältlinjer som följer den runda formen och lämnar kroppen vid polerna. Vi kan använda den rena elektromagnetiska vågen för att representera FRB och det konstanta magnetfältet för att representera neutronstjärnans magnetfält. FRB lämnar neutronstjärnan vid polerna, där vågen och magnetfältet är parallella. Därför väljer vi att analysera denna situation.

Rörelseekvationen erhålls från Lorentzkraften,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E}_w + \vec{v} \times (\vec{B}_w + \vec{B}_n)), \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{\vec{p}}{\gamma m}, \quad (4.1)$$

där $\vec{B}_w$ och $\vec{E}_w$ är de oscillerande fälten från vågen och $\vec{B}_n$ är neutronstjärnans statiska magnetfält, parallellt med vågens utbredningsriktning (x -led i detta fall).

4.1 Teori

Avnittet börjar med en kort introduktion till fyrvektorer för den som ej är familjär med ämnet, i syfte att underlätta förståelsen för de ekvationer som kommer diskuteras i kapitlet. Därefter presenteras en teori om symmetrier och bevarade storheter, samt deras påverkan på lösbarheten av rörelseekvationen.

4.1.1 Fyrvektorer och index

Inom speciell relativitet är en fyrvektor en vektor med fyra komponenter, den första i tid och de tre nästkommande i rum [12]. De olika elementen i vektorn beskrivs av index, här μ eller ν . Dessa index kan anta värdena 0 till 3 som representerar ct , x , y , z . Där ct är tidsdimensionen multiplicerad med c , så att elementet får samma enhet som rumsdimensionerna. Ett exempel på en fyrvektor är den "kontravarianta fyrpositionen",

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z), \quad (4.2)$$

med "kontravariant" menas att vektorn har ett upphöjt index [12]. Den andra versionen av en fyrvektor, "kovariant", är likadan men med skillnaden att alla rumskoordinater är multiplicerade med minus ett. Detta indikeras av ett nedsänkt index och ser ut som

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (ct, -x, -y, -z). \quad (4.3)$$

Ett index kan användas som antingen "fritt" eller "summerande", där båda typerna illustreras i definitionen av Lie-derivatan av en kovariant vektor A_μ [13],

$$\mathcal{L}_\xi A_\mu = \xi^\nu \partial_\nu A_\mu + A_\nu \partial_\mu \xi^\nu, \quad (4.4)$$

där μ är ett fritt index och ν ett summerande index. Notera att ξ här ej är ett index utan en etikett för vektorfältet. Notationen säger att det finns fyra olika ekvationer där $\mu = 0, 1, 2, 3$ för respektive ekvation, och där varje ekvation egentligen är en summering över $\nu = 0, 1, 2, 3$. Alltså syftar föregående ekvation på

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi A)_0 &= \sum_{\nu=0}^3 \xi^\nu \partial_\nu A_0 + A_\nu \partial_0 \xi^\nu, & (\mathcal{L}_\xi A)_1 &= \sum_{\nu=0}^3 \xi^\nu \partial_\nu A_1 + A_\nu \partial_1 \xi^\nu, \\ (\mathcal{L}_\xi A)_2 &= \sum_{\nu=0}^3 \xi^\nu \partial_\nu A_2 + A_\nu \partial_2 \xi^\nu, & (\mathcal{L}_\xi A)_3 &= \sum_{\nu=0}^3 \xi^\nu \partial_\nu A_3 + A_\nu \partial_3 \xi^\nu, \end{aligned} \quad (4.5)$$

där den fyrdimensionella partiella derivatan är

$$\partial_\mu = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c}\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z\right). \quad (4.6)$$

4.1.2 Symmetrier

En symmetri ξ är ett vektorfält som fungerar likt en operator, givet att den lämnar ett system oförändrat på ett visst fysikaliskt sätt. Ett vanligt exempel är rotations-symmetri, där ett system förblir oförändrat efter rotation. Symmetrier ξ definieras i denna artikel genom partiella derivator. Exempelvis beskrivs en translation i x -led som $\xi = \partial_x$.

Teorin om gaugeinvariants säger att elektromagnetiska fält kan beskrivas som gaugepotentialer $A_\mu = (\phi, -\vec{A})$ [14]. Där $\vec{A}$ är vektorpotentialen och ϕ är den skalära potentialen från Maxwells elektromagnetiska teori. Poängen med A_μ är att de kan förändras under speciella transformationer, samtidigt som de bakomliggande fälten förblir oförändrade [15]. Detta resulterar i att vårt fält hade kunnat representeras av flera kombinationer av $\vec{A}$ och ϕ , så länge de uppfyller ekvationerna [14]

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (4.7)$$

En symmetri ξ finns i gauge-potentialen A_μ om följande villkor är uppfyllt [13],

$$\mathcal{L}_\xi A_\mu = \partial_\mu \Lambda, \quad (4.8)$$

där vänsterledet beskriver hur gauge-potentialen förändras under ξ , enligt definitionen av Lie-derivatan (4.4). Alltså är ξ endast en tillåten symmetri om dess påverkan på just detta A_μ kan beskrivas som partiella derivatan av något skalärfält Λ .

Noethers sats säger att en symmetri ξ alltid implicerar en korresponderande bevarad storhet Q_ξ [13]. Exempelvis innebär rotationssymmetri att systemets rörelsemängd är bevarad. För att hitta formen på Q_ξ behöver man utgå från Lorentzkraften omskriven som fyrvektor,

$$m\ddot{x}^\mu = eF^{\mu\nu}\dot{x}_\nu, \quad (4.9)$$

notera att punkten över x syftar på en derivata med avseende på egentiden $\frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}$.

Genom att ta vektorprodukten med symmetrin och använda symmetrivillkoret i ekvation (4.8), resulterar det i ekvationen [13]

$$\frac{d}{d\tau}(\xi^\mu \cdot P_\mu - e\Lambda) = 0. \quad (4.10)$$

Notera att uttrycket inom parentes är bevarat i egentiden τ . Slutsatsen kan dras att en storhet

$$Q_\xi = \xi^\mu \cdot P_\mu - e\Lambda \quad (4.11)$$

är bevarad för A_μ [13].

P_μ är den kanoniska fyrrörelsemängden som innehåller både den vanliga rörelsemängden, $p_\mu = m\dot{x}_\mu$, och ett bidrag från bakgrundsfältet [13]. Den definieras som

$$P_\mu = m\dot{x}_\mu + eA_\mu. \quad (4.12)$$

4.1.3 Integrerbarhet

Integrerbarhet innebär att ett systems rörelseekvationer är exakt lösbara [13]. I denna artikel innebär det att det går att förutsäga elektronens rörelsebanor analytiskt. Kravet för integrerbarhet är att det finns en oberoende bevarad storhet Q_ξ per frihetsgrad. Den behöver även vara i involution, vilket betyder att de Poisson-kommuterar. Att storheter Poisson-kommuterar innebär att $\{Q_i, Q_j\} = 0$. Där Poissonbrackets definieras genom $\{x_i, P_j\} = -\{P_i, x_j\} = \delta_{ij}$ och $\{x_i, x_j\} = \{P_i, P_j\} = 0$.

4.2 Numerisk metod

Utifrån teorin ovan gjordes analytiska beräkningar för elektronens dynamik i det kombinerade fältet, medan de numeriska simuleringarna gjordes utifrån metoderna i kapitel 2.

Upplösningen för simuleringarna i det kombinerade fallet bestämdes genom att undersöka vilket av magnetfälten, $\vec{B}_w$ eller $\vec{B}_n$, som var starkast. Om vågens magnetfält dominerade löstes vågperioden upp med 500 steg per vågperiod, och om stjärnans magnetfält dominerade användes 100 steg per gyroperiod. Om fältens styrka var lika valdes den upplösning med minst tidssteg.

Simuleringarna gjordes för en elektron som påverkas av de kombinerade fälten under tiden 10^{-6} s.

För att se detaljerad beskrivning av den numeriska metoden se avsnitt 2 och appendix B

4.3 Resultat

Nedan beräknas vilka storheter som bevaras i och utanför jämviktsläget, samt vad det säger om systemets integrerbarhet. Jämviktsläget och resonansen undersöks med uträkningar och simuleringar av elektronens rörelse.

4.3.1 Bevarade storheter

Ett exempel på en gauge-potential A_μ som uppfyller ekvationerna (4.7) för just dessa fält är

$$A_\mu = (0, 0, -\frac{E_w}{\omega_0} \cos \phi + \frac{B_n}{2} z, -\frac{E_w}{\omega_0} \sin \phi - \frac{B_n}{2} y), \quad (4.13)$$

där $\phi = \omega_0(t - \frac{x}{c})$ (se uträkning i appendix A.3.1). Ha i åtanke att detta är exakt samma fält som i de enkla fallen, fast nu är de kombinerade i ett system.

För denna gauge-potential A_μ kan fyra symmetrier hittas (se beräkningar i appendix A.3.2). De första två symmetrierna är translation i y -respektive z -led, vilka beskrivs som $\xi_y = \partial_y$ respektive $\xi_z = \partial_z$. Den tredje symmetrin är en rotation kring x -axeln med en tidskomponent, $\xi_{rot} = \partial_t + \omega_0(y\partial_z - z\partial_y)$, och den fjärde är en ljuslik translation, $\xi_\gamma = \partial_t + c\partial_x$. De fyra symmetrierna kan skrivas som fyrvektorer,

$$\begin{aligned} \xi_y^\mu &= (0, 0, 1, 0), & \xi_z^\mu &= (0, 0, 0, 1), \\ \xi_{rot}^\mu &= (c, 0, -\omega_0 z, \omega_0 y), & \xi_\gamma^\mu &= (c, c, 0, 0). \end{aligned} \quad (4.14)$$

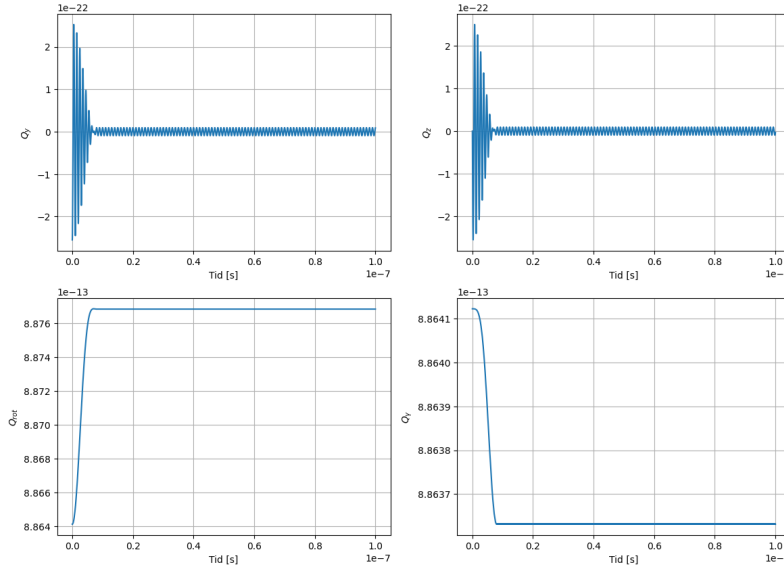
Genom att applicera symmetrivillkoret från ekvation (4.8) på respektive symmetri ovan, får vi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi A_\mu &= \xi_y^\nu \partial_\nu A_\mu + A_\nu \partial_\mu \xi_y^\nu = (0, 0, 0, -\frac{B_n}{2}) &= \partial_\mu \Lambda_y, \\ \mathcal{L}_\xi A_\mu &= \xi_z^\nu \partial_\nu A_\mu + A_\nu \partial_\mu \xi_z^\nu = (0, 0, \frac{B_n}{2}, 0) &= \partial_\mu \Lambda_z, \\ \mathcal{L}_\xi A_\mu &= \xi_{rot}^\nu \partial_\nu A_\mu + A_\nu \partial_\mu \xi_{rot}^\nu = (0, 0, 0, 0) &= \partial_\mu \Lambda_{rot}, \\ \mathcal{L}_\xi A_\mu &= \xi_\gamma^\nu \partial_\nu A_\mu + A_\nu \partial_\mu \xi_\gamma^\nu = (0, 0, 0, 0) &= \partial_\mu \Lambda_\gamma. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Utifrån dessa ekvationer hittas skalärfältet Λ_ξ som motsvarar varje symmetri. Därefter kan de bevarade storheterna beräknas till

$$\begin{aligned} Q_y &= \xi^\mu \cdot P_\mu - e\Lambda = \xi^\mu \cdot P_\mu + e\frac{B_n}{2}z = P_y + \frac{eB_n}{2}z, \\ Q_z &= \xi^\mu \cdot P_\mu - e\Lambda = \xi^\mu \cdot P_\mu - e\frac{B_n}{2}y = P_z - \frac{eB_n}{2}y, \\ Q_{rot} &= \xi^\mu \cdot P_\mu - e\Lambda = \xi^\mu \cdot P_\mu = cP_0 + \omega_0(yP_z - zP_y), \\ Q_\gamma &= \xi^\mu \cdot P_\mu - e\Lambda = \xi^\mu \cdot P_\mu = cP_0 + cP_x. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Notera att P_μ är den kanoniska rörelsemängden, så exempelvis är $P_0 = m\gamma c$ och $P_1 = -m\gamma v_x$, vilket medför att $Q_\gamma = c(mc\gamma - p_x)$. I figur 4.1 nedan visas en numerisk simulering över hur de fyra storheterna varierar över tid.



Figur 4.1: Figurer över de bevarade storheterna, Q_y , Q_z , Q_{rot} och Q_γ som funktion av tid, med fältstyrkorna $E_w = 10^7$ V/m och $B_n = 1$ T. Enligt simuleringen verkar samtliga storheter vara bevarade, bortsett från oscillationer i början av plotten.

Figur 4.1 visar att de fyra storheterna bevaras efter ca 0,1 sekunder, men att simuleringen oscillerar en del i början. Dessa oscillationer analyseras närmare i diskussionen 4.4.

4.3.1.1 Involution

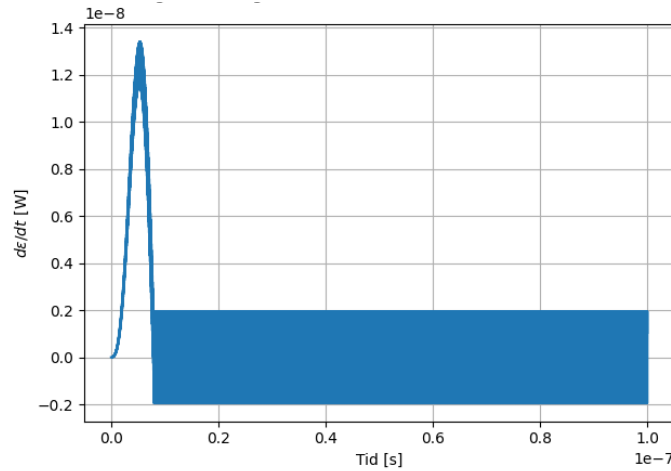
Enligt teorin i sektion 4.1.3 krävs en bevarad oberoende storhet i involution per frihetsgrad för att systemet ska vara integrerbart. Rörelseekvationen för en elektron har tre frihetsgrader, vilket innebär att tre storheter behövs. Tidigare uträkningar har funnit fyra bevarade storheter, med följande Poisson-brackets,

$$\begin{aligned} \{Q_y, Q_z\} &= eB_n, \\ \{Q_y, Q_{rot}\} &= -\omega_0 Q_z, \\ \{Q_z, Q_{rot}\} &= \omega_0 Q_y, \\ \{Q_\gamma, Q_y\} &= \{Q_\gamma, Q_z\} = \{Q_\gamma, Q_{rot}\} = 0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

(se beräkning i appendix A.3.3). Q_γ är därmed i involution med de tre andra storheterna, men ingen av de resterande tre är i involution med varandra. Det största antalet oberoende storheter i involution är två, vilket innebär att det här systemet inte är integrerbart. Rörelseekvationen går därför inte att lösa analytiskt.

4.3.2 Jämviktsläge

För att kunna göra systemet integrerbart behövs ännu en oberoende storhet i involution med de andra. Vi undersöker jämviktsläget, för att försöka åstadkomma detta. Där är energin per definition konstant, $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$. Energin $Q_\mathcal{E} = P_0$ blir därmed den tredje bevarade storheten. Figur 4.2 nedan visar en simulering av systemet där energin faktiskt bevaras.



Figur 4.2: Energiöverföring från den elektromagnetiska vågen till elektronen, med fältstyrkorna $E_w = 10^7$ V/m och $B_n = 1$ T. Figuren visar en initial ”kulle” med positiv energiöverföring, alltså att elektronen tar upp energi från vågen. Denna avtar sedan och övergår till en tät och kraftig oscillation kring 0-punkten.

Simuleringen i figur 4.2 visar energiöverföringen från vågen till elektronen (eftersom det konstanta magnetfältet inte utför något arbete). Initialt tar elektronen upp energi och därmed accelereras. Efter ett tag når elektronen jämviktsläget med bevarad energi. De kraftiga oscillationerna analyseras i diskussionen 4.4.

Vi kan även visa att $Q_{\mathcal{E}}$ är i involution med alla fyra tidigare nämnda storheter,

$$\{Q_{\mathcal{E}}, Q_y\} = \{Q_{\mathcal{E}}, Q_z\} = \{Q_{\mathcal{E}}, Q_{rot}\} = \{Q_{\mathcal{E}}, Q_{\gamma}\} = 0, \quad (4.18)$$

(se beräkning i appendix A.3.3). Därför går det att skapa en grupp med tre oberoende storheter i involution: $Q_{\mathcal{E}}$, Q_{γ} samt en av de tre övriga, Q_y , Q_z eller Q_{rot} . Alltså kommer systemet endast kunna vara integrerbart i jämvikt. Därför är det endast i jämviktsläge som elektronens rörelse kan beskrivas analytiskt.

Vi vill undersöka om det verkligen stämmer att systemet endast är integrerbart i jämvikt. Därför börjar vi med att försöka lösa rörelseekvationen (4.1) utan att anta att vi befinner oss i jämviktsläget. Utifrån den cirkulära geometrin på fälten görs ansatsen

$$p_y = p_{\perp} \cos \phi, \quad p_z = p_{\perp} \sin \phi. \quad (4.19)$$

Rörelseekvationens tre komponenter kan utifrån denna ansats skrivas som

$$\begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = 0, \\ \frac{dp_y}{dt} = -p_{\perp} \frac{d\phi}{dt} \sin \phi, \\ \frac{dp_z}{dt} = p_{\perp} \frac{d\phi}{dt} \cos \phi, \end{cases} \quad (4.20)$$

(se uträkning i appendix A.3.4) där $\frac{d\phi}{dt} = \omega_0(1 - \frac{v_{\parallel}}{c})$ och $p_{\perp} = -\frac{qE_w(1 - \frac{v_{\parallel}}{c})}{\frac{qB_n}{\gamma m} + \omega_0(1 - \frac{v_{\parallel}}{c})}$. Denna lösning är inte fullständig, eftersom den ger ett uttryck för $\frac{d\vec{p}}{dt}$, och inte för $\vec{p}$. För

att få en fullständig lösning krävs det att vi använder att $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$ i jämviktsläget. Genom att använda definitionen av relativistisk energi $\mathcal{E}^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$, och sätta $\mathcal{E}$ konstant, får vi ut att

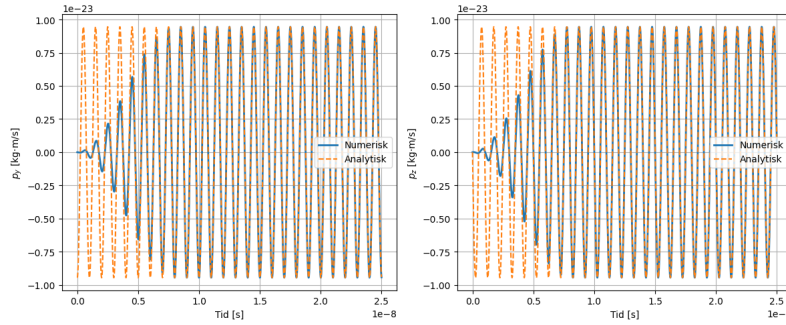
$$p_y \sin \phi = p_z \cos \phi, \quad (4.21)$$

(se beräkning i appendix A.3.4).

Genom att sätta in kravet (4.21) i ekvationerna (4.20), får vi den fullständiga lösningen till rörelseekvationen,

$$\begin{cases} p_x = \text{konstant}, \\ p_y = p_\perp \cos \phi = -\frac{qE_w(1 - \frac{v_\parallel}{c})}{\frac{qB_n}{\gamma m} + \omega_0(1 - \frac{v_\parallel}{c})} \cos \phi, \\ p_z = p_\perp \sin \phi = -\frac{qE_w(1 - \frac{v_\parallel}{c})}{\frac{qB_n}{\gamma m} + \omega_0(1 - \frac{v_\parallel}{c})} \sin \phi. \end{cases} \quad (4.22)$$

Denna lösning uppfyller ansatsen i (4.19). I figur 4.3 nedan visas en simulering av elektronens rörelsemängd, jämfört med den analytiska lösningen.



Figur 4.3: Jämförelse av de numerisk beräknade och de analytiskt beräknade transversella rörelsemängderna $p_\perp$ i jämviktsläget, med fältstyrkorna $E_w = 10^7$ V/m och $B_n = 1$ T.

Figur 4.3 visar att det simulerade jämviktsläget överensstämmer med det analytiska. Notera att avvikelserna i början beror på rampfunktionen som diskuteras i 2.2.

4.3.3 Resonans

Lösningen (4.22) till rörelseekvationen har ett problem, nämligen om B_n och ω_0 har rätt proportioner, kan nämnaren i p_y och p_z bli 0. Det skulle ge starkt växande rörelsemängder i de riktningarna. Detta tillstånd kallas resonans.

Vi kan undersöka fenomenet närmare genom att definiera vinkelfrekvenser för vågen och det konstanta magnetfältet. Gyrofrekvensen ω_g är partikelns rotationsfrekvens i det konstanta magnetfältet, och definieras som $\omega_g = -\frac{qB_n}{\gamma m} = \frac{eB_n}{\gamma m}$. En partikel som färdas i samma riktning som vågen "upplever" en annan frekvens än

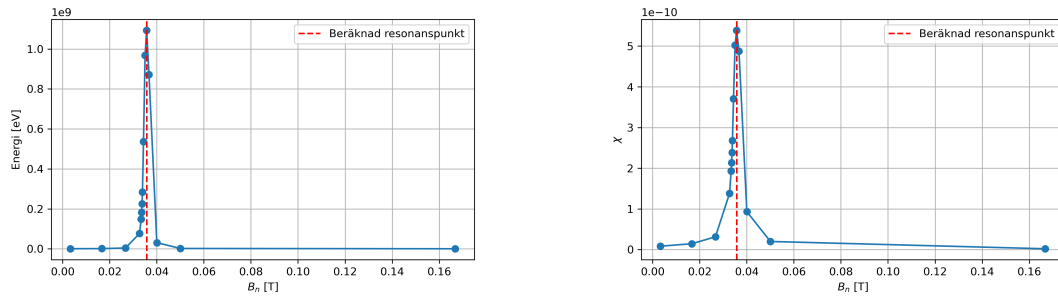
vågens ursprungliga ω_0 . Vågens oscillationer passerar då långsammare förbi partikeln. Elektronens ”upplevda” frekvens blir då $\omega' = \omega_0(1 - \frac{v_{\parallel}}{c})$, vilket kallas den dopplerskiftade frekvensen.

Vi sätter in dessa definitioner i uttrycket för den transversella rörelsemängden,

$$p_{\perp} = -\frac{qE_w(1 - \frac{v_{\parallel}}{c})}{-\omega_g + \omega'}, \quad (4.23)$$

och noterar att resonans sker då $\omega_g = \omega'$.

I resonans upplever elektronen en konstant kraft som accelererar den mot en oändlig energi. Enligt definitionen av kvantparametern χ (3.5), går $\chi \rightarrow \infty$ eftersom $\gamma = \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \rightarrow \infty$. En simulering av både χ och energin syns i figur 4.4.



Figur 4.4: Energi och kvantparametern χ för olika B_n , med $E_w = 10^7$ V/m. Den beräknade resonanspunkten kommer från det analytiska resultatet $B_n = \omega_0 \frac{\gamma m}{-q} (1 - \frac{v_x}{c})$, där parametervärdena från de numeriska simuleringarna har använts.

I resonansstillståndet antas de fyra storheterna i (4.16) fortfarande vara bevarade, medan energin inte är bevarad. Utifrån detta antagande kan vi beräkna att partikelns hastighet i x -led blir

$$v_x = c(1 - \frac{Q_{\gamma}}{P_0}) \rightarrow c, \quad (4.24)$$

(se beräkningar i appendix A.3.5), vilket betyder att partikeln accelereras till ljusets hastighet längs denna axel.

I dessa förhållanden kan vi se att både den dopplerskiftade frekvensen och gyrofrekvensen går mot 0,

$$\omega' = \omega_0(1 - \frac{v_x}{c}) \rightarrow 0, \quad \omega_g = -\frac{qB_n}{\gamma m} \rightarrow 0. \quad (4.25)$$

4.4 Diskussion

I fallet med ett cirkulärpolariserad våg och ett konstant magnetfält rör sig elektronen i en helix-liknande rörelse längs x -axeln (se förstabladdssidan för en illustration). De symmetrier som funnits anses vara logiska för systemet. Translation i y - och z -led är symmetrier eftersom fälten inte har något beroende i de leden, medan translation i x -led inte är en symmetri på grund av fasens beroende av x : $\phi = \omega_0(t - \frac{x}{c})$. Den ljuslika

translationen ξ_γ motsvarar att flytta elektronen i tid och x -led samtidigt. Denna förflyttning följer fasen, vilket gör den till en symmetri. Rotationen ξ_{rot} motsvarar att rotera elektronen runt x -axeln samtidigt som en tidsförskjutning, vilket liknar den helix-liknande rörelsen. Den är därför också en symmetri.

Simuleringen i figur 4.1 oscillerar mycket i början. Men detta tros bero på numeriska fel eftersom oscillationerna är små (storleksordning 10^{-13} samt 10^{-22}). Dessutom verkar de endast existera i början av simuleringen, och man kan tänka sig att det tar ett tag för simuleringen att stabilisera sig. Förklaringen kan finnas i den numeriska metoden. Initialt sätts rörelsemängden och positionen till 0 vid samma tidssteg, då de i metoden egentligen ska vara ett halvt steg förskjutna är det rimligt att de hamnar ur fas i början innan de etablerar sig rätt. En annan förklaring kan vara att en ändlig numerisk upplösning användes för att simulera en kontinuerlig rörelse. Alltså anses det vara försvarbart att anta att fyra storheter alltid är bevarade.

Det kombinerade fallet är en utvidgning av de två enklare fallen, men vi kan fortfarande se spåren av dem i resultatet. Undersök ekvation (4.17) som beskriver Poisson-brackets för Q_y och Q_z . Om vi sätter $B_n = 0$ ser vi att $\{Q_y, Q_z\}$ är i involution. Detta skulle innebära att även utan Q_ε från jämviktsläget, finns tre bevarade storheter i involution: Q_y , Q_z och Q_γ . Detta skulle resultera i att rörelseekvationen är integrerbar även utanför jämviktsläget, vilket stämmer med vad vi ser för det enkla fallet med en cirkulärpolariserad våg.

Vi ser även att om vi sätter $B_n = 0$ i lösningen (4.22) får vi ut de rörelsemängder vi fick som resultat för det enkla fallet med en cirkulärpolariserad våg (A.2). Om $E_w = 0$ istället blir $p_y = p_z = 0$, vilket speglar det enkla fallet med konstant magnetfält som kräver att elektronen accelereras först.

Figur 4.2 visar en initial "kulle" av positiv energiöverföring från vågen till elektronen. Detta beror på att elektronen måste accelereras upp, vilket kräver energi från vågen, innan den tillslut finner sig i jämviktsläget. De kraftiga oscillationerna i simuleringen är så täta att de ser ut som ett tjockt band. Dessa kan uppstå eftersom energiöverföringen är proportionell mot $\vec{v} \cdot \vec{E}$, alltså vinkeln mellan hastigheten och energin. Därför kan oscillationer uppstå när fasen mellan dessa ändras. Eftersom oscillationerna sker kring 0-läget blir netto-energiöverföringen ändå 0, och slutsatsen dras att vi befinner oss i jämviktsläge.

Figur 4.4 indikerar att både energin och kvantparametern går mot oändligheten vid resonans. Notera dock att plotten egentligen visar ett ändligt värde, men slutsatsen efter att ha simulerat länge är att det finns en asymptot där. Något mer att notera om resonansen är att den verkar kunna bibehålla sig själv, trots att energin går mot oändligheten och elektronen rusar obegränsat i x -led. Det illustreras i ekvation (4.25) när både ω' och ω_g går mot 0. En noll-värdig vinkelfrekvens indikerar att elektronen nästan slutar rotera rörelsen kring x -axeln utan "fryser fast" vid en viss fas.

Att en elektron skulle accelerera mot oändlig energi är ofysikaliskt. I ett mer realistiskt system krävs därför ett utlopp för denna energi, exempelvis i form av strålning. Notera att kvantparametern beskriver hur mycket kvanteffekter, exempelvis strålning, som sker. När χ blir mycket stort vid resonansläget, kan detta tolkas som att systemet "vill" stråla ut energin.

5

Strålningsdämpning

I magnetosfären hos neutronstjärnor finns det ett flertal fysikaliska processer som påverkar partiklarnas rörelsebana. En av dessa är strålningsdämpning, som uppstår när laddade accelererade partiklar sänder ut elektromagnetisk strålning. Det leder till energiförlust och ger upphov till en reaktionskraft på partiklarna, som påverkar deras rörelse [16]. Rörelseekvationerna för fallet som tar hänsyn till strålningsdämpning beskrivs enligt

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \left(\vec{E}_w + \vec{v} \times (\vec{B}_w + \vec{B}_n) \right) - \frac{2\alpha}{3} \frac{mc}{\tau_C} \chi^2 g(\chi) \hat{p}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{\vec{p}}{\gamma m}, \quad (5.1)$$

där den andra termen i första ekvationen ovan representerar strålningsreaktionen, där $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ är finstrukturkonstanten, $\tau_C = \frac{\hbar}{mc^2}$ är Comptontiden. Gaunt-faktorn $g(\chi)$ beskriver kvantkorrigeringen enligt

$$g(\chi) \approx [1 + 4.8(1 + \chi)\ln(1 + 1.17\chi) + 2.44\chi^2]^{-\frac{2}{3}}. \quad (5.2)$$

5.1 Teori

Nedan presenteras ett möjligt jämviktsläge där strålningen försvinner, samt skillnaden mellan klassisk och kvantmekanisk strålningsdämpning.

5.1.1 Klassisk och kvantmekanisk strålningsdämpning

Enligt klassisk teori resulterar strålningsdämpningen från att elektronen sänder ut en kontinuerlig ström av elektromagnetisk strålning. Eftersom det inte finns några begränsningar på energin, kan även vinkelfrekvensen ω vara godtyckligt stor [16].

Men enligt kvantmekanisk teori kan strålningen endast lämna elektronen i form av en foton med energin

$$E_{foton} = \hbar\omega. \quad (5.3)$$

Hela fotonens energi måste komma från en enskild elektron, och kan inte överstiga elektronens energi, $E_\gamma < E_e$. Där $E_e = \gamma mc^2$ är elektronens energi. Det sätter en övre gräns på vinkelfrekvensen,

$$\omega_{max} = \frac{\gamma mc^2}{\hbar}, \quad (5.4)$$

[16]. Det innebär att elektronen upplever diskreta slumpmässiga rekyler av energiförlust, istället för den kontinuerliga strömmen från klassisk teori.

Notera att den klassiska strålningen kan ses som en förenkling av den kvantmekaniska. Utgå från den kvantmekaniska beskrivningen och låt $\hbar \rightarrow 0$, vilket resulterar i att rekyl per "foton" blir $\Delta E_e = -E_\gamma \rightarrow 0$ [16]. Detta kompenseras med att antalet fotoner, $N_\gamma \propto \frac{1}{\hbar} \rightarrow \infty$. Vilket ger en kontinuerlig ström av strålning vars sammanlagda rekyl är obegränsad gällande vinkelfrekvens, alltså den klassiska strålningen.

Skillnaderna mellan den klassiska och kvantmekaniska teorin syns tydligt i emissionsspektrumet, vilket är det spektrum av strålning elektronen avger. Den sammanlagda effekten av strålningen $P_{tot} = \frac{E_{tot}}{t}$ kan beskrivas som

$$P_{tot} = \int_0^\infty \frac{dP}{d\omega} d\omega. \quad (5.5)$$

Hur mycket den kvantmekaniska effekten P_q och klassiska effekten P_{cl} skiljer sig åt kan kvantifieras med Gaunt-faktorn [16],

$$g(\chi) = \frac{P_q}{P_{cl}} \approx [1 + 4.8(1 + \chi)\ln(1 + 1.17\chi) + 2.44\chi^2]^{-\frac{2}{3}}, \quad (5.6)$$

där approximation har en 2% osäkerhet för valfritt χ .

5.1.2 Radiation-free direction

Den strålning som skickas ut av elektronen ger en antiparallell rekyl-kraft gentemot partikelns momentana rörelsemängd, så att $\vec{F}_{strål} \parallel -\vec{p}_e$ [16]. Den utskickade strålningen orsakar en bromsande kraft på elektronen i den riktningen. Strålningens styrka (se ekvation (5.1)) beror på parametern χ , där ett högre χ innebär högre strålning. Enligt definitionen av χ (3.5) är det ett mått på tväraccelerationen $\vec{a}_\perp \perp \vec{p}_e$. Alltså ju mer elektronen strålar desto mer rörelsemängd tappas i den riktningen, så att elektronen söker sig mot en riktning där strålningen är 0. Detta sker då $\chi = 0$ och detta tillstånd kallas *radiation-free direction*, RFD.

5.2 Numerisk metod

För att analysera fallet med strålningsdämpning, användes både analytiska beräkningar och numeriska metoder. Vid de numeriska simuleringarna användes samma metod som i avsnitt 4.2 men på grund av att beräkningarna blir tyngre när strålningsdämpningen tas hänsyn till sänktes antal steg per vågperiod till 300. Antal steg per gyroperiod behölls men inga simuleringar kördes när magnetfältet från stjärnan dominerade. Simuleringarna gjordes för en elektron som påverkas av de kombinerade fälten med strålningsdämpning under tiden 10^{-4} s. För att se detaljerad beskrivning av den numeriska metoden se avsnitt 2 och appendix B.

5.3 Resultat

Nedan undersöks när tillräckligt många storheter bevaras för att systemet ska vara integrerbart, en lösning av rörelseekvationerna för RFD, samt en beräkning av

skillnaden på energiöverföring för klassisk och kvantmekanisk strålningsdämpning.

5.3.1 Bevarade storheter

Elektronens rörelseekvation med strålningsdämpning i (5.1) kan skrivas som

$$m\ddot{x}^\mu = eF^{\mu\nu}\dot{x}_\nu + f_{strål}^\mu. \quad (5.7)$$

Likt teorin i sektion 4.1.2 resulterar denna nya rörelseekvation i villkoret för en bevarad storhet

$$\frac{d}{d\tau}(\xi^\mu \cdot P_\mu - e\Lambda) = \xi_\mu \cdot f_{strål}^\mu. \quad (5.8)$$

Observera att om $f_{strål}^\mu = \vec{0}$ är denna ekvation identisk med ekvation (4.10). Men skillnaden är nu att Q_ξ endast är bevarad om $\xi_\mu \cdot f_{strål}^\mu = 0$. Vi undersöker tillägget på kraften från strålningsdämpningen,

$$f_{strål}^\mu = -\frac{2\alpha}{3} \frac{mc}{\tau_C} \chi^2 g(\chi) \hat{p}^\mu \quad (5.9)$$

(notera att $f_{strål}^\mu$ är en fyrdimensionell uppskattning av $\vec{F}_{strål}$). Om vi applicerar kravet $\xi_\mu \cdot f_{strål}^\mu = 0$ på en tidigare bevarad storhet, exempelvis för den ljuslika translationen Q_γ , får vi ut att

$$\xi_\mu \cdot f_{strål}^\mu \propto (c, -c, 0, 0) \cdot \chi^2 (c, v_x, v_y, v_z) = c(c - v_x)\chi^2. \quad (5.10)$$

Alltså kan denna storhet Q_γ endast vara bevarad om antingen $\chi = 0$ eller $v_x = c$. Vi ska nu undersöka dessa alternativ. Faktumet att elektronen har en massa innebär att dess hastighet måste vara mindre än ljusets hastighet, $v_{elektron} < c$. Vid $\chi = 0$ är strålningsdämpningen obefintlig, $f_{strål}^\mu = \vec{0}$, och vi befinner oss i RFD. Slutsatsen kan då dras att ingen av dessa fall är möjliga vid icke-noll strålningsdämpning. Alltså är Q_γ ej bevarad för fallet med befintlig strålningsdämpning.

Enligt teorin från föregående kapitel, hade förlusten av denna bevarade storhet inneburit att systemet inte längre är integrerbart. Alltså bör det inte finnas en lösning för rörelseekvationen (5.1) givet att $\vec{F}_{strål} \neq \vec{0}$.

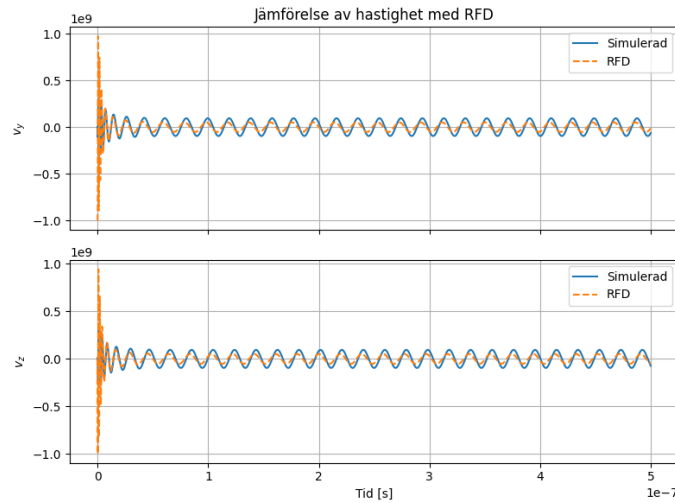
5.3.2 Radiation-free direction

Om $\vec{F}_{strål} = \vec{0}$, det vill säga att vi befinner oss i RFD, bör systemet vara integrerbart eftersom Q_γ är bevarad enligt ekvation (5.8).

Genom att sätta $\chi = 0$ i kvantparameterns definition (3.5), får vi ut en lösning för hastigheten (se uträkning i appendix A.4.1) som vi sedan kan jämföra med en numerisk simulering,

$$v_y = -\frac{E_w}{B_n} \left(1 - \frac{v_x}{c}\right) \cos \phi, \quad (5.11)$$

$$v_z = -\frac{E_w}{B_n} \left(1 - \frac{v_x}{c}\right) \sin \phi. \quad (5.12)$$



Figur 5.1: Figuren visar en jämförelse mellan elektronens simulerade rörelse och den analytiskt framräknade RFD. Simuleringen kördes för kvantmekanisk strålningsdämpning med $E_w = 10^{13}$ V/m och $B_n = 10^4$ T.

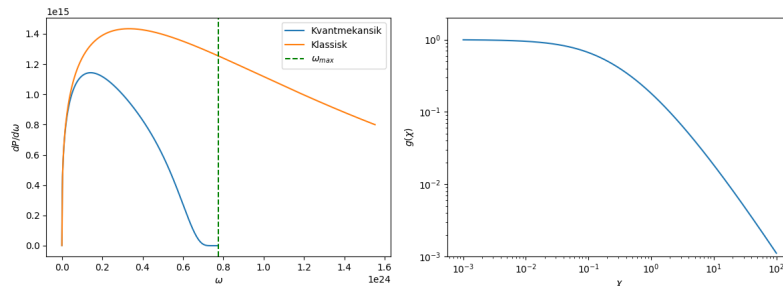
Figur 5.1 visar att elektronens rörelsebana inte helt verkar överensstämja med RFD. Detta resultat diskuteras närmare i diskussionen 5.4.

5.3.3 Klassisk och kvantmekanisk strålningsdämpning

Teorin i avsnitt 5.1.1 säger att den kvantmekaniska teorin skall gå att förenkla till den klassiska teorin. Det sker genom att sätta $g(\chi) = 1$ i rörelseekvationen (5.1). Då försvinner kraftens beroende på Plancks konstant, $\hbar$ (se beräkning i appendix A.4.2). Eftersom $\hbar$ är en kvantmekanisk konstant, blir kraften $\vec{F}_{strål}$ kompatibel med klassisk teori. Figur 5.2 visar att detta tillstånd sker när $\chi \ll 1$.

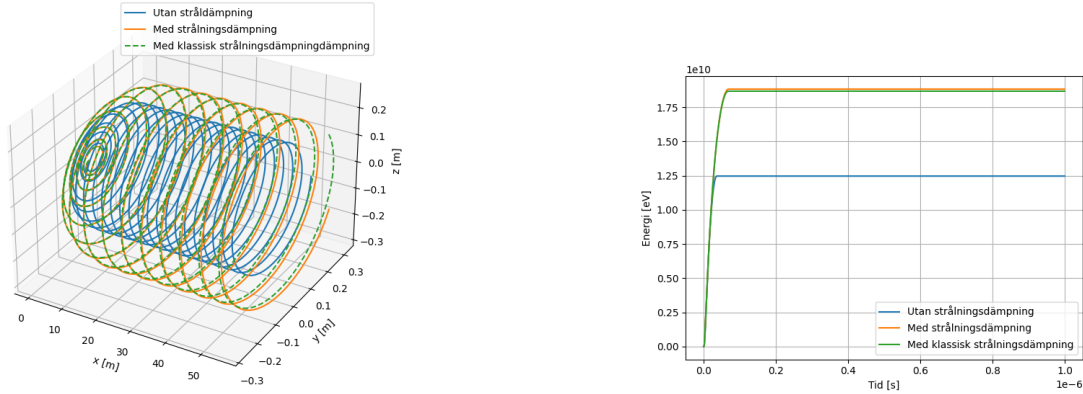
Figur 5.2 visar även att när $\chi \geq 1$ är $g(\chi) < 1$. En omskrivning av (5.6), $P_q = g(\chi)P_{cl}$, visar att detta skulle resultera i att $P_q < P_{cl}$. Alltså att när kvantparametern är tillräckligt stor bör den kvantmekaniska effekten vara mindre än den klassiska. Vi betraktar den vänstra plotten för att ta reda på om detta stämmer.

Som beskrivs i sektion 5.1.1 förutspår teorin att den kvantmekaniska teorin skall ha en övre begränsning på vinkelfrekvensen, alltså att $\frac{dP_q}{d\omega} = 0$ för $\omega \geq \omega_{max}$, medan klassisk teori saknar begränsning. Detta är vad som illustreras i figuren nedan.



Figur 5.2: (Vänster) Jämförelse mellan klassisk och kvantmekanisk $\frac{dP}{d\omega}$, där $\chi = 1$ och $\gamma = 1000$. (Höger) Påverkan av kvantparametern χ på Gaunt-faktorn $g(\chi)$.

Det faktum att simuleringen visar att $P_{cl} > P_q$, säger oss att den klassiska teorin ger en större strålad effekt än vad den kvantmekaniska teorin gör. Det illustreras i figur 5.3 genom att visa en simulering som jämför de olika fallen, utan strålningsdämpning, med kvantteoretisk strålningsdämpning och klassisk strålningsdämpning.



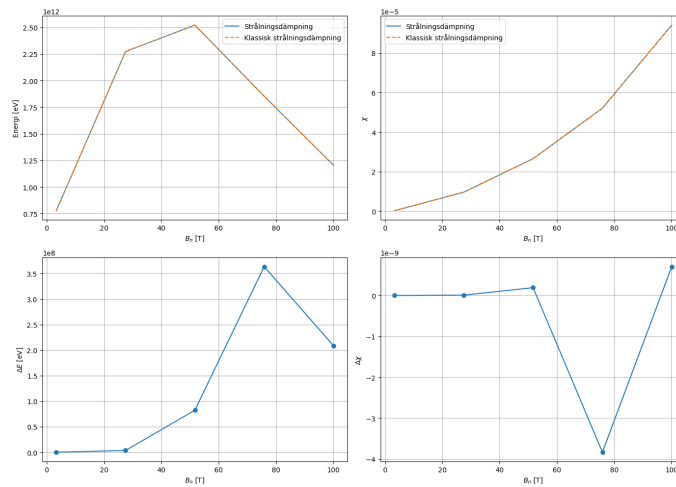
Figur 5.3: (Vänster) Rörelsebanan för elektronen i en elektromagnetisk våg och ett statiskt magnetfält för olika fall av strålningsdämpning. (Höger) Energi för elektronen i respektive fall. Simuleringar gjordes med $E_w = 10^{13}$ V/m och $B_n = 10^4$ T.

Simuleringarna visar hur tillägget av strålningsdämpning höjer elektronens energi och ökar rotationsradien. Det kan anses kontraintuitivt eftersom elektronen strålar ut energi vid strålningsdämpning. Detta analyseras närmare i diskussionen 5.4.

Simuleringarna visar även skillnaden på klassisk och kvantmekanisk strålningsdämpning. Den klassiska strålningsdämpningen leder till en lägre energi och en mer dämpad rörelsebanan, vilket stämmer med resultatet $P_{cl} > P_q$.

5.3.4 Energi och χ

Figur 5.4 visar hur storleken av B_n påverkar energin och kvantparametern numeriskt.



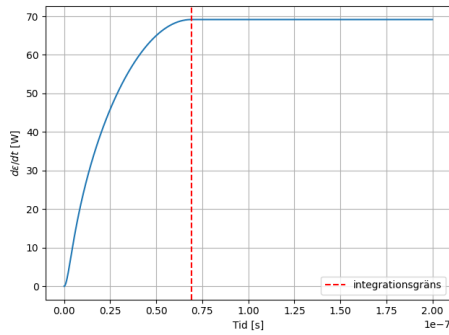
Figur 5.4: De två övre figurerna visar påverkan av B_n på energin och kvantparametern. De två nedre visar påverkan av B_n på skillnaden mellan det kvantmekaniska och det klassiska fallet, $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_q - \mathcal{E}_{cl}$ och $\Delta\chi = \chi_q - \chi_{cl}$.

I delfiguren som visar energin syns ett maximum vid $B_n \approx 50$ T. Det kan tolkas som en resonanspunkt, alltså när vågen och magnetfältet är synkroniserade på ett sätt som accelererar elektronen kraftigt. Det syns att den klassiska och kvantmekaniska strålningsdämpningen är mycket lika, men att skillnaden ökar med B_n och att den verkar nå ett maximum. I delfiguren som visar kvantparametern, syns att den ökar med B_n , och att skillnaden mellan klassisk och kvantmekanisk strålningsdämpning är liten. Skillnaderna i kvantparameter når ett minimum, vid ungefär samma fältstyrka som energin har sitt maximum, $B_n \approx 75$ T.

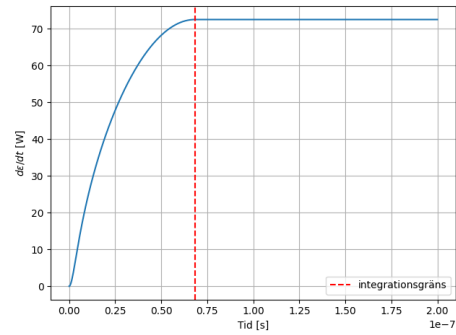
Energiöverföringen från vågen till elektronen beskrivs fortfarande som

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q \vec{v} \cdot \vec{E}. \quad (5.13)$$

Denna energiöverföring kan nu simuleras för det kvantmekaniska och klassiska fallet.



(a) Kvantmekaniskt fall



(b) Klassiskt fall

Figure 5.5: Energiöverföring för kvantmekaniskt respektive klassiskt fall vid $E_w = 10^{13}$ V/m och $B_n = 10^4$ T. $\Delta\mathcal{E}$ beräknades genom att ta integralen mellan $t = 0$ och integrationsgränsen (en motivering finns i diskussionen 5.4). (a) För det kvantmekaniska fallet erhöles en energiöverföring $\Delta\mathcal{E} = 3,356 \cdot 10^{-6}$ J och elektronen hann färdas 18,29 m i x -led. Integrationsgränsen är vid $6,9 \cdot 10^{-8}$ s. (b) För det klassiska fallet erhöles $\Delta\mathcal{E} = 3,458 \cdot 10^{-6}$ J och elektronen hann färdas 18,07 m i x -led. Integrationsgränsen är vid $6,827 \cdot 10^{-8}$ s.

Utifrån simulering får vi ut att den totala energiöverföringen $\Delta\mathcal{E}$ beräknas till $\Delta\mathcal{E}_q = 3,356 \cdot 10^{-6}$ J respektive $\Delta\mathcal{E}_{cl} = 3,458 \cdot 10^{-6}$ J, för det kvantmekaniska respektive klassiska fallet.

I det enkla fallet med endast en våg, kunde energitätheten bestämmas till (se uträkning i appendix A.1.4),

$$u_{våg} = E_w^2 \epsilon_0, \quad (5.14)$$

där ϵ_0 är vakuumperrmittiviteten. Detta uttryck kan även användas här, eftersom vi endast är intresserade av att veta hur mycket energi vågen (inte det konstanta magnetfältet) ger till elektronen.

Elektrontätheten beskriver den täthet av elektronen som krävs för att absorbera hela energin hos den cirkulärpolariserade vågen. Den beskrivs av formeln,

$$n_e = \frac{u_{våg}}{\mathcal{E}_k} = \frac{E_w^2 \epsilon_0}{\Delta\mathcal{E} - mc^2}, \quad (5.15)$$

med $\mathcal{E}_k$ den kinetiska energin hos elektronen. Genom att använda energiöverföringen från simuleringen i figur 5.5, kan elektrontätheten beräknas i det klassiska fallet $n_{cl} = 2,56 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$ och i det kvantmekaniska fallet $n_q = 2,64 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$.

5.4 Diskussion

En omskrivning av villkoret för en bevarad storhet gav slutsatsen att storheter endast är bevarade om $\xi_\mu \cdot f_{strål}^\mu = 0$. Vi kom fram till att det inte finns någon analytisk lösning givet att det förekom strålning. Det stämmer överens med resultatet från förra kapitlet, där det fanns en lösning för jämviktsläget (och strålningen såklart var obefintlig). Men det finns flera fall som saknar strålning, *radiation-free direction*, samt om elektronen skulle stanna helt. Figur 5.1 illustrerar att elektronen i vår simulering inte verkar nå RFD, även efter längre simuleringar än de som visas i figuren. Detta kan bero på många saker. Notera att RFD är en asymptotisk gräns som elektronen söker sig mot när $t \rightarrow \infty$. Vi kan även notera att perioderna på oscillationerna överensstämmer ganska väl. Det går alltså inte att dra slutsatsen att RFD aldrig kommer nås.

Simuleringen i figuren 5.3 visar att elektronens energi ökar när vi tar hänsyn till strålningsdämpning. Enligt artikeln [17] kan detta bero på begynnelsevillkoren. Om partikeln börjar i vila ger vågen en positiv energiöverföring till elektronen. Kortfattat kan sägas att detta beror på att elektronen absorberar energi och rörelsemängd i x -led medan den strålar i alla riktningar. Därför blir mer rörelsemängd kvar i x -led, än vad som strålas ut, vilket resulterar i framdrivande rörelse och ökad energi. Eftersom elektronen i simuleringen börjar från vila, stöds resultatet av artikeln.

Resultaten kring kvantparametern visar att när $\chi \ll 1$ sammanfaller den klassiska och kvantmekaniska teorin. Medan den klassiska och kvantmekaniska effekten P börjar skilja sig betydligt när $\chi \geq 1$. Det överensstämmer med tidigare teori att χ beskriver hur mycket vi bör ta hänsyn till kvanteffekter.

Spetsen som syns när vi visualiserar energi gentemot B_n (se figur 5.4) speglar tydligt resonanspunkten i förra kapitlet. Den stora skillnaden är att utan strålningsdämpning går energin i resonanspunkten mot oändligheten, medan med strålningsdämpning är ökningen i energi begränsad. Det kan förklaras med att elektronen strålar ut energin, istället för att behålla den. Notera även att kvantparametern χ inte har en topp i resonanspunkten, olikt i förra kapitlet.

I figur 5.4 syns också hur simuleringarna i det kvantmekaniska och klassiska fallen överlappar. Det kan bero på att vi endast simulerar 10^{-4} sekunder, därför verkar det troligt att de separerar mer om vi simulerar en längre tid. Figurerna under visar hur mycket de faktiskt skiljer sig åt. I dessa syns en topp kring samma B_n för både energi och χ . I extrempunkterna runt $B_n = 75 \text{ T}$ är $\mathcal{E}_q > \mathcal{E}_{cl}$ och $\chi_q < \chi_{cl}$, vilket tyder på att just den punkten är väldigt känslig för kvanteffekter som strålningsdämpning. Varför toppen är runt just $B_n = 75 \text{ T}$ är svårt att avgöra.

Viktigt att notera är att extrempunkterna i figur 5.4 inte är exakt lokaliserade, vi har alltså inte tillräckligt många simulerade punkter för att veta exakt var extrempunkten är. En exakt lokalisering ansågs inte relevant eftersom det inte finns någon analytisk lösning att jämföra simuleringen med, då vi bevisat att systemet ej är integrerbart.

Beräkningen av energiöverföring $\Delta\mathcal{E}$ som gjordes utifrån simuleringarna i figur 5.5 är menad att vara approximativ. Figuren visar hur energiöverföringen till elektronen ökar och blir konstant. Systemet faller sedan i en form av jämviktsläge mellan positiv energiöverföring från vågen och negativ energiöverföring från strålningsdämpning, där den positiva är starkare. Systemet är en approximativ modell av magnetosfären, som inte tar hänsyn till att varken magnetfältets eller vågens styrka minskar. Därför beräknar vi endast energiöverföringen fram tills jämviktsläget är nått, alltså vid integrationsgränsen. Detta innebär i att den totala energiöverföringen $\Delta\mathcal{E}$ endast är en uppskattning, vilket resulterar i att den uträknade elektrontätheten n_e också är uppskattning.

Notera att elektrontätheterna $n_{cl} \approx 10^{20} \text{ m}^{-3}$ och $n_q \approx 10^{20} \text{ m}^{-3}$ är större än elektrontätheten för fallet med endast en våg, $n_v \approx 10^{16} \text{ m}^{-3}$. Ett tillagt magnetfält ökar energiupptagningen från vågen till elektronen, vilket bör resultera i att n_e är lägre. Eftersom energiupptagningen verkar vara högre med magnetfältet, verkar felet vara i beräkningen av elektrontätheten. I fallet med endast en våg beräknas den med en analytisk formel (se appendix A.1.4), medan energin i fallet med magnetfält beräknas med en simulering. Problemet kan vara att simuleringen beräknar hur elektronens energi förändras, vilket inkluderar strålningsdämpning och inte bara absorption av vågen.

6

Slutsats

I denna rapport har dynamiken för en elektron i olika fält undersökts. Inledningsvis analyserades två enkla fall, en cirkulärpolariserad våg och ett konstant magnetfält. Dessa sattes sedan ihop till ett kombinerat fall, som slutligen breddades genom att ta hänsyn till strålningsdämpning. Syftet med dessa fält var att spegla de elektromagnetiska miljöer som finns i plasman runt en neutronstjärna.

Med hjälp av analytiska beräkningar samt numeriska simuleringar kunde ett flertal resultat tas fram. Symmetrier användes för att analysera integrerbarheten hos elektronens rörelseekvation. De båda enkla fallen var alltid lösbara, medan det kombinerade fallet endast var lösbart i jämviktsläge. När icke-noll strålning togs hänsyn till blev systemet aldrig lösbart. Utifrån detta kunde elektronens rörelse genom fälten finnas vara helixliknande med varierande fasförändring och rotationsradie. Elektronens energi har undersökts, där intressanta fynd som en ofysikalisk extrempunkt mot oändligheten, ledde oss att vidare utveckla modellen genom att lägga till strålningsdämpning. Även kvantparameterns innebörd och påverkan har analyserats, där dess värde indikerar i vilken grad modellen bör ta hänsyn till kvanteffekter.

Genom alla dessa resultat jämfördes de analytiska och de numeriska lösningarna, där de för det mesta överensstämde. Det styrker vårt resultat, och talar för trovärdigheten för respektive metod.

Ett syfte med rapporten är att utforma uträkningar som kan tillämpas på verkliga observationer av neutronstjärnor. Ett exempel på detta är elektrontätheten n_e .

I rapporten har tre olika n_e beräknats, som beskriver hur stor elektrontäthet som hade behövts för att absorbera den totala energin i en FRB-våg, i respektive fall. I fallet där elektronen endast påverkas av en våg beräknades $n_e \approx 10^{16} \text{ m}^{-3}$. I fallet med strålningsdämpning, var både den klassiska och kvantmekaniska n_e av storleksordningen 10^{20} m^{-3} . Dessa värden kan jämföras med den verkliga elektrontätheten hos neutronstjärnor.

En approximation för den laddningstäthet som krävs för att motverka stjärnans elektriska fält (som roterar med kroppen) är $n_{GJ} \approx 10^{17}$. Detta kallas Goldreich–Juliantätheten [18]. Notera att dessa värden kan variera beroende på magnetfältets styrka samt rotationsperioden. Då laddningen beror på skillnaden i antal elektroner och positroner, blir elektrontätheten betydligt högre [18], approximativt $n_e \approx n_{GJ} \cdot 10^5 = 10^{22}$. Alltså många gånger högre. Utifrån denna analys bör neutronstjärnor med enkelhet absorbera energin i FRB-vågor. Men trots detta kan FRB observeras från jorden.

Denna korta analys tyder på att vår modell över elektroner i neutronstjärnan ej beskriver verkligheten och bör utvidgas. Utvecklingsförslag finns i avsnitt 6.2.

6.1 Numerisk diskussion

Den numeriska metoden som använder leapfrog-algoritmen kan betraktas som ett bättre alternativ än en metod som använder hela tidssteg. Detta eftersom position och rörelsemängd är förskjutna, vilket ökar noggrannheten. Däremot kvarstår numeriska fel som kan leda till oscillationer och eventuella felmarginaler, då man använder ändliga tidssteg för att approximera en kontinuerlig rörelse.

För att uppskatta storleken på de numeriska felen jämfördes först simuleringen av en ensam elektromagnetisk våg med den analytiska lösningen. För rörelsemängden beräknades felet som

$$e_p(t_i) = \|\mathbf{p}_{\text{num}}(t_i) - \mathbf{p}_{\text{ana}}(t_i)\|. \quad (6.1)$$

Det maximala absoluta felet i rörelsemängd blev $5,099 \cdot 10^{-22}$ kg m/s. Detta visar att tidssteget $\Delta t = 2,000 \cdot 10^{-12}$ s ger god noggrannhet för fallet med ensam våg.

Vid simuleringarna med strålningsdämpning användes ett större tidssteg, $\Delta t = 3,333 \cdot 10^{-12}$ s, för att minska beräkningstiden. För att undersöka hur mycket noggrannheten påverkades, jämfördes två simuleringar med samma fysikaliska parametrar, $E_w = 10^{13}$ V/m och $B_n = 10^3$ T, men med olika tidssteg. Eftersom tidpunkterna inte sammanföll modifierades referenslösningen till den grövre simuleringens tidpunkter. Skillnaden beräknades som

$$e_p(t_i) = \|\mathbf{p}_{\Delta t=3,333 \cdot 10^{-12}}(t_i) - \mathbf{p}_{\Delta t=2,000 \cdot 10^{-12}}(t_i)\|. \quad (6.2)$$

Den maximala absoluta skillnaden blev $3,919 \cdot 10^{-17}$ kg m/s. Skillnaden mellan de två upplösningarna var därmed liten, vilket tyder på att det grövre tidssteget inte påverkade resultaten i någon betydande grad för det undersökta fallet.

När det statiska magnetfältet är starkare än magnetfältet från den polariserade vågen blir frekvensen av elektronens rotationsrörelse mycket högre. Vilket kräver en högre upplösning. För att få en kontinuerlig och rimlig rörelse när magnetfältet blir starkt, behövs så många steg att analys av de fallen inte var möjliga i detta fall. Därmed har nästan endast fall när vågens magnetfält dominerar simulerats i det här arbetet.

Viktigt att notera är att Boris-push-algoritmen inte är en energibevarande metod för systemet. Detta kan resultera i att ett energifel ackumuleras över tid [19], och påverkar resultaten.

6.2 Vidare studier

I rapporten har magnetfältet betraktats som statiskt i magnetosfären men i verkligheten avtar fältets styrka med radien, enligt

$$B(r) \propto \frac{1}{r^3}, \quad (6.3)$$

när man betraktar det magnetiska fältet som en magnetisk dipol. Dessutom är inte densiteten konstant hos en neutronstjärna, vilket har antagits i rapporten. I vidare studier hade påverkan av dessa antaganden kunnat undersökas.

En annan möjlig vidareutveckling hade varit att undersöka under vilka fysikaliska förutsättningar elektronen når en *radiation-free direction*. Detta hade kunnat göras genom att analysera fler fältstyrkor, begynnelsevillkor och fler typer av strålningsdämpning. En sådan studie hade utvecklat förståelsen för plasman i neutronstjärnor.

Vid mer tid hade parbildning även kunnat studeras. Det vill säga, när energi omvandlas till materia genom att en foton skapar ett elektron-positron-par enligt

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+. \quad (6.4)$$

Den processen är relevant eftersom när en elektron accelereras och strålningsdämpning betraktas sänds fotoner ut från elektronen. I starka fält kan fotonerna bli tillräckligt energirika för att ge upphov till parbildning. Eftersom partiklarna även kan sända ut fotoner och skapa nya par blir det en kedjereaktion av parbildning. Det leder till att sambanden i hög grad blir icke-linjära när strålningsdämpning och parbildning betraktas. För att undersöka det skulle en utvidgning av Boris-push, så kallade PIC-simuleringar, kunna användas. Det skulle kunna bidra med en mer realistisk modell av neutronstjärnans magnetosfär, då fler av de verkliga processerna skulle inkluderas.

Litteratur

- [1] Paul Sutter. *Behold the Magnetar, nature's ultimate superweapon*. Juni 2022. URL: <https://arstechnica.com/science/2022/06/behold-the-magnetar-natures-ultimate-superweapon/>.
- [2] NASA. *Stars*. NASA. 2026. URL: <https://science.nasa.gov/universe/stars/> (hämtad 2026-05-10).
- [3] E. Petroff, J. W. T. Hessels och D. R. Lorimer. "Fast radio bursts at the dawn of the 2020s". I: *The Astronomy and Astrophysics Review* 30.2 (mars 2022). DOI: 10.1007/s00159-022-00139-w.
- [4] E. Petroff, J. W. T. Hessels och D. R. Lorimer. "Fast radio bursts". I: *The Astronomy and Astrophysics Review* 27.4 (2019). DOI: 10.1007/s00159-019-0116-6.
- [5] Andrei M. Beloborodov. "Untwisting Magnetospheres of Neutron Stars". I: *The Astrophysical Journal* 703.1 (sept. 2009), s. 1044–1060. DOI: 10.1088/0004-637X/703/1/1044.
- [6] Ivan Tomczak och Jérôme Pétri. *Particle motion in ultra-strong electromagnetic fields of neutron stars: The influence of radiation reaction*. Université de Strasbourg, juli 2023. DOI: 10.1051/0004-6361/202245028.
- [7] L. Brieda. *Leapfrog Particle Push (Velocity Integration)*. <https://www.particleincell.com/2011/velocity-integration/>. Particle In Cell Consulting LLC, 2011.
- [8] Brenton LeMesurier. *An Introduction to Multistep Methods: Leap-frog*. College of Charleston. URL: <https://lemesurierb.people.charleston.edu/introduction-to-numerical-methods-and-analysis-python/main/ODE-IVP-6-multi-step-methods-introduction.html> (hämtad 2026-05-14).
- [9] G Penn m.fl. "Boris push with spatial stepping". I: *Journal of physics G: Nuclear and particle physics* (juli 2003). URL: https://www.researchgate.net/publication/231086593_Boris_push_with_spatial_stepping.
- [10] Carl Nordling och Jonny Österman. *Physics Handbook for Science and Engineering*. Ninth. Lund: Studentlitteratur, 2020.
- [11] *Non-linear inverse Compton scattering*. Wikipedia. 2026. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Non-linear_inverse_Compton_scattering (hämtad 2026-02-12).
- [12] Janet Conrad. *4-Vectors and Lorentz Invariance*. U.S. Particle Accelerator School. 2012. URL: https://uspas.fnal.gov/materials/12MSU/Conrad_4vector.pdf (hämtad 2026-05-13).

- [13] Tom Heinzl och Anton Ilderton. “Exact Classical and Quantum Dynamics in Background Electromagnetic Fields”. I: *Physical Review Letters* 118 (11 mars 2017). ISSN: 0031-9007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.118.113202.
- [14] Martin Houde. *Covariant Formulation of Electrodynamics*. Department of Physics och Astronomy, University of Western Ontario. 2014. URL: https://physics.uwo.ca/~mhoude2/courses/PDF%20files/astro9620/Ch7-Covariant_formulation.pdf (hämtad 2026-05-13).
- [15] J. D. Jackson och L. B. Okun. “Historical roots of gauge invariance”. I: *Reviews of Modern Physics* 73 (3 sept. 2001), s. 663–680. ISSN: 0034-6861. DOI: 10.1103/RevModPhys.73.663.
- [16] T. G. Blackburn. “Radiation reaction in electron–beam interactions with high-intensity lasers”. I: *Reviews of Modern Plasma Physics* 4 (2020). ISSN: 2367-3192. DOI: 10.1007/s41614-020-0042-0.
- [17] A. Gonoskov m.fl. “Charged particle motion and radiation in strong electromagnetic fields”. I: *Reviews of Modern Physics* 94 (4 okt. 2022), s. 045001. ISSN: 0034-6861. DOI: 10.1103/RevModPhys.94.045001.
- [18] D.N. Sob’yanin. “Breakdown of the Goldreich–Julian relation in a neutron star”. I: *Astronomy Letters* (2016), s. 745–751. DOI: 10.1134/S1063773716110049.
- [19] Ernst Hairer och Christian Lubich. “Energy behaviour of the Boris method for charged-particle dynamics”. I: *BIT Numerical Mathematics* 58.4 (2018), s. 999–1018. DOI: 10.1007/s10543-018-0713-1. URL: <https://doi.org/10.1007/s10543-018-0713-1>.
- [20] Paul Gibbon. *Short Pulse Laser Interactions with Matter, An Introduction*. Imperial College Press, 2005.

A

Analytiska beräkningar

A.1 Elektromagnetisk våg

A.1.1 Beräkning av elektronens position

En partikel som rör sig i en elektromagnetisk våg har rörelsemängden

$$\begin{aligned}p_x &= mc \cdot \frac{a_0^2}{4} [1 + (2\delta^2 - 1) \cos 2\phi], \\p_y &= mc \cdot \delta a_0 \cos \phi, \\p_z &= mc \cdot (1 - \delta^2)^{1/2} a_0 \sin \phi,\end{aligned}\tag{A.1}$$

där a_0 är en normerad amplitud, δ är en polarisationsparameter och $\phi = \omega_0(t - \frac{x}{c})$ är fasen med vinkelfrekvensen ω_0 [20].

För en högercirkulärt polariserad våg är $\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Med $E_w = \delta \frac{a_0 \omega_0 m c}{e}$ och $B_w = \delta \frac{a_0 \omega_0 m}{e}$ fås uttrycket för elektronens rörelsemängd

$$\begin{aligned}p_x &= \frac{E_w^2 e^2}{2\omega_0^2 m c}, \\p_y &= \frac{E_w e}{\omega_0} \cos \phi, \\p_z &= \frac{E_w e}{\omega_0} \sin \phi.\end{aligned}\tag{A.2}$$

Från rörelsemängderna i (A.2), är hastigheterna i x -, y - och z - led

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{E_w^2 e^2}{2\gamma \omega_0^2 m^2 c}, \\v_y &= -\frac{q E_w}{\gamma m \omega_0} \cos \phi, \\v_z &= -\frac{q E_w}{\gamma m \omega_0} \sin \phi.\end{aligned}\tag{A.3}$$

Genom att integrera hastigheterna hittas partikelns position i varje riktning

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{E_w^2 e^2}{2\gamma\omega_0^2 m^2 c} t, \\y(t) &= -\frac{qE_w}{\gamma m\omega_0^2 (1 - \frac{v_{\parallel}}{c})} \sin \phi, \\z(t) &= \frac{qE_w}{\gamma m\omega_0^2 (1 - \frac{v_{\parallel}}{c})} \cos \phi.\end{aligned}\tag{A.4}$$

A.1.2 Beräkning av elektronens energi

Partikeln blir accelererad av vågen till relativistiska hastigheter, dess energi fås genom formeln för relativistisk energi

$$\mathcal{E}^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2, \tag{A.5}$$

där $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$, och m är partikelns massa. Normen av rörelsemängden är

$$p = \sqrt{\frac{E_w^4 e^4}{4\omega_0^4 m^2 c^2} + \frac{E_w^2 e^2}{\omega_0^2}}, \tag{A.6}$$

så partikelns energi blir

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= c\sqrt{\frac{E_w^4 e^4}{4\omega_0^4 m^2 c^2} + \frac{E_w^2 e^2}{\omega_0^2} + m^2 c^2} \\&= mc^2 \sqrt{\left(1 + \frac{E_w^2 e^2}{2\omega_0^2 m^2 c^2}\right)^2} \\&= mc^2 + \frac{E_w^2 e^2}{2m\omega_0^2}.\end{aligned}\tag{A.7}$$

A.1.3 Beräkning av jämviktsläget

Ett antagande görs där det sägs att ett jämviktsläge finns. Detta betyder att energin för detta fält, $\mathcal{E}$, är konstant. Vid jämvikt gäller att $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$, alltså att det inte finns någon energiöverföring från fältet till partikeln. Genom att derivera uttrycket för energin i (A.5) fås

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{mc^4 + |\vec{p}|^2 c^2}} \cdot c^2 \frac{d}{dt} |\vec{p}|^2 \\&= \frac{1}{2\mathcal{E}} c^2 2\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \\&= \frac{\gamma m \vec{v}}{\gamma m c^2} c^2 \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \\&= \vec{v} \cdot q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\&= q\vec{v} \cdot \vec{E}.\end{aligned}\tag{A.8}$$

Enligt antagandet fås att $\vec{v} \cdot \vec{E} = 0$, vilket innebär att E-fältet och hastigheten är ortogonala.

A.1.4 Beräkning av elektrontätheten

Energitätheten i det elektromagnetiska fältet är

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{B_w^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 E_w^2}{2} \\
 &= \frac{E_w^2}{2} \left(\frac{1}{\mu_0 c^2} + \epsilon_0 \right) \\
 &= \frac{E_w^2}{2} (\epsilon_0 + \epsilon_0) \\
 &= E_w^2 \epsilon_0,
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

där relationen $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ för vakuum har använts.

Elektrontätheten n_e fås genom att ta $n_e = u/\mathcal{E}_k$, med $\mathcal{E}_k = (\gamma - 1)mc^2 = \mathcal{E} - mc^2$ den kinetiska energin,

$$\begin{aligned}
 n_e &= \frac{E_w^2 \epsilon_0}{\mathcal{E} - mc^2} \\
 &= \frac{E_w^2 \epsilon_0}{mc^2 + \frac{E_w^2 \epsilon^2}{2m\omega_0^2} - mc^2} \\
 &= \frac{2\epsilon_0 m \omega_0^2}{e^2}.
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

A.1.5 Beräkning av kvantparametern

När en elektron accelereras avger den strålning. Den utstrålade effekten ges av den relativistiska Larmors formel

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2 m_e^2 c^3}{\hbar^2} \chi^2, \tag{A.11}$$

där

$$\chi = \frac{\gamma}{E_{crit}} \sqrt{(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})^2 - (\vec{E} \cdot \frac{\vec{v}}{c})^2} \text{ [11]}. \tag{A.12}$$

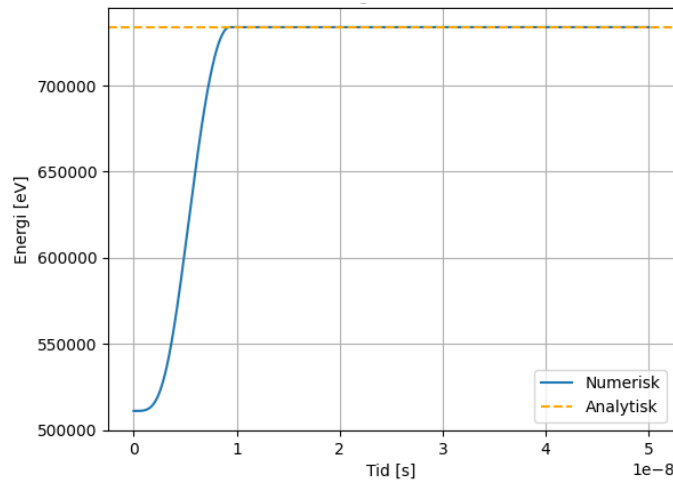
$E_{crit} \approx 1.3 \cdot 10^{18}$ V/m är det elektriska fältet där vakuum kan skapa elektron-positron-par, och χ är en kvantparameter som beskriver hur stor påverkan kvantef-

fekter har. Enligt ekvation (A.8) är $\vec{v} \cdot \vec{E} = 0$, och därmed blir

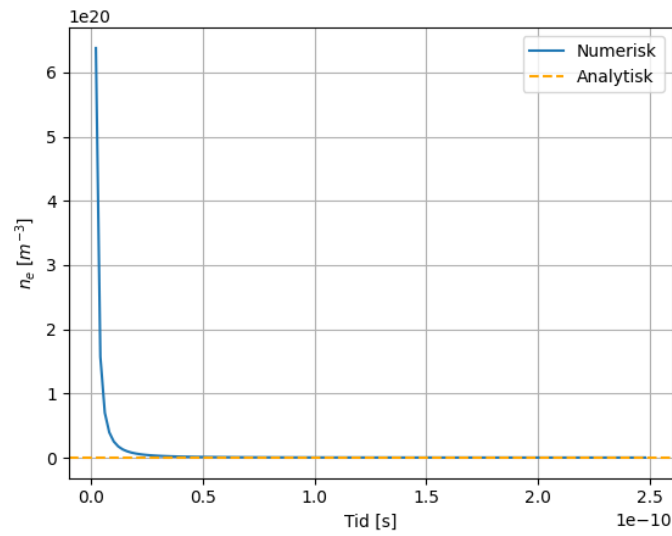
$$\begin{aligned}
\chi &= \frac{\gamma}{E_{crit}} \left| E_w - \frac{E_w^3 e^2}{2\gamma\omega_0^2 m^3 c^3} \right| \\
&= \frac{E_w}{E_{crit}} \left| \gamma - \frac{E_w^2 e^2}{2\omega_0^2 m^3 c^3} \right| \\
&= \frac{E_w}{E_{crit}} \left| \frac{E}{mc^2} - \frac{E_w^2 e^2}{2\omega_0^2 m^3 c^3} \right| \\
&= \frac{E_w}{E_{crit}} \left| \frac{E}{mc^2} - \frac{p_x}{mc} \right| \\
&= \frac{E_w}{E_{crit}} \left| 1 + \frac{E_w^2 e^2}{2\omega_0^2 m^2 c^2} - \frac{E_w^2 e^2}{2\omega_0^2 m^2 c^2} \right| \\
&= \frac{E_w}{E_{crit}},
\end{aligned} \tag{A.13}$$

där den relativistiska energin $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ har använts.

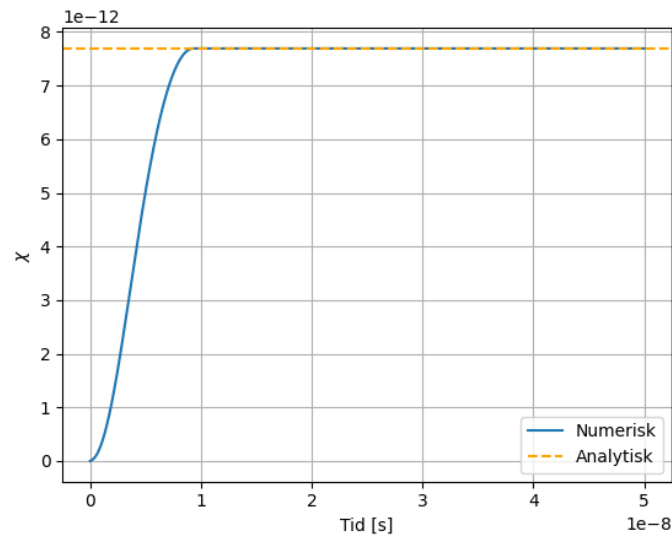
A.1.6 Figurer



Figur A.1: Jämförelse av den analytiskt och numeriskt beräknade totala energin som funktion av tid för en elektron i en cirkulärt polariserad elektromagnetisk våg, där fältstyrkan är $E_w = 10^7$ V/m.



Figur A.2: Jämförelse av den analytiskt och numeriskt beräknade elektrontätheten, n_e som funktion av tid för en elektron i en cirkulärt polariserad elektromagnetisk våg, där fältstyrkan är $E_w = 10^7$ V/m.



Figur A.3: Jämförelse av den analytiskt och numeriskt beräknade kvantparametern, χ som funktion av tid för en elektron i en cirkulärt polariserad elektromagnetisk våg, där fältstyrkan är $E_w = 10^7$ V/m.

A.2 Rent statiskt magnetfält

A.2.1 Beräkning av elektronens position

Från rörelseekvationen för elektronen som påverkas av ett statiskt magnetfält derivaras rörelsemängdsderivatorna för att få

$$\begin{aligned}\ddot{p}_y &= -\left(\frac{qB_n}{\gamma m}\right)^2 p_y, \\ \ddot{p}_z &= \left(\frac{qB_n}{\gamma m}\right)^2 p_z,\end{aligned}\tag{A.14}$$

vilka är ekvationer för en harmonisk oscillator. De har den allmänna lösningen

$$\begin{aligned}p_y &= p_{y0} \cos\left(\frac{qB_n}{\gamma m}t\right) + p_{z0} \sin\left(\frac{qB_n}{\gamma m}t\right), \\ p_z &= -p_{y0} \sin\left(\frac{qB_n}{\gamma m}t\right) + p_{z0} \cos\left(\frac{qB_n}{\gamma m}t\right),\end{aligned}\tag{A.15}$$

med $p_x = p_{x0}$.

Om startvillkoren från (A.2) används, fås uttrycken för p_{y0} och p_{z0}

$$\begin{aligned}p_{y0} &= -\frac{qE_w}{\omega_0} \cos\left(\omega_0 \frac{x}{c}\right), \\ p_{z0} &= \frac{qE_w}{\omega_0} \sin\left(\omega_0 \frac{x}{c}\right),\end{aligned}\tag{A.16}$$

och rörelsemängderna blir

$$\begin{aligned}p_x &= \frac{E_w^2 e^2}{2\omega_0^2 m c}, \\ p_y &= -\frac{qE_w}{\omega_0} \cos\left(\frac{\omega_0 x}{c} + \omega_g t\right), \\ p_z &= \frac{qE_w}{\omega_0} \sin\left(\frac{\omega_0 x}{c} + \omega_g t\right),\end{aligned}\tag{A.17}$$

med $\omega_g = \frac{qB_n}{\gamma m}$.

Den allmänna lösningen på rörelsemängden integreras för att få positionerna

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{p_{x0}}{\gamma m} t + x_0, \\ y(t) &= \frac{p_{y0}}{qB_n} \sin(\omega_g t) + \frac{p_{z0}}{qB_n} (1 - \cos(\omega_g t)) + y_0, \\ z(t) &= \frac{p_{y0}}{qB_n} (\cos(\omega_g t) - 1) + \frac{p_{z0}}{qB_n} \sin(\omega_g t) + z_0.\end{aligned}\tag{A.18}$$

A.2.2 Beräkning av elektronens energi

Partikelns energi i ett rent magnetfält skrivs $\mathcal{E}^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$, med

$$p = \sqrt{\frac{E_w^4 e^4}{4\omega_0^4 m^2 c^2} + \frac{E_w^2 e^2}{\omega_0^2}}, \quad (\text{A.19})$$

som i fallet av en cirkulärt polariserad våg. Energin skrivs, om vi använder uttrycken för rörelsemängderna i (A.15),

$$\mathcal{E} = \sqrt{\frac{E_w^4 e^4}{4\omega_0^4 m^2} + p_{y0}^2 c^2 + p_{z0}^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (\text{A.20})$$

Om värdena från (A.16) används så är energin lika med energin för fallet av en elektromagnetisk våg.

A.2.3 Beräkning av kvantparametern

För en elektron i ett statiskt magnetfält, beräknas χ på följande sätt, med $\vec{E} = 0$,

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\gamma}{E_{crit}} \sqrt{(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})^2 - (\vec{E} \cdot \frac{\vec{v}}{c})^2} \\ &= \frac{\gamma}{E_{crit}} \sqrt{(\vec{v} \times \vec{B})^2} \\ &= \frac{1}{E_{crit} m} \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ B_n p_z \\ B_n p_y \end{pmatrix}^2} \\ &= \frac{B_n}{E_{crit} m} \sqrt{p_y^2 + p_z^2} \\ &= \frac{B_n}{E_{crit} m} \frac{E_w e}{\omega_0}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

A.3 Kombinerat fall

4-hastigheten definieras som

$$\dot{x}_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{\gamma}{dt} (ct, -x, -y, -z) = (\gamma c, -\gamma v_x, -\gamma v_y, -\gamma v_z), \quad (\text{A.22})$$

där τ är den invariants tiden, och $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$.

A.3.1 Gauge-potentialen för bakgrundsfältet

Potentialen $\vec{A}$ måste uppfylla ekvationerna

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (\text{A.23})$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}. \quad (\text{A.24})$$

Då magnetfältet har två komponenter delas även potentialen upp i $\vec{A} = \vec{A}_n + \vec{A}_w$. Det går att visa att följande potentialer uppfyller ekvationerna

$$\phi = 0, \quad (\text{A.25})$$

$$\vec{A}_n = (0, -\frac{B_n}{2}z, \frac{B_n}{2}y), \quad (\text{A.26})$$

$$\vec{A}_w = (0, \frac{E_w}{\omega_0}\cos\phi, \frac{E_w}{\omega_0}\sin\phi), \quad (\text{A.27})$$

så att

$$\vec{A} = \vec{A}_n + \vec{A}_w = (0, \frac{E_w}{\omega_0}\cos\phi - \frac{B_n}{2}z, \frac{E_w}{\omega_0}\sin\phi + \frac{B_n}{2}y). \quad (\text{A.28})$$

Detta innebär att den kovarianta 4-potentialen för systemet ser ut som

$$A_\mu = (0, -\vec{A}) = (0, 0, -\frac{E_w}{\omega_0}\cos\phi + \frac{B_n}{2}z, -\frac{E_w}{\omega_0}\sin\phi - \frac{B_n}{2}y), \quad (\text{A.29})$$

där $\phi = \omega_0(t - \frac{x}{c})$.

A.3.2 Bevarade storheter

Translation i y -led

Translation i y -led beskrivs av symmetrin

$$\xi = \partial_y, \quad \xi^\mu = (0, 0, 1, 0). \quad (\text{A.30})$$

Då alla element i ξ förutom ξ^2 är 0, sätts $\nu = 2$, och då fås

$$\mathcal{L}_\xi A_\mu = \xi^2 \partial_y A_\mu + A_2 \partial_\mu \xi^2 \quad (\text{A.31})$$

Eftersom endast A_3 i A_μ beror på y , blir $\partial_y A_\mu = \partial_y A_3 = -\frac{B_n}{2}$, medan $\partial_\mu \xi^2 = 0 \forall \mu$. Då får vi ekvationen

$$\mathcal{L}_\xi A_\mu = (0, 0, 0 - \frac{B_n}{2}) = \partial_\mu \Lambda. \quad (\text{A.32})$$

Därför blir

$$\Lambda = -\frac{B_n}{2}z. \quad (\text{A.33})$$

Translation i z -led

Translation i z -led beskrivs av symmetrin

$$\xi = \partial_z, \quad \xi^\mu = (0, 0, 0, 1). \quad (\text{A.34})$$

Då alla element i ξ förutom ξ^3 är 0, sätts $\nu = 3$,

$$\mathcal{L}_\xi A_\mu = \xi^3 \partial_z A_\mu + A_3 \partial_\mu \xi^3. \quad (\text{A.35})$$

Eftersom endast A_2 i A_μ beror på z , blir $\partial_z A_\mu = \partial_z A_2 = \frac{B_n}{2}$, medan $\partial_\mu \xi^3 = 0$ $\forall \mu$. Då får vi ekvationen

$$\mathcal{L}_\xi A_\mu = (0, 0, \frac{B_n}{2}, 0) = \partial_\mu \Lambda. \quad (\text{A.36})$$

Därför blir

$$\Lambda = \frac{B_n}{2} y. \quad (\text{A.37})$$

Energi och rotation kring x -axeln

Detta beskrivs av symmetrin

$$\xi = \partial_t + \omega_0(y\partial_z - z\partial_y), \quad \xi^\mu = (c, 0, -\omega_0 z, \omega_0 y), \quad (\text{A.38})$$

i koordinatsystemet (ct, x, y, z) , där $\partial_0 = \frac{\partial_t}{c}$.

Eftersom $\xi^0 = c$ och $A_0 = 0$ blir för $\nu = 0$,

$$\mathcal{L}_\xi A_\mu = \xi^0 \partial_0 A_\mu + A_0 \partial_\mu \xi^0 = \partial_t A_\mu = (0, 0, E_w \sin \phi, -E_w \cos \phi). \quad (\text{A.39})$$

Eftersom $\xi^1 = 0$ blir för $\nu = 1$,

$$\mathcal{L}_\xi A_\mu = 0. \quad (\text{A.40})$$

För $\nu = 2$ blir

$$\mathcal{L}_\xi A_\mu = \xi^2 \partial_y A_\mu + A_2 \partial_\mu \xi^2 = (0, 0, 0, -\omega_0 z(-\frac{B_n}{2}) + (-\frac{E_w}{\omega_0} \cos \phi + \frac{B_n}{2} z)(-\omega_0)) = (0, 0, 0, E_w \cos \phi). \quad (\text{A.41})$$

För $\nu = 3$ blir

$$\mathcal{L}_\xi A_\mu = \xi^3 \partial_z A_\mu + A_3 \partial_\mu \xi^3 = (0, 0, \omega_0 y \frac{B_n}{2} + (-\frac{E_w}{\omega_0} \sin \phi - \frac{B_n}{2} y) \omega_0, 0) = (0, 0, -E_w \sin \phi, 0). \quad (\text{A.42})$$

Detta gör att för alla ν blir

$$\mathcal{L}_\xi A_\mu = (0, 0, E_w \sin \phi - E_w \sin \phi, -E_w \cos \phi + E_w \cos \phi) = (0, 0, 0, 0) = \partial_\mu \Lambda. \quad (\text{A.43})$$

Ljuslik translation

Detta beskrivs av symmetrin

$$\xi = \partial_t + c\partial_x = (c, c, 0, 0), \quad (\text{A.44})$$

i koordinatsystemet (ct, x, y, z) , där $\partial_0 = \frac{\partial_t}{c}$.

Eftersom $\xi^0 = c$ och $A_0 = 0$ blir för $\nu = 0$,

$$\mathcal{L}_\xi A_\mu = \xi^0 \partial_0 A_\mu + A_0 \partial_\mu \xi^0 = \partial_t A_\mu = (0, 0, E_w \sin \phi, -E_w \cos \phi). \quad (\text{A.45})$$

Eftersom $\partial_\mu \xi^1 = 0$ blir för $\nu = 1$,

$$\mathcal{L}_\xi A_\mu = \xi^1 \partial_x A_\mu = (0, 0, -E_w \sin \phi, E_w \cos \phi). \quad (\text{A.46})$$

Vilket gör att för alla ν blir

$$\mathcal{L}_\xi A_\mu = (0, 0, E_w \sin \phi - E_w \sin \phi, -E_w \cos \phi + E_w \cos \phi) = (0, 0, 0, 0) = \partial_\mu \Lambda. \quad (\text{A.47})$$

A.3.3 Storheter i involution

Integrerbarhet kräver att det finns tre bevarade storheter som  r i involution $\{Q_i, Q_j\} = 0$. Där poisson-bracket definieras som $\{x_i, P_j\} = -\{P_i, x_j\} = \delta_{ij}$ och $\{x_i, x_j\} = \{P_i, P_j\} = 0$. Alltså blir

$$\begin{aligned}\{Q_y, Q_z\} &= \{P_y + \frac{eB_n}{2}z, P_z - \frac{eB_n}{2}y\} \\ &= \{P_y, P_z\} - \frac{eB_n}{2}\{P_y, y\} + \frac{eB_n}{2}\{z, P_z\} - (\frac{eB_n}{2})^2\{z, y\} \\ &= 0 + \frac{eB_n}{2} + \frac{eB_n}{2} + 0 = eB_n.\end{aligned}\tag{A.48}$$

$\{Q_y, Q_z\}$  r alltså inte i involution om inte $B_n = 0$.

Vi har på samma sätt att

$$\{Q_y, Q_{rot}\} = -\omega_0 Q_z,\tag{A.49}$$

och

$$\{Q_z, Q_{rot}\} = \omega_0 Q_y.\tag{A.50}$$

Då det ej förekommer något par $\{x_i, P_i\}$ kan vi tydligt se att $\{Q_\gamma, Q_y\} = \{Q_\gamma, Q_z\} = \{Q_\gamma, Q_{rot}\} = 0$.

A.3.4 Jämviktsläge

Enligt samma resonemang som från avsnittet d r $B_n = 0$  r

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{mc^4 + |\vec{p}|^2 c^2}} \cdot c^2 \frac{d}{dt} |\vec{p}|^2 \\ &= \frac{1}{2\mathcal{E}} c^2 2\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \frac{\gamma m \vec{v}}{\gamma mc^2} c^2 \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \vec{v} \cdot q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ &= q(\vec{v} \cdot \vec{E} + \vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})) \\ &= q\vec{v} \cdot \vec{E},\end{aligned}\tag{A.51}$$

och $\vec{v} \cdot \vec{E} = 0$ vid jämviktsläge.

Den f rsta r relseekvationen kan skrivas om som

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} + \vec{v} \times \vec{B}_n), \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{\vec{p}}{\gamma m}.\tag{A.52}$$

Vi beräknar de tv  kryssprodukterna komponentvis,

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ B_w \cos \phi \\ B_w \sin \phi \end{pmatrix} = B_w(v_y \sin \phi - v_z \cos \phi, -v_x \sin \phi, v_x \cos \phi),$$

och

$$\vec{v} \times \vec{B}_n = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = B_n(0, v_z, -v_y).$$

Om vi sätter in dessa uträkningar i rörelseekvationen får vi ut

$$\begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = \frac{qE_w}{c}(v_y \sin \phi - v_z \cos \phi), \\ \frac{dp_y}{dt} = q(E_w(1 - \frac{v_x}{c}) \sin \phi + B_n v_z), \\ \frac{dp_z}{dt} = -q(E_w(1 - \frac{v_x}{c}) \cos \phi + B_n v_y), \end{cases} \quad (\text{A.53})$$

där $v_x = v_{\parallel}$, alltså den komponent av partikelns rörelse som är parallell med vågens färdriktning längs x -axeln. Dessa är differentialekvationer eftersom $v_y = \frac{p_y}{\gamma m}$ och $v_z = \frac{p_z}{\gamma m}$.

Precis som i lösningen för $B_n = 0$ görs en ansats för $p_y = p_{\perp} \cos \phi$ och $p_z = p_{\perp} \sin \phi$, så att $\frac{dp_y}{dt} = -p_{\perp} \frac{d\phi}{dt} \sin \phi$ och $\frac{dp_z}{dt} = p_{\perp} \frac{d\phi}{dt} \cos \phi$. Utifrån detta gäller då att

$$\begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = \frac{qE_w p_{\perp}}{\gamma m c} (\sin \phi \cos \phi - \cos \phi \sin \phi) = 0, \\ \frac{dp_y}{dt} = q(E_w(1 - \frac{v_{\parallel}}{c}) \sin \phi + B_n \frac{p_{\perp}}{\gamma m} \sin \phi) = -p_{\perp} \frac{d\phi}{dt} \sin \phi, \\ \frac{dp_z}{dt} = -q(E_w(1 - \frac{v_{\parallel}}{c}) \cos \phi + B_n \frac{p_{\perp}}{\gamma m} \cos \phi) = p_{\perp} \frac{d\phi}{dt} \cos \phi. \end{cases} \quad (\text{A.54})$$

Eftersom $\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\omega_0(t - \frac{x}{c})}{dt} = \omega_0(1 - \frac{v_{\parallel}}{c})$ kan man från de båda nedre ekvationerna få ut att

$$p_{\perp} = -\frac{qE_w(1 - \frac{v_{\parallel}}{c})}{\frac{qB_n}{\gamma m} + \omega_0(1 - \frac{v_{\parallel}}{c})}, \quad (\text{A.55})$$

och då alltså att

$$\begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = 0, \\ \frac{dp_y}{dt} = \frac{q\omega_0 E_w(1 - \frac{v_{\parallel}}{c})^2}{\frac{qB_n}{\gamma m} + \omega_0(1 - \frac{v_{\parallel}}{c})} \sin \phi, \\ \frac{dp_z}{dt} = -\frac{q\omega_0 E_w(1 - \frac{v_{\parallel}}{c})^2}{\frac{qB_n}{\gamma m} + \omega_0(1 - \frac{v_{\parallel}}{c})} \cos \phi. \end{cases} \quad (\text{A.56})$$

Om man sätter $B_n = 0$ får man

$$\begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = 0, \\ \frac{dp_y}{dt} = qE_w(1 - \frac{v_{\parallel}}{c}) \sin \phi, \\ \frac{dp_z}{dt} = -qE_w(1 - \frac{v_{\parallel}}{c}) \cos \phi, \end{cases} \quad (\text{A.57})$$

vilket är samma som den tidigare uträkningen för tidigare kapitel.

Om energin är konstant och energin är $\mathcal{E}^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$, får vi

$$\frac{d}{dt}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = 0. \quad (\text{A.58})$$

Vi vet att rörelsemängden i x -led är konstant, $\frac{dp_x}{dt} = 0$, så att

$$0 = \frac{d}{dt}(p_y^2 + p_z^2) = 2p_y \frac{dp_y}{dt} + 2p_z \frac{dp_z}{dt}. \quad (\text{A.59})$$

Vi definierar $A = \frac{q\omega_0 E_w(1 - \frac{v_{\parallel}}{c})^2}{\frac{qB_n}{\gamma m} + \omega_0(1 - \frac{v_{\parallel}}{c})}$, så att $\frac{dp_y}{dt} = A \sin \phi$ och $\frac{dp_z}{dt} = -A \cos \phi$. Vi får då

$$0 = p_y \frac{dp_y}{dt} + p_z \frac{dp_z}{dt} = A(p_y \sin \phi - p_z \cos \phi). \quad (\text{A.60})$$

Eftersom $A \neq 0$ gäller för jämviktsläge att

$$p_y \sin \phi = p_z \cos \phi. \quad (\text{A.61})$$

$$\begin{cases} p_x = \text{konstant} \\ p_y = p_{\perp} \cos \phi = -\frac{qE_w(1 - \frac{v_{\parallel}}{c})}{\frac{qB_n}{\gamma m} + \omega_0(1 - \frac{v_{\parallel}}{c})} \cos \phi \\ p_z = p_{\perp} \sin \phi = -\frac{qE_w(1 - \frac{v_{\parallel}}{c})}{\frac{qB_n}{\gamma m} + \omega_0(1 - \frac{v_{\parallel}}{c})} \sin \phi. \end{cases} \quad (\text{A.62})$$

A.3.5 Resonans

$$Q_{rot} = P_0 + \omega_0(yP_z - zP_y), \quad (\text{A.63})$$

$$Q_{\gamma} = P_0 + cPx, \quad (\text{A.64})$$

där $P_0 = \gamma mc^2 = \mathcal{E}$ är partikelns energi. För att dessa fortsatt ska vara bevarade när $P_0 \rightarrow \infty$ behöver $yP_z - zP_y \rightarrow -\infty$ och $P_x \rightarrow -\infty$.

Eftersom $P_x = -\gamma m v_x \rightarrow -\infty$ och $P_0 = \gamma mc^2 \rightarrow \infty$ får vi att $\frac{P_x}{P_0} = \frac{v_x}{c^2}$. Bevarandet ger att $P_x = \frac{Q_{\gamma} - P_0}{c}$, vilket innebär att partikelns hastighet $-v_x$:

$$v_x = \frac{-c^2 P_x}{P_0} = \frac{c^2}{P_0} \frac{P_0 - Q_{\gamma}}{c} = c(1 - \frac{Q_{\gamma}}{P_0}) \rightarrow c \quad (\text{A.65})$$

Alltså att partikeln accelererar oändligt i x -led.

Den dopplerskiftade frekvensen är

$$\omega' = \omega_0(1 - \frac{v_x}{c}) \rightarrow 0. \quad (\text{A.66})$$

Precis som cyclonfrekvensen,

$$\omega_c = -\frac{qB_n}{\gamma m} \rightarrow 0, \quad (\text{A.67})$$

eftersom γ är energin som går mot oändligheten.

Alltså behålls resonansen trots att energin går mot oändligheten och partikeln rusar i x -led, genom att båda vinkelfrekvenser går mot 0.

A.4 Strålningsdämpning

A.4.1 Radiation-free direction

Definitionen av χ är

$$\chi = \frac{\gamma}{E_{crit}} \sqrt{(\vec{E} + \vec{v} \times (\vec{B} + \vec{B}_n))^2 - (\vec{E} \cdot \frac{\vec{v}}{c})^2}. \quad (\text{A.68})$$

I RFD är $\chi = 0$, vilket skulle innebära att

$$\vec{E} + \vec{v} \times (\vec{B} + \vec{B}_n) = \vec{E} \cdot \frac{\vec{v}}{c} \quad (\text{A.69})$$

Testa den påstådda lösningen:

$$v_y = -\frac{E_w}{B_n}(1 - \frac{v_x}{c}) \cos \phi, \quad (\text{A.70})$$

$$v_z = -\frac{E_w}{B_n}(1 - \frac{v_x}{c}) \sin \phi, \quad (\text{A.71})$$

genom att sätta in den i ekvationen för χ . Dela upp elementen:

$$\vec{E} = (0, cB_w \sin \phi, -cB_w \cos \phi) \quad (\text{A.72})$$

$$\vec{v} \times \vec{B}_w = (0, 0, 0) \quad (\text{A.73})$$

$$\vec{v} \times \vec{B}_n = -(1 - v_x)cB_w(0, \sin \phi, -\cos \phi) \quad (\text{A.74})$$

$$\vec{v} \cdot \vec{E} = (0, cB_w v_x \sin \phi, -cB_w v_x \cos \phi) \quad (\text{A.75})$$

Sätt ihop höger och vänster-ledet, så ser vi att de är lika, och att den påstådda lösningen stämmer.

A.4.2 Gaunt-faktor=1

$$F = \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \frac{2\alpha mc}{3 \tau_C} \chi^2 g(\chi) \hat{p}, \quad (\text{A.76})$$

där comptons tid är

$$\tau_C = \frac{\hbar}{mc^2} \propto \hbar. \quad (\text{A.77})$$

För $g(\chi) = 1$,

$$F = \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \frac{2\alpha mc}{3 \tau_C} \chi^2 \hat{p}, \quad (\text{A.78})$$

där finstrukturkonstanten α är

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \propto \frac{1}{\hbar}. \quad (\text{A.79})$$

Medan χ är

$$\chi = \frac{e\gamma\hbar}{m^2c^3} \sqrt{(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})^2 - (\vec{E} \cdot \frac{\vec{v}}{c})^2} \propto \hbar. \quad (\text{A.80})$$

Allt detta innebär att kvantmekaniska korrektionen till kraften blir

$$-\frac{2\alpha mc}{3 \tau_C} \chi^2 \hat{p} \propto \frac{\alpha \chi^2}{\tau_C} \hat{p} \propto \frac{1}{\hbar} \hbar^2 \frac{1}{\hbar} = 1, \quad (\text{A.81})$$

och eftersom $q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ ej beror på $\hbar$, försvinner kraftens beroende på plancks konstant när gauntfaktorn är 1.

B

Pythonkod

De huvudsakliga funktionerna som används för implementationen av simuleringarna finns listade i B.1. Detaljerad implementering, numeriska beräkningar, och visualiseringar finns tillgängliga i projektets Git-repository: <https://git.chalmers.se/bragdem/modellering-av-elektrondynamik-i-magnetosfaren-hos-en-neutronstjarna>

```
1 import numpy as np
2
3 #FYSIKALISKA KONSTANTER i SI-enheter
4 c=299792458 # ljusets hastighet - [m/s]
5 m=9.109*10**(-31) # elektronens massa - [kg]
6 q=-1.602*10**(-19) # elektronens laddning - [C]
7 e_ladd=1.602e-19 # elementarladdning
8 E_crit = 1.3*10**18 # kritiska elektriska fältet - [V
   /m]
9 epsilon_0 = 8.854*10**(-12) # permittivitet i vakuum - [F/m]
10 my_0 = 1.257*10**(-6) # permabilitet i vakuum - [H/m]
11 hbar = 1.05457182*10**(-34) # Planks reducerade konstant [m^2
   kg/s]
12 h = 6.62607015*10**(-34) # Planks konstant
13 alpha = my_0*c*e_ladd**2/(2*h) #finstrukturkonstanten
14
15 # UPPGIFTENS PARAMETRAR
16 f = 1e9 # frekvens = 1 GHz
17 w0 = 2 * np.pi * f # vinkelfrekvens [rad/s]
18 T = 1 / f # period
19
20 def beräkna_gamma(p): # Lorentz faktorn
21     return np.sqrt(1+np.dot(p,p)/(m**2*c**2))
22
23 def Boris_Push(p, q, dt, E, B): #Ändrar rörelsemängden
24     p = np.array(p, dtype=float) # Relativistisk rörelsemängd
25     E = np.array(E, dtype=float) # Elektriskt fält
26     B = np.array(B, dtype=float) # Magnetfält
27
28     #Steg 1
29     p_1 = p + q*dt/2*E # första bidraget från det elektriska
       fältet
30
31     #Steg 2
32     gamma_1 = beräkna_gamma(p_1) # lorentzfaktor
```

```
33     s = q*dt/(2*m*gamma_1)*B # vektor
34
35     #Steg 3
36     p_2 = p_1 + 2/(1+np.dot(s,s))*(np.cross(p_1,s)+np.cross(
        np.cross(p_1,s),s)) #rotera rörelsemängden omkring
        magnetfältet
37
38     #Steg 4
39     p_prim= p_2+q*dt/2*E #sista steget från det elektriska fä
        ltet
40     return p_prim
41
42 def g(chi):
43     return (1+4.8*(1+chi)*np.log(1+1.17*chi)+ 2.44*chi**2)
        **(-2/3)
44
45 def Boris_Push_stråldämp(p, q, dt, E, B, classic): #Ändrar rö
        relsemängden
46     p = np.array(p, dtype=float) # Relativistisk rörelsemängd
47     E = np.array(E, dtype=float) # Elektriskt fält
48     B = np.array(B, dtype=float) # Magnetfält
49
50     #Steg 1
51     chi = beräkna_chi(p, E, B)
52     if classic == True:
53         g_val = 1
54     else:
55         g_val= g(chi)
56
57     p_norm = np.linalg.norm(p)
58     #if sats för att undvika att dela med 0
59     if p_norm > 0:
60         p_riktning = p / p_norm
61     else:
62         p_riktning = np.zeros_like(p)
63     p_1 = p + q*dt/2*E - 2*alpha*m**2*c**3/(3*hbar)*chi**2*
        g_val*p_riktning*dt/2
64
65     #Steg 2
66     gamma_1 = beräkna_gamma(p_1) # lorentzfaktor
67     s = q*dt/(2*m*gamma_1)*B # vektor
68
69     #Steg 3
70     p_2 = p_1 + 2/(1+np.dot(s,s))*(np.cross(p_1,s)+np.cross(
        np.cross(p_1,s),s)) #rotera rörelsemängden omkring
        magnetfältet
71
72     #Steg 4
73     chi = beräkna_chi(p_2, E, B)
```

```

74     if classic == True:
75         g_val = 1
76     else:
77         g_val = g(chi)
78
79     p2_norm = np.linalg.norm(p_2)
80     if p2_norm > 0:
81         p2_riktning = p_2 / p2_norm
82     else:
83         p2_riktning = np.zeros_like(p_2)
84
85     p_prim = p_2 + q*dt/2*E - 2*alpha*m**2*c**3/(3*hbar)*chi**2*
        g_val*p2_riktning*dt/2 #sista steget från det
        elektriska fältet
86     return p_prim
87
88 def Leap_Frog(r, p, dt, E_vec, B_vec, t): #Flyttar systemet
    dt
89
90     #STEG 1
91     r_start = np.array(r, dtype=float) # position
92     p_start = np.array(p, dtype=float) # rörelsemängd
93
94     #STEG 2
95     gamma_halv = beräkna_gamma(p) # räkna ut lorentzfaktor för
        r p
96     r_halv = r_start + p_start*dt/(2*gamma_halv*m) # flytta
        positionen ett halvt tidssteg
97
98     #STEG 3
99     t_halv = t+dt/2 # beräknar tiden i mitten av tidssteget
100     #Notera E, B beror på t_halv
101     E_halv = np.array(E_vec(r_halv, t_halv), dtype=float) #
        Beräknar elektrisk fältet vid halvtidssteget och
        halvpositionen
102     B_halv = np.array(B_vec(r_halv, t_halv), dtype=float) #
        Beräknar magnetfältet vid halvtidssteget och
        halvpositionen
103
104     #STEG 4
105     p_hel = Boris_Push(p, q, dt, E_halv, B_halv) # uppdaterar
        rörelsemängden p(t) -> p(t + t )
106
107     #STEG 5
108     gamma_prim = beräkna_gamma(p_hel) # lorentzfaktorn efter
        rörelsemängden uppdaterats
109     r_hel = r_halv + p_hel*dt/(2*gamma_prim*m) # flytta
        positionen
110

```

```
111     t_prim = t + dt
112
113     #STEG 6 (för att beräkna E och B vid hela tidssteg)
114     E_hel = np.array(E_vec(r_hel, t_prim), dtype=float)
115     B_hel = np.array(B_vec(r_hel, t_prim), dtype=float)
116
117     return r_hel, p_hel, t_prim, E_half, B_half, E_hel, B_hel
118
119 def Leap_Frog_stråldämp(r, p, dt, E_vec, B_vec, t, classic):
120     #Flyttar systemet dt
121
122     #STEG 1
123     r_start = np.array(r, dtype=float) # position
124     p_start = np.array(p, dtype=float) # rörelsemängd
125
126     #STEG 2
127     gamma_half = beräkna_gamma(p) # räkna ut lorentzfaktor för
128     # r p
129     r_half = r_start + p_start*dt/(2*gamma_half*m) # flytta
130     # positionen ett halvt tidssteg
131
132     #STEG 3
133     t_half = t+dt/2 # beräknar tiden i mitten av tidssteget
134     #Notera E, B beror på t_half
135     E_half = np.array(E_vec(r_half, t_half), dtype=float) #
136     # Beräknar elektrisk fältet vid halvtidssteget och
137     # halvpositionen
138     B_half = np.array(B_vec(r_half, t_half), dtype=float) #
139     # Beräknar magnetfältet vid halvtidssteget och
140     # halvpositionen
141
142     #STEG 4
143     p_hel = Boris_Push_stråldämp(p, q, dt, E_half, B_half,
144     # classic) # uppdaterar rörelsemängden p(t) -> p(t + t
145     # )
146
147     #STEG 5
148     gamma_prim = beräkna_gamma(p_hel) # lorentzfaktorn efter
149     # rörelsemängden uppdaterats
150     r_hel = r_half+ p_hel*dt/(2*gamma_prim*m) # flytta
151     # positionen
152
153     t_prim = t + dt
154
155     #STEG 6 (för att beräkna E och B vid hela tidssteg)
156     E_hel = np.array(E_vec(r_hel, t_prim), dtype=float)
157     B_hel = np.array(B_vec(r_hel, t_prim), dtype=float)
158
159     return r_hel, p_hel, t_prim, E_half, B_half, E_hel, B_hel
```

```

149
150 def energi(p): # räknar ut reletivistisk energi
151     gamma = beräkna_gamma(p) # lorentzfaktor
152     E_tot = gamma * m * c**2 # total energi
153     E_kin = (gamma-1) * m * c**2 # kinetisk energi
154     return E_tot, E_kin
155
156 def beräkna_chi(p, E, B): # beräknar kvantmekaniska
    parametern chi
157     p = np.array(p, dtype=float) # rörelsemängd
158     E = np.array(E, dtype=float) # elektriskt fält
159     B = np.array(B, dtype=float) # magnetiskt fält
160     gamma = beräkna_gamma(p) # lorentzfaktor
161     v = p/(gamma*m) # hastighet
162     return gamma / E_crit * np.sqrt(np.dot(E+np.cross(v,B) ,
        E+np.cross(v,B)) - (np.dot(E,v/c))**2) #chi
163
164 def beräkna_n_e(epsilon_0, my_0, E, B, E_kin): # beräknar
    energidensitet
165     if E_kin == 0:
166         return np.nan
167     u = epsilon_0/2*np.dot(E, E)+1/(2*my_0)*np.dot(B, B) #
        Energitäthet
168     return u/E_kin # energitäthet/kinetisk energi per
        elektron
169
170 def ramp(fi): #rampfunktion
171     if fi < 16*np.pi: #mjuk/öknade funktion när fi är liten
172         return [-np.cos(fi)*np.cos(fi/32)*np.sin(fi/32)/16 +
            np.sin(fi)*(np.sin(fi/32))**2,
173                 -np.cos(fi/32)*np.sin(fi)*np.sin(fi/32)/16 -
            np.cos(fi)*(np.sin(fi/32))**2]
174     else: # 1 när fi är tillräckligt stor
175         return (np.sin(fi), -np.cos(fi))
176
177 def Beräkna_E_fkn(Ew, r, t): #beräknar det elektriska fältet
    i elektromagnetisk våg
178     x = r[0] # beror bara på tiden och x
179     fi = w0 * (t-x/c) # fas för plan våg
180     delta = ramp(fi) # använder rampfunktion som delta
181
182     # cirkulärt polariserad våg
183     Ey=Ew*delta[0]
184     Ez=Ew*delta[1]
185
186     return np.array([0, Ey, Ez])
187
188 def Beräkna_B_fkn(Ew, r, t): # beräknar magnetfält i
    elektromagnetisk våg

```

```
189     Bw = Ew/c # amplitud för magnetfält
190     x = r[0] # beror bara på tiden och x
191     fi = w0 * (t-x/c) #fasen
192     delta = ramp(fi) # rampfunktion som delta
193     # cirkulärt polariserad våg
194     By = -Bw*delta[1]
195     Bz = Bw*delta[0]
196
197     return np.array([0, By, Bz])
198
199 def analytisk_p(Ew, t, x, w = w0): #analytisk p för ensam våg
200     phi = w * (t - x/c)
201     px = Ew**2 * q**2 / (2 * w**2 * m * c)
202     py = Ew * q / w * np.cos(phi)
203     pz = Ew * q / w * np.sin(phi)
204     return np.array([px, py, pz])
205
206 def analytisk_E_kin(Ew, w = w0): #analytsik kinetisk energi f
    ör ensam våg
207     analytisk_E_kin = Ew**2 * q**2 / ( 2 * m * w**2)
208     return analytisk_E_kin
209
210 def analytisk_E_tot(Ew, w= w0): #analytsik total energi för
    ensam våg
211     analytisk_E_tot = m * c**2 + Ew**2 * q**2 / ( 2 * m * w
        **2)
212     return analytisk_E_tot
213
214 def analytisk_chi_ensamvåg(Ew, E_critic = E_crit): #analytsk
    lösning för chi ennsam våg
215     analytisk_chi = Ew / E_critic
216     return analytisk_chi
217
218 def analytisk_ne(w = w0): #analytisk lösning av ne för ensam
    våg
219     analytisk_ne= 2 * epsilon_0 * m * w**2 / q**2
220     return analytisk_ne
221
222 def simulering(steg, dt, r_start, p_start, t_start, E_fkn,
    B_fkn,
223                 visa_progress=False, progress_varje=10000):
224
225     r_log      = np.zeros((steg+1, 3))
226     p_log      = np.zeros((steg+1, 3))
227     t_log      = np.zeros(steg+1)
228     E_tot_log  = np.zeros(steg+1)
229     chi_log    = np.zeros(steg+1)
230     ne_log     = np.zeros(steg+1)
231
```

```

232     r = r_start.copy()
233     p = p_start.copy()
234     t = t_start
235
236     E0 = E_fkn(r, t)
237     B0 = B_fkn(r, t)
238
239     E_tot0, E_kin0 = energi(p)
240     E_tot_log[0] = E_tot0
241
242
243     r_log[0] = r
244     p_log[0] = p
245     t_log[0] = t
246     chi_log[0] = beräkna_chi(p, E0, B0)
247     ne_log[0] = beräkna_n_e(epsilon_0, my_0, E0, B0, E_kin0)
248
249     for i in range(steg):
250         r, p, t, E_half, B_half, E_hel, B_hel = Leap_Frog(
251             r, p, dt, E_fkn, B_fkn, t
252         )
253
254         r_log[i+1] = r
255         p_log[i+1] = p
256         t_log[i+1] = t
257
258         E_tot_i, E_kin_i = energi(p)
259         E_tot_log[i+1] = E_tot_i
260
261         # använd fälten vid hela tidssteget här
262         chi_log[i+1] = beräkna_chi(p, E_hel, B_hel)
263         ne_log[i+1] = beräkna_n_e(epsilon_0, my_0, E_hel,
264                                 B_hel, E_kin_i)
265
266         if visa_progress and ((i + 1) % progress_varje == 0
267                               or (i + 1) == steg):
268             procent = 100 * (i + 1) / steg
269             print(f"Steg_{i+1}/{steg}_{procent:.1f}%")
270
271     return r_log, p_log, t_log, E_tot_log, chi_log, ne_log
272
273 def simulering_stråldämp(steg, dt, r_start, p_start, t_start,
274                           E_fkn, B_fkn,
275                           visa_progress=False, progress_varje=10000,
276                           classic = False):
277
278     r_log = np.zeros((steg+1, 3))
279     p_log = np.zeros((steg+1, 3))
280     t_log = np.zeros(steg+1)

```

```
277     E_tot_log = np.zeros(steg+1)
278     chi_log    = np.zeros(steg+1)
279     ne_log     = np.zeros(steg+1)
280
281     r = r_start.copy()
282     p = p_start.copy()
283     t = t_start
284
285     E0 = E_fkn(r, t)
286     B0 = B_fkn(r, t)
287
288     E_tot0, E_kin0 = energi(p)
289     E_tot_log[0] = E_tot0
290
291
292     r_log[0] = r
293     p_log[0] = p
294     t_log[0] = t
295     chi_log[0] = beräkna_chi(p, E0, B0)
296     ne_log[0] = beräkna_n_e(epsilon_0, my_0, E0, B0, E_kin0)
297
298     for i in range(steg):
299         r, p, t, E_half, B_half, E_hel, B_hel = Leap_Frog_str
300             åldämp(
301                 r, p, dt, E_fkn, B_fkn, t, classic)
302
303         r_log[i+1] = r
304         p_log[i+1] = p
305         t_log[i+1] = t
306
307         E_tot_i, E_kin_i = energi(p)
308         E_tot_log[i+1] = E_tot_i
309
310         # använd fälten vid hela tidssteget här
311         chi_log[i+1] = beräkna_chi(p, E_hel, B_hel)
312         ne_log[i+1] = beräkna_n_e(epsilon_0, my_0, E_hel,
313             B_hel, E_kin_i)
314
315         if visa_progress and ((i + 1) % progress_varje == 0
316             or (i + 1) == steg):
317             procent = 100 * (i + 1) / steg
318             print(f"Steg_{i+1}/{steg}_{procent:.1f}%")
319
320     return r_log, p_log, t_log, E_tot_log, chi_log, ne_log
321
322 def analytisk_p_B(t_arr, p0, Bx, Ew): #analytisk lösning för
    p vid ensamt B-fält
323     t_arr = np.asarray(t_arr, dtype=float)
324     p0 = np.asarray(p0, dtype=float)
```

```

322
323     gamma0 = beräkna_gamma(p0)
324     Omega = q * Bx / (gamma0 * m)
325
326     px0 = p0[0]
327     py0 = p0[1]
328     pz0 = p0[2]
329
330
331
332     px = np.full_like(t_arr, px0)
333     py = py0 * np.cos(Omega * t_arr) + pz0 * np.sin(Omega *
334               t_arr)
335     pz = -py0 * np.sin(Omega * t_arr) + pz0 * np.cos(Omega *
336               t_arr)
337
338     v_par = px0/(gamma0*m)
339
340     return px, py, pz
341
342 def analytisk_chi_B(Ew, Bx, w = w0): #analytisk lösning för
343     chi vid ensamt B-fält
344     return Bx * Ew * e_ladd / (E_crit * m * w)
345
346 def analytisk_r_t(Ew, t, w=w0): #analytisk lösning för
347     position vid ensam våg
348
349     p = analytisk_p(Ew,0,0)
350     gamma = beräkna_gamma(p)
351     v_par = Ew**2*e_ladd**2/(2*gamma*w0**2*m**2*c)
352
353     x = v_par * t
354     phi = w * (t - x / c)
355
356     y = -q * Ew / (m * w**2) * np.sin(phi)
357     z =  q * Ew / (m * w**2) * np.cos(phi)
358
359     return np.array([x, y, z])
360
361 def analytisk_r_t_B(Ew, Bx, t, t_off, w=w0): #analytisk lö
362     sning för position vid ensamt B-fält
363     # x-positionen är samma som för ensam våg
364     p = analytisk_p(Ew,0,0)
365     gamma = beräkna_gamma(p)
366     v_par = Ew**2*e_ladd**2/(2*gamma*w**2*m**2*c)
367     x = v_par * t
368
369     py0 = p[1]
370     pz0 = p[2]

```

```
366     _, y0 , z0 = analytisk_r_t(Ew, t_off)
367
368     Gyro = q*Bx/(gamma*m)
369     y = py0/(q*Bx)*np.sin(Gyro*t) + pz0/(q*Bx)*(1-np.cos(Gyro
370         *t)) +y0
371     z = py0/(q*Bx)*(np.cos(Gyro*t)-1) + pz0/(q*Bx)*np.sin(
372         Gyro*t) +z0
373     return np.array([x, y, z])
```

Listing B.1: Huvudfunktioner för simuleringen



CHALMERS