



CHALMERS



Utveckling av mätmetod för att bestämma glidfriktion vid längdskidåkning

IMSX16-25-01

HANNA BOQUIST
HAMPUS GUSTAFSSON
CAROLINE GUTTKE
SIMON KALENTUN

INSTITUTIONEN FÖR INDUSTRI- OCH MATERIALVETENSKAP

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg 2025
www.chalmers.se

KANDIDATARBETE 2025

Utveckling av mätmetod för att bestämma glidfriktion vid längdskidåkning

IMSX16-25-01

HANNA BOQUIST
HAMPUS GUSTAFSSON
CAROLINE GUTTKE
SIMON KALENTUN



CHALMERS

Institutionen för Industri- och materialvetenskap
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg 2025

Utveckling av mätmetod för att bestämma glidfriktion vid längdskidåkning
Hanna Boquist
Hampus Gustafsson
Caroline Guttke
Simon Kalentun

© Hanna Boquist, Hampus Gustafsson, Caroline Guttke, Simon Kalentun, 2025.

Handledare: Martin Fagerström, Biträdande professor vid avdelningen för Material- och beräkningsmekanik.
Dan Kuylenstierna, Docent vid avdelningen för Mikrovågselektronik.

Examinator: Lennart Josefson, Professor vid avdelningen för Material- och beräkningsmekanik

Kandidatarbete 2025
Institutionen för Industri- och materialvetenskap
Chalmers Tekniska Högskola
SE-412 96 Göteborg
Telefon +46 31 772 1000

Omslagsbilden är AI-genererad med hjälp av OpenAI:s bildverktyg och syftar till att visuellt representera projektets fokus på glidfriktion inom längdskidåkning.

Skriven i L^AT_EX
Göteborg 2025

Sammanfattning

Längdskidåkning är en stor sport där det finns många olika parametrar som avgör hur väl en åkare presterar. En sådan parameter är friktionen mellan skidan och snön. Åkare har försökt minska denna parameter så länge sporten har existerat. Idag görs det primärt med olika metoder för ytpreparering infattande både valla och struktur. En utmaning är att mäta på ett kvantitativt och vetenskapligt sätt hur dessa metoder står sig mot varandra.

Projektet har syftat till att hitta ett sätt att mäta friktionskoefficienten vid längdskidåkning så vetenskapligt men även användarvänligt som möjligt. En rörelseekvation togs fram för att beskriva sambandet för friktionskoefficienten vid längdskidåkning. Detta följdes av en litteraturstudie kring tidigare lösningar. Baserat på litteraturstudien genomfördes en utvecklingsprocess där en mätteknik utvecklades, samt testmetoder för att kunna verifiera denna mätteknik.

Projektet resulterade i en mätteknik bestående av en IMU, en mjukvara, samt magneter eller fotoceller. Mättekniken testades genom glidtest på plan mark inomhus i skidanläggningen Skidome i Göteborg. Testerna hade en glidfas på 15 meter och genomfördes i hastigheter upp till 6 m/s. Detta visade att mättekniken kan användas för att mäta skillnad i friktion med en precision bättre än $\pm 0,005$.

Slutsatsen av projektet är att utrustningen som användes gav användbara resultat som skulle kunna användas av motionärer och vid träning. En vidareutveckling av programvaran och uppgradering av IMU skulle eventuellt kunna ge tillräckligt bra precision för att jämföra olika typer av glidvalla på elitnivå.

Nyckelord: längdskidor, glidfriktion, parglidning, vintersport, IMU, friktionskoefficient, skid-snö-friktion, Skidome.

Abstract

Cross-country skiing is a major sport where many different parameters influence an athlete's performance. One such parameter is the friction between the ski and the snow. Skiers have been trying to reduce this friction ever since the sport began. Today, this is primarily achieved through various surface treatment methods, including both waxing and base structuring. However, one ongoing challenge is to measure the effectiveness of these methods in a quantitative and scientific manner.

The aim of this project was to develop a method for measuring the coefficient of friction in cross-country skiing in a way that is both scientific and user-friendly. A motion equation was developed to describe the relationship governing the coefficient of friction in skiing. This was followed by a literature review of existing solutions. Based on the insights from this review, a development process was carried out to create a measurement technique and corresponding test methods to validate it.

The project resulted in a measurement system consisting of an IMU, a custom software solution, and either magnets or photocells. The method was tested through glide tests indoor in the Skidome ski facility in Gothenburg. Each test involved a 15 meter long glide phase at speeds of up to 6 m/s. The results demonstrated that the technique was capable of detecting differences in friction with a precision better than ± 0.005 .

The conclusion of the project is that the equipment provided useful data that could be of value to recreational skiers and in training environments. Further development of the software and an upgraded IMU could potentially provide sufficient precision to compare different types of glide wax at an elite level.

Keywords: cross-country skiing, glide friction, parallel glide testing, winter sports, IMU, coefficient of friction, ski-snow friction, Skidome.

Förord

Detta kandidatarbetet har genomförts under våren 2025 vid Chalmers tekniska högskola, inom institutionen för Industri- och materialvetenskap. Examinator för arbetet har varit Lennart Josefson och handledare har varit Martin Fagerström och Dan Kuylenstierna.

Vi vill rikta ett stort tack till alla som har bidragit med kunskap, stöd och engagemang under arbetets gång. Ett särskilt tack går till våra handledare för vägledning och många värdefulla insikter under projektets gång. Vi vill även tacka Jonatan Jungmalm, universitetslektor och Jamie Andersson, verksamhetsförlagd utbildningsstudent vid Göteborgs universitet för engagemang och värdefull hjälp med utrustning och lån av fotoceller till testtillfällen.

Slutligen vill vi även rikta ett varmt tack till Margot Möllersten och Skidome, för möjligheten att genomföra delar av vårt arbete där.

Kandidatgruppen, Göteborg, Maj 2025

Innehåll

1	Inledning	1
1.1	Syfte	2
1.2	Avgränsningar	3
2	Teori	4
2.1	Friktion	4
2.2	Felanalys	5
2.3	IMU	6
2.4	Fotoceller	7
3	Teknisk utveckling av mätutrustning	8
3.1	Fördjupning kring friktionspåverkande variabler	8
3.2	Idégenerering för friktionsmätning	9
3.3	Beräkning av hastighet	10
3.3.1	Integration av acceleration	10
3.3.2	Alternativ metod för att bestämma starthastighet	11
3.4	Vinkelmätning	12
4	Testupplägg och genomförande	14
4.1	Första testtillfället i Skidome	14
4.2	Andra testtillfället i Skidome	15
5	Resultat	17
5.1	Skillnad i friktion mellan skejt- och skinsskidor	17
5.2	Skillnad i friktion mellan ovallade och glidvallade skejtskidor	18
5.3	Sammanställning av resultat från glidtester	19
6	Diskussion	21
6.1	Resultatets trovärdighet	21
6.2	Mätprecision	22
6.3	Testförfarande	23
6.4	Fotoceller och magneter	24
6.5	IMU och mjukvara	24
6.6	Vinkelmätning	25
7	Slutsatser	27

8	Rekommendationer för framtida arbeten	28
8.1	Rekommendationer för glidtest	28
8.2	Fotoceller och magneter	28
8.3	IMU och mjukvara	29
	Referenser	30
A	Mjukvara	32

1

Inledning

Inom längdskidåkning är bra glid avgörande för att uppnå hög fart och god prestation. Trots att det finns vetenskapliga metoder för att mäta glidfriktion mellan skida och snö, saknas fortfarande praktiska och lättanvända lösningar som fungerar tillförlitligt och är användbara ute i fält. Avsaknad av en sådan metod gör det svårt att på ett effektivt sätt utvärdera och optimera utrustning som olika skidpar, strukturer eller valla, vilket är särskilt viktigt på elitnivå där små variationer i friktion kan få stor inverkan på åkares resultat. Även bland motionärer finns ett potentiellt intresse av att kunna mäta glidfriktion för att utvärdera glidförmåga. Detta gäller både aspekten att kunna optimera utrustningen utifrån personliga målsättningar men även för att förbättra upplevelsen av skidåkningen som helhet.

I dagsläget används främst relativa och ofta subjektiva testmetoder som parglidning, där två åkare åker bredvid varandra utför en backe utan aktiv påverkan och jämför glidet på deras respektive skidor. Parglidningsmetoden har dock betydande begränsningar. Individuella skillnader som åkarnas tyngd och position, samt yttre faktorer som att exempelvis de olika spåren kan variera i kvalité. Även olika ingångsvärden som hastighet och startposition påverkar skidans glid. Detta gör det svårt att dra säkra slutsatser om hur olika material och vallor påverkar glidet på skidorna. För att förbättra förståelsen och optimera utrustningen krävs en mer noggrann och objektiv mätmetod.

Forskning kring mätning av skid-snö-friktion har under senare år fokuserat på att utveckla system som kan ge hög precision under realistiska förhållanden. Olika studier har bidragit till utvecklingen av metoder för objektiv mätning av friktion. En friglidande tribometer har utvecklats för att möjliggöra mätning av glidfriktion för fullstora skidor under realistiska hastigheter [1]. Testerna har gjorts i en kontrollerad inomhusmiljö och för att uppnå hög noggrannhet användes optiska hastighetssensorer. Resultaten visade en relativ standardavvikelse på cirka 0,5 %, vilket indikerar en mycket god repeterbarhet. Studien lyfte dock även att denna precision krävde omfattande signalfiltrering på grund av vibrationsrelaterat brus i hastighetsmätningen. Detta visar att även om metoden ger tillförlitliga resultat, är den känslig för störningar som kräver noggrann efterbehandling av data.

En ytterligare studie lyfte även den att det gjorts flera forskningsförsök att kvantifiera friktion mellan skidor och snö [2], men poängterar samtidigt att det bara finns ett fåtal metoder som beaktar glidet hos skidor i verklig storlek under naturliga förhållanden. För att ta steg i riktningen mot mätningar i mer naturliga

miljöer utvecklades ett system där ett "Real-Time Kinetic Global Navigation Satellite System"(RTK GNSS) monterades på en glidande släde. Genom att mäta exakt position och hastighet i realtid kunde friktionskoefficienten beräknas under både acceleration och retardation. Studien visade bland annat att friktionskoefficienten var mer än 20% högre under acceleration. Däremot noterades vissa utmaningar kopplade till mätosäkerhet, särskilt under faser där accelerationen förändrades kraftigt. Även i den här studien påpekas utmaningar kopplade till brus som minskar mät-noggrannhet vid accelerationsfasen.

Bristen på en tillförlitlig mätmetod av glidfriktion gör det svårt för både elit- och breddåkare att objektivt utvärdera hur olika vallor och strukturer påverkar skidans glid. Detta skapar en ojämn balans mellan resurssvaga och resursstarka team i tävlingssammanhang. Utvecklingen av en testmetod har dessutom blivit mer relevant sedan fluorvallor förbjudits på grund av dess negativa miljöpåverkan [3]. Fluoret i vallan var tidigare en stor faktor till minskade skillnader av olika skidors glid på grund av dess slittålighet över tid [4]. Eftersom dagens tillåtna produkter medför större skillnader blir en större testorganisation viktigare. För att upprätthålla rättvisan inom sporten, skulle detta kunna leda till en öppning på marknaden för att kunna jämföra och optimera alternativa material och produkter. Med förändrat regelverk och materialförutsättningar sker en brytpunkt som påverkar teknik-utvecklingen. Fluorförbudet skulle kunna bidra till ökat fokus på utveckling av nya innovativa produkter [5], där en systematisk metod för att kvantifiera glidfriktion kan komma att bli ett viktigt verktyg för framtida utveckling inom sporten.

1.1 Syfte

Projektet syftade till att utveckla en objektiv och praktiskt användbar mätmetod för att kvantifiera glidfriktionen mellan skida och snö inom längdskidsporten. Genom att bestämma friktionskoefficienten för en given kombination av ytstruktur och valla kan säkrare resultat erhållas i jämförelse med dagens parglidningsmetod. Genom att bestämma friktionskoefficienten, dels som en funktion av hastigheten och dels som ett medelvärde per test, syftade projektet till att ge en mer detaljerad och noggrann analys av glidfriktionen, samt eliminera subjektiva bedömningar.

Det huvudsakliga målet för projektet var att konstruera en fungerande prototyp som möjliggör mätning av friktionskoefficienten under kontrollerade förhållanden. Systemet skulle även kunna samla in data för att möjliggöra analys av friktionen som funktion av hastigheten, samt att kunna urskilja skillnader i glidfriktion mellan olika vallor och skidor. Ett av delmålen under projektets gång har varit att utveckla en fungerande prototyp som kan samla in data. Därefter har ytterligare mål varit att genomföra tester på skidor med prototypen där även insamling av data genomförts.

1.2 Avgränsningar

Projektet genomfördes inom ramarna för ett kandidatarbete, vilket innebar vissa avgränsningar. Samtliga tester genomfördes i en kontrollerad miljö i Skidome, vilket är en inomhusanläggning med skidspår på konstsnö i Göteborg. Avgränsningen med att enbart göra tester inomhus innebar att projektet inte tog hänsyn till den variation som kan uppstå vid utomhustester på natursnö. Dessa variationer kan exempelvis vara temperatur, relativ luftfuktighet, vind och snötyp. Testerna inomhus i Skidome ägde rum under kontrollerade förhållanden med relativt lika snöstruktur vid varje testtillfälle eftersom temperatur och luftfuktighet inte varierade. Detta inkluderade att mättekniken enbart säkerställdes fungera i miljöer där dessa parametrar inte varierade. Vind ansågs även vara helt avsaknad, vilket även detta innebar att mättekniken enbart säkerställdes fungera i vindstilla miljöer. Orsaken till avgränsningen var att kandidatarbetets bas var i Göteborg och testerna främst genomfördes i april då snö normalt inte förekommer där.

Även om skidornas vibrationer potentiellt kan påverka mätvärdena, valdes dessa bort från analysen i detta projekt, då testerna utfördes i relativt låga hastigheter upp till 6,5 m/s vilket motsvarar ungefär 20 km/h. Vid högre hastigheter har vibrationer visat sig kunna påverka både mätnoggrannhet och friktionsbeteende, exempelvis genom uppvärmning av belaget till följd av friktionen [2]. Detta skulle kunna ge utslag även vid lägre hastigheter, som konsekvens av olika hög starthastighet. Analys av sådana effekter ansågs bli avancerad och omfattande då det är många samverkande parametrar. Aspekten ansågs falla utanför fokusområdet för detta projektet vilket innebar att eventuella vibrationsstörningar hanterades med brusfiltrering, utan att studeras djupare.

2

Teori

I detta kapitel förklaras de grundläggande principerna kring friktion mellan skida och snö, tekniska lösningar som relaterar till mätning av glidfriktion samt utmaningar och möjligheter med detta.

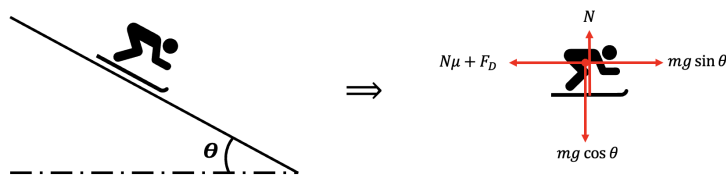
2.1 Friktion

Friktion är den kraft som motverkar rörelsen mellan två ytor i kontakt med varandra. Inom längdskidåkning är friktionen mellan skida och snö en avgörande faktor. Under glidfasen eftersträvas att minimera friktionen för att få en så optimal skida som möjligt. Friktionskraften (F_f) är direkt proportionell mot normalkraften (N) och proportionalitetskonstanten (μ) och kan uttryckas enligt sambandet,

$$F_f = \mu N.$$

Proportionalitetskonstanten är i detta fall friktionskoefficienten. För att få ut en friktionskoefficient för en längdskidåkare går det att ställa upp en jämviktsekvation för ett scenario där en åkare åker utan att ta fart på ett underlag som inte är helt plant. Utgångspunkt är enligt figur 2.1, där en skidåkare glider utan att ta fart. Vinkeln θ representerar lutningen på underlaget i förhållande till horisontalplanet. Genom att frilägga skidåkaren enligt figur 2.1, går det att ställa upp Newtons andra lag:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}. \quad (2.1)$$



Figur 2.1: Frilagd skidåkare på underlag med lutning θ i förhållande till horisontalplanet, med massa m samt luftmotstånd F_D .

Rörelseekvationen i åkriktningen blir då följande:

$$mg \sin \theta - mg\mu \cos \theta - F_D = ma, \quad (2.2)$$

där m är åkarens massa, θ är vinkeln på underlaget i förhållande till horisontalplanet, μ är friktionskoefficienten och F_D är luftmotståndet. Genom följande utveckling går det att lösa ut friktionskoefficienten μ ur ekvationen,

$$\begin{aligned} mg \sin \theta - mg\mu \cos \theta - F_D &= ma \\ \Leftrightarrow \mu &= \tan \theta - \frac{F_D}{mg \cos \theta} - \frac{a}{g \cos \theta}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Som tidigare nämnt representerar F_D luftmotståndet, vilket kan beskrivas med uttrycket

$$F_D = \rho \frac{c_d A_p v^2}{2}, \quad (2.4)$$

där ρ är luftens densitet, c_d är motståndskoefficienten som är beroende av bland annat formen på objektet som rör sig, A_p är projektionsarean på objektet som rör sig och v är hastigheten. Om F_D sätts in i ekvation (2.3) fås ett slutgiltigt uttryck för friktionskoefficienten μ ,

$$\mu = \tan \theta - \frac{\rho c_d A_p v^2}{2mg \cos \theta} - \frac{a}{g \cos \theta}. \quad (2.5)$$

Mittentermen i uttrycket är den del som representerar luftmotståndet. Om en åkare skulle antas åka i exakt samma position, skulle variablerna c_d och A_p vara konstanta. Med även ρ och m konstanta är det alltså enbart θ , v och a som varierar om exempelvis ett traditionellt glidtest skulle genomföras. Tidigare studier har visat att $c_d A_p$ vid fartställning kan vara så liten som 0,18m² [6]. Detta bidrar till att mittentermen i uttrycket blir liten och att luftmotståndets påverkan inte har betydande effekt på friktionskoefficienten. Hastighetens inverkan är å andra sidan kvadratisk, vilket skulle kunna göra att luftmotståndet får en mer betydande inverkan vid höga hastigheter. Detta är dock inget som har testats i detta arbete.

2.2 Felanalys

För att öka förståelsen för resultaten och dess precision är det viktigt att göra en felanalys. Detta för att avgöra om IMU är en lämplig sensor för att mäta respektive parameter.

Felanalysen baseras på parameterarna acceleration, hastighet och vinkel (a , v , θ) från rörelseekvation (2.5). I denna beräknas hur mycket parametrarna har varierat under försöken som ska replikera varandra och därefter beräknas hur mycket respektive parameter påverkar den slutgiltiga friktionskoefficienten. Adderas dessa fås

den totala felmarginalen för respektive försök. För att ta fram den totala påverkan används linjär felpropagering,

$$\Delta\mu = \sqrt{\left(\frac{\partial\mu}{\partial\theta}\Delta\theta\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial v}\Delta v\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial a}\Delta a\right)^2}, \quad (2.6)$$

där $\Delta\theta$, Δv och Δa representerar standardavvikelsen i respektive parameter och $\frac{\partial\mu}{\partial\theta}$, $\frac{\partial\mu}{\partial v}$ och $\frac{\partial\mu}{\partial a}$ är respektive variablers partiella derivata. Dessa beräknas utifrån rörelseekvation (2.5) till,

$$\frac{\partial\mu}{\partial\theta} = \sec^2\theta + \frac{\rho c_d A_p v^2 \sin\theta}{2mg \cos^2\theta} + \frac{a \sin\theta}{g \cos^2\theta}, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial v} = -\frac{\rho c_d A_p v}{mg \cos\theta} \quad (2.8)$$

och

$$\frac{\partial\mu}{\partial a} = -\frac{1}{g \cos\theta}. \quad (2.9)$$

2.3 IMU

Inertial Measurement Unit (IMU) är en sensor som mäter flera olika parametrar. I detta arbete används den för att mäta acceleration, vinkelorientering och storlek på magnetfältet. Accelerationen mäts med en accelerometer, vinkelorienteringen mäts med ett gyroskop och magnetfältet mäts med en magnetometer [7]. Samtliga parametrar mäter respektive värden i tre dimensioner (x, y och z). Dessa tre parametrar använder mikroelektromekaniska system (MEMS) tillsammans med kallmanfiltrering för att få fram resultaten [8]. IMU:n mäter i epoch-tid som är en universal tidsenhet som representerar tidangivelser definierat från ett specifikt datum [9] vilket medför enklare synkronisering mellan dess mätparametrar och andra parametrar. IMU:n är liten och smidig att hantera.

IMU:n fungerar både inomhus och utomhus då den är oberoende av GPS. Det går inte att direkt få fram en hastighet med hjälp av en IMU utan den måste integreras fram från accelerationen, vilket är så kallad "död räkning". Inom navigationsteori innebär detta att man använder information om var man tidigare har befunnit sig för att beräkna nuvarande position [10]. En fördel är att GPS eller annan exakt positionsbestämning inte behöver användas. En nackdel är att små fel i begynnelsevillkoret ger stora fel i beräknade positionen. I projektet användes denna metod med en acceleration för att ta fram en hastighet. IMU:n är känslig för brus men har en hög samplingshastighet (1/ms) vilket medför att brusreducering är möjlig. För att IMU:ns prestanda ska maximeras och för att säkerställa bra mätresultat behöver den kalibreras innan användning då den vid förflyttningar samt över tid kan börja drifta. MbientLabs egna tillvägagångssätt [11] användes för att kalibrera IMU:n inför varje testtillfälle.

IMU:er utvecklas konstant och är ett attraktivt forskningsområde då de spelar en avgörande roll i utvecklingen av bland annat självgående fordon och drönare [12]. I samma studie undersöks om man kan ta fram exakt position med hjälp IMU:er för navigering på platser där GPS-signaler är svaga.

I detta projektet användes IMU:n, "MMS – MetaMotionS", vilken innehåller Bosch BMI270 som är ett MEMS med sex axlar. Den har en prestanda på vinkelmätning på $\pm 0,5$ °/s [13]. Det finns IMU:er på marknaden som har högre prestanda än denna men har då också en större kostnad. Exempel på det är ADIS16470 vilken har en prestanda på $\pm 3,5$ °/h för vinkelmätningen [13]. Den ger en mindre felmarginal för tester kortare än en minut men fortfarande inte obefintlig. Då gyroskop är en viktig del i att självkörande fordon ska fungera och vara säkra är detta ett område som utvecklas i snabb takt och med stora ekonomiska resurser. Till exempel har AI börjat integreras i IMU:er för att öka funktionaliteten [12].

2.4 Fotoceller

Fotoceller mäter passage av objekt genom att en ljuskälla i sensorenheten sänder ut en ljusstråle mot en reflektor. När ett objekt passerar och bryter ljusstrålen registrerar sensorn förändringen, vilket används för att bestämma den exakta tidpunkten för passagen. Tidpunkten sparas med en noggrannhet på millisekunder. Genom att placera ut flera fotoceller på ett utmätt avstånd mellan varandra kan en medelhastighet tas fram mellan två fotocellers positioner. Utifrån detta kan en hastighetsgraf tas ut och om två fotoceller står tillräckligt nära varandra resulterar det i en hastighet som kan anses momentan. Noggrannheten på det värdet beror på avståndet mellan fotocellerna.

3

Teknisk utveckling av mätutrustning

Inom produktutveckling är en väsentlig del av processen att kunna jämföra, utvärdera och vidareutveckla olika typer av koncept. För att uppnå detta tillämpas en rad olika metoder vilket medför att en optimal produkt tas fram i enlighet med projektets syfte.

3.1 Fördjupning kring friktionspåverkande variabler

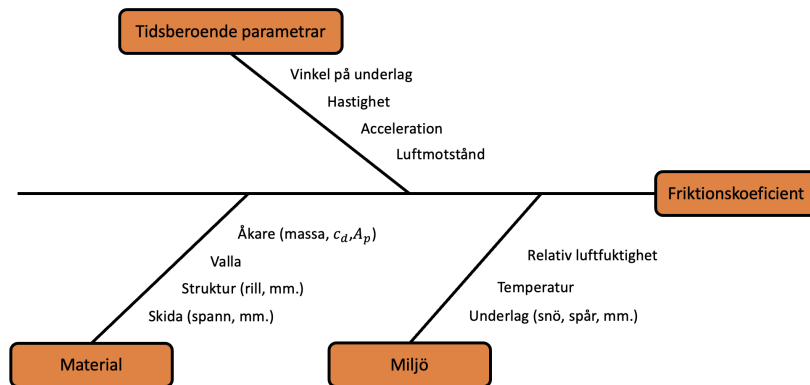
Projektets initiala fokus låg på att fördjupa förståelsen för friktionskoefficienten och hur den kan kvantifieras i praktiken. Arbetet inleddes med en fördjupning i den bakomliggande problemformuleringen, samt en undersökning av befintlig forskning och fysikaliska modeller som används för att beskriva och mäta friktion. En genomgång av vetenskapliga artiklar gav en helhetsbild av de faktorer som påverkar friktionen mellan skida och snö.

Eftersom friktionskoefficienten kan variera avsevärt med yttre faktorer som temperatur, relativ luftfuktighet och underlag, är det svårt att få jämförbara och reproducerbara testförhållanden i fält då dessa snabbt kan förändras [1], [14]. Detta medför utmaningar vid jämförelser mellan olika tester och försvårar både validering av mätutrustning och bedömning av resultatets tillförlitlighet. En positiv följd av att testerna genomfördes i en kontrollerad inomhusmiljö i Skidome var att påverkan från varierande yttre faktorer minimerades och därmed ökade möjligheten till jämförbara och reproducerbara testresultat.

Tidigare studier visade att mätningar under retardation generellt uppvisar lägre variation än under acceleration [1]. Detta indikerar att retardationsfasen ger mer stabila och tillförlitliga mätvärden. Utifrån detta valdes att fokusera på mätningar under retardation på plan mark.

Sammanfattningsvis identifierades flera viktiga faktorer som påverkar friktion, vilket var avgörande för både planering och utförande. För att tydliggöra dessa faktorer skapades ett fiskbensdiagram som visas i figur 3.1, där friktionskoefficienten presenteras som huvudproblem med tre underliggande huvudkategorier. Under respektive kategori tydliggörs de bakomliggande orsakerna som ansågs påverka friktionen. De

tidsberoende parametrarna såsom vinkel, hastighet, acceleration och luftmotstånd förändras under rörelse och behöver därmed mätas eller beräknas under testförloppet. Miljö som relativ luftfuktighet, temperatur och underlag är yttre påverkande faktorer som bör dokumenteras eller hållas konstanta mellan testtillfällena. Materialaspekter som valla, struktur, skida och åkarens egenskaper är saker som behöver specificeras.



Figur 3.1: Fiskbensdiagram över friktionspåverkande faktorer.

Fiskbensdiagrammet fungerade som ett stöd för den efterföljande idégenereringen, då de parametrar som behövde mätas, beräknas eller kontrolleras visualiserades på ett tydligt sätt.

3.2 Idégenerering för friktionsmätning

Idégenereringen i projektet utgick från behov och förutsättningar som identifierats tidigare under projektet med fokus på att utveckla en mjukvara som kan beräkna en friktionskoefficient. Mjukvaran bygger på rörelseekvationen (2.5) där parametrarna acceleration, hastighet och vinkel ingår. Fokus vid idégenerering låg därför på hur dessa parametrar kan mätas på ett tillförlitligt sätt under olika friktionsförhållanden och varierande miljö.

Idégenereringen genomfördes i form av brainstorming där olika tekniska lösningar diskuterades. Bland annat togs idéer fram kring användningen av sensorer såsom accelerometrar, inclinometrar och hastighetssensorer. Utöver själva mätningen behövdes ett system för att samla in och bearbeta data. Här diskuterades möjligheterna att använda en Raspberry Pi som datainsamlingsenhet.

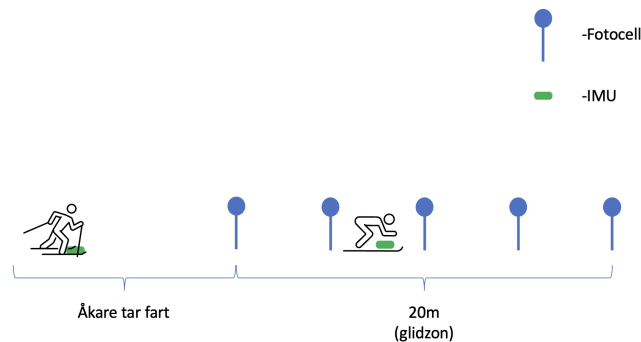
För att mäta rörelsevariablerna föreslogs användningen av en IMU, vilken var lämplig att montera direkt på skidan. Utöver själva hårdvaran medföljde även en tillhörande applikation för datainsamling, vilken underlättade för både konfigurering såsom samplingsfrekvens och export av mätdata. Detta innebar att en separat dataenhet, såsom en Raspberry Pi valdes bort.

3.3 Beräkning av hastighet

För att integrera hastigheten utifrån IMU:ns accelerationsdata krävs en starthastighet. Under projektet användes initialt fotoceller för att senare ersättas av magneter. Syftet var att hitta en tillförlitlig metod för att få fram starthastighet, samt att med fotoceller validera resultatet mot referensdata.

3.3.1 Integration av acceleration

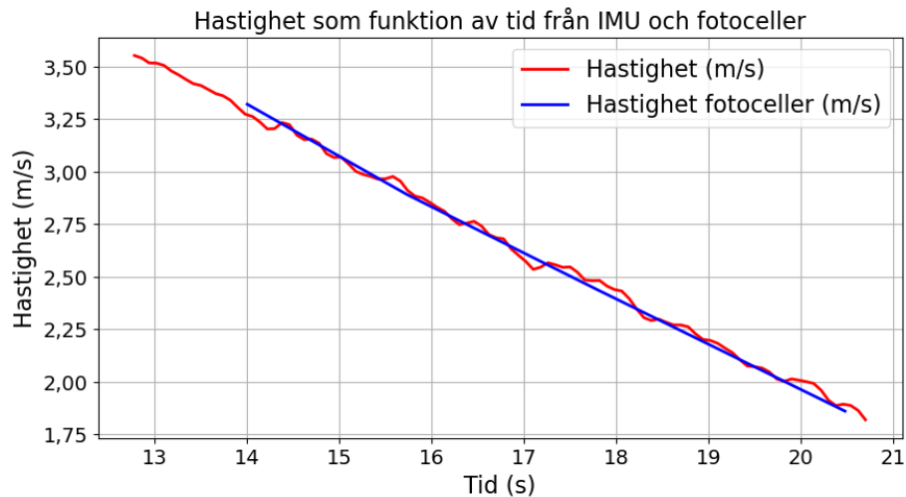
Tidigare projekt har visat att IMU:er ofta är otillräckliga för att ge tillförlitlig hastighetsdata, särskilt när hög precision är avgörande [14]. Därav blev en del av metodutvecklingen att verifiera hur väl den integrerade hastighetsprofilen stämmer överens med tillförlitlig data från fotoceller. Detta gjordes genom mätningar på rullskidor i ett testförfarande som utformats för att replikera ett glidtest på plan mark. Testförfarandet innebar att fem stycken fotoceller var utplacerade med respektive fem meters mellanrum i en idrottshall, se figur 3.2. Testpersonen tog fart genom bensparkar för att sedan glida i fartställning hela vägen.



Figur 3.2: Testförfarande i idrottshall för jämförelse av hastighet från fotoceller och IMU.

Fotoceller användes för att samla in referensdata som sedan jämfördes mot den integrerade hastighetsprofilen. I figur 3.3 illustreras jämförelsen mellan hastigheterna över tid från de två olika datakällorna, IMU:n med röd kurva och fotoceller med blå kurva.

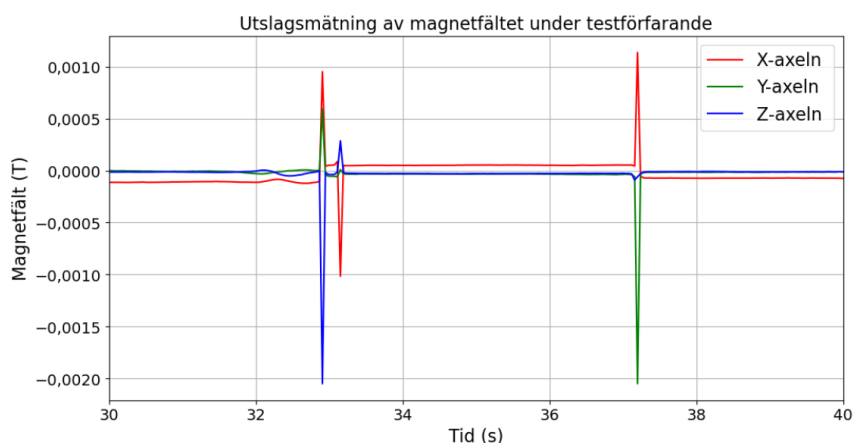
Resultatet visar att den integrerade hastigheten följer referenshastigheten. Detta tyder på att accelerationsmätning i kombination med en känd starthastighet är en möjlig metod för hastighetsberäkning. De små avvikelserna mellan profilerna kan troligen förklaras av brus. Trots detta indikerar resultatet att IMU:er kan vara tillräckligt noggranna för friktionsberäkningar vid liknande utföranden.



Figur 3.3: Hastighet som funktion av tid, där den röda linjen är framtagen genom att integrera data från en accelerometer och använda initialhastigheten från fotocellsdatan. Den blå linjen visar hastigheten framtagen av fotoceller.

3.3.2 Alternativ metod för att bestämma starthastighet

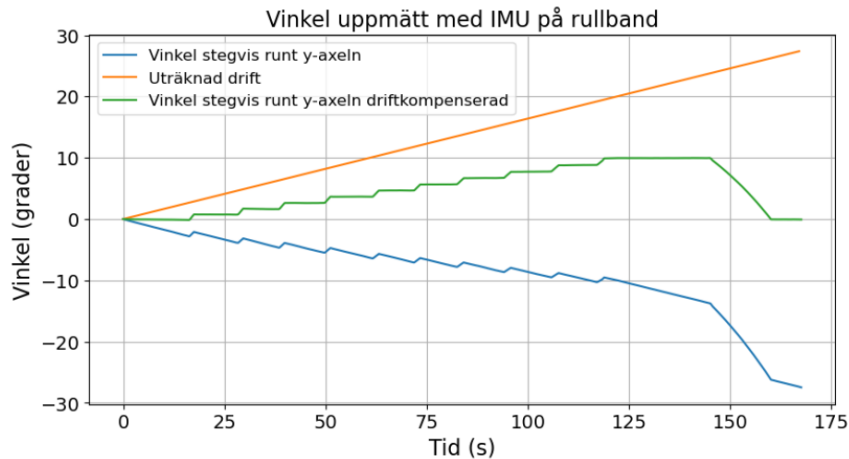
Som ett alternativ till fotoceller undersöktes magneter för att ta fram en starthastighet. Denna metod innebar att magneter placerade ut i skidspåret på samma positioner som fotocellerna tidigare varit placerade. Dessa kunde då ge toppar i IMU:ns magnetometer som kunde användas för att ta ut tidpunkter i datan. Med hjälp av dessa tidpunkter kunde sedan en starthastighet beräknas. Resultaten av denna metod var likvärdiga med resultaten från mätningarna med fotoceller. Baserat på detta beslutades det att gå vidare med magneter istället för fotoceller med motiveringen att det medförde lägre kostnad och bättre mobilitet för en slutprodukt.



Figur 3.4: Utslagen hos IMU:ns magnetfältsmätning under ett av testförfarandena.

3.4 Vinkelmätning

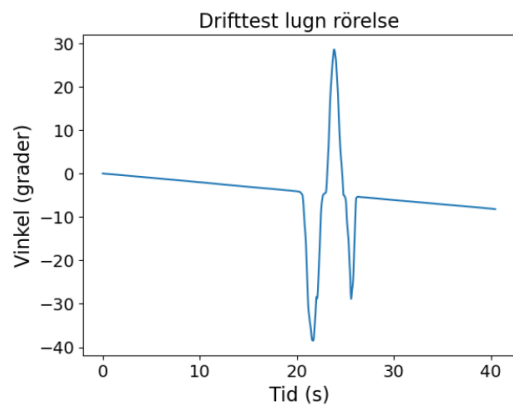
För att undersöka om IMU:er var en lämplig metod för vinkelmätning genomfördes tester på ett lutningsbart rullband. Testet innebar att IMU:n låg still på rullbandet som vinklades en grad var tionde sekund. Utifrån detta kunde datan för vinkeln hos IMU:n utvärderas, se figur 3.5.



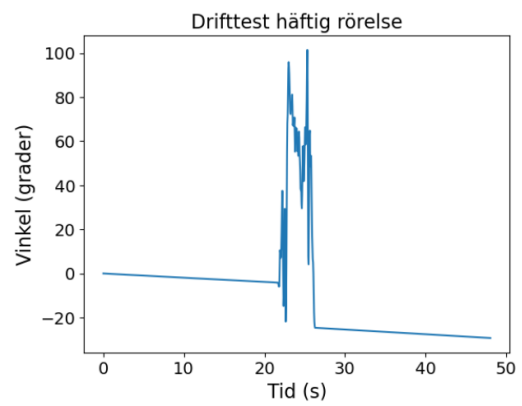
Figur 3.5: Resultat från vinkelmätning på ett rullband samt driftkompensation. Den blåa linjen visar ett test där vinkeln ökades stegvis med en grad per steg. Därefter har driften kompenserats med ett första gradens polynom, se orange linje. Detta medförde resultat i form av den gröna linjen.

Under testerna observerades att datan för vinkeln från IMU:n tenderade att drifta. Detta ledde till behovet av ytterligare tester för hur olika rörelsemönster påverkar driften och huruvida de kan kompenseras.

Två tester utfördes där IMU:n roterades. Ett långsamt test med kontrollerad rörelse, samt ett test med en hastig och abrupt rörelse. I det första fallet uppvisade IMU:n en linjär drift, se (a) i figur 3.6, vilket tyder på att en linjär driftkompensation skulle kunna vara tillräcklig under lugna rörelser. I andra fallet med en kraftfull rörelse uppvisade vinkeldatan ett kaotiskt mönster vilket kan ses i (b) i figur 3.6. I samband med dessa snabba rörelser kunde ett fenomen som kallas bottning observeras, där IMU:n förlorar sin referenspunkt vid vinkelmätning. Detta leder till att sensorn inte längre kan registrera korrekt vinkeldata vilket orsakar stora mätfel eller tar hänsyn till en ny felaktig vinkel. Därmed konstaterades att vinkelmätning med IMU:n inte är tillförlitlig vid kraftiga rörelser, eftersom både drift och bottning skapar mätfel som blir svåra att kompensera för.



(a) En IMU:s drift vid en lugn rörelse.



(b) En IMU:s drift vid en häftig rörelse.

Figur 3.6: Resultaten från drifttesterna som genomfördes för att undersöka potentialen i att använda IMU:er även för att beräkna vinkeln under testförfarandet.

4

Testupplägg och genomförande

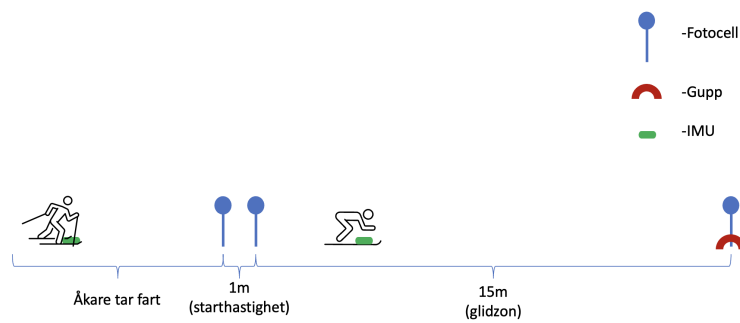
För att validera mättekniken och mätutrustningen genomfördes olika tester inne i Skidome. Testerna gjordes vid två tillfällen. Det första tillfället syftade till att se om metoden fungerade och det andra testtillfället syftade till att utvärdera hur väl den fungerade.

4.1 Första testtillfället i Skidome

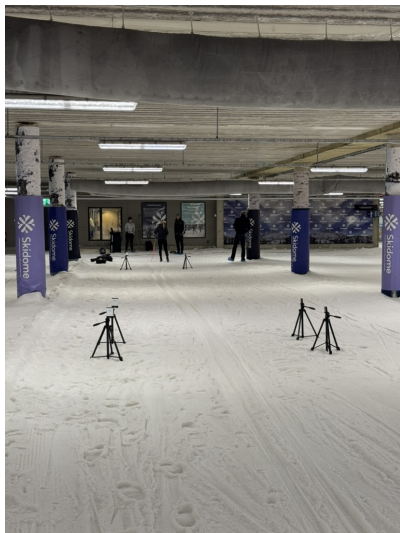
För att utvärdera systemets funktionalitet genomfördes ett första testtillfälle i Skidome under konstanta förhållanden. Syftet med testerna var att undersöka hur väl den framtagna mjukvaran tillhörande sensortekniken kunde beräkna en friktionskoefficient. Fotoceller användes för att mäta hastighet, dels för att få ut en starthastighet, men även för att validera hastighetsmätningen från IMU:n.

Eftersom detta var ett funktionstest valdes två par skidor med tydligt skilda friktionsegenskaper som testobjekt. Ett par skejtskidor som baserat på erfarenhet förväntades ha låg friktion och ett par skinsskidor som baserat på erfarenhet förväntades ha signifikant högre friktion. Denna kontrast förenklade bedömning av rimligheten i mjukvarans beräkning av friktionskoefficienten, då det fanns en tydlig skillnad i friktion.

Testuppställningen som syns i figurerna 4.1, 4.2 och 4.3 inkluderade tre fotoceller. Två av dessa placerades i början av teststräckan med ett avstånd på en meter mellan sig vilket möjliggjorde en beräkning av starthastigheten. Den tredje fotocellen placerades i slutet av sträckan, på ett avstånd av 15 meter från den andra fotocellen. Vid denna fotocell byggdes även ett gupp av snö i spåret för att ge en topp i vinkelmätningen på IMU:n och således kunna tidssynka IMU:n och fotocellerna. Behovet av denna åtgärd fanns på grund av att fotocellerna inte registrerar absolut tid utan endast relativa tidsstämplar från teststart. Genom att identifiera guppets topp i IMU:ns accelerationdata kunde det tolkas som en referenspunkt. Därefter räknades tiden bakåt utifrån fotocellernas tidpunkter, vilket kunde synkroniseras i relation till IMU:ns tidslinje.



Figur 4.1: Testförfarande i Skidome med fotoceller, IMU samt gupp.



Figur 4.2: Fotoceller uppställda i Skidome med 1 respektive 15 meter mellanrum.



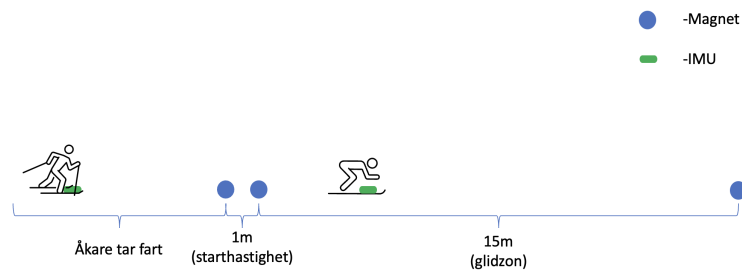
Figur 4.3: En IMU fastsatt med silvertejp på främre delen av skidan.

Tre test genomfördes på varje skidpar. Inför varje test placerades testpersonen på ett förutbestämt avstånd ifrån den första fotocellen. IMU:n startades 20 sekunder innan åkaren tog fart i syfte att samla in data och möjliggöra kompensering för drift i vinkelmätningen hos IMU:n. Vid varje försök tog testpersonen fart fram till den första fotocellen för att sedan glida resten av teststräckan.

4.2 Andra testtillfället i Skidome

Inför det andra testtillfället var målet att testa om mätutrustningen kunde känna skillnad på ett skidpar som var ovallade respektive vallade med glidvalla. Testet syftade även till att testa om magneter kunde användas för att beräkna starthastighet istället för fotoceller.

Testförfarandet var i övrigt likt det vid de första testerna, se figur 4.4. Istället för fotocellerna placerades magneter i snön. För att få så bra utslag i magnetometern i IMU:n som möjligt placerades magneterna i spåret så nära ytan som möjligt, se figur 4.5. Koner ställdes ut vid magneterna, för att tydliggöra magneternas position, se figur 4.6.



Figur 4.4: Testförfarande i Skidome med magneter och IMU.



Figur 4.5: Magnet placerad i skidspåret.



Figur 4.6: Kon utställd för att visa magnetens placering.

Två par skejtskidor testades med varsin åkare. Det första paret var av modell Fischer RCS Skate (benämns som skejtskidor 1 och används av testperson A) och det andra paret var av modell Fischer CRS Skate (benämns som skejtskidor 2 och används av testperson B). Vardera åkare åkte först tre test på ett par skidor. Därefter vallades skidorna med glidvalla utvald efter Skidomes förutsättningar. Efter att vallan hade preparerats på skidorna genomförde samma åkare tre nya test. Den andra åkaren gjorde exakt samma förfarande med det andra paret skidor.

5

Resultat

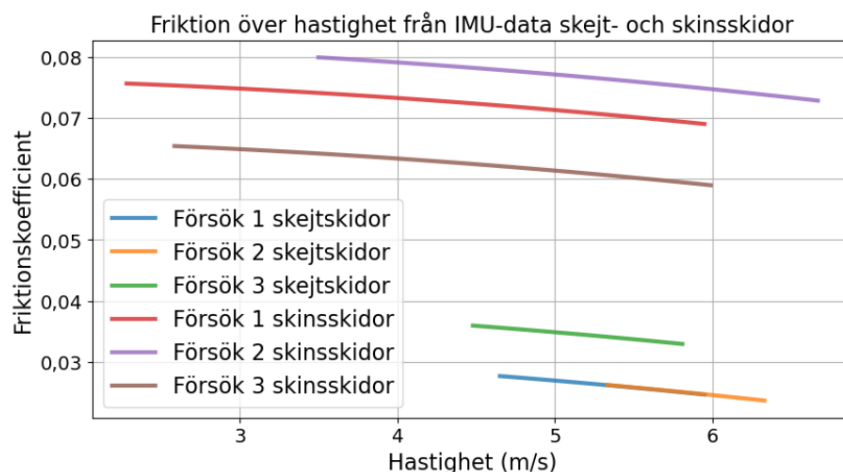
I följande avsnitt presenteras de resultat som har tagits fram. Både resultat för att undersöka friktionens variation mellan skejt- och skinsskidor och även mellan ovallade och glidvallade skejtskidor.

5.1 Skillnad i friktion mellan skejt- och skinsskidor

Resultaten från de första tillfället i Skidome som presenteras i avsnitt 4.1 visas upp i figur 5.1. I grafen går det att se variation i friktion mellan skejt- och skinsskidor. Detta visar att metoden fungerar för att urskilja skidor med stor variation i friktionskoefficient. Friktionen är presenterad som en funktion av hastigheten, alla sex tester påvisar att ökad hastighet medför minskad friktion.

För att få upp fart inför testerna skejtade testpersonen vilket ledde till fel i mätningen från gyroskopet då skejtskären blev för häftiga för IMU:ns prestanda. Vinkeln är därför satt till 0 i databehandlingen.

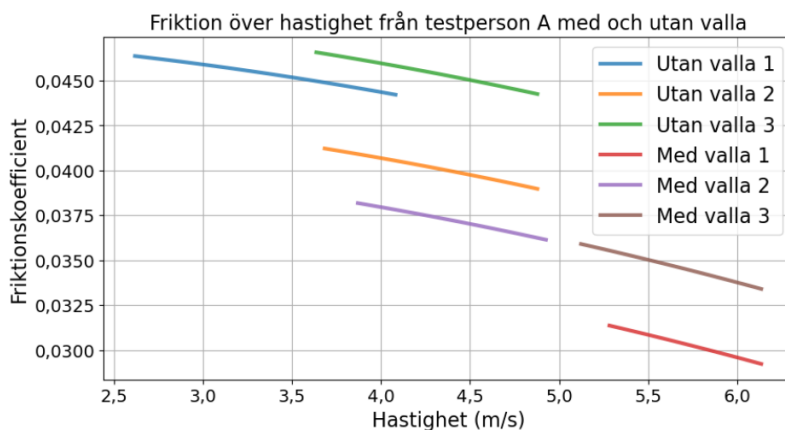
Resultatet är brusreducerat genom att accelerationen är approximerad till konstant över tidsintervallet av testet. Hastigheten är framtagen genom integration av accelerationen som då blir en rät linje med lutningen given av accelerationen och m-värdet givet av vad fotoceller beräknade starthastigheten till. Därefter är friktionskoefficienten beräknad för varje millisekund med rörelseekvation (2.5). Medelvärdet från både testet på skins- och skejtskidor finns presenterat i tabell 5.1.



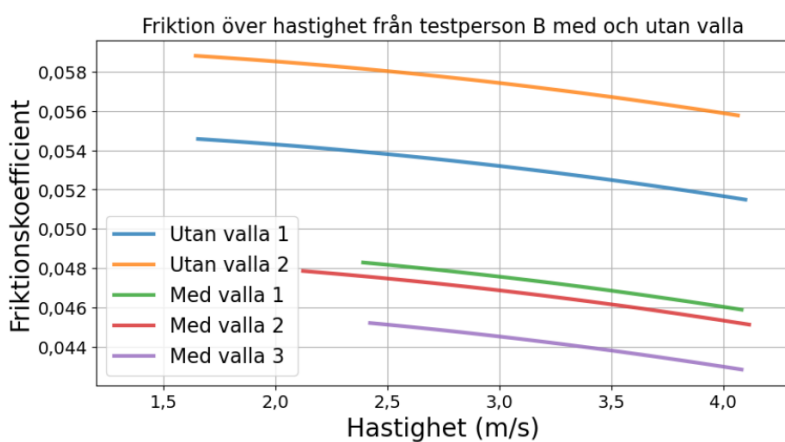
Figur 5.1: Friktionen för skejtskidor respektive skinsskidor.

5.2 Skillnad i friktion mellan ovallade och glidval-lade skejtskidor

Resultaten från andra testtillfället i Skidome som presenteras i avsnitt 4.2 visas upp i figur 5.2 där testperson A ses i figur (a) och testperson B i figur (b). Likt försöken där skejt och skinsskidor jämfördes går det även här att se att de ovallade skidorna har högre friktionskoefficient än de vallade. Genomsnittsskillnaden är 0,01 mellan före och efter vallning för både testperson A och testperson B. Friktionen är presenterad som en funktion av hastigheten, alla fem tester påvisar att ökad hastighet medför minskad friktion. För att ta fram resultatet har en liknande metod använts som för testerna i avsnitt 5.1. Enda skillnaden är att starthastigheten bestämdes med hjälp av magneter istället för fotoceller. Idén om att stakning skulle leda till att IMU:ns gyroskop inte skulle krascha under testförfarandet visade sig inte stämma. Därför är vinkeln satt till 0 även i denna dataanalys.



(a) Testperson A's testresultat



(b) Testperson B's testresultat

Figur 5.2: Friktion som funktion av hastighet där vissa försök är på glidvallade skidor och andra ovallade skidor.

5.3 Sammanställning av resultat från glidtester

Resultaten från de olika glidtesterna som har genomförts under projektets gång presenteras i tabell 5.1 och 5.2. I tabellerna innebär "medelvärde av glidfriktion" ett medelvärde av de två till tre tester som genomfördes med samma uppställning. Det går att se i figur 5.1 och 5.2 att friktionskoefficienten varierar med hastigheten. Variationen är liten och därav har den inte tagits i beaktning när medelvärdena är framtagna.

Tabell 5.1: Sammanställt resultat i form av medelvärden från glidtest 1 när skejtskidor jämfördes med skinsskidor.

Test	Testperson	Skidor	Medelvärde av glidfriktion
1	A	Skejtskidor	0,029
2	A	Skinsskidor	0,071

Tabell 5.2: Sammanställt resultat i form av medelvärden från glidtest 2 när 2 olika personer (A och B) åkte på 2 olika skidpar (1 och 2).

Test	Testperson	Skidor	Medelvärde av glidfriktion
3	A	Skejtskidor 1 ovallade	0,044
4	A	Skejtskidor 1 glidvallade	0,034
5	B	Skejtskidor 2 ovallade	0,055
6	B	Skejtskidor 2 glidvallade	0,046

Ett resultat som framgår utifrån tabell 5.1 och 5.2 är skillnaden på friktionskoefficient på testperson A's skejtskidor mellan de olika testtillfällena. I jämförelsen mellan skejtskidor och skinskidor får de en friktionskoefficient 0,029 vilken vid andra testtillfället istället ligger på cirka 0,044 respektive 0,034.

Detta kan förklaras utifrån att skidorna som använts till testerna inte enbart är avsedda till tester utan även använts privat, vilket i detta fallet också kan ha haft en relativt stor påverkan. Innan det första testtillfället var skidorna nyligen behandlade med både stålsickel och rill. De hade även preparerats med valla på grund av en resa till fjällen för vårskidåkning. Dessa förhållanden ansågs vara relativt likvärdiga förhållandena inomhus i Skidome, där snön bedöms ha en struktur liknande blötsnö och stor kornstorlek på snökristallerna. Inför det andra testtillfället hade skidorna istället åkt mycket i blötsnö och smutsiga spår, något som troligen påverkat den tidigare prepareringen. På detta vis går det att motivera trenden med högre friktionskoefficient vid det andra testtillfället.

6

Diskussion

I detta avsnitt diskuteras resultatets trovärdighet och testförfarandena. Utöver detta diskuteras den slutgiltiga mätmetodens ingående delar som IMU och magneter, samt vilken mätprecision som uppnåddes.

6.1 Resultatets trovärdighet

Vid båda tillfällena när glidtester har genomförts i Skidome har de skidor som förväntats ha högst friktion också haft det. Skillnaderna mellan alternativen var fortfarande stora och därmed blir det svårt att avgöra om mindre skillnader skulle vara möjliga att urskilja. Grafen i figur 5.2(a) visar att försöken ”Utan valla 2” och ”Med valla 2” har friktionskoefficienter närmre varandra än vad två försök med samma valla har. Detta tyder på att små skillnader är svåra att urskilja.

Alla försök har sambandet att friktionen minskar med ökad hastighet även om variationen över dessa hastigheter inte är jättestor. En liknande trend har observerats i tidigare studier [15], [16] som beskriver att friktion initialt minskar med ökad hastighet på grund av bildandet av en smörjande vattenfilm, men sedan ökar friktionskoefficienten med ännu högre hastigheter. Även en annan studie visar en liknande trend med minskad friktion med ökad hastighet [14]. Däremot visar ytterligare en annan studie ett icke-linjärt samband där friktionen är som lägst vid cirka 2 - 2.5 m/s och sedan ökar vid både högre och lägre hastigheter [1]. Med denna bakgrund kan resultatet i detta projekt reflektera ett verkligt samband men det är svårt att dra säkra slutsatser eftersom tidigare studier inte är entydiga i denna fråga.

En möjlig felkälla är att analysen bygger på en konstant acceleration och därav potentiellt missar information om att retardationen blir större vid högre hastigheter. Det har även undersökts om mätdatan kunde anpassas till ett linjärt samband mellan acceleration och tid. Denna metod gav dock orimliga hastigheter och utveckling av metoden förkastades.

Vid närmare studier av graferna går det att se att de inte är linjära. Detta innebär att friktionen minskar olinjärt med hastigheten. Eftersom hastighetstermen i ekvation (2.5) är den enda som är kvadratisk är det därför denna som ger den olinjära minskningen i den beräknade friktionskoefficienten med avseende på hastigheten, se figurerna 5.1 och 5.2. Den minskande trenden skulle alltså kunna bero på fel vid ansättningen av någon eller några av termerna m , c_d och A_p som multipliceras med

hastigheten i ekvation (2.5).

6.2 Mätprecision

I resultatet som presenteras i detta projekt är vinkeln θ satt till 0 eftersom driftproblemet uppstod när den togs i beaktning. Eftersom θ är en viktig parameter i ekvation (2.5) kommer den inte uteslutas i felanalysen. Istället kommer två olika värden att tas fram för $\Delta\mu$. Ett värde där θ hanteras som en konstant satt till 0 och ett värde där θ tas i beaktning utifrån testdata.

Tabell 6.1: Standardavvikelser och partiella derivator för respektive parameter som μ beror av i de sex glidtesterna.

Test	$\Delta\theta$	Δv	Δa	$\frac{\partial\mu}{\partial\theta}(\theta, v, a)$	$\frac{\partial\mu}{\partial v}(\theta, v)$	$\frac{\partial\mu}{\partial a}(\theta)$
1	0,30	0,42	0,064	0,99	-0,0020	-0,10
2	0,21	0,29	0,037	0,99	-0,0024	-0,10
3	0,30	0,78	0,022	0,99	-0,0020	-0,10
4	0,29	0,60	0,019	0,99	-0,0023	-0,10
5	0,58	0,011	0,021	0,99	-0,0013	-0,10
6	0,032	0,059	0,013	0,99	-0,0014	-0,10

Tabell 6.2: Totala osäkerheter i μ , dels med $\theta = 0$ och $\Delta\theta = 0$ samt dels med θ och $\Delta\theta$ från mätningar med IMU:n för de sex olika glidtesterna.

Test	$\Delta\mu(v, a, \Delta v, \Delta a)$	$\Delta\mu(\theta, v, a, \Delta\theta, \Delta v, \Delta a)$
1	$\pm 0,0065$	$\pm 0,0084$
2	$\pm 0,0038$	$\pm 0,0052$
3	$\pm 0,0027$	$\pm 0,0059$
4	$\pm 0,0024$	$\pm 0,0056$
5	$\pm 0,0021$	$\pm 0,0104$
6	$\pm 0,0013$	$\pm 0,0014$

I tabell 6.2 ses att felmarginalen $\Delta\mu$ konsekvent är högre när vinkeln tas i beaktning än när vinkeln är satt till 0, vilket kommer från att en mer variabel är inkluderad. Mätprecisionen när endast hastighet och acceleration är varierande är genomsnittligen mindre än $\pm 0,005$. När även vinkeln varierar är den genomsnittligen $\pm 0,007$ där test 5 och 6 utmärker sig som särskilt högt respektive särskilt lågt. Då vinkeln enbart beror på skidspåret borde både medelvärdena och standardavvikelsen för respektive test bli desamma. Utifrån detta borde mätprecisionen förändras lika mycket i alla test. Det gör den inte och därför anses mätningen vara försumbar och mätprecisionen för testerna är mindre än $\pm 0,005$.

I tabell 6.1 går det dock att se att $\frac{\partial\mu}{\partial\theta} \approx 1$. Det innebär att felet i vinkelparametern kommer vara identiskt med standardavvikelsen för vinkeln. Det optimala testförfa-

randet innebär att standardavvikelsen är 0 för vinkeln. För detta krävs väldigt bra mätutrustning. Istället blir slutsatsen för felanalysen att vinkelns påverkan till den totala mätprecisionen blir standardavvikelsen i vinkeln ($\Delta\theta$).

Den mänskliga faktorn under de olika testförfarandena kan vara bidragande till vissa skillnader i hastighet och acceleration. Ingångshastigheten samt att stå och ha tyngden på precis samma position är exempel på faktorer som kan påverka dessa skillnader. Givet det, viss begränsande mätprecision i mätutrustningen och val av analysmetod så är standardavvikelserna för Δv och Δa små. I tabell 6.1 ses att den partiella derivatan med avseende på hastigheten är mindre än den med avseende på accelerationen, med en större storleksskillnad än standardavvikelserna. Därför påverkar mätprecisionen av hastigheten den totala mätprecisionen minst.

6.3 Testförfarande

En potentiell osäkerhet i testförfarandena var att testerna genomfördes av två olika testpersoner. Det användes även två olika par skidor, med skillnader i både modell och grundpreparering, vilket kan ha påverkat resultatens jämförbarhet. De två olika testpersonerna hade olika mycket erfarenhet av längdskidåkning, vilket kan ge variationer i åkstil samt att det fanns en del osäkerheter i att avgöra exakt när åkaren kom ner i fartställning. Eftersom skidspåret svängde precis innan glidsträckan var det även svårt för testpersonerna att komma i rätt position vid rätt tillfälle och i samma hastighet vid varje testtillfälle.

Vid det första testtillfället byggdes även ett gupp som testpersonen åkte över för att möjliggöra synkronisering mellan IMU och fotoceller. Det finns en osäkerhet kring hur exakt denna synkronisering blev, eftersom små variationer i åkstil, position eller kontakt med guppet kan ha påverkat utslagets tydlighet i sensordatan. Detta kan i sin tur påverka precisionen i den tidsmässiga kopplingen mellan systemen.

Spårkvaliteten har också varierat i Skidome mellan de olika testerna. När de första testerna genomfördes var spåren mer uppåtkta då det gått längre tid sedan spårpreparering. De senare testerna genomfördes samma dag som spårpreparering, vilket istället medförde att spåren var i gott skick. Det är även svårt att säga hur kornstorleken av snökristallerna är i Skidome, där snön härstammar från iskross. Ett antagande är att kornstorleken är större för iskrossen än för natursnö. Det är även testpersonernas uppfattning att det går trögare att åka i Skidome än på natursnö. Med detta sagt går det inte med säkerhet att säga hur just Skidomes förhållanden påverkar testresultaten. Däremot har samtliga förhållanden förutom spårkvaliteten varit desamma vid alla test. Alltså går det inte att utesluta att förhållandena i Skidome exempelvis skulle ge systematiskt högre friktionskoefficienter än vad som skulle kunna uppmätas i natursnö eller under andra förhållanden. Detta är dock inget problem om målet är att kunna jämföra olika valla i samma förhållanden, så länge differenserna i friktionskoefficienterna är konsekventa.

6.4 Fotoceller och magneter

En eventuell brist vid mätningarna med magnetfält är att magnetometern gav utfall i växlande riktningar som vid ett perfekt förfarande borde ha varit samma. Detta kan bero på att magneterna i de olika mätpunkterna under testerna kan ha varit vridna åt olika håll, vilket i så fall resulterar i motsatta håll på magnetfälten. I figur 3.4 syns den första toppen som högst i z-led, vilket är så det borde vara när åkaren åker med skidan ovanför magneten i spåret. Den andra toppen kommer däremot i x-led, vilket motsvarar åkriktningen, medan den sista toppen som syns i y-led kan tolkas som ett utslag i sidled. Detta kan vara en sidoeffekt av att magneterna inte placerades helt vinkelrätt ner i snön, mot horisontalplanet. Topparna var fortsatt tydliga jämfört med magnetometers övriga data under hela testförfarandet. Att det inte alltid ges utslag i z-led kan innebära en osäkerhet i noggrannheten när toppen kom. Ett exempel på detta var när toppen kom i negativt x-led, alltså i den riktningen som åkaren kom ifrån, vilket kan innebära att toppen var mätt lite för tidigt.

Fotoceller kan även de introducera osäkerheter i mätresultaten beroende på uppställningen, eftersom bara små variationer i vinkeln mot reflektorn kan påverka registreringen. I detta projekt beräknades starthastigheten utifrån medelvärdet från de två första fotocellerna. Om fotocellerna inte står på exakt det avståndet som tas in i beräkningarna skulle detta påverka den beräknade starthastigheten. Eftersom fotocellerna var monterade på stativ kan ojämnheter i snön ha gjort att fotocellerna inte stått helt vinkelrätt mot underlaget, vilket kan ha påverkat avståndet mellan dem.

Synkroniseringen av data från fotocellerna med IMU-mätningar blir en extra faktor jämfört med magneter, som kan mätas direkt från IMU:n. Däremot har mätningarna med IMU:n och dess ingående parametrar inte heller gett en helt perfekt synkronisering av data. Trots att de tre olika mätningarna av acceleration, vinkel och magnetfält startades samtidigt, kunde ändå datan från IMU:n visa att de inte hade startat exakt samtidigt, mätt i epoch-tid.

Kvaliteten på testerna anses inte ha förändrats av att använda fotoceller respektive magneter för att beräkna starthastigheten och totaltiden på testerna.

6.5 IMU och mjukvara

I den aktuella prototypen har det funnits en begränsad kontroll över när IMU:n startar och stoppar insamling av data, vilket har lett till ett omfattande manuellt arbete med synkronisering och tolkning av datan. Trots detta anses IMU:n ha gett användbar information som motiveras av mätprecisionen i avsnitt 6.2. Detta till skillnad från liknande studier med IMU:er som helt avfärdat IMU-lösningar på grund av otillförlitliga mätvärden [17]. IMU:n som har använts i detta projektet är dock av enklare kvalitet, vilket tyder på att det med mer avancerade IMU:er går att uppnå bättre resultat [17].

En mer precis och högkvalitativ IMU skulle förhoppningsvis kunna minska bruset redan vid mättillfället, vilket inte bara skulle minska behovet av efterbearbetning, utan också öka tillförlitligheten i de resultat som analyseras [18], [12]. Att använda flera IMU:er som sitter bredvid varandra är även något som har visats ge bättre resultat än att endast ha en enskild IMU [18].

En ytterligare utmaning med den nuvarande IMU:n har varit den höga nivån av brus i den insamlade datan. Omfattande brusreducering har därför varit nödvändigt för att få fram användbar data. Även om dessa brusreduceringsfilter inte syftar till att förändra själva mätvärdena, utan snarare jämna ut datan så finns alltid en risk att viktiga detaljer i datan går förlorade i processen.

6.6 Vinkelmätning

Vinkeln som skidan har i förhållande till vertikalkplanet är en viktig del i framtagandet av friktionskoefficienten vilket framgår i avsnitt 2.2. Små fel i mätningen av vinkeln kan leda till betydande avvikelser i resultatet, vilket innebär att hög precision krävs för att minimera osäkerheten i friktionsberäkningen.

I testförfarandet var tanken att använda IMU:ns gyroskop för att beräkna vinkeln vilket är en lättillgänglig och användarvänlig metod. Under testfasen upptäcktes dock att gyroskopet uppvisar drift över tid. Genom att genomföra drifttester kunde driften bestämmas till linjär vilket redovisas i avsnitt 3.4. Det observerades samtidigt att även om driften alltid var linjär så visade test som utfördes vid olika tidpunkter, platser och olika lång tid efter kalibrering få olika mycket drift. För att hantera detta planerades att efter varje enskilt test räkna ut driften och kompensera bort den från datan. Problemet med att driften förändras även med tid och därigenom eventuellt inte är linjär under längre testförfaranden tas inte hänsyn till i denna metod. I de drifttester som har genomförts på upp till en minut har lineariteten bestått men detta kan vara bra att ta med framåt om intresse för längre testförfaranden finns.

Vid hastiga rörelser har vinkelmätningen i IMU:n visat ett ytterligare problem. Gyroskopets sensorer i IMU:n bottenar, vilket innebär att den överskrider de interna gränsvärdena och slutar mäta den faktiska vinkeln. Detta leder till att en felaktig referensvinkel antas vilket påverkar hela mätningen. Problemet är svårt att systematiskt kompensera för i efterhand genom dataanalys då både tidpunkt och storlek på avvikelserna är svåra att identifiera i datan.

För att komma undan problemet med att IMU:n bottenar vid hastiga rörelser anpassades metoden inför testförfarandet genom att begränsa rörelsen inför glidfaser till enbart stakning istället för skejtning. Detta syftade till att minimera plötsliga rörelser och stabilisera vinkelmätningen då skidan anses vara mer still av att farten i största mån tas med överkroppen vid stakning. Trots detta kvarstod problemet vilket potentiellt kan förklaras av att farten delvis behövde tas i en kurva på grund av

platsbrist vid testuppställningen. Detta ledde till att det trots allt innebar en hastig förflyttning av skidan även om det inte var via rena skejtskär. Optimalt skulle fart ha behövt tas på en helt rak sträcka genom stakning för att se om det var en möjlig lösning på problemet med kollaps av IMU:n.

Som följd av dessa problem behövde vinkeln ansättas till 0 vid analysen, vilket inte är helt optimalt då det är den parametern som påverkar mest vid små skillnader, se avsnitt 6.2. Eftersom testerna däremot gjordes i platta spår så bedöms påverkan av felen som begränsad.

Det är möjligt att en IMU med högre prestanda skulle kunna ge mer tillförlitlig vinkeldata med mindre driftstörningar, men det är inte något som undersökts vidare i detta projekt. Som diskuteras i avsnitt 6.5 finns det IMU:er med högre prestanda än den som använts och utvecklingen av IMU:er går snabbt. Ett rimligt antagande utifrån detta är att mer avancerade sensorer skulle kunna ge bättre resultat. En fundering som kvarstår är om det kan finnas bättre mätverktyg på marknaden för att ta fram vinkeln under rörelse än mätningar med IMU:n.

En motivering till att testerna fortfarande skulle kunna vara relevanta är att vinkeln påverkar på samma sätt i varje test vilket gör att det inte skapar större fel för ett test än ett annat. Om målet är att jämföra olika skidor och vallor på samma plats, exempelvis inför ett lopp så hade alltså detta felet inte bidragit på ett felaktigt sätt.

7

Slutsatser

Detta projekt visar att det med hjälp av en IMU går att mäta friktionskoefficienten på ett par längdskidor med en precision på cirka 0,005 vid ett glidtest som genomförs på plan mark. Metoden fungerar både med magneter och fotoceller och är tillräckligt känslig för att identifiera skillnader mellan olika skidor samt olika belagsprepareringar.

Resultat från testtillfällen visar på skillnader i friktionskoefficient mellan olika skidtyper och ytprepareringar. Detta bekräftar att metoden har potential att särskilja skidor med olika friktionsegenskaper vilket möjliggör objektiv jämförelse av glidfriktion och eliminerar subjektiva bedömningar. Mätprecisionen mellan testerna tyder på att metoden kan reproduceras.

För att nå högre precision krävs förbättrad vinkelmätning samt fortsatt utveckling av brusreducering för accelerationen. I detta projekt approximerats vinkeln till 0. Antagandet gjordes på grund av att testerna genomfördes i ett plant spår. Däremot förekommer det ändå små variationer i spårets lutning vilket påverkar resultatet.

Sammanfattningsvis indikerar resultaten att en mätuppställning med IMU och magneter eller fotoceller är tillräcklig för att kvantifiera friktionskoefficient för olika skidtyper och ytprepareringar. Metoden bör dock vidareutvecklas för att uppnå högre precision. Med fortsatt utveckling har denna metod potential att ersätta dagens subjektiva testmetoder.

8

Rekommendationer för framtida arbeten

8.1 Rekommendationer för glidtest

Det finns en relevans i att mängdtesta för att se tydligare trender i resultaten. Flera olika parametrar skulle då kunna testas. Att genomföra många exakt likadana tester på samma skidor skulle kunna ge en tydligare indikation på precisionen hos mättekniken. Genom att mängdtesta skulle det även gå att testa olika typer av glidvalla och skidor som är lika varandra. Skulle sådana test ge tydliga resultat skulle även användbarheten av metoden öka. För att säkerställa antaganden kring dragkraften behöver tester genomföras med olika testpersoner med olika vikt på samma skidor. Det är den här typen av mängdtester som behöver genomföras för att en mätteknik som denna skulle bli aktuell för användning inom elitskidåkning.

Eftersom det har visat sig uppstå problem med vinkelmätningen även vid stakning skulle det finnas en poäng i att endast testa glid efter en backe, likt ett traditionellt glidtest. Detta skulle kunna medföra att IMU:n utsätts för så låga störningar som möjligt eftersom rörelserna blir mindre hastiga. Detta skulle även kunna bidra till att testerna genomförs i högre hastigheter. Att genomföra testerna i högre hastighet skulle även kunna bidra till mer användbara resultat eftersom detta skulle vara närmre relevanta hastigheter under tävlingssammanhang.

Då samtliga tester genomfördes inomhus i Skidome med färre varierande parametrar än utomhus som tidigare diskuterats i 6.3, skulle det behöva göras fler tester utomhus på olika typer av snö för att vidare kunna dra slutsatser om metoden ger tillförlitliga resultat.

8.2 Fotoceller och magneter

Som diskuterat i avsnitt 6.4 ger användning av fotoceller och magneter för hastighetsberäkningar likvärdiga resultat. Om endast magneter används kommer all data från IMU:n, vilket innebär att mättekniken blir mer portabel och lättanvänd. Magneter är även avsevärt billigare än fotoceller, vilket även det är något som ökar tillgängligheten. Något som dock bör säkerställas är att IMU:s magnetometer endast tar upp signaler i ett och samma led. Detta skulle kunna åstadkommas genom att fästa en magnet som har en tydlig dragningskraft i ett led på ett plant objekt, som

en tunn skiva. Denna skulle sedan kunna placeras under snön för att säkerställa att magnetfältet verkar vinkelrätt mot IMU:n.

8.3 IMU och mjukvara

Som tidigare nämnt i diskussionsavsnittet 6.5 går många av osäkerheterna i det här projektet att koppla till IMU:n som har använts. En rekommendation för fortsatta studier inom samma område är därför att använda en så modern och högpresterande IMU som möjligt. En rekommendation för fortsatt arbete är även att jobba vidare med utveckling av en mjukvara som kan läsa av data från IMU:n automatiskt. Att använda andra former av brusreducering än vad som är gjort i detta projektet är även något som skulle vara intressant att studera.

Referenser

- [1] J. Sandberg m.fl., "A Novel Free-Gliding Ski Tribometer for Quantification of Ski–Snow Friction with High Precision," *Tribology Letters*, årg. 71, nr 111, sept. 2023. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11249-023-01781-w>.
- [2] K. Kalliorinne m.fl., "Quantifying Cross-Country Ski–Snow Friction using Real-Time Kinematic Positioning," *Friction*, årg. 13, nr 4, april 2024. DOI: <https://doi.org/10.26599/FRICT.2025.9441011>.
- [3] Svenska Skidförbundet, "Fluorfri verksamhet,"2024. [Online]. URL: <https://www.skidor.com/for-foreningar/driva-forening/hallbarhet/fluorfri-verksamhet> (hämtad 2025-04-09).
- [4] Tognar Toolworks, "How to Choose the Right Ski Wax", [Online]. URL: <https://www.tognar.com/how-to-choose-the-right-ski-wax/> (hämtad 2025-05-08).
- [5] The Swedish School of Sport and Health Sciences (GIH), "Försvinner valla-teamen när fluorvallen förbjuds?,"2024. [Online]. URL: <https://www.gih.se/om-gih/aktuellt/nyheter/nyheter/2024-03-01-forsvinner-vallateamen-nar-fluorvallen-forbjuds> (hämtad 2025-05-01).
- [6] M. Ainegren och P. Jonsson, "Drag Area, Frontal Area and Drag Coefficient in Cross-Country Skiing Techniques," *Proceedings*, årg. 2, nr 6, s. 313, febr. 2018. DOI: <https://doi.org/10.3390/proceedings2060313>.
- [7] Wikipedia, "Inertial measurement unit,"2025. [Online]. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Inertial_measurement_unit (hämtad 2025-04-27).
- [8] MMS – MetaMotionS, Lantz ave San Jose, USA: MBIENTLAB, [Online]. URL: <https://mbientlab.com/store/metamotions/> (hämtad 2025-04-27).
- [9] Wikipedia, "Unixtid,"2025. [Online]. URL: <https://sv.wikipedia.org/w/index.php?title=Unixtid&oldid=56622477> (hämtad 2025-05-02).
- [10] Wikipedia, "Död räkning,"2023. [Online]. URL: https://sv.wikipedia.org/wiki/D%C3%B6d_r%C3%A4kning (hämtad 2025-05-07).
- [11] Sensor Calibration – MbientLab, [Online]. URL: <https://mbientlab.com/tutorials/Calibration.%20html?highlight=calibration> (hämtad 2025-05-12).
- [12] The Business Research Company, "Inertial Measurement Unit Global Market Report 2025," Global Information, 2025. [Online]. URL: <https://www.giiresearch.com/report/tbrc1650477-inertial-measurement-unit-global-market-report.html> (hämtad 2025-04-27).
- [13] IMUs - Inertial Measurement Units, Bosch Sensortec, 2025. [Online]. URL: <https://www.bosch-sensortec.com/products/motion-sensors/imus/> (hämtad 2025-04-27).

- [14] M. Swarén, L. Karlöf, H.-C. Holmberg och A. Eriksson, “Validation of Test Setup to Evaluate Glide Performance in Skis,” *Sports Technology*, årg. 7, nr 1–2, s. 89–97, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1080/19346182.2014.968164>.
- [15] S. C. Colbeck, “The Kinetic Friction of Snow,” *Journal of Glaciology*, årg. 34, nr 116, s. 78–86, 1988. DOI: <https://doi.org/10.3189/S0022143000009096>.
- [16] S. Colbeck, “A review of the friction of snow skis,” *Journal of Sports Sciences*, årg. 12, nr 3, s. 285–295, 1994. DOI: <https://doi.org/10.1080/02640419408732174>.
- [17] F. Breitschædel, V. Berre, R. Andersen och E. Stjernstrøm, “A comparison between timed and IMU captured Nordic ski glide tests,” *Procedia Engineering*, årg. 34, s. 397–402, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2012.04.068>.
- [18] J. Xuan, T. Zhu, G. Peng, F. Sun och D. Dong, “A Review on the Inertial Measurement Unit Array of Microelectromechanical Systems,” *Sensors*, årg. 24, nr 22, s. 7140, nov. 2024. DOI: <https://doi.org/10.3390/s24227140>.

A

Mjukvara

```
1 #Kod för brusreducering och framtagning av mu
2 #Importerera data
3 import pandas as pd
4 import numpy as np
5 import matplotlib.pyplot as plt
6 from scipy.integrate import cumulative_trapezoid
7
8 #Indata
9
10 glid_acc_rå1 = pd.read_csv('carro4valla_acc.csv')
11
12
13 glid_gyro_rå1 = pd.read_csv('carro4valla_gyro.csv')
14
15
16 glid_mag_rå1 = pd.read_csv('carro4valla_mag.csv')
17
18 glid_acc_rå2 = pd.read_csv('carro5valla_acc.csv')
19 glid_gyro_rå2 = pd.read_csv('carro5valla_gyro.csv')
20 glid_mag_rå2 = pd.read_csv('carro5valla_mag.csv')
21
22
23 glid_acc_rå3 = pd.read_csv('carro6valla_acc.csv')
24 glid_gyro_rå3 = pd.read_csv('carro6valla_gyro.csv')
25 glid_mag_rå3 = pd.read_csv('carro6valla_mag.csv')
26
27
28
29 glid_mag_1 = glid_mag_rå1
30 glid_mag_2 = glid_mag_rå2
31 glid_mag_3 = glid_mag_rå3
32
33 #Start, slut och starthastighet
34 index_peak1_test1 = np.argmax(glid_mag_1["x-axis (T)"])
35 glid_mag_1_time = glid_mag_1["elapsed (s)"]
36 start_time_test1 = glid_mag_1_time[index_peak1_test1]
37
38
39 index_peak2_test1 = np.argmin(glid_mag_1["y-axis (T)"])
40 meter1_time_test1 = glid_mag_1_time[index_peak2_test1]
41
42 index_peak3_test1 = np.argmin(glid_mag_1["x-axis (T)"])
43 meter16_time_test1 = glid_mag_1_time[index_peak3_test1]
44
```

```

45 start_velocity1 = 1 / (meter1_time_test1 - start_time_test1)
46 print(start_time_test1, meter1_time_test1, start_velocity1,
      meter16_time_test1)
47
48 index_peak1_test2 = np.argmax(glid_mag_2["z-axis (T)"])
49 glid_mag_2_time = glid_mag_2["elapsed (s)"]
50 start_time_test2 = glid_mag_2_time[index_peak1_test2]
51
52 index_peak2_test2 = np.argmax(glid_mag_2["x-axis (T)"])
53 meter1_time_test2 = glid_mag_2_time[index_peak2_test2]
54
55 index_peak3_test2 = np.argmin(glid_mag_2["z-axis (T)"])
56 meter16_time_test2 = glid_mag_2_time[index_peak3_test2]
57
58 start_velocity2 = 1 / (meter1_time_test2 - start_time_test2)
59 print(start_time_test2, meter1_time_test2, start_velocity2,
      meter16_time_test2)
60
61
62 index_peak1_test3 = np.argmax(glid_mag_3["y-axis (T)"])
63 glid_mag_3_time = glid_mag_3["elapsed (s)"]
64 start_time_test3 = glid_mag_3_time[index_peak1_test3]
65
66 index_peak2_test3 = np.argmin(glid_mag_3["y-axis (T)"])
67 meter1_time_test3 = glid_mag_3_time[index_peak2_test3]
68
69 glid_mag_3_z = glid_mag_3["z-axis (T)"].iloc[900:].copy()
70 index_peak3_test3 = np.argmin(glid_mag_3_z)
71 meter16_time_test3 = glid_mag_3_time[index_peak3_test3 + 900]
72
73 start_velocity3 = 1 / (meter1_time_test3 - start_time_test3)
74 print(start_time_test3, meter1_time_test3, start_velocity3,
      meter16_time_test3)
75
76
77 glid_acc_1 = glid_acc_râ1.iloc[index_peak2_test1 + 20:
      index_peak3_test1].copy()
78 glid_gyro_1 = glid_gyro_râ1.iloc[index_peak2_test1 + 20:
      index_peak3_test1].copy()
79 glid_acc_2 = glid_acc_râ2.iloc[index_peak2_test2 + 14:
      index_peak3_test2 ].copy()
80 glid_gyro_2 = glid_gyro_râ2.iloc[index_peak2_test2 + 14:
      index_peak3_test2 ].copy()
81 glid_acc_3 = glid_acc_râ3.iloc[index_peak2_test3 + 18:
      index_peak3_test3 + 900].copy()
82 glid_gyro_3 = glid_gyro_râ3.iloc[index_peak2_test3 + 18:
      index_peak3_test3 + 900].copy()
83
84 #Hastighet
85 time1 = glid_acc_1["elapsed (s)"].values
86 acceleration1 = glid_acc_1["x-axis (g)"].values
87 acceleration1 = [x * 9.82 for x in acceleration1]
88 acceleration1 = np.mean(acceleration1)
89 acceleration1 = np.full(time1.shape, acceleration1)
90
91 velocity1 = cumulative_trapezoid(acceleration1, time1, initial=0)

```

```

92 velocity1 += start_velocity1
93
94 time2 = glid_acc_2["elapsed (s)"].values
95 acceleration2 = glid_acc_2["x-axis (g)"].values
96 acceleration2 = [x * 9.82 for x in acceleration2]
97 acceleration2 = np.mean(acceleration2)
98 acceleration2 = np.full(time2.shape, acceleration2)
99 velocity2 = cumulative_trapezoid(acceleration2, time2, initial=0)
100 velocity2 += start_velocity2
101
102 time3 = glid_acc_3["elapsed (s)"].values
103 acceleration3 = glid_acc_3["x-axis (g)"].values
104 acceleration3 = [x * 9.82 for x in acceleration3]
105 acceleration3 = np.mean(acceleration3)
106 acceleration3 = np.full(time3.shape, acceleration3)
107 velocity3 = cumulative_trapezoid(acceleration3, time3, initial=0)
108 velocity3 += start_velocity3
109
110
111 plt.figure(figsize=(10, 5))
112 plt.plot(time1, acceleration1, label = "Acceleration 1 (m/s**2)")
113 plt.plot(time2, acceleration2, label = "Acceleration 2 (m/s**2)")
114 plt.plot(time3, acceleration3, label = "Acceleration 3 (m/s**2)")
115 plt.plot(time1, velocity1, label="Hastighet 1 (m/s)")
116 plt.plot(time2, velocity2, label="Hastighet 2 (m/s)")
117 plt.plot(time3, velocity3, label="Hastighet 3 (m/s)")
118
119 plt.xlabel("Tid (s)")
120 plt.ylabel("Hastighet (m/s) / Acceleration")
121 plt.title("Hastighet/Acceleration över tid från IMU-data")
122 plt.legend()
123 plt.grid()
124 plt.show()
125
126
127 #Beräkna friktionskoefficient
128 rho = 1.293
129 C_DA = 0.2
130 m = 60
131 g = 9.82
132 friction101 = - (rho * C_DA * velocity1**2)/(2 * m * g ) -
    acceleration1 / (g )
133 friction201 = - (rho * C_DA * velocity2**2)/(2 * m * g ) -
    acceleration2 / (g )
134 friction301 = - (rho * C_DA * velocity3**2)/(2 * m * g ) -
    acceleration3 / (g )
135
136 #Plotta friktionskoefficienten över hastigheten
137 plt.figure(figsize=(10, 5))
138 plt.plot(velocity1, friction101, label="Friktionskoefficienten 1
    vinkel = 0", linewidth=2)
139 plt.plot(velocity2, friction201, label="Friktionskoefficienten 2
    vinkel = 0", linewidth=2)
140 plt.plot(velocity3, friction301, label="Friktionskoefficienten 3
    vinkel = 0", linewidth=2)
141 plt.xlabel("Hastighet (m/s)")

```

```

142 plt.ylabel("Friktion")
143 plt.title("Friktion över hastighet från IMU-data Carro med valla")
144 plt.legend()
145 plt.grid()
146 plt.show()
147
148 #Kod för felanalysen
149
150 #Framtagning av medelvärden och standardavvikelser
151 mean_a123 = ( acceleration1[0] + acceleration2[0] + acceleration3
152             [0] ) / 3
153
154 standardavvikelse_a123 = np.sqrt(( ( acceleration1[0] - mean_a123 )
155                                 **2 + ( acceleration2[0] - mean_a123 )**2 + ( acceleration3[0] -
156                                 mean_a123 )**2) / 3)
157
158 mean_v123 = ( np.mean(velocity1) + np.mean(velocity2) + np.mean(
159             velocity3) ) / 3
160
161 standardavvikelse_v123 = np.sqrt(( ( np.mean(velocity1) - mean_v123
162                                 )**2 + ( np.mean(velocity2) - mean_v123 )**2 + ( np.mean(
163                                 velocity3) - mean_v123 )**2) / 3)
164
165 print(mean_a123, mean_v123)
166 print(standardavvikelse_a123, standardavvikelse_v123 )
167
168 # Funktioner för att beräkna mu och Delta mu
169
170 k = rho * C_DA / ( 2 * m * g)
171
172 def mu(theta, v, a):
173     theta = np.asarray(theta)
174     v = np.asarray(v)
175     a = np.asarray(a)
176     return np.tan(theta) - k * v**2 / np.cos(theta) - a / (g * np.
177     cos(theta))
178
179
180 def mu_uncertainty(theta, v, a, dtheta, dv, da):
181     theta = np.asarray(theta)
182     v = np.asarray(v)
183     a = np.asarray(a)
184     dtheta = np.asarray(dtheta)
185     dv = np.asarray(dv)
186     da = np.asarray(da)
187
188     dmu_dtheta = ( 1 / np.cos(theta))**2 \
189                 + k * v**2 * np.sin(theta) / np.cos(theta)**2 \
190                 + a * np.sin(theta) / (g * np.cos(theta)**2)
191
192     dmu_dv = -2 * k * v / np.cos(theta)
193     dmu_da = -1 / (g * np.cos(theta))
194
195     delta_mu = np.sqrt(
196         (dmu_dtheta * dtheta)**2 +
197         (dmu_dv * dv)**2 +
198         (dmu_da * da)**2

```

```

191     )
192
193     return delta_mu, dmu_dtheta, dmu_dv, dmu_da
194
195 #Delta mu
196 # Vinkeln satt till 0 och även dess avvikelser
197
198 theta = np.radians(np.array([0, 0, 0, 0, 0, 0]))
199 v = np.array([4.4959528956281885, 5.42619419504588,
200              4.6125767380122795, 5.245025280741813, 2.8658064652753206,
201              3.202719521593718])
202 a = np.array([-0.7403013509286412, -0.3450129931425164,
203              -0.4633414488802337, -0.39485529019003596, -0.5625654035087719,
204              -0.47428332756132763 ])
205
206 dtheta = np.radians(np.array([0, 0, 0, 0, 0, 0 ]))
207 dv = np.array([0.42243231558059813, 0.2945304685618283,
208              0.7811879137484843, 0.6000090757586153
209              , 0.010924368240166071, 0.059397293242081525, ])
210 da = np.array([0.06377372187119057, 0.036536165645880976,
211              0.02169090192167647, 0.018888140355473582, 0.02074259649122806,
212              0.012792445885242552])
213
214 mu_values = mu(theta, v, a)
215 mu_errors, dmu_theta, dmu_dv, dmu_da = mu_uncertainty(theta, v, a,
216              dtheta, dv, da)
217
218 for i in range(len(mu_values)):
219     print(f"Î [{i}] = {mu_values[i]:.4f} Ås {mu_errors[i]:.4f}", f"
220           Vinkel derivata{dmu_theta[i]:.4f}", f"Hastighets derivata{dmu_dv
221           [i]:.4f}", f"Accelerations derivata{dmu_da[i]:.4f}")
222
223 # Vinkeln inkluderad
224
225 theta = np.radians(np.array([1.2924510382534826,
226              1.0726235362429601, 1.0355204161010096, 0.6140055122186444,
227              0.34731402005014006, 1.0333278308386842]))
228
229 v = np.array([4.4959528956281885, 5.42619419504588,
230              4.6125767380122795, 5.245025280741813, 2.8658064652753206,
231              3.202719521593718])
232 a = np.array([-0.7403013509286412, -0.3450129931425164,
233              -0.4633414488802337, -0.39485529019003596, -0.5625654035087719,
234              -0.47428332756132763 ])
235
236 dtheta = np.radians(np.array([0.3006311141791708,
237              0.20618476175069514, 0.301227228102583, 0.2920044991649912,
238              0.581193234335965, 0.03151975910988741 ]))
239 dv = np.array([0.42243231558059813, 0.2945304685618283,
240              0.7811879137484843, 0.6000090757586153
241              , 0.010924368240166071, 0.059397293242081525 ])
242 da = np.array([0.06377372187119057, 0.036536165645880976,
243              0.02169090192167647, 0.018888140355473582, 0.02074259649122806,
244              0.012792445885242552])

```

```
226
227 mu_values1 = mu(theta, v, a)
228 mu_errors1, dmu_theta1, dmu_dv1, dmu_da1 = mu_uncertainty(theta, v,
229     a, dtheta, dv, da)
229
230 for i in range(len(mu_values1)):
231     print(f"Î [{i}] = {mu_values1[i]:.4f} Åš {mu_errors1[i]:.4f}",
232         f"Vinkel derivata{dmu_theta1[i]:.4f}", f"Hastighets derivata{
233         dmu_dv1[i]:.4f}", f"Accelerations derivata{dmu_da1[i]:.4f}")
```

INSTITUTIONEN FÖR INDUSTRI- och MATERIALVETENSKAP
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

Göteborg, Sverige

www.chalmers.se



CHALMERS