

Gauss remarkabla sats och matematisk kartografi

Ytors krökning och matematiken bakom kartprojektioner

Gauss remarkable theorem and mathematical cartography

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet

Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers

My Linh Dao

Ludvig Granath

Eric Löwendahl

Mandreja Söderberg

Gauss remarkabla sats och matematisk kartografi

Ytors krökning och matematiken bakom kartprojektioner

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet

My Linh Dao

Examensarbete för kandidatexamen i matematik inom Matematikprogrammet vid Göteborgs universitet

Eric Löwendahl

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Globala system vid Chalmers

Mandreja Söderberg

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik vid Chalmers

Ludvig Granath

Handledare: Genkai Zhang

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2025

Förord

Detta arbete studerar teorin från differentialgeometri för att bland annat undersöka krökningar av ytor samt förklara varför en perfekt platt karta av jorden inte existerar, som en följd av Gauss remarkabla sats. Därmed förväntas läsaren ha kunskaper inom linjär algebra och flervariabelanalys.

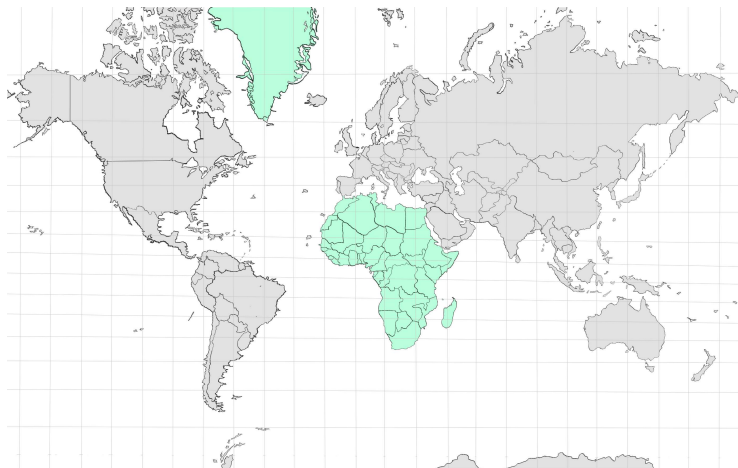
Under projektet har det förts en veckovis dagbok som hanterats rullande bland medlemmarna. Även en individuell tidslogg har dokumenterats i dagboken. Syftet med dagboken och tidsloggen är att logga gruppmöten samt medlemmarnas bidrag till arbetet, för att framföra arbetsprocessen. Under arbetsprocessen har vi diskuterat innehållet i varje kapitel, där varje gruppmedlem har fått följande egna huvudansvar:

- Linh: delkapitel 1.1, kapitel 3, appendix A, förord.
- Ludvig: delkapitel 2.2, delkapitel 4.3, populärvetenskaplig presentation.
- Eric: delkapitel 1.3, delkapitel 2.1, appendix B, AI-användande.
- Mandreja: delkapitel 1.2, delkapitel 4.1 och 4.2, kapitel 0, appendix C.

Utöver detta har sammanfattning, Abstract, källhantering och notationstabell i appendix A.4 skrivits gemensamt. Figurena, samt bilden på framsidan, är gjorda i programmen Clip Studio Paint, Canva eller Samsung Notes om inget annat angetts. Slutligen vill vi tacka vår handledare Genkai Zhang för hans visdom och engagemang samt rådgivning.

Populärvetenskaplig presentation

Många av oss har nog hört att de kartor vi oftast använder innehåller felaktigheter, exempelvis att de visar Grönland som lika stort som Afrika trots att Afrika i verkligheten är ungefär 14 gånger så stort [12]. Varför gör vi inte kartor som är bättre än så? I detta arbete är det frågan vi ställer oss. Ett matematiskt resonemang förs som slutar i ett bevis för att vi inte kan skapa en karta som är "perfekt". Därefter diskuteras vilka egenskaper det är möjligt för en konstruerad karta att ha.



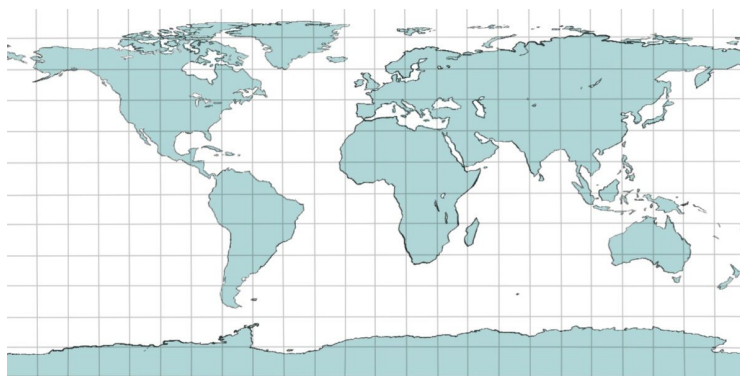
Figur 1: Afrika och Grönland som är grönmärkerade ser ungefär lika stora ut på kartan men i verkligheten är Afrika betydligt större än Grönland.

Från den första gången en primitiv människa beskrivit en stig i skogen genom att dra linjer med en pinne i jord, till kartläggning vid dagens upptäckter av solsystemets avlägsnaste himlakroppar, har den kartografiska vetenskapen tagit form. Hur en karta skapas är frågan om hur en enorm yta – en skog, en planet, en galax – målas av på något mycket mindre – en jordplätt, en bit papper. Det är frågan om vilken information vi bryr oss om att bevara, om vilken information som kan förvanskas i denna kraftiga förminskning av verkligheten till något lätt överblickbart. Det viktiga är nog sjön och stenbumlingen med det specifika utseendet, inte varje buske och varje grus.

För kartor som avbildar hela eller stora delar av jorden är det ännu mer vi måste försumma. Beroende på varför en karta skapas kanske vi till och med försummar allting vi har på jorden, allt liv och alla märkvärdigheter, förutom exempelvis var nationsgränser ligger. När vi jobbar med kartor av jorden uppstår ytterligare ett problem, förutom att vi målar av så mycket på så lite. Vi vill också måla av något runt – jordklotet – på något platt – kartan. Dessa målade platta kartor av den runda jorden kallas för *kartprojektioner*. När den primitiva människan drog kartan över skogen var inte det ett problem hon hade, jorden är ju så enorm att vi knappast märker av någon rundhet i vanliga fall.

Att jorden är ett klot har inte alltid varit känt. Under de sex sista århundradena före vår tideräkning blev världens rundhet allt mer av ett tydligt faktum [8]. Även om det skulle komma att dröja många fler århundraden innan andra felkällor blev så små att felen som skapas av en kartprojektion från en sfär blev viktiga, så började det redan under denna tid designas olika sätt att projicera sfären på en platt karta. En av de tidigaste matematiskt formulerade kartprojektionerna är den *lik-rektangulära projektionen* som visas i Figur 2. Projektionen skapas genom att projicera nordpolen till kartans övre kant, och sydpolen till kartans nedre kant. Därefter projiceras longituder till vertikala räta linjer och latituder till horisontella räta linjer över kartan med proportionerliga avstånd så att ett rutnät bildas, i vilket alla vertikala avstånd bevaras. Denna projektion saknar flera egenskaper som kan anses eftersträvansvärda för en karta. Exempelvis avbildar kartan alla latituder som lika långa som kartans bredd, trots att de har olika längd beroende på hur nära ekvatorn eller polerna de ligger.

Eftersom vad som kan anses vara "bra" med en karta är subjektivt och beror på vad kartan vill informera om, finns det inget objektiva svar på vilka egenskaper som är eftersträvansvärda eller problematiska för en karta. Generellt borde det vara positivt att kartan liknar verkligheten så



Figur 2: Karta av jorden gjord med en likrektangulär projektion. Notera de repetitiva avstånden mellan latituder och longituder på kartan.

mycket som möjligt, alltså att någonting är likadant på kartan och i verkligheten. Tidigare nämndes exemplet där Grönland och Afrika visas som nästan lika stora i dagens vanliga kartor, trots att de inte är lika stora. Det är fallet specifikt med kartor som skapas med *Mercatorprojektion*en. Det är den vanligaste kartprojektion för världskartor idag, och den kartprojektion som används i Figur 1. Det finns dock även fördelar med dessa kartor: de bevarar nämligen alla former och vinklar. Om ett område på jorden är cirkulärt, kommer det alltså också vara cirkulärt på en karta skapad med Mercatorprojektion. Det är också möjligt att skapa kartor så att alla områden med samma storlek också kommer vara lika stora på kartan, det vill säga där Afrika kommer vara ungefär 14 gånger så stort som Grönland. En tredje eftersträvarvärd egenskap för kartor, som Mercatorprojektion också saknar, är att den kortaste vägen mellan två punkter också avbildas som den kortaste vägen på kartan. Detta förenklar användningen av kartan för att hitta den optimala vägen för en resa. Slutligen är en av de mer uppenbarligen eftersträvarvärda egenskaperna för en karta att avståndet mellan olika punkter bevaras, alltså att om två sträckor är lika långa på kartan så är de lika långa i verkligheten, och om en sträcka är kortare på kartan så är den också kortare i verkligheten.

Dessa olika egenskaper kan definieras matematiskt för att undersöka vilka egenskaper som den platta kartan av den sfäriska jordytan kan ha. Den viktiga skillnaden mellan planet och sfären som försvårar avbildningen mellan dessa två ytor är att de har olika *krökning*. I grunden betyder krökning hur mycket något böjer sig, men detta koncept blir något mer komplicerat när det handlar om krökningen av ytor eftersom de kan böja sig på olika sätt i olika riktningar. En del av det matematiska fältet differentialgeometri behandlar denna typ av krökta ytor. Matematikern Carl Friedrich Gauss som är porträtterad i Figur 3 arbetade med detta fält och år 1827 bevisade han resultatet som kommit att kallas *Gauss remarkabla sats*. Satsen innebär att produkten av den största och den minsta krökningen i riktningar på ytan bevaras, även om ytan böjs.



Figur 3: Porträtt av Carl Friedrich Gauss målat år 1840, då Gauss var 63 år gammal [4].

Detta resultat visar sig vara mycket användbart och besvarar flera frågor om kartprojektioner från den runda jorden till en platt karta. Dels bevisar satsen att det inte alls är möjligt att göra en karta av jorden som bevarar proportionaliteten av avstånd, den sista eftersträvarvärda egenskapen som nämndes. Dels kan satsen också användas för att bevisa att ingen platt karta av jorden kan ha ens två av de tre andra eftersträvarvärda egenskaperna samtidigt, vilket blir väldigt begränsande för kartografin. Tillsammans förklarar detta varför vi ändå använder en sådan imperfekt karta som Mercatorprojektion: det finns helt enkelt ingen perfekt karta.

Sammandrag

Följande kandidatarbete ämnar studera begreppet krökning samt bevisa Gauss remarkabla sats för att förstå dess konsekvenser för tillämpningar inom kartografi.

Arbetet inleds med att bygga upp fundamenten i kurvteori i plan och rum, där begreppet krökning först introduceras. Vidare definieras begreppet yta i tre dimensioner, för att sedan beskriva krökningsbegreppet för ytor. Detta leder till en diskussion om hur en ytas första respektive andra fundamentala former används för att mäta längd, vinklar samt Gausskrökning. Därefter introduceras begreppet isometri mellan ytor, för att sedan bevisa att en ytas Gausskrökning bevaras under isometrier, det vill säga Gauss remarkabla sats. Slutligen studeras satsens tillämpningar inom matematisk kartografi, där konforma och areabevarande projektioner från sfärer till plan studeras. Vidare visas bland annat att en kartprojektion inte kan vara både konform och areabevarande samtidigt, och att det inte heller är möjligt för en konform eller areabevarande projektion att avbilda storcirklar på räta linjer.

Abstract

This bachelor thesis aims to study the concept of curvature and to prove Gauss' Remarkable Theorem in order to understand its consequences regarding applications in the subject of cartography.

The project starts by introducing the fundamentals of curve theory in two and three dimensions by studying the central concept of curvature and its properties. We continue with surfaces in Euclidean three-dimensional space and study their curvatures, the principal, mean, and Gauss curvatures. This leads to a discussion of how the first and second fundamental forms for a surface are used to measure lengths, angles, and Gaussian curvature of the surface. Moreover, the concept of an isometry between surfaces is introduced to prove that the Gaussian curvature of a surface is preserved under isometric maps, which is also known as Gauss' Remarkable Theorem. Finally, the applications of the theorem are studied in the subject of mathematical cartography, where conformal and equiareal projections of spheres are studied. It is further shown, among other things, that a map projection cannot be both conformal and equiareal at the same time, and that it is also not possible for a conformal or equiareal projection to map great circles onto straight lines.

Innehåll

0 Inledning	1
0.1 Ämne	1
0.2 Rapportens mål	1
0.3 Bakgrundsteori	1
1 Kurvteori och ytteori	1
1.1 Kurvteori i planet	1
1.2 Kurvteori i rummet	3
1.3 Ytteori	4
2 Krökning av ytor	6
2.1 Gaussavbildningen och Gausskrökning	6
2.2 Principala krökningar och normal krökning	9
3 Isometrier och Gauss remarkabla sats	11
3.1 Isometrier	12
3.2 Gauss remarkabla sats	13
4 Matematisk kartografi	15
4.1 Konforma avbildningar och kartor	15
4.2 Areabevarande kartor	17
4.3 Avståndsbevarande kartor	19
A Kompletterande och fördjupande teori samt notation	i
A.1 Linjär algebra	i
A.2 Grundläggande topologi och flervariabelanalys	iii
A.3 Fördjupning i ytteori	v
A.4 Notationstabell	ix
B Inledning till Riemanngeometri	x
B.1 Mångfalder	x
B.2 Riemann-mångfalder och Riemann-metriker	xi
B.3 Kovariant derivata och parallelltransport	xii
B.4 Riemanns krökningstensor och krökning av mångfalder	xv
C Kartprojektioner	xix
C.1 Mer om några kartprojektioner	xix
C.1.1 Mercatorprojektion	xix
C.1.2 Lamberts ytriaktiga cylindriska projektion	xx
C.1.3 Gnomoniska projektionen	xx
C.2 Egenskaper hos de olika kartprojektionerna	xx
C.2.1 Mercatorprojektion	xxi
C.2.2 Lamberts ytriaktiga cylindriska projektion	xxi
C.2.3 Gnomoniska projektionen	xxii

0 Inledning

0.1 Ämne

Krökningen av en kurva kan beskrivas som ett mått på hur mycket kurvan böjer sig i planet eller i rummet. På liknande sätt kan krökningen av en yta ses som hur mycket en yta böjer sig. Ytor kan dock böja sig på olika sätt, och olika mycket i olika riktningar. I och med detta finns det olika typer av krökning av ytor, bland annat *medelkrökning* och *Gausskrökning*.

Gausskrökning i en punkt på en yta beskrivs genom att studera hur riktningen hos en normal till ytan förändras i en omgivning till en punkt på ytan. År 1827 upptäckte Carl Friedrich Gauss att Gausskrökningen av en yta inte ändras då ytan omformas under en längdbevarande avbildning, en *isometri*. Gauss visade dessutom att Gausskrökning kan beräknas genom att endast använda egenskaper som inte beror på hur ytan är positionerad i rummet, exempelvis avstånd och vinklar [2]. Således visade Gauss att Gausskrökningen är en inneboende egenskap hos ytor och bevaras under isometrier, trots att Gausskrökningen är ett mått på hur mycket ytan böjs. Detta resultat ansåg Gauss var förvånande, vilket motiverar att satsen kallas *Gauss remarkabla sats*.

Detta faktum är relevant för ett flertal tillämpningar, bland annat inom kartografi. En följd av Gauss remarkabla sats är att det inte går att platta ut en sfär till ett plan utan att sfären sträcks ut. Detta leder till att det är omöjligt att göra en korrekt platt karta av jorden, det vill säga en karta som bevarar alla längder [3]. I sin tur ger det upphov till ett behov av att konstruera olika typer av kartprojektioner, beroende på vilka egenskaper som är önskvärda för en viss tillämpning.

0.2 Rapportens mål

För att förstå och bevisa Gauss remarkabla sats, som presenteras i kapitel 3, krävs en del bakgrundsteori. Det första kapitlet ger en teoretisk grund i kurvteori och ytteori, där vi bland annat introducerar egenskaper hos kurvor i planet och rummet, samt hur vi kan definiera och beskriva ytor. Kapitel 2 introducerar bland annat *Gaussavbildningen* och hur den används för att definiera krökning av ytor. I och med detta introduceras även den *första och andra fundamentala formen* för ytor. Väl i kapitel 3 definieras begreppet isometri, vilket följs av formulering och bevis av Gauss remarkabla sats. Slutligen används resultaten för tillämpningar inom kartografi i kapitel 4, där olika typer av kartprojektioner presenteras, samt för att visa varför det inte går att göra platta kartprojektioner av jorden som bevarar längder.

0.3 Bakgrundsteori

Läsaren förväntas besitta förkunskaper som motsvarar två års universitetsstudier inom matematik. Särskilt krävs förkunskaper inom flervariabelanalys och linjär algebra. Vi hänvisar till appendix A.1 med kompletterande teori i linjär algebra och A.2 med teori i flervariabelanalys, samt begrepp och definitioner från topologi. Där påminns läsaren om några definitioner och resultat som inte omfattas av arbetet men som är av vikt för ämnet och projektet.

1 Kurvteori och ytteori

För att bygga upp läsarens kunskaper inom arbetets huvudämne introduceras grundläggande kurvteori i plan och rum i delkapitel 1.1 respektive 1.2. Ytteorin i delkapitel 1.3 som byggs upp från kurvteorin är väsentlig för att förstå teorin inom efterföljande huvudkapitel. I delkapitel 1.1 används huvudsakligen kapitel 2 i boken *Elementary Differential Geometry* [3] av Bär. Även kapitel 1 i boken *Elementary Differential Geometry* [16] av Pressley används, mestadels för formuleringen och beviset av Lemma 1.3b). I delkapitel 1.2 refererar vi också till kapitel 2 i [3], och i delkapitel 1.3 används kapitel 4 i [16].

1.1 Kurvteori i planet

Inom detta delkapitel definierar vi först *parametriserade kurvor* i \mathbb{R}^n , för att sedan betrakta kurvor i planet. En kurva i planet kan man lätt rita för hand på ett papper – cirklar, linjer, grafer bland

andra. Vidare definieras centrala begrepp som *hastighetsvektor* och *normalfält* för kurvor i planet. Delkapitlet avslutas sedan med definitionen av ett ofta förekommande begrepp under hela arbetet – *krökning*, men begränsat till kurvor i planet.

Definition 1.1 (Parametriserad kurva). Låt $I \subset \mathbb{R}$ vara ett intervall. Om $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ är en slät¹ avbildning så kallar vi γ för en parametriserad kurva.

Anmärkning. För kurvor i planet är målmängden \mathbb{R}^2 och då säger vi ibland *plan kurva*.

Vi låter variabeln $t \in I$ beteckna tiden vid vilken en punkt på kurvan γ befinner sig. Vi betraktar dess tangentvektor $\gamma'(t)$ som kurvans *hastighetsvektor* och kallar $\|\gamma'(t)\|$ för dess *hastighet*. Om hastigheten är konstant 1, så säger vi att kurvan har *normerad hastighet*.

För en kurva kan det uppstå ”hörn”, och för att undvika dessa introducerar vi därför *reguljära kurvor*.

Definition 1.2 (Reguljär kurva och längden av en kurva). Den parametriserade kurvan γ sägs vara reguljär om dess hastighetsvektor $\gamma'(t) \neq 0$ för alla $t \in I$. Om $(a, b) \subset I$ så säger vi också att $l(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ är längden av segmentet till γ då $t \in (a, b)$.

I många fall har kurvor inte normerad hastighet, och då skulle vi vilja hitta en annan parametrisering av kurvan för att göra den lättare att arbeta med. Låt $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en parametriserad kurva. Vi kallar $\Phi : J \rightarrow I$ där $J \subset \mathbb{R}$ är ett annat intervall, sådant att Φ och $\Phi^{-1} : I \rightarrow J$ är släta, för en *parametertransformation* eller *omparametrisering* av γ .

Lemma 1.3. a) Längden av en parametriserad kurva γ är oberoende av omparametrisering, det vill säga $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \Phi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ har samma längd som γ .

b) Regulariteten av en kurva är oberoende av omparametrisering.

Bevis. a) Låt $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \Phi$ vara en omparametrisering av γ där $\Phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$. Med kedjeregeln får vi att

$$l(\tilde{\gamma}) = \int_a^b \|(\gamma \circ \Phi)'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(\Phi(t))\| \cdot |\Phi'(t)| dt.$$

Låt $s = \Phi(t)$, det vill säga att $ds = \Phi'(t)dt$, $s \in [c, d]$. Vi får

$$l(\tilde{\gamma}) = \int_c^d \|\gamma'(s)\| ds = l(\gamma).$$

b) Antag att $\tilde{\gamma}$ är en omparametrisering av γ och Φ en parametertransformation. Låt $\psi = \Phi^{-1}$, alltså är $\Phi(\psi(t)) = t$ för alla t . Kedjeregeln ger oss $\Phi'(\psi(t)) \cdot \psi'(t) = 1$, och vi får $\Phi'(t) \neq 0$. Eftersom $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\Phi(t))$ ger kedjeregeln att $\tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(\Phi(t)) \cdot \Phi'(t)$, vilket aldrig är 0 eftersom γ är reguljär. □

Anmärkning. Om $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ är en parametriserad kurva med normerad hastighet, så är $l(\gamma(s)) = \int_a^s dt = s - a$, $s \in [a, b]$, det vill säga längden av intervallet $[a, s]$, vilket förenklar integralberäkningen. Därför föredras normerad hastighet (även för att kurvan då rör sig med konstant hastighet).

Exempel 1.4. Betrakta en cirkulär kurva runt origo där $\gamma : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$ och $r > 0$ är dess radie. Notera att $\|\gamma'\| = r \neq 1$. Vi vill hitta en parametertransformation sådan att den nya parametriserade kurvan har normerad hastighet. Vi väljer $\Phi(t) = t/r$, $\Phi : [0, 2\pi r) \rightarrow [0, 2\pi)$. Då är omparametriseringen $\gamma(\Phi(t)) = \tilde{\gamma}(t) = r(\cos(t/r), \sin(t/r))$ vilket beskriver samma cirkel och uppfyller vårt villkor, $\|\tilde{\gamma}'(t)\| = 1$.

Ett kännetecken som plana kurvor har är ett så kallat *normalfält*, sådant att i varje punkt på kurvan finns det en motsvarande normalvektor till kurvan i punkten. Vi betecknar rotationsmatrisen som roterar vektorer 90° motsols med

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Då är $J\mathbf{v} \perp \mathbf{v}$ för alla vektorer $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.

¹Se appendix A.2 för definitionen av en slät avbildning.

Definition 1.5 (Normalfält för kurvor i planet). *Ett normalfält $\mathbf{n}_\gamma(t)$ för en plan kurva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ med normerad hastighet definieras genom $\mathbf{n}_\gamma(t) := J\gamma'(t)$. Alltså ger normalfältet i varje punkt på kurvan den normalvektor som fås av att rotera tangentvektorn 90 grader motsols.*

Anmärkning. $(\gamma'(t), \mathbf{n}_\gamma(t))$ bildar en ortonormal bas för \mathbb{R}^2 .

Om en plan kurva har normerad hastighet så gäller det att $\|\gamma'\|^2 = \gamma' \cdot \gamma' = 1$. Använder vi produktregeln för derivator så får vi att $\gamma'' \cdot \gamma' + \gamma' \cdot \gamma'' = 2\gamma' \cdot \gamma'' = 0$ och $\gamma' \cdot \gamma'' = 0$. Alltså är

$$\gamma' \perp \gamma''. \quad (1)$$

Vi vet nu att både normalfältet $\mathbf{n}_\gamma(t)$ för en plan kurva γ med normerad hastighet och $\gamma''(t)$ är ortogonala mot kurvans tangent $\gamma'(t)$. Då måste $\mathbf{n}_\gamma(t)$ och $\gamma''(t)$ vara parallella med varandra. Alltså är de konstant multiplar av varandra, $\gamma''(t) = \kappa(t) \cdot \mathbf{n}_\gamma(t)$.

Definition 1.6 (Krökningen för en plan kurva). *Funktionen $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ kallas för krökningen av kurvan $\gamma(t)$.*

Intuitivt kan krökning betraktas som ett mått på hur mycket en plan kurva avviker från en rät linje. Följande exempel visar att en cirkel har konstant krökning, det vill säga cirkeln kröker sig lika mycket överallt vilket vi även ser geometriskt.

Lemma 1.7. *En cirkel med radie r har krökning $1/r$.*

Bevis. Betrakta cirkeln med normerad hastighet $\gamma : [0, 2\pi r) \rightarrow \mathbb{R}^2$ som beskrivs av

$$\gamma(t) = (r \cos(t/r), r \sin(t/r)),$$

enligt Exempel 1.4. Då är $\gamma'(t) = (-\sin(t/r), \cos(t/r))$ och vi får att

$$\mathbf{n}_\gamma(t) = J\gamma'(t) = (-\cos(t/r), -\sin(t/r)),$$

samt $\gamma''(t) = \frac{1}{r}(-\cos(t/r), -\sin(t/r)) = \frac{1}{r}\mathbf{n}_\gamma(t)$. Alltså är krökningen av en cirkel $\frac{1}{r}$. \square

1.2 Kurvteori i rummet

Detta delkapitel tar upp skillnader mellan kurvor i planet och kurvor i rummet genom att diskutera krökningsbegreppet för kurvor i rummet. Ett normalfält för kurvor i rummet går inte att definiera lika enkelt som ett normalfält för kurvor i planet, eftersom de vektorer som är ortogonala mot kurvans hastighetsvektor bildar ett plan. För kurvor med normerad hastighet i planet har vi att $\gamma''(t) = \kappa(t) \cdot \mathbf{n}_\gamma(t)$, och eftersom $\gamma''(t)$ är parallell med $\mathbf{n}_\gamma(t)$ betyder detta att $|\kappa(t)| = \|\gamma''(t)\|$. Om vi inte bryr oss om krökningens tecken går den att definiera utan att ta hänsyn till en normalvektor.

Definition 1.8 (Krökning av kurvor i rummet). *Låt $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara en kurva i rummet med normerad hastighet. Då kallas funktionen $\kappa(t) := \|\gamma''(t)\|$ för krökningen av γ .*

Anmärkning. Krökningen för kurvor i rummet indikerar hur mycket en kurva avviker från en rät linje, precis som för kurvor i planet. Enligt denna definition gäller $\kappa(t) \geq 0$, med likhet om och endast om kurvan lokalt är en rät linje.

Det är möjligt att visa att en plan kurva entydigt kan definieras i termer av dess krökning. Detta stämmer inte för kurvor i rummet \mathbb{R}^3 . Betrakta exempelvis enhetscirkeln i xy -planet, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$, samt en helix $\tilde{\gamma}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$. Dessa har båda samma krökning $\kappa(t) \equiv 1$, men det är inte möjligt att utföra någon kombination av translationer och rotationer för att forma om den ena kurvan till den andra. Även fast krökningen är densamma är de därför olika kurvor.

Utifrån definitionen av krökning av kurvor i planet är det rimligt att definiera en *principalnormal* enligt nedan.

Definition 1.9 (Principalnormalvektor). *Låt $\gamma(t)$ vara en kurva i \mathbb{R}^3 med normerad hastighet. Om krökningen $\kappa(t) \neq 0$ kan vi definiera principalnormalen av γ i punkten $\gamma(t)$ som vektorn $\mathbf{n}(t) := \frac{1}{\kappa(t)}\gamma''(t)$.*

Anmärkning. Eftersom $\|\gamma''\| = \kappa$ enligt Definition 1.8 är \mathbf{n} en enhetsvektor.

För att få en komplett ortonormal bas för \mathbb{R}^3 kan vi nu definiera en *binormal vektor* som är ortogonal mot kurvans normal- och hastighetsvektorer med hjälp av kryssprodukten mellan dessa vektorer. Binormalen av γ i punkten t ges av $\mathbf{b}(t) := \gamma'(t) \times \mathbf{n}(t)$, vilket gör att $(\gamma'(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t))$ utgör en positivt orienterad ortonormal bas för \mathbb{R}^3 . Denna är dock endast definierad då $\kappa(t) \neq 0$.

1.3 Ytteori

I detta delkapitel definieras samt diskuteras vad en *slät yta* i \mathbb{R}^3 är för något. Intuitivt är en yta i tre dimensioner en delmängd $S \subset \mathbb{R}^3$ som en observatör vid varje given punkt på ytan betraktar som något plant, precis som en person på jordytan upplever jorden som plan om personen tittar framåt i sin närhet. Det innebär att ytan lokalt runt punkten $p \in S$ beter sig som ett plan i \mathbb{R}^2 . Innan den matematiska definitionen av en yta kan preciseras så introduceras ett viktigt begrepp för att förstå vad uttrycket “beter sig som” betyder ur ett topologiskt perspektiv.

Definition 1.10 (Homeomorfi). *Låt X och Y vara delmängder av \mathbb{R}^n . En kontinuerlig och bijektiv funktion $f : X \rightarrow Y$ är en homeomorfi om dess invers $f^{-1} : Y \rightarrow X$ är kontinuerlig. Om det existerar en homeomorfi mellan X och Y sägs X och Y vara homeomorfa.*

En homeomorfi $f : X \rightarrow Y$ ger en bijektiv korrespondens mellan öppna mängder i X och öppna mängder i Y . Om U är en öppen mängd i X så är $f(U)$ öppen i Y , och ärver de topologiska egenskaperna hos U . Detta gör att om X och Y är homeomorfa beter de sig på samma sätt, och kan betraktas som lika ur ett topologiskt perspektiv². Med detta i åtanke sägs en liten del V av en yta bete sig lokalt som ett plan $U \subset \mathbb{R}^2$ om det existerar en homeomorfi mellan V och U . I och med detta är det möjligt att definiera vad en slät yta i \mathbb{R}^3 är för något.

Definition 1.11 (Slät yta). *En delmängd $S \subset \mathbb{R}^3$ är en slät yta om det för alla punkter $p \in S$ finns en öppen mängd $U \subset \mathbb{R}^2$, en öppen mängd $W \subset \mathbb{R}^3$ som innehåller p och en slät avbildning $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, sådana att*

- i) $\sigma : U \rightarrow S \cap W$ är en homeomorfi, och*
- ii) σ är slät och de partiella derivatorna $\frac{\partial \sigma}{\partial u}$ och $\frac{\partial \sigma}{\partial v}$, betecknade σ_u och σ_v , är linjärt oberoende för alla $(u, v) \in U$.*

Anmärkning. Villkoret att σ_u och σ_v är linjärt oberoende i ii) kan också formuleras som att $\sigma_u \times \sigma_v \neq 0$ för alla $(u, v) \in U$. Vi kommer hädanefter att referera till släta ytor endast som “ytor” i fortsättningen av arbetet.

För en given yta finns då flera homeomorfier $\sigma : U \rightarrow S \cap W$ som kallas för *lokala parametreringar*, eller ibland *ytstycken*. Begreppet ytstycke används när ytan betraktas som en sammanfogning av ytstycken, där samlingen av alla ytstycken som tillsammans täcker ytan kallas för ytans *atlas*.

Det kan finnas flera sätt att bilda en atlas för en yta, där dessa kan bestå av olika samlingar av ytstycken. Dessa atlas beskriver dock samma yta. Det går att välja en eller flera av dessa, men det går också att välja samlingen av alla atlas tillsammans. Denna samling innehåller alla möjliga ytstycken, och kallas för ytans *maximala atlas*. Alla släta ytstycken som ingår i den maximala atlasen kallas för *godtagbara ytstycken* till S . Valet av maximal atlas är naturligt, då det inte kan uppstå oklarheter kring vilken atlas som åsyftas.

Följande resultat avseende släta ytstycken motsvarar Lemma 1.3b) fast för ytor.

Proposition 1.12. *Låt $U, \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ och låt $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara ett slätt ytstycke. Låt $\Phi : \tilde{U} \rightarrow U$ vara en omparametrisering. Då är $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ett slätt ytstycke.*

Beviset utelämnas då det är mycket likt beviset till Lemma 1.3b).

Av specifikt intresse är en speciell typ av avbildningar mellan släta ytor, som möjliggör att jämföra ytor och deras egenskaper.

Definition 1.13 (Diffeomorfi). *En bijektiv och slät avbildning $f : S_1 \rightarrow S_2$ mellan ytorna S_1 och S_2 kallas för en diffeomorfi om dess invers $f^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$ är slät. Om det existerar en diffeomorfi mellan S_1 och S_2 så sägs S_1 och S_2 vara diffeomorfa.*

En diffeomorfi mellan två ytor är ytteorins motsvarighet till homeomorfi. Det innebär att två diffeomorfa ytor kan slätt omformas till varandra, och ytorna är således ekvivalenta under diffeomorfi.

Vi formulerar också ett lemma som kommer att vara viktigt vid studiet av speciella typer av diffeomorfier mellan ytor i kapitel 3 och kapitel 4.

²Den intresserade läsaren hänvisas till appendix A.2 för en djupare motivering till detta ur ett topologiskt perspektiv.

Lemma 1.14. Låt $f : S_1 \rightarrow S_2$ vara en diffeomorfi, och låt σ vara ett godtagbart ytstycke på S_1 . Då är $f \circ \sigma$ ett godtagbart ytstycke på S_2 .

Bevis. Betrakta det godtagbara ytstycket $\sigma_1 : U \rightarrow S_1$ på S_1 , och ytstycket $\sigma_2 : \tilde{U} \rightarrow S_2$ på S_2 . Då avbildar $f(\sigma_1(u, v))$ punkter på S_1 till punkter på S_2 , och då finns det någon parametertransformation $\Phi : U \rightarrow \tilde{U}$ sådan att $f(\sigma_1(u, v)) = \sigma_2(\Phi(u, v))$, ty f är en diffeomorfi. Enligt Proposition 1.12 är $\sigma_2(\Phi(u, v))$ slät, och således ett godtagbart ytstycke. \square

Vi betraktar alltid en ytas maximala atlas när vi talar om en yta om inget annat anges. Således är alla ytstycken godtagbara, vilket tillåter oss att alltid kunna använda Lemma 1.14 vid studiet av diffeomorfier f mellan ytor.

Släta kurvor γ i \mathbb{R}^3 kan även ligga på en yta S . Om $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ är en kurva som ligger i bilden av en lokal parametrisering $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ av S , så finns en avbildning $t \mapsto (u(t), v(t))$ där u och v är släta funktioner, sådana att $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$. För kurvor på en yta S betraktas kurvor på sådan form. Precis som varje slät kurva γ har en tangentvektor så har varje slät yta ett tangentplan i varje punkt på ytan.

Definition 1.15 (Tangentrum). *Tangentrummet vid en punkt p för en yta S , betecknat $T_p S$, är mängden av alla tangentvektorer $\gamma'(0)$ vid $p = \gamma(0)$ till alla kurvor γ på S som går genom p .*

Sats 1.16. Låt $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara ett ytstycke till ytan S , och $(u, v) \in U$. Tangentrummet $T_p S$ är då ett delrum av \mathbb{R}^3 som spänns upp av vektorerna σ_u och σ_v .

Bevis. Vi konstaterar först att eftersom σ_u och σ_v är linjärt oberoende så spänner de således upp ett tvådimensionellt delrum av \mathbb{R}^3 . Vi visar sedan att varje tangentvektor till en kurva γ på S ligger i delrummet som spänns upp av σ_u och σ_v . Tag först en kurva γ på S , på formen

$$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t)).$$

Derivering ger enligt kedjeregeln

$$\gamma'(t) = \sigma_u u'(t) + \sigma_v v'(t).$$

Således kan varje tangentvektor $\gamma'(t)$ till en kurva γ på S skrivas som en linjärkombination av σ_u och σ_v , och ligger därför i delrummet som spänns upp av dessa.

Omvänt visar vi att varje vektor som ligger i delrummet som spänns upp av σ_u och σ_v är en tangentvektor till en kurva γ på S . Tag en vektor w i delrummet som spänns upp av σ_u och σ_v . Vi kan då skriva $w = \alpha\sigma_u + \beta\sigma_v$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sätt

$$\gamma(t) = \sigma(u_0 + \alpha t, v_0 + \beta t),$$

där $u_0 = u(0)$ och $v_0 = v(0)$ så att $\gamma(0) = \sigma(u_0, v_0) = p$. Då är γ en slät kurva på S . Vidare får vi i punkten p , det vill säga då $t = 0$, att

$$\gamma'(0) = \alpha\sigma_u + \beta\sigma_v = w.$$

Således kan varje vektor i delrummet som spänns upp av σ_u och σ_v uttryckas som en tangentvektor i punkten p till en kurva γ på S . \square

Varje tangentplan kan beskrivas genom en normalvektor till planet. Det finns två normalvektorer av given längd vid varje punkt i planet, som pekar i motsatta riktningar. Välj ett ytstycke $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ som innehåller punkten p . Eftersom $T_p S$ spänns upp av de linjärt oberoende vektorerna σ_u och σ_v evaluerade i punkten $(u_0, v_0) \in U$ som korresponderar med p enligt Sats 1.16, finns det ett naturligt val av normalvektor, nämligen

$$N_\sigma = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}. \quad (2)$$

Denna normalvektor kallas för *enhetsnormalen* till $T_p S$. Enhetsnormalen är definierad upp till tecken $\pm N_\sigma$, beroende på valet av $\sigma_u \times \sigma_v$ eller $\sigma_v \times \sigma_u$. Enhetsnormalen till $T_p S$ används när vi studerar krökningen av ytor i kapitel 2.

2 Krökning av ytor

Föregående kapitel bygger upp nödvändig teori som i detta kapitel tillämpas för att studera det begrepp som utgör fundamentet i rapporten – *krökning av ytor*. I detta kapitel fördjupas läsaren i begreppet krökning av tredimensionella ytor med hjälp av geometrisk intuition. Detta är en förberedelse för rapportens huvudresultat i kapitel 3 och kapitel 4. I det första delkapitlet definieras begreppet *Gausskrökning*, som för ytor motsvarar krökningsbegreppet för kurvor. I det andra delkapitlet används krökningen för kurvor på en yta för att definiera begreppet *principala krökningar* för ytan, genom vilket teorin för krökning av kurvor knyts ihop med den om Gausskrökning. Teorin grundar sig i kapitel 3 i [3], kapitel 6 och 7 i [16] samt kapitel 3 i *Differential Geometry of Curves and Surfaces* av Do Carmo [6].

2.1 Gaussavbildningen och Gausskrökning

När kurvor i rummet med normerad hastighet diskuterades i delkapitel 1.2 definierades dess krökning i punkten t som $\kappa(t) = \|\gamma''(t)\|$. I delkapitel 1.1 visades att derivatan av en normerad tangentvektor till en kurva är ortogonal mot tangentvektorn, och således parallell med normalen till $\gamma(t)$. Krökningen av en kurva beskriver då hastigheten av riktningsförändringen för tangentvektorn γ' per längdenhet. Studiet av ytor går tillväga på liknande sätt, genom att istället betrakta det motsvarande fallet hos ytor i tre dimensioner: hastigheten av riktningsförändringen hos tangentplanet när det varierar över punkter på ytan.

I delkapitel 1.3 definierades enhetsnormalen till en yta S med lokal parametrisering σ i en punkt $p \in S$ enligt (2), där enhetsnormalen är normal till $T_p S$. Tangentplanet kan beskrivas i termer av en normalvektor till planet, så att undersöka riktningsförändringen hos normalvektorn till ytan är samma sak som att undersöka riktningsförändringen hos tangentplanet. Vi definierar en avbildning som tilldelar enhetsnormalen till varje punkt $p \in S$.

Definition 2.1 (Gaussavbildningen). Låt $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara en lokal parametrisering av ytan S . Avbildningen $N : S \rightarrow S^2$, $\sigma(u, v) \mapsto \mathbf{N}_\sigma(u, v)$ enligt (2), kallas Gaussavbildningen.

Anmärkning. Gaussavbildningen är väldefinierad för alla orienterbara³ ytor S .

Gaussavbildningen avbildar in i S^2 ty enhetsnormalen har längd 1. Den är också en slät avbildning för alla släta ytor S , ty $N : S \rightarrow S^2$ beskrivs av (2) som är slät eftersom σ_u och σ_v är släta. Gaussavbildningen ger oss möjligheten att studera normalvektorer och tangentplan i termer av avbildningar.

Förändringshastigheten för en storhet studeras i termer av dess derivator, som är en linjär approximation i ett mycket litet intervall av en funktion. Detta koncept generaliseras till ytor genom följande definition.

Definition 2.2 (Differential av avbildning). Differentialen $d_p f : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ av en slät avbildning $f : S_1 \rightarrow S_2$ mellan ytorna S_1 och S_2 är en linjär approximation av f i punkten p sådan att $d_p f(\mathbf{w}) = (f \circ \gamma)'(0)$, där $\gamma(t)$ är en kurva på S_1 med $\gamma(0) = p \in S_1$ och $\gamma'(0) = \mathbf{w} \in T_p S_1$.

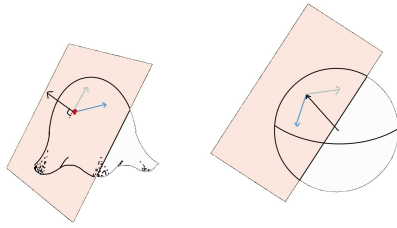
Anmärkning. Differentialen $d_p f$ är en linjär avbildning som representerar en riktningsderivata längs riktningsvektorn $\mathbf{w} \in T_p S_1$ i definitionen. Den är också väldefinierad, ty $d_p f(\mathbf{w})$ är oberoende av valet av kurva γ sådan att $\gamma'(0) = \mathbf{w}$. Den intresserade läsaren hänvisas till Proposition A.19 för ett bevis av detta faktum.

Eftersom Gaussavbildningen är slät kan vi definiera dess differential

$$W_p := d_p N : T_p S \rightarrow T_{N(p)} S^2, \quad p \in S$$

som är en linjär avbildning. Avbildningen W_p kallas för *Weingarten-avbildningen*. Bilden av en punkt $p \in S$ under Gaussavbildningen är enhetsnormalen till $T_p S$, flyttad in i S^2 . Således är enhetsnormalen till $T_p S$, definierad av Gaussavbildningen, samma normalvektor som till $T_{N(p)} S^2$. Tangentplanen $T_p S$ och $T_{N(p)} S^2$ är då ortogonala mot samma normalvektor, och är därför parallella. Detta gör att $T_p S$ och $T_{N(p)} S^2$ identifieras som samma plan, och vi kan betrakta W_p som en avbildning $W_p : T_p S \rightarrow T_p S$. Se Figur 4.

³Den intresserade läsaren finner en beskrivning av orienterbara ytor i appendix A.3.



Figur 4: Tangentplanen för S och S^2 identifieras.

Eftersom Weingarten-avbildningen är en linjär avbildning så kan vi använda de många verktyg som linjär algebra ger oss för att studera den. En naturlig fråga är hur avbildningen representeras i dess avbildningsmatris. Avbildningsmatrisen beror på vilken bas som väljs för tangentplanet $T_p S$, men avbildningens determinant och spår är två kvantiteter relaterade till avbildningen som är oberoende av valet av bas enligt Proposition A.8. Vi kan således göra kapitlets viktigaste definition.

Definition 2.3 (Gausskrökning och medelkrökning). *Gausskrökningen K för ytan S i punkten $p \in S$ definieras som $K(p) := \det(W_p)$, och medelkrökningen i $p \in S$ definieras som $H(p) := \frac{1}{2} \text{Tr}(W_p)$.*

Vi härleder nu avbildningsmatrisen för W_p i termer av den naturliga basen $\mathcal{B} = \{\sigma_u, \sigma_v\}$ för $T_p S$ från Sats 1.16. Eftersom $\dim T_p S = 2$ är avbildningsmatrisen till W_p en 2×2 -matris. För att beskriva avbildningsmatrisen undersöker vi hur W_p avbildar basvektorerna σ_u och σ_v , ty avbildningsmatrisen för en linjär avbildning är bestämd av hur den avbildar basvektorerna. Om W_p betraktas som en riktningssderivata som i anmärkningen efter Definition 2.2, beräknas riktningssderivatan av enhetsnormalen i riktningarna σ_u och σ_v . Dessa riktningssderivator är $\frac{\partial N_\sigma}{\partial u} := N_{\sigma_u}$ respektive $\frac{\partial N_\sigma}{\partial v} := N_{\sigma_v}$, det vill säga

$$W_p(\sigma_u) = N_{\sigma_u}, \quad W_p(\sigma_v) = N_{\sigma_v}. \quad (3)$$

Eftersom N_{σ_u} och N_{σ_v} är partiella derivator av N_σ är de ortogonala mot N_σ (jämför med (1)). Således är de ortogonala mot en normal till $T_p S$, och måste därför ligga i $T_p S$. Därför kan N_{σ_u} och N_{σ_v} skrivas som linjärkombinationer av basvektorerna σ_u och σ_v , enligt Sats 1.16. Vi kan därför skriva

$$(N_{\sigma_u} \quad N_{\sigma_v}) = (\sigma_u \quad \sigma_v) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

där

$$[W_p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

är avbildningsmatrisen till Weingarten-avbildningen.

Sats 2.4. *Avbildningsmatrisen till Weingarten-avbildningen är $[W_p]_{\mathcal{B}} = \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II}$, där*

$$\mathcal{F}_I = \begin{pmatrix} \sigma_u \cdot \sigma_u & \sigma_u \cdot \sigma_v \\ \sigma_v \cdot \sigma_u & \sigma_v \cdot \sigma_v \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathcal{F}_{II} = \begin{pmatrix} \sigma_u \cdot N_{\sigma_u} & \sigma_u \cdot N_{\sigma_v} \\ \sigma_v \cdot N_{\sigma_u} & \sigma_v \cdot N_{\sigma_v} \end{pmatrix}.$$

Bevis. Ekvation (4) ger att

$$(N_{\sigma_u} \quad N_{\sigma_v}) = (\sigma_u \quad \sigma_v) [W_p]_{\mathcal{B}}.$$

Multiplitera med $\begin{pmatrix} \sigma_u^t \\ \sigma_v^t \end{pmatrix}$ från vänster. Då får vi

$$\begin{pmatrix} \sigma_u^t \\ \sigma_v^t \end{pmatrix} (N_{\sigma_u} \quad N_{\sigma_v}) = \begin{pmatrix} \sigma_u^t \\ \sigma_v^t \end{pmatrix} (\sigma_u \quad \sigma_v) [W_p]_{\mathcal{B}},$$

vilket med skalärprodukter kan skrivas

$$\begin{pmatrix} \sigma_u \cdot N_{\sigma_u} & \sigma_u \cdot N_{\sigma_v} \\ \sigma_v \cdot N_{\sigma_u} & \sigma_v \cdot N_{\sigma_v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_u \cdot \sigma_u & \sigma_u \cdot \sigma_v \\ \sigma_v \cdot \sigma_u & \sigma_v \cdot \sigma_v \end{pmatrix} [W_p]_{\mathcal{B}}.$$

Definiera nu $\mathcal{F}_I := \begin{pmatrix} \sigma_u \cdot \sigma_u & \sigma_u \cdot \sigma_v \\ \sigma_v \cdot \sigma_u & \sigma_v \cdot \sigma_v \end{pmatrix}$ och $\mathcal{F}_{II} := \begin{pmatrix} \sigma_u \cdot N_{\sigma_u} & \sigma_u \cdot N_{\sigma_v} \\ \sigma_v \cdot N_{\sigma_u} & \sigma_v \cdot N_{\sigma_v} \end{pmatrix}$. Således är

$$[W_p]_{\mathcal{B}} = \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II}.$$

□

Lemma 2.5. W_p är en självadjungerad linjär avbildning, där $T_p S$ är utrustat med den euklidiska skalärprodukten i \mathbb{R}^3 .

Bevis. Ty $W_p : T_p S \rightarrow T_p S$ är linjär per definition räcker det att visa att $W_p(\sigma_u) \cdot \sigma_v = \sigma_u \cdot W_p(\sigma_v)$, vilket är ekvivalent med $\sigma_u \cdot N_{\sigma_v} = \sigma_v \cdot N_{\sigma_u}$ enligt (3). Eftersom $N_{\sigma} \perp \sigma_u$ och $N_{\sigma} \perp \sigma_v$ är $N_{\sigma} \cdot \sigma_u = 0$ och $N_{\sigma} \cdot \sigma_v = 0$. Deriverar vi den första ekvationen med avseende på v och den andra med avseende på u ger produktregeln att

$$N_{\sigma_v} \cdot \sigma_u + N_{\sigma} \cdot \sigma_{uv} = 0 \text{ och } N_{\sigma_u} \cdot \sigma_v + N_{\sigma} \cdot \sigma_{vu} = 0.$$

Således är

$$\sigma_u \cdot N_{\sigma_v} = -N_{\sigma} \cdot \sigma_{uv} = \sigma_v \cdot N_{\sigma_u}.$$

□

Det följer från Lemma 2.5 att både \mathcal{F}_I och \mathcal{F}_{II} är symmetriska och kommutativa matriser. För att förenkla notationen, sätt $E = \sigma_u \cdot \sigma_u$, $F = \sigma_u \cdot \sigma_v = \sigma_v \cdot \sigma_u$, $G = \sigma_v \cdot \sigma_v$, samt $L = \sigma_u \cdot N_{\sigma_u}$, $M = \sigma_u \cdot N_{\sigma_v} = \sigma_v \cdot N_{\sigma_u}$ och $N = \sigma_v \cdot N_{\sigma_v}$, så att

$$\mathcal{F}_I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_u^t \\ \sigma_v^t \end{pmatrix} (\sigma_u \quad \sigma_v) \text{ och } \mathcal{F}_{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_u^t \\ \sigma_v^t \end{pmatrix} (N_{\sigma_u} \quad N_{\sigma_v}).$$

Vi kallar \mathcal{F}_I för matrisrepresentationen av den *första fundamentala formen* och \mathcal{F}_{II} för matrisrepresentationen av den *andra fundamentala formen* för ytan S , samt E, F, G och L, M, N för den första respektive andra fundamentala formens koefficienter. Den första fundamentala formen är en positivt definit kvadratisk form, härledd från att normen av tangentvektorn till en kurva $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ på en yta S ges av

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \|\sigma_u u'(t) + \sigma_v v'(t)\|^2 = Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2.$$

Med den första fundamentala formen menas därmed uttrycket som skrivs

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

och analogt för den andra fundamentala formen med koefficienterna L, M och N . Med hjälp av dessa härleder vi en formel för Gausskrökningen för S i punkten $p \in S$.

Proposition 2.6. Gausskrökningen för ytan S i punkten $p \in S$ beskrivs av $K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$.

Bevis. Enligt Definition 2.3 och Sats 2.4 är

$$\begin{aligned} K &= \det(W_p) = \det([W_p]_{\mathcal{B}}) \\ &= \det(\mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II}) = \det(\mathcal{F}_I^{-1}) \det(\mathcal{F}_{II}) \\ &= \frac{\det(\mathcal{F}_{II})}{\det(\mathcal{F}_I)} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

□

Med detta resultat kan Gausskrökningen för olika ytor med enkelhet beräknas om det går att hitta en lämplig lokal parametrisering $\sigma(u, v)$ för ytan. Resultatet används för att bevisa följande lemma, som återkommer i senare kapitel.

Lemma 2.7. Gausskrökningen för en sfär S_r med radie r är $K = \frac{1}{r^2}$ i varje punkt på sfären.

Bevis. Parametrisera sfären med sfäriska koordinater,

$$\sigma(u, v) = (r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, r \cos u), \quad u \in [0, \pi), v \in [0, 2\pi).$$

Vi får efter beräkning av enhetsnormalen N_{σ} och dess derivator, samt derivatorna σ_u och σ_v , att $L = -r$, $N = -r \sin^2 u$, $M = 0$, samt $E = r^2$, $G = r^2 \sin^2 u$, $F = 0$. Detta ger att

$$K = \frac{(-r)(-r \sin^2 u)}{(r^2)(r^2 \sin^2 u)} = \frac{1}{r^2}$$

enligt Proposition 2.6. □

Anmärkning. Beviset till Lemma 2.7 ger att

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 u \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r \sin^2 u \end{pmatrix},$$

vilket enligt Sats 2.4 ger att $W_p = \frac{1}{r}I_2$, där I_2 betecknar identitetsavbildningen av dimension två. Enligt Definition 2.3 är då $K = \det(W_p) = \frac{1}{r^2}$. Detta resultat är intuitivt rimligt, ty Gaussavbildningen för enhetssfären $S = S^2$ är precis I_2 och därför är $W_p = I_2$ i detta fall.

2.2 Principala krökningar och normal krökning

Tidigare kapitel har huvudsakligen fokuserat på krökningen av kurvor och krökningen av ytor var för sig. Detta delkapitel presenterar fler verktyg för att hantera krökningen av kurvor på ytor och krökningen längs specifika riktningar på ytor. För att göra detta påminner vi oss om Lemma 2.5, som används för flera viktiga resultat.

Proposition 2.8. *Samtliga egenvärden för avbildningen W_p är reella.*

Bevis. Enligt Lemma 2.5 är den linjära avbildningen W_p självadjungerad. Då gäller enligt Lemma A.4 att W_p har reella egenvärden. \square

Definition 2.9 (Principal krökning och principal vektor). *De principala krökningarna för en yta är egenvärdena till avbildningen W_p . Egenvektorerna som motsvarar respektive egenvärde kallas för principala vektorer.*

Då $[W_p]_{\mathcal{B}}$ är en 2×2 -matris har den två egenvärden, κ_1 och κ_2 , som alltså är de principala krökningarna. Dessutom är dessa reella enligt Proposition 2.8. Det visar sig senare att de principala krökningarna är ett mått på krökningen av ytan i riktningen som bestäms av motsvarande principala vektorer, \mathbf{p}_1 och \mathbf{p}_2 .

Proposition 2.10. *De principala vektorerna till ytan S i punkten $p \in S$ bildar en ortonormal bas för tangentplanet $T_p S$.*

Bevis. Enligt Lemma 2.5 är W_p en självadjungerad linjär avbildning på $T_p S$. Sats A.5 ger då att $T_p S$ har en ortonormal bas som består av egenvektorerna till W_p , och de är per Definition 2.9 exakt de principala vektorerna. \square

Exempel 2.11. Vi vill bestämma de principala krökningarna och Gausskrökningen för ytan som beskrivs av $z = xy$. Denna yta parametreras med $\sigma(u, v) = (u, v, uv)$ för reella u, v . För att finna de egenvärden vi söker bestämmer vi avbildningsmatrisen till Weingarten-avbildningen, vilket vi gör genom att först beräkna σ_u och σ_v , därefter N_{σ_u} och N_{σ_v} och slutligen \mathcal{F}_I och \mathcal{F}_{II} för att kunna använda Sats 2.4. Vi får

$$[W_p]_{\mathcal{B}} = \frac{-1}{\sqrt{1+u^2+v^2}^3} \begin{pmatrix} -uv & 1+u^2 \\ 1+v^2 & -uv \end{pmatrix}.$$

Vi kan nu med Definitionerna 2.9 och 2.3 beräkna

$$K = \det([W_p]_{\mathcal{B}}) = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^3} (u^2v^2 - 1 - u^2 - v^2 - u^2v^2) = \frac{-1}{(1+u^2+v^2)^2}, \text{ och}$$

$$\det([W_p]_{\mathcal{B}} - \kappa_i I_2) = \left(\frac{uv}{\sqrt{1+u^2+v^2}^3} - \kappa_i \right)^2 - \frac{(1+v^2)(1+u^2)}{(1+u^2+v^2)^3}, \text{ då är } \kappa_i = \frac{uv \pm \sqrt{(1+v^2)(1+u^2)}}{(1+u^2+v^2)^3}.$$

Speciellt noterbart i exemplet är att produkten av de två principala krökningarna blir lika med Gausskrökningen. Vi visar nu att det är ett allmänt samband.

Sats 2.12. *Låt κ_1 och κ_2 beteckna principalkrökningarna för ytan S i punkten $p \in S$. Då gäller för Gausskrökningen K och medelkrökningen H för S i p att*

$$K = \kappa_1 \kappa_2 \tag{5}$$

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}. \tag{6}$$

Bevis. Vi har från Sats A.5 att då W_p är självadjungerad så är den diagonaliserbar. Vi visar först att (5) gäller. Enligt Definition 2.3 är $K = \det(W_p)$. Determinanten av en diagonaliserbar matris är produkten av matrisens egenvärden enligt Proposition A.7, men egenvärdena för W_p är från Definition 2.9 principalkrökningarna. Determinanten är alltså produkten av principalkrökningarna,

$$K = \det(W_p) = \kappa_1 \kappa_2.$$

Vi visar nu (6). Per Definition 2.3 gäller det att $H = \frac{1}{2} \text{Tr}(W_p)$. Spåret av en diagonaliserbar matris är enligt Proposition A.7 lika med summan av dess egenvärden, vilket här är principalkrökningarna κ_1 och κ_2 . Proposition A.8 ger att $\text{Tr}(W_p)$ är oberoende av valet av bas. Alltså gäller

$$H = \frac{1}{2} \text{Tr}(W_p) = \frac{1}{2} (\kappa_1 + \kappa_2).$$

□

Vi har visat att medelkrökningen H är ett medelvärde av de principala krökningarna, vilket förklarar namnet medelkrökning. Vi noterar att även Gausskrökningen är en form av medelkrökning, då den är kvadraten av det geometriska medelvärdet av de principala krökningarna. För att få en bättre förståelse av vad de principala krökningarna egentligen innebär studerar vi krökningen av kurvor som ligger på ytor.

Vi studerar en kurva γ med normerad hastighet på ytan S , och väljer ett ytstycke σ av S som innehåller en punkt p på kurvan. Då gäller att vi i p har en enhetsnormal \mathbf{N}_σ som är ortogonal mot den normerade hastighetsvektorn γ' , ty den är en tangentvektor till γ och då också till S . Kryssprodukten $\mathbf{N}_\sigma \times \gamma'$ är en binormal till sina faktorer och dessa bildar därför tillsammans en ortonormerad bas för \mathbb{R}^3 . Vektorer i \mathbb{R}^3 kan då skrivas som en linjärkombination med denna bas, och för γ'' som är ortogonal mot γ' enligt (1) gäller då

$$\gamma'' = \kappa_n \mathbf{N}_\sigma + \kappa_g (\mathbf{N}_\sigma \times \gamma'). \quad (7)$$

Vi kallar κ_n för den *normala krökningen* och κ_g för den *geodesiska krökningen* tillhörande kurvan γ .

Proposition 2.13. *Krökningen av en kurva som ligger på en yta beskrivs av $\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$.*

Bevis. Vi får med Definition 1.8, ekvation (7) och då \mathbf{N}_σ samt $\mathbf{N}_\sigma \times \gamma'$ är ortogonala och båda normerade att vi kan beräkna krökningen enligt

$$\kappa^2 = \|\gamma''\|^2 = \|\kappa_n \mathbf{N}_\sigma + \kappa_g (\mathbf{N}_\sigma \times \gamma')\|^2 = \|\kappa_n \mathbf{N}_\sigma\|^2 + \|\kappa_g (\mathbf{N}_\sigma \times \gamma')\|^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2.$$

□

Exempel 2.14. Låt γ vara en kurva med normerad hastighet sådan att $\gamma(t) = \sigma(u_0, \frac{t}{r \sin u_0})$ på sfären $S_r = \sigma$ som beskrivs av

$$\sigma(u, v) = (r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, r \cos u), \quad u \in [0, \pi), v \in [0, 2\pi).$$

Vi har att $t \in [0, 2\pi r \sin u_0)$ där $u_0 \in (0, \pi)$ är konstant. Således är γ en cirkel på sfären med konstant z -koordinat. Vi beräknar de normala och geodesiska krökningarna genom att beräkna $\mathbf{N}_\sigma, \gamma'$ och γ'' och får då

$$\kappa_n = -\frac{1}{r}, \quad \kappa_g = -\frac{\cos(u_0)}{r \sin(u_0)}.$$

Exemplet visar att den geodesiska krökningen varierar för de olika krökta cirklar vi får för olika u_0 , medan den normala krökningen är konstant. Detta pekar mot faktumet att den geodesiska krökningen mäter en kurvas krökning på en yta, medan den normala krökningen mäter själva ytans krökning. Det går exempelvis att visa att på ett plan gäller det för alla kurvor att den normala krökningen är 0 och att $\kappa = \kappa_g$. Vi kommer här att lämna den geodesiska krökningen som har färre kopplingar till de andra begrepp kring ytors krökning som vi arbetar vidare med i denna rapport, och fokuserar istället på den normala krökningen. Från (7) kan vi härleda ett uttryck för den normala krökningen, enligt

$$\gamma'' \cdot \mathbf{N}_\sigma = \kappa_n \mathbf{N}_\sigma \cdot \mathbf{N}_\sigma + \kappa_g (\mathbf{N}_\sigma \times \gamma') \cdot \mathbf{N}_\sigma = \kappa_n. \quad (8)$$

Normal krökning kan knytas ihop med de principala krökningarna vilket ger en mer intuitiv förklaring av de båda begreppen. Dock ligger härledningen av dessa resultat utanför detta arbets ramar. För den intresserade läsaren finns bevis till följande Propositioner 2.15 och 2.16 i appendix A.3.

Proposition 2.15. *Kurvor på ett ytstycke med samma tangentvektor i en punkt p har samma normala krökning i p .*

Proposition 2.16. *De principala krökningarna i en punkt på ett ytstycke är maximum och minimum för de normala krökningarna för alla kurvor på ytstycket i punkten. Riktningarna med de principala krökningarna ges av motsvarande principala vektorer, och kallas principala riktningar.*

Dessa resultat visar att den normala krökningen för en kurva styrs av ytans krökning längs tangenten till kurvan, och att de principala krökningarna är normal krökning i de principala riktningarna. Detta innebär också genom Sats 2.12 att Gausskrökningen i en punkt p kan ses som en produkt av den maximala och minimala krökningen i p hos "räta" kurvor i ytan.

Vi avslutar kapitel 2 med att återvända till de fundamentala formerna som introducerades precis före Proposition 2.6 för att skapa en intuition kring vad deras värden innebär för en yta och hur de bestämmer några av ytans mest fundamentala egenskaper, krökning och längd. Vi visar i Proposition 2.17 att den första fundamentala formen bestämmer längden av alla kurvor som ligger på ytan, och vi visar i Proposition 2.18 hur den andra fundamentala formen bestämmer den normala krökningen i ytan, och genom tidigare resultat bestämmer den då också principal krökning och Gausskrökning.

Proposition 2.17. *Längden av kurvan $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$, $t \in [a, b]$ beräknas enligt*

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2} dt.$$

Bevis. Vi har från Definition 1.2 att $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$. Vi använder normens definition och beräknar integranden enligt

$$\sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)} = \sqrt{(u'(t)\sigma_u + v'(t)\sigma_v) \cdot (u'(t)\sigma_u + v'(t)\sigma_v)} = \sqrt{Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2}.$$

□

Proposition 2.18. *För en kurva $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ med normerad hastighet på ytstycket σ så gäller att dess normala krökning beskrivs av ytstyckets andra fundamentala form enligt*

$$\kappa_n = -(Lu'(t)^2 + 2Mu'(t)v'(t) + Nv'(t)^2).$$

Bevis. Vi utgår från formeln för normalkrökningen i (8). Vi får

$$\begin{aligned} \kappa_n = \gamma'' \cdot \mathbf{N}_\sigma &= \sigma''(u(t), v(t)) \cdot \mathbf{N}_\sigma = \frac{d}{dt}(\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot \mathbf{N}_\sigma \\ &= (\sigma_{uu}(u')^2 + \sigma_{uv}u'v' + \sigma_{vu}v'u' + \sigma_{vv}(v')^2 + \sigma_u u'' + \sigma_v v'') \cdot \mathbf{N}_\sigma. \end{aligned}$$

Genom distribution av normalvektorn blir de sista två termerna 0, då σ_u och σ_v ligger i tangentplanet. Vidare fås, genom korta beräkningar som läsaren uppmanas att själv kontrollera, att $\sigma_{uu} \cdot \mathbf{N}_\sigma = -L$, $\sigma_{uv} \cdot \mathbf{N}_\sigma = -M$ och $\sigma_{vv} \cdot \mathbf{N}_\sigma = -N$, vilket visar satsen. □

3 Isometrier och Gauss remarkabla sats

Detta kapitel introducerar arbetets huvudresultat – *Gauss remarkabla sats*. Delkapitel 3.1 ger en matematisk definition av en längdbevarande avbildning, en *isometri*. Detta delkapitel är väsentligt för att förstå Gauss remarkabla sats, som bevisas i delkapitel 3.2. Kapitel 4 och 5 i [16] har använts i delkapitel 3.1 och kapitel 10 i delkapitel 3.2.

3.1 Isometrier

Om en kurva ritas på ett plan i \mathbb{R}^3 och om planet sedan rullas ihop så kommer kurvan att vara på en cylinder i stället. Eftersom planet inte skrynklas till så kommer längden av kurvan att bevaras. Däremot är det omöjligt att täcka en hel sfär med ett plan utan att knyckla till planet. Vad det egentligen innebär att "täcka" en yta med en annan utan att skrynkla till ytan ges av följande definition.

Definition 3.1 (Isometri). *Låt S_1 och S_2 vara två ytor. En diffeomorfi $f : S_1 \rightarrow S_2$ är en isometri om kurvor på S_1 avbildas på kurvor av samma längd på S_2 . Om f är en isometri mellan två ytor S_1 och S_2 , så säger vi att S_1 och S_2 är isometriska.*

Flera lokala egenskaper hos en ytas geometri kan beskrivas med ytans första fundamentala form. Exempel på sådana egenskaper är längder av kurvor på ytan, eller vinkeln mellan två tangentvektorer till kurvor på ytan. Följande sats ger oss ett verktyg för att jämföra den lokala geometrin mellan två ytor.

Sats 3.2. *En diffeomorfi $f : S_1 \rightarrow S_2$ är en isometri om och endast om varje ytstycke σ_1 av S_1 , och $f \circ \sigma_1$ som är ett ytstycke av S_2 , har samma första fundamentala form.*

Bevis. Tag något ytstycke $\sigma_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ av S_1 . Enligt Lemma 1.14 kan vi låta $f \circ \sigma_1 = \sigma_2$ vara ett godtagbart ytstycke för S_2 .

Vi antar först att σ_1 och σ_2 har samma första fundamentala form och visar att f är en isometri. Låt $t \mapsto (u(t), v(t))$ vara någon kurva i U så att $\gamma_1(t) = \sigma_1(u(t), v(t))$ och $\gamma_2(t) = \sigma_2(u(t), v(t))$ är motsvarande kurvor på S_1 respektive S_2 . Vi har att

$$f(\gamma_1(t)) = f(\sigma_1(u(t), v(t))) = \sigma_2(u(t), v(t)) = \gamma_2(t).$$

Således avbildar denna funktion γ_1 på γ_2 . De motsvarande kurvornas längd beräknas genom att integrera $(E(u')^2 + 2F u'v' + G(v')^2)^{1/2}$ enligt Proposition 2.17 där E, F , och G är enligt antagande de gemensamma koefficienterna till den första fundamentala formen för σ_1 och σ_2 . Alltså avbildas kurvor på S_1 till kurvor av samma längd på S_2 , det vill säga att f är en isometri.

Antag nu i stället att f är en isometri. Vi vill visa att σ_1 och σ_2 har samma första fundamentala form. Tag någon kurva $t \mapsto (u(t), v(t))$ i U där $t \in (\alpha, \beta)$. Eftersom f är en isometri så kommer $\gamma_1(t) = \sigma_1(u(t), v(t))$ och $\gamma_2(t) = \sigma_2(u(t), v(t))$ ha samma längd. Låt E_1, F_1, G_1 och E_2, F_2, G_2 vara koefficienterna i den första fundamentala formen för σ_1 respektive σ_2 . Vi får av isometrin och enligt Proposition 2.17 att

$$\int_{t_0}^{t_1} (E_1(u')^2 + 2F_1 u'v' + G_1(v')^2)^{1/2} dt = \int_{t_0}^{t_1} (E_2(u')^2 + 2F_2 u'v' + G_2(v')^2)^{1/2} dt$$

för alla $t_0, t_1 \in (\alpha, \beta)$ där $t_0 < t_1$. Vi kan därmed enligt analysens huvudsats derivera vänsterledet och högerledet med avseende på t_1 , vilket innebär att integranderna är samma,

$$E_1(u')^2 + 2F_1 u'v' + G_1(v')^2 = E_2(u')^2 + 2F_2 u'v' + G_2(v')^2. \quad (9)$$

För ett fixt $t_0 \in (\alpha, \beta)$, låt $u_0 = u(t_0)$ och $v_0 = v(t_0)$. Vi betraktar tre val av kurvan $t \mapsto (u(t), v(t))$ i U :

- i) $u(t) = u_0 + t - t_0, v(t) = v_0$, vilket ger att $u' = 1, v' = 0$ och vi får i ekvation (9) att $E_1 = E_2$.
- ii) $u(t) = u_0, v(t) = v_0 + t - t_0$, vilket ger att $u' = 0, v' = 1$ och vi får i (9) att $G_1 = G_2$.
- iii) $u(t) = u_0 + t - t_0, v(t) = v_0 + t - t_0$, vilket ger $u' = 1, v' = 1$ och vi får i (9) att

$$E_1 + 2F_1 + G_1 = E_2 + 2F_2 + G_2.$$

Tillsammans med i) och ii) får vi att $F_1 = F_2$. □

Exempel 3.3. Låt $\sigma_1(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, $u \in [0, 2\pi)$ vara ett ytstycke av en cylinder S_1 . Vidare låter vi $\sigma_2(u, v) = (u, v, 0)$ vara en strimla S_2 i xy -planet. Notera att $E = 1, F = 0$ och $G = 1$ är koefficienterna för första fundamentala formen för både S_1 och S_2 . Enligt Sats 3.2 existerar en isometri mellan cylindern S_1 och planet S_2 . Om vi däremot böjer cylindern S_1 till en torus så behöver vi sträcka och pressa formen, och vi får inte längre en isometri mellan S_1 och S_2 .

3.2 Gauss remarkabla sats

Sats 3.4 (Gauss remarkabla sats). *Gausskrökningen av en yta bevaras under isometrier.*

Enligt Proposition 2.6 ges Gausskrökningen till en yta S av

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad (10)$$

vilket beror på både den första och andra fundamentala formen. Kan vi bevisa att (10) endast beror på första fundamentala formen av en yta S så har vi bevisat Gauss remarkabla sats⁴, ty Gauss remarkabla sats gör anspråk på att Gausskrökning bevaras under isometrier. Om det finns en isometri mellan ytorna så har de samma första fundamentala form enligt Sats 3.2, och således räcker det att visa att (10) bara beror på den första fundamentala formen för ytan S .

För att bevisa satsen behöver vi en ortonormal bas $\{e_1, e_2\}$ för tangentplanet $T_p S$ för varje punkt p på ytan S , som vi alltid kan hitta enligt Proposition 2.10. Vi vill att e_1 och e_2 ska vara släta funktioner som beror på ytans parametrar (u, v) . Dessutom får vi tillsammans med enhetsnormalen

$$N_\sigma = e_1 \times e_2$$

en ortonormal bas $\{e_1, e_2, N_\sigma\}$ för \mathbb{R}^3 som är högerorienterad. Enligt (1) får vi att de partiella derivatorna av e_1 är ortogonala mot e_1 och liknande för e_2 . Vi kan då uttrycka de partiella derivatorna av basvektorerna som en linjärkombination av de andra basvektorerna, genom

$$e_{1_u} = \alpha_1 e_2 + \lambda_1 N_\sigma, \quad (11)$$

$$e_{1_v} = \beta_1 e_2 + \mu_1 N_\sigma, \quad (12)$$

$$e_{2_u} = -\alpha_2 e_1 + \lambda_2 N_\sigma, \quad (13)$$

$$e_{2_v} = -\beta_2 e_1 + \mu_2 N_\sigma, \quad (14)$$

för några skalärer $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ och μ_2 är reellvärda funktioner. Vi deriverar $e_1 \cdot e_2 = 0$ med avseende på u och får att $e_{1_u} \cdot e_2 = -e_1 \cdot e_{2_u}$, vilket ger $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$. Analogt ger derivatan av $e_1 \cdot e_2 = 0$ med avseende på v att $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. Vi kan nu introducera ett lemma som behövs för att bevisa Gauss remarkabla sats.

Lemma 3.5. *Med ovanstående notationer har vi att*

$$e_{1_u} \cdot e_{2_v} - e_{2_u} \cdot e_{1_v} = \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 \quad (15)$$

$$= \alpha_v - \beta_u \quad (16)$$

$$= \frac{LN - M^2}{(EG - F^2)^{1/2}}. \quad (17)$$

Bevis. Ekvation (11) och (14) ger att $e_{1_u} \cdot e_{2_v} = \lambda_1 \mu_2$. Ekvation (12) och (13) ger att $e_{2_u} \cdot e_{1_v} = \lambda_2 \mu_1$, därmed följer ekvation (15). Vidare är $\alpha_v = \frac{\partial(e_1 \cdot e_{2_u})}{\partial v}$ och $\beta_u = \frac{\partial(e_1 \cdot e_{2_v})}{\partial u}$, så produktregeln ger att $\alpha_v - \beta_u = e_{1_u} \cdot e_{2_v} + e_1 \cdot e_{2_{uv}} - e_{1_v} \cdot e_{2_u} - e_1 \cdot e_{2_{uv}} = e_{1_u} \cdot e_{2_v} - e_{1_v} \cdot e_{2_u}$. Därav följer likhet med (16). Vidare visar vi att ekvation (15) är ekvivalent med (17) genom att kombinera ekvation (3) och (4),

$$\begin{aligned} N_{\sigma_u} \times N_{\sigma_v} &= (ad - bc)\sigma_u \times \sigma_v \\ &= \det(\mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II})\sigma_u \times \sigma_v = K\sigma_u \times \sigma_v \\ &= \frac{LN - M^2}{(EG - F^2)^{1/2}} N_\sigma, \end{aligned} \quad (18)$$

där ekvation (18) fås av ekvation (10) och Lemma A.23. Genom att derivera $N_\sigma \cdot e_1 = 0 = N_\sigma \cdot e_2$ med avseende på u och v , får vi att

$$N_{\sigma_u} \cdot e_1 = -N_\sigma \cdot e_{1_u}, \quad N_{\sigma_u} \cdot e_2 = -N_\sigma \cdot e_{2_u}, \quad (19)$$

⁴Gauss remarkabla sats går att bevisa med hjälp av *Riemanns krökningstensor*, ett objekt inom fältet *Riemanngeometri*. Den intresserade läsaren hänvisas till appendix B för en introduktion till en sådan fördjupning.

$$\mathbf{N}_{\sigma_v} \cdot \mathbf{e}_1 = -\mathbf{N}_{\sigma} \cdot \mathbf{e}_{1_v}, \quad \mathbf{N}_{\sigma_v} \cdot \mathbf{e}_2 = -\mathbf{N}_{\sigma} \cdot \mathbf{e}_{2_v}. \quad (20)$$

Slutligen får vi av ekvationerna (19) och (20) att

$$\begin{aligned} (\mathbf{N}_{\sigma_u} \times \mathbf{N}_{\sigma_v}) \cdot \mathbf{N}_{\sigma} &= \frac{LN - M^2}{(EG - F^2)^{1/2}} \\ &= (\mathbf{N}_{\sigma_u} \cdot \mathbf{e}_1)(\mathbf{N}_{\sigma_v} \cdot \mathbf{e}_2) - (\mathbf{N}_{\sigma_u} \cdot \mathbf{e}_2)(\mathbf{N}_{\sigma_v} \cdot \mathbf{e}_1) \\ &= (\mathbf{N}_{\sigma} \cdot \mathbf{e}_{1_u})(\mathbf{N}_{\sigma} \cdot \mathbf{e}_{2_v}) - (\mathbf{N}_{\sigma} \cdot \mathbf{e}_{2_u})(\mathbf{N}_{\sigma} \cdot \mathbf{e}_{1_v}) \\ &= \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1. \end{aligned}$$

□

Bevis av Sats 3.4. Notera att ur ekvation (10), (16) och (17) så är

$$K = \frac{\alpha_v - \beta_u}{(EG - F^2)^{1/2}}.$$

Vi konstruerar den ortonormerade basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ genom Gram-Schmidt-ortogonalisering av basen $\{\boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\sigma}_v\}$. Låt $E^{-1/2} = \varepsilon$ och $\mathbf{e}_1 = \frac{\boldsymbol{\sigma}_u}{\|\boldsymbol{\sigma}_u\|} = \varepsilon \boldsymbol{\sigma}_u$. Det följer från Gram-Schmidt-processen att \mathbf{e}_2 är en linjärkombination av $\boldsymbol{\sigma}_u$ och $\boldsymbol{\sigma}_v$. Låt därför $\mathbf{e}_2 = \gamma \boldsymbol{\sigma}_u + \delta \boldsymbol{\sigma}_v$ för några skalärer γ och δ , sådana att \mathbf{e}_2 är normerad och ortogonal mot \mathbf{e}_1 . Vi får följande ekvationer:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \varepsilon \boldsymbol{\sigma}_u \cdot (\gamma \boldsymbol{\sigma}_u + \delta \boldsymbol{\sigma}_v) = \varepsilon(\gamma E + \delta F) = 0, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_2\|^2 &= \gamma^2 \|\boldsymbol{\sigma}_u\|^2 + 2\gamma\delta \boldsymbol{\sigma}_u \cdot \boldsymbol{\sigma}_v + \delta^2 \|\boldsymbol{\sigma}_v\|^2 \\ &= \gamma^2 E + 2\gamma\delta F + \delta^2 G = 1. \end{aligned} \quad (22)$$

Ekvation (21) ger att $\gamma = -\frac{\delta F}{E}$. Substituerar vi detta i ekvation (22) så får vi att

$$\delta^2 \frac{F^2}{E} - 2\delta^2 \frac{F^2}{E} + \delta^2 G = \delta^2 \left(G - \frac{F^2}{E}\right) = 1,$$

vilket ger

$$\delta = \frac{E^{1/2}}{(EG - F^2)^{1/2}}, \quad \gamma = \frac{FE^{-1/2}}{(EG - F^2)^{1/2}}, \quad \varepsilon = E^{-1/2}.$$

Vi har nu fått att \mathbf{e}_1 och \mathbf{e}_2 endast beror på koefficienterna i den första fundamentala formen för ytan. Vidare har vi att

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathbf{e}_{1_u} \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= (\varepsilon_u \boldsymbol{\sigma}_u + \varepsilon \boldsymbol{\sigma}_{uu}) \cdot (\gamma \boldsymbol{\sigma}_u + \delta \boldsymbol{\sigma}_v) = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon} (\varepsilon \boldsymbol{\sigma}_u) \cdot (\gamma \boldsymbol{\sigma}_u + \delta \boldsymbol{\sigma}_v) + \varepsilon \gamma \boldsymbol{\sigma}_{uu} \cdot \boldsymbol{\sigma}_u + \varepsilon \delta \boldsymbol{\sigma}_{uu} \cdot \boldsymbol{\sigma}_v \\ &= \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \varepsilon \gamma (\boldsymbol{\sigma}_u \cdot \boldsymbol{\sigma}_u)_u + \varepsilon \delta ((\boldsymbol{\sigma}_u \cdot \boldsymbol{\sigma}_v)_u - \boldsymbol{\sigma}_u \cdot \boldsymbol{\sigma}_{uv}) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon \gamma E_u + \varepsilon \delta \left(F_u - \frac{1}{2} E_v\right), \end{aligned}$$

vilket endast beror på E, F och G . Till sist har vi att

$$\begin{aligned} \beta &= \mathbf{e}_{1_v} \cdot \mathbf{e}_2 = (\varepsilon_v \boldsymbol{\sigma}_u + \varepsilon \boldsymbol{\sigma}_{uv}) \cdot (\gamma \boldsymbol{\sigma}_u + \delta \boldsymbol{\sigma}_v) \\ &= \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \varepsilon \gamma \boldsymbol{\sigma}_{uv} \cdot \boldsymbol{\sigma}_u + \varepsilon \delta \boldsymbol{\sigma}_{uv} \cdot \boldsymbol{\sigma}_v \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon \gamma E_v + \frac{1}{2} \varepsilon \delta G_u, \end{aligned}$$

vilket också endast beror på E, F och G . □

Nu kan vi använda våra resultat för tillämpningar inom matematisk kartografi, speciellt skall vi undersöka hur Gauss remarkabla sats kan användas i följande kapitel.

4 Matematisk kartografi

En kartprojektion kan beskrivas som en systematisk tolkning av platser från jordens yta till en platt karta. Kartor, och därmed kartprojektioner, är viktiga då jordglober ofta inte är praktiska att använda. I delkapitel 4.1 och 4.2 introduceras konforma respektive areabevarande kartprojektioner, vilket leder fram till att visa att det är omöjligt att konstruera en avbildning av jorden till en platt karta som bevarar både vinklar och areor. Se appendix C för mer information om de olika kartprojektionerna som tas upp. I delkapitel 4.3 visas det att inga kartprojektioner kan bevara alla avstånd, och därefter diskuteras försök att delvis bevara avstånd. Kapitel 5.3 i [16] används för Definition 4.1 och Sats 4.2, samt artikeln *Some Properties Related to the Mercator Projection* av Pijls [15] för härledning av Mercatorprojektionen i delkapitel 4.1. I kapitel 4.1 används även kapitel 9.7.1 i *Shape Interrogation for Computer-Aided Design and Manufacturing* av Patrikalakis, Maekawa och Cho [13] för Definition 4.3. I delkapitel 4.2 används kapitel 5.4 och 5.5 i [16], och i delkapitel 4.3 används kapitel 7.1 i *Portraits of the Earth: A Mathematician Looks at Maps* av Feeman [8].

4.1 Konforma avbildningar och kartor

För att kunna diskutera olika typer av konforma kartor definieras vad en *konform avbildning* är.

Definition 4.1 (Konform diffeomorfi). *En diffeomorfi $f : S_1 \rightarrow S_2$ sägs vara konform om skärningsvinkeln mellan alla par av korsande kurvor γ_1 och γ_2 på ytan S_1 är densamma som skärningsvinkeln mellan kurvorna $f \circ \gamma_1$ och $f \circ \gamma_2$ på S_2 .*

Anmärkning. I korthet innebär detta att en konform diffeomorfi bevarar vinklar.

Sats 4.2. *En diffeomorfi $f : S_1 \rightarrow S_2$ är konform om och endast om den första fundamentala formen för alla ytstycken σ_1 på S_1 , och den första fundamentala formen för $f \circ \sigma_1$ på S_2 är proportionella.*

Bevis. Antag att S_1 täcks av godtagbara ytstycken σ_1 . Enligt Lemma 1.14 är ytstycket $\sigma_2 = f \circ \sigma_1$ ett godtagbart ytstycke på S_2 . Antag att deras första fundamentala former är proportionella, så att de uppfyller att

$$E_2 du^2 + 2F_2 dudv + G_2 dv^2 = \lambda(E_1 du^2 + 2F_1 dudv + G_1 dv^2), \quad (23)$$

där λ är en slät, överallt positiv funktion av u och v . Dessutom är E_1, F_1 och G_1 koefficienterna till den första fundamentala formen för σ_1 , och E_2, F_2 samt G_2 motsvarande för σ_2 . Om $\gamma(t) = \sigma_1(u(t), v(t))$ och $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_1(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$ är korsande kurvor på S_1 , avbildar f dessa på $\sigma_2(u(t), v(t))$ och $\sigma_2(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$ i S_2 . Eftersom $\cos \theta = \frac{\gamma' \cdot \tilde{\gamma}'}{\|\gamma'\| \|\tilde{\gamma}'\|}$ där θ är skärningsvinkeln mellan γ och $\tilde{\gamma}$, ger kedjeregeln att

$$\cos \theta = \frac{E_2 u' \tilde{u}' + F_2 (u' \tilde{v}' + \tilde{u}' v') + G_2 v' \tilde{v}'}{(E_2 u'^2 + 2F_2 u' v' + G_2 v'^2)^{1/2} (E_2 \tilde{u}'^2 + 2F_2 \tilde{u}' \tilde{v}' + G_2 \tilde{v}'^2)^{1/2}}. \quad (24)$$

Om vi kombinerar ekvation (23) med (24) får vi att

$$\cos \theta = \frac{\lambda E_1 u' \tilde{u}' + \lambda F_1 (u' \tilde{v}' + \tilde{u}' v') + \lambda G_1 v' \tilde{v}'}{(\lambda E_1 u'^2 + 2\lambda F_1 u' v' + \lambda G_1 v'^2)^{1/2} (\lambda E_1 \tilde{u}'^2 + 2\lambda F_1 \tilde{u}' \tilde{v}' + \lambda G_1 \tilde{v}'^2)^{1/2}}.$$

Om λ faktoriseras ut ser vi att vinkeln är oberoende av λ , vilket innebär att vinkeln mellan $\sigma_2(u(t), v(t))$ och $\sigma_2(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$ är densamma som den mellan $\gamma(t)$ och $\tilde{\gamma}(t)$. Detta innebär enligt Definition 4.1 att f är konform.

Antag omvänt att skärningsvinkeln bevaras för alla par av korsande kurvor under avbildningen f . Vi visar att de första fundamentala formerna för σ_1 och σ_2 är proportionella. Detta görs genom att fixera $(a, b) \in U$ och sedan betrakta kurvorna $\gamma(t) = \sigma_1(a+t, b)$ och $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_1(a+t \cos \phi, b+t \sin \phi)$ där ϕ är en konstant. Detta ger att $u' = 1, v' = 0, \tilde{u}' = \cos \phi$ och $\tilde{v}' = \sin \phi$. Används detta i ekvation (24) får vi

$$\frac{E_1 \cos \phi + F_1 \sin \phi}{\sqrt{E_1(E_1 \cos^2 \phi + 2F_1 \sin \phi \cos \phi + G_1 \sin^2 \phi)}} = \frac{E_2 \cos \phi + F_2 \sin \phi}{\sqrt{E_2(E_2 \cos^2 \phi + 2F_2 \sin \phi \cos \phi + G_2 \sin^2 \phi)}}.$$

Genom att kvadrera båda sidor och skriva

$$(E_1 \cos \phi + F_1 \sin \phi)^2 = E_1(E_1 \cos^2 \phi + F_1 \sin \phi \cos \phi + G_1 \sin^2 \phi) - (E_1 G_1 - F_1^2)$$

får vi

$$\begin{aligned} & (E_1 G_1 - F_1^2) E_2 (E_2 \cos^2 \phi + F_2 \sin \phi \cos \phi + G_2 \sin^2 \phi) \\ &= (E_2 G_2 - F_2^2) E_1 (E_1 \cos^2 \phi + F_1 \sin \phi \cos \phi + G_1 \sin^2 \phi). \end{aligned}$$

Detta kan, om vi väljer $\lambda = \frac{(E_2 G_2 - F_2^2) E_1}{(E_1 G_1 - F_1^2) E_2}$, skrivas som

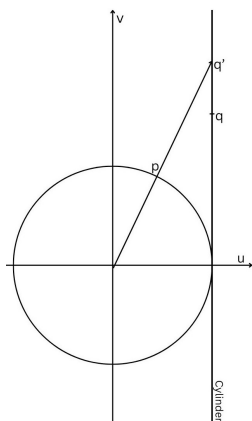
$$(E_2 - \lambda E_1) \cos^2 \phi + 2(F_2 - \lambda F_1) \sin \phi \cos \phi + (G_2 - \lambda G_1) \sin^2 \phi = 0. \quad (25)$$

Genom insättning av $\phi = 0$ och $\phi = \pi/2$ i ekvation (25) får vi att $E_2 = \lambda E_1, G_2 = \lambda G_1$ och till sist $F_2 = \lambda F_1$. \square

Flertalet kartprojektioner utgår ifrån att projicera S^2 på en så kallad *utvecklingsbar yta*.

Definition 4.3 (Utvecklingsbar yta). *En yta kallas för en utvecklingsbar yta om det finns en isometri mellan ytan och ett plan.*

Anmärkning. En utvecklingsbar yta har som följd av Sats 3.4 Gausskrökning 0. Detta innebär att minst en av ytans principkrökningar är lika med 0. Exempel på utvecklingsbara ytor är cylindrar och koner.



Figur 5: Konstruktion av Mercatorprojektion.

Ett exempel på en konform avbildning är *Mercatorprojektion*, som också är ett exempel på när jorden projiceras på en utvecklingsbar yta, i detta fall en cylinder.

Exempel 4.4. Mercatorprojektion avbildar en sfär utan dess poler på en cylinder som rullas ut till ett plan. Den utgår från att jorden, som kan antas vara enhetssfären S^2 , projiceras på en cylinder som tangerar S^2 i ekvatorn. En punkt p på sfären uttrycks genom dess koordinater $u \in [0, 2\pi), v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, där u representerar longitud och v latitud. Varje punkt p på sfären kan nu projiceras på en punkt q' på cylindern, så att vektorn pq' är parallell med sfärens normalvektor i p . Punkten q' flyttas sedan vertikalt nedåt till en punkt q som uppfyller att den horisontella och vertikala axeln skalas om lika mycket, vilket är ett krav för att projektionen ska vara konform. Se Figur 5.

Denna cylinder kan sedan rullas ut till ett plan. I detta plan, och i förlängningen också på cylindern, används kartesiska koordinater där x -axeln motsvarar en vertikal linje på cylinderns yta, samtidigt som y -axeln motsvarar ekvatorn. Om latituden i en punkt på S^2 är v , har cirkeln C_v på sfären vid latituden v radien $\cos v$. Denna cirkel avbildas på cylindern som en cirkel C_x vid höjden $x(v)$. Cirkeln C_x har då radien av cylindern, det vill säga 1. Detta innebär att

$$\frac{\text{Omkretsen av } C_x}{\text{Omkretsen av } C_v} = \frac{1}{\cos v},$$

vilket medför att sträckor längre bort från ekvatorn förlängs under avbildningen, då samma förhållande gäller för alla segment av C_v på vilken latitud v som helst. För att förhållandet dessutom ska gälla på den vertikala x -axeln, måste följande gälla:

$$\frac{x(v + \Delta v) - x(v)}{\Delta v} = \frac{1}{\cos v}. \quad (26)$$

Om vi låter $\Delta v \rightarrow 0$ i ekvation (26), får vi differentialekvationen

$$\frac{dx}{dv} = \frac{1}{\cos v}. \quad (27)$$

Eftersom vi valt att y -axeln motsvarar ekvatorn kan ekvation (27) lösas som ett begynnelsevärdeproblem med begynnelsevärde $x(0) = 0$. Dessutom vet vi att en punkt med longitud u på sfären även har y -koordinaten u i planet, vilket ger att

$$\begin{cases} x = \ln \left(\tan \left(\frac{v}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \\ y = u. \end{cases} \quad (28)$$

Detta innebär att den inversa avbildningen ges av

$$\begin{cases} u = y \\ v = 2 \left(\arctan(e^x) - \frac{\pi}{4} \right). \end{cases}$$

Vi kan nu visa att Mercatorprojektionerna är en konform diffeomorfi. Enhetssfären utan nord- och sydpolen kan beskrivas med hjälp av den lokala parametreringen

$$\sigma(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v), \quad u \in [0, 2\pi), v \in (-\pi/2, \pi/2),$$

vilket innebär att koefficienterna till dess första fundamentala form är $E_1 = \cos^2 v$, $F_1 = 0$ och $G_1 = 1$. Vi ser från ekvation (27) och (28) att den första fundamentala formen för $f \circ \sigma$ har koefficienterna $E_2 = 1$, $F_2 = 0$ och $G_2 = \sec^2 v$ då f är Mercatorprojektionerna (28). Från detta ser vi att Mercatorprojektionerna är en konform diffeomorfi enligt Sats 4.2, eftersom $E_2 = \lambda E_1$, $F_2 = \lambda F_1$ och $G_2 = \lambda G_1$ där $\lambda = \cos^2 v$.

4.2 Areabevarande kartor

Konforma avbildningar som Mercatorprojektionerna kan bland annat förenkla navigation, men en nackdel är att areor förvrängs. En karta som visar areor i rätt proportioner är viktig om areabaserad data, som exempelvis utbredning av olika typer av vegetation, skall redovisas.

Definition 4.5 (Area av ytstycke). *Arean $A_\sigma(R)$ av en del $\sigma(R)$ av ytstycket $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ som motsvarar ett område $R \subset U$ är*

$$A_\sigma(R) = \iint_R \|\sigma_u \times \sigma_v\| dudv.$$

Anmärkning. Integranden $\|\sigma_u \times \sigma_v\|$ i Definition 4.5 kan skrivas i termer av den första fundamentala formen av σ enligt Lemma A.23.

Definition 4.6 (Areabevarande diffeomorfi). *En diffeomorfi $f : S_1 \rightarrow S_2$ mellan två ytor S_1 och S_2 sägs vara areabevarande om den avbildar ett godtyckligt område i S_1 på ett område i S_2 med samma area.*

Sats 4.7. *En diffeomorfi $f : S_1 \rightarrow S_2$ är areabevarande om och endast om koefficienterna till de första fundamentala formerna för något ytstycke $\sigma(u, v)$ på S_1 och $f \circ \sigma$ på S_2 uppfyller att $E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2$, det vill säga att determinanten av matrisrepresentationen av deras första fundamentala former är lika.*

Bevis. Tag något ytstycke $\sigma_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ av S_1 . Vi kan enligt Lemma 1.14 låta $f \circ \sigma_1 = \sigma_2$ vara ett godtagbart ytstycke på S_2 . Antag först att de första fundamentala formerna för σ_1 och σ_2 uppfyller $E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2$. Låt $\sigma_1(R)$ och $\sigma_2(R)$ vara delar av ytstyckena σ_1 respektive σ_2 motsvarande ett område $R \subset U$. Arean av dessa fås enligt Definition 4.5 samt Lemma A.23 genom att integrera $(EG - F^2)^{1/2}$ över R , där $EG - F^2 = E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2$. Utifrån detta ser vi att f avbildar ytstycken i S_1 på ytstycken i S_2 med samma area, vilket innebär att f är areabevarande.

Antag nu istället att f är areabevarande. Vi vill visa att de första fundamentala formerna för σ_1 och σ_2 då måste uppfylla $E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2$. Vi har från Definition 4.6, Definition 4.5 och Lemma A.23 att

$$\iint_R (E_1 G_1 - F_1^2)^{1/2} dudv = \iint_R (E_2 G_2 - F_2^2)^{1/2} dudv \quad (29)$$

för alla $R \subset U$. Vi tar R som

$$\begin{cases} u = g(x, y) \\ v = h(x, y) \end{cases}$$

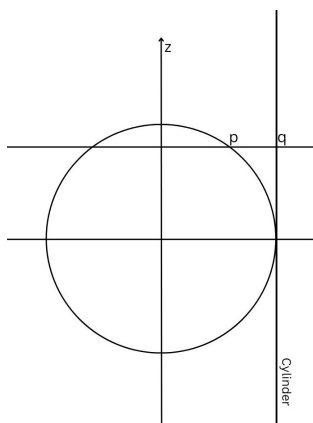
där $x_0 < x < x_1$, $y_0 < y < y_1$, och $g(x, y)$ samt $h(x, y)$ är funktioner med kontinuerliga partiella derivator. Då kan (29) skrivas som

$$\int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} (E_1 G_1 - F_1^2)^{1/2} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} dx dy = \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} (E_2 G_2 - F_2^2)^{1/2} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} dx dy. \quad (30)$$

Deriverar vi båda led i (30), först med avseende på y och sedan på x , får vi enligt analysens huvudsats att integranderna är desamma. Kvadrerar vi sedan båda integranderna får vi att $E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2$. \square

Exempel 4.8. Här följer en härledning av *Lamberts ytriaktiga cylindriska projektion*. Denna projektion är areabevarande och härleds likt Mercatorprojektionen från att S^2 (utan dess poler), som representerar jorden, projiceras på enhetscylindern.

Enhets sfären S^2 , som i kartesiska koordinater kan beskrivas av $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, placeras i enhetscylindern som beskrivs av $x^2 + y^2 = 1$ så att ytorna skär varandra längs cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ i xy -planet ($z = 0$). För varje punkt $p \in S^2 \setminus \{z = \pm 1\}$ existerar en unik rät linje genom z -axeln och p som är parallell med xy -planet.



Figur 6: Konstruktion av Lamberts ytriaktiga projektion.

Skärningspunkten mellan denna linje och enhetscylindern som är närmast p kallar vi q . För att hitta en formel för avbildningen f från S^2 utan dess poler till enhetscylindern, som avbildar p på q , låter vi (x, y, z) vara de kartesiska koordinaterna för p , och (a, b, c) vara de kartesiska koordinaterna för q . Då linjen mellan p och q är parallell med xy -planet vet vi att $z = c$ och $\lambda(x, y) = (a, b)$ för någon skalär λ . Eftersom (a, b, c) är på cylindern gäller att $1 = a^2 + b^2 = \lambda^2(x^2 + y^2)$, vilket innebär att $\lambda = \pm(x^2 + y^2)^{-1/2}$. Vi väljer ett positivt tecken för att få punkten q . Detta ger att

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right). \quad (31)$$

För att visa att (31) är en areabevarande diffeomorfi börjar vi med att konstatera att ytan S_1 , som är S^2 utan dess poler, beskrivs av den lokala parametriseringen

$$\sigma_1(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v), \quad u \in [0, 2\pi), v \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Under avbildningen f är $f \circ \sigma_1 = \sigma_2(u, v) = (\cos u, \sin u, \sin v)$. Detta ger en lokal parametrisering för ytan S_2 som består av delen av enhetscylindern mellan planen $z = 1$ och $z = -1$, där $u \in [0, 2\pi)$, $v \in (-\pi/2, \pi/2)$. Koefficienterna i den första fundamentala formen för σ_1 är $E_1 = \cos^2 v$, $F_1 = 0$ och $G_1 = 1$. För cylindern σ_2 är motsvarande $E_2 = 1$, $F_2 = 0$ och $G_2 = \cos^2 v$. Därmed ser vi att $E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2 = \cos^2 v$, vilket innebär att f i (31) är areabevarande enligt Sats 4.7.

Vi går nu vidare till att visa två av kapitlets mest fundamentala resultat, som följer som konsekvens av Gauss remarkabla sats.

Sats 4.9. Om en diffeomorfi är både konform och areabevarande är den också en isometri.

Bevis. Antag att en diffeomorfi $f : S_1 \rightarrow S_2$, där S_1 och S_2 är ytor, är konform. Om σ_1 är ett ytstycke av S_1 och $f \circ \sigma_1 = \sigma_2$ är ett ytstycke av S_2 , så måste deras första fundamentala former vara proportionella enligt Sats 4.2. Det vill säga $E_2 = \lambda E_1$, $F_2 = \lambda F_1$ och $G_2 = \lambda G_1$, där λ är en slät och överallt positiv funktion. Om f även ska vara areabevarande måste de första fundamentala formerna för σ_1 och σ_2 uppfylla $E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2$, enligt Sats 4.7. Om dessa krav kombineras får vi att $E_2 G_2 - F_2^2 = \lambda^2 E_1 G_1 - \lambda^2 F_1^2 = \lambda^2 (E_1 G_1 - F_1^2)$. Vi ser nu att λ i detta

fall endast kan vara 1 då λ enligt Sats 4.2 måste vara slät och överallt positiv. Detta innebär att den första fundamentala formen för σ_1 är lika med den för σ_2 , vilket enligt Sats 3.2 medför att f är en isometri. \square

Korollarium 4.10. *Det går inte att konstruera en platt karta av jorden som är både konform och areabevarande.*

Bevis. Antag att jorden har formen av S_r , som enligt Lemma 2.7 har Gausskrökningen $K = \frac{1}{r^2}$, där r är jordens radie. Vi vet även att Gausskrökningen av ett plan är $K = 0$. Gauss remarkabla sats (Sats 3.4) säger att Gausskrökningen av en yta bevaras under isometrier, och från Sats 4.9 har vi att om en diffeomorfi ska vara både areabevarande och konform så måste den vara en isometri. Av detta följer korollariet eftersom ett plan och S_r har olika Gausskrökning. \square

4.3 Avståndsbevarande kartor

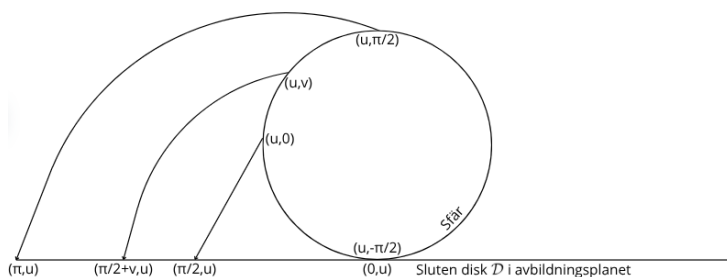
När kartor som bevarar areor eller vinklar studerats tidigare i kapitlet har omöjligheten i en isometrisk avbildning från en sfär till ett plan använts, alltså resultatet att det inte finns någon avbildning som bevarar alla kurvors längd. I detta delkapitel studeras om det är möjligt att konstruera avbildningar med mer specifika krav kring bevarande av avstånd och längd.

Naturliga utgångspunkter är avbildningar som bevarar längden av en begränsad mängd av kurvor eller som bevarar delmängder av kurvors relativa längd. Den viktigaste typen av längd på kurvor tenderar att vara längden på den kortaste kurvan mellan två punkter, alltså avståndet mellan dessa punkter. Det är dock inte heller möjligt att konstruera en avbildning där *alla* avstånd bevaras, eftersom även en sådan nödvändigtvis hade varit isometrisk.

Vad som däremot kan konstrueras är en så kallad *längdriktig karta* som bevarar alla avstånd från en fix punkt på jordklotet. En sådan karta kan dessutom samtidigt ha egenskaper som en konform karta i denna fixa punkt. Det gör karttypen särskilt lämpad när en central punkt är av särskild vikt, exempelvis vid långväga radiokommunikation eller flygplans räckvidd från en flygplats.

Exempel 4.11. Vi låter enhetssfären S^2 utan nordpol beskrivas av sin longitud $0 \leq u < 2\pi$ och latitud $-\frac{\pi}{2} \leq v < \frac{\pi}{2}$. Vi definierar en *azimutal⁵ längdriktig avbildning* $f : S^2 \rightarrow \mathcal{D}$, där \mathcal{D} är en öppen disk i \mathbb{R}^2 med radie π , så att varje punkt (u, v) på sfären avbildas till en punkt på planet med de polära koordinaterna $\theta = u, r = \frac{\pi}{2} + v$. Sydpolen projiceras då till punkten $(0, 0)$ med avståndet $\frac{\pi}{2} + v$ till $f(u, v)$.

Longituderna är storcirklar som går genom sydpolen, och längden från en punkt (u, v) till sydpolen $(u, -\frac{\pi}{2})$ längs longituderna är alltså avståndet, vilket blir $v - (-\frac{\pi}{2})$ som alltså bevaras under avbildningen. Vi noterar också att vinkeln mellan två kurvor som skär varandra i sydpolen måste bevaras under avbildningen, då $\theta = u$ och då differensen mellan kurvornas infallsvinklar i θ och u bestämmer skärningsvinkeln på avbildningen respektive på sfären. Genom ett annat val av poler på sfären fås en annan punkt än sydpolen i vilken avstånd och vinklar bevaras under avbildningen.



Figur 7: Konstruktion av en azimutal längdriktig avbildning centrerad på sydpolen, där den godtyckliga latituden u visas.

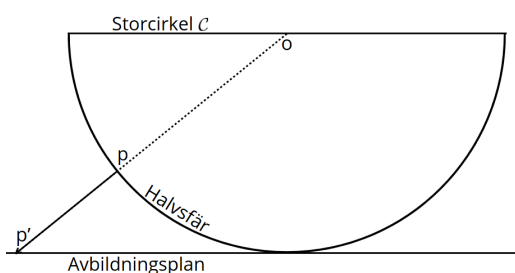
I Exempel 4.11 avbildas den punkterade sfären till en disk med radien π och avståndet till randen i en punkt (r, θ) är således $\pi - r$. På sfären är avståndet från en punkt (u, v) till sydpolen längden längs punktens longitud, $\frac{\pi}{2} + v$. Sydpolen ligger med avstånd π till nordpolen på samma longitud, och avståndet till sydpolen från (u, v) blir då $\pi - (\frac{\pi}{2} + v) = \frac{\pi}{2} - v = \pi - r$. Om vi då utökar diffeomorfin f med att avbilda nordpolen till cirkeln som är rand till den azimutala längdriktiga kartan, liksom fallet i konstruktionen i Figur 7, så kan vi säga att även avståndet till nordpolen bevaras under avbildningen.

⁵En azimutal karta är en projektion direkt på planet, snarare än på en annan utvecklingsbar yta.

När en karta konstrueras för att på något vis bevara avstånd under avbildningen är det, som konstaterat, inte möjligt att bevara proportionerliga avstånd över hela avbildningen. Vad som istället är möjligt är att avbilda den kortaste kurvan mellan två punkter på den kortaste kurvan mellan punkternas avbildningar. För en karta av jorden innebär det att det kortaste avståndet mellan två punkter, det vill säga segment av storcirkelar, alltid avbildas på segment av räta linjer.

Exempel 4.12. Den *gnomoniska projektionen* är en avbildning från en öppen halvsfär till hela det reella planet \mathbb{R}^2 . Halvsfären placeras liksom i Figur 8 så att den tangerar planet, och så att storcirkeln \mathcal{C} som avgränsar halvsfären är parallell med planet. Punkter p på halvsfären projiceras till punkter p' på planet som uppfyller att p , p' och halvsfärens medelpunkt o ligger på samma räta linje. Eftersom linjer genom o och punkter på \mathcal{C} är parallella mot avbildningsplanet, så närmar sig avbildningen oändligheten för punkter allt närmare \mathcal{C} .

Projektionen har egenskapen att den avbildar segment av storcirkelar på segment av räta linjer. För att bevisa detta studerar vi ett storcirkelsegment \mathcal{C} . Storcirkelns medelpunkt är halvsfärens medelpunkt o . Alla linjer genom o och \mathcal{C} , och därför även avbildningen av \mathcal{C} , måste ligga i samma plan som storcirkeln. Men avbildningen ligger i avbildningsplanet som inte innehåller o och är alltså ett annat plan. Då ligger avbildningen i skärningen mellan de två planen, vilket är en rät linje.



Figur 8: Konstruktion av gnomonisk avbildning.

Det finns således en avbildning som åtminstone på något vis bevarar en egenskap relaterad till avstånd. Vi visade i Korollarium 4.10 att vi inte kan ha en karta som är både konform och areabevarande. Vi visar nu att egenskapen att avbilda storcirkelar på räta linjer är en tredje uteslutande egenskap, tillsammans med konformitet och areabevarande, där ingen avbildning kan ha två samtidigt, huvudsakligen med hjälp av samband inom sfärisk geometri som exempelvis redovisas i kapitel 5 i [8].

Sats 4.13. *Varken en konform eller en areabevarande diffeomorfi från ett ystykke σ på en sfär till en del av ett plan kan avbilda alla storcirkelar på räta linjer.*

Bevis. Vi antar först att en diffeomorfi f är konform och avbildar alla storcirkelar på räta linjer, för att från det härleda en motsägelse. Vi studerar tre punkter p_1, p_2, p_3 i σ där storcirkelsegmenten mellan dessa också ligger i σ . Då gäller att triangeln som bildas med punkterna som hörn har en vinkelsumma större än 180° . Storcirkelsegmenten avbildas under f på räta linjer, och eftersom f är konform är vinkelsumman av den på planet avbildade triangeln större än 180° . Detta är en motsägelse då vi nu betraktar triangeln i ett plan, där vinkelsumman måste vara exakt 180° .

Nu antar vi istället att diffeomorfin f är areabevarande. Vi studerar storcirkelarna med segmenten ab och cd , där a och d har samma avstånd till den ena av storcirkelarnas skärningspunkter, som b och c har till den andra. Då har segmenten samma längd och konstruktionen är symmetrisk kring storcirkeln genom segmentens respektive mittpunkter. Symmetrin ger att $A_\sigma(\triangle abc) = A_\sigma(\triangle abd)$. Då f är areabevarande gäller $A(\triangle a'b'c') = A(\triangle a'b'd')$ vilket innebär att $a'b' \parallel c'd'$, där $a' = f(a)$ och analogt för övriga punkter. Vi kan hitta sådana a, b, c, d för alla par av storcirkelar där båda har en av sina två mittpunkter mellan storcirkelarnas skärningspunkter i en öppen delmängd av σ , och alla sådana cirkelar har alltså parallella linjer som avbildningar.

Vi väljer ett koordinatsystem för sfären så att ett segment av ekvatorn ligger i en öppen delmängd av σ . Vi studerar två longituder $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ och en tredje storcirkel \mathcal{C}_3 som skär \mathcal{C}_2 i ekvatorn och \mathcal{C}_1 med avståndet δ från polerna. Kalla punkten på \mathcal{C}_i mittemellan skärningarna med \mathcal{C}_j för s_{ij} . När δ går mot 0 kommer \mathcal{C}_3 gå mot \mathcal{C}_2 och därför s_{13} gå mot s_{12} och s_{31} gå mot s_{21} . Men både s_{12} och s_{21} ligger i en öppen mängd, så vi kan hitta ett tillräckligt litet $\delta > 0$ så att även s_{13} och s_{31} ligger i denna mängd. Men då gäller $\mathcal{C}'_3 \parallel \mathcal{C}'_1 \parallel \mathcal{C}'_2$, vilket är en motsägelse då \mathcal{C}_2 skär \mathcal{C}_3 i σ . \square

Referenser

- [1] S. Axler. *Linear Algebra Done Right*. Springer, 2023.
- [2] T.F. Banchoff och F. Günther. “The Discrete Theorema Egregium”. I: *The American Mathematical Monthly* 131.1 (2024), s. 30–47.
- [3] C. Bär. *Elementary Differential Geometry*. Cambridge University Press, 2010.
- [4] Gottlieb Biermann. *Carl Friedrich Gauss*. Public domain-bild via Wikimedia Commons. 1840. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg.
- [5] D. Borthwick. *Spectral Theory: Basic Concepts and Applications*. Springer, 2020.
- [6] M.P. Do Carmo. *Differential Geometry of curves and surfaces: Revised and Updated Second Edition*. Dover publications, 2016.
- [7] M.P. Do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, 1992.
- [8] T.G. Feeman. *Portraits of the Earth: A Mathematician Looks at Maps*. American Mathematical Society, 2002.
- [9] J.M Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*. Springer, 2018.
- [10] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2013.
- [11] J.R. Munkres. *Topology*. Pearson, 2018.
- [12] S.P. Parker. *McGraw-Hill Encyclopedia of Science and Technology*. McGraw-Hill, Inc., 1997.
- [13] N. M. Patrikalakis, T. Maekawa och W. Cho. *Shape Interrogation for Computer-Aided Design and Manufacturing, Hyperbook Edition*. Springer, 2009.
- [14] A. Persson och L-C. Böiers. *Analys i flera variabler*. Studentlitteratur, 2005.
- [15] W Pijls. “Some Properties Related to Mercator Projection”. I: *The American Mathematical Monthly* 108.6 (2001), s. 537–543.
- [16] A. Pressley. *Elementary Differential Geometry*. Springer-Verlag London, 2001.
- [17] J.P Snyder. *Map projections: A working manual*. U.S. Government Printing Office, 1987.
- [18] S. Treil. *Linear Algebra Done Wrong*. Brown University, 2014.

AI-användande

Under projektets gång har AI inte använts till att generera varken text, tabeller eller figurer. Alla figurer har antingen ritats själva av författarna, eller hämtats från en källa som tillåter användning av bilden. Sammanfattning och Abstract har författarna skrivit tillsammans utan hjälp av AI.

A Kompletterande och fördjupande teori samt notation

I detta kapitel påminns läsaren om terminologier som ligger utanför arbetet men som är viktiga för arbetets huvudämne. Delkapitel A.1 ger kompletterande teori i linjär algebra som är relevant för arbetet. Delkapitel A.2 fördjupar läsarens förståelse för begreppet *öppen mängd* inom topologin och *slät avbildning* från flervariabelanalys då de dyker upp ofta under arbetet. Den intresserade läsaren hänvisas till delkapitel A.3 för en fördjupning i ytteori som är en utökning av delkapitel 1.3 och kapitel 2. I detta appendix presenteras även en notationstabell i delkapitel A.4 som består av alla notationer som används under hela arbetet. I A.1 refereras kapitel 1 och 2 i boken *Spectral Theory: Basic Concepts and Applications* [5] av Borthwick för Definition A.1 och A.3. Vidare refereras huvudsakligen kapitel 5 och 7 i *Linear Algebra Done Right* [1] av Axler. Till sist i delkapitel A.1 används kapitel 5 i *Linear Algebra Done Wrong* [18] av Treil för Definition A.6. I delkapitel A.2 används huvudsakligen kapitel 2 i Munkres *Topology* [11] fram till Definition A.11 där vi därefter refererar till kapitel 2 i *Analys i flera variabler* [14] av Persson och Böiers. Delkapitel A.3 använder sig av kapitel 3 i [3] fram till Proposition A.19. Resterande använder huvudsakligen kapitel 5 och 6 från [16].

A.1 Linjär algebra

En av de viktigaste satserna som används under arbetet är *reella spektralsatsen*, för att bevisa bland annat att de principala riktningarna bildar en ortogonal bas till $T_p S$ vid distinkta egenvärden. För att bevisa denna sats behövs terminologier som *självadjungerad avbildning*, med mera. Vi låter V vara ett ändligt dimensionellt vektorrum över en kropp \mathbb{K} och betecknar med $\mathcal{L}(V)$ mängden av alla linjära avbildningar på V . Vi betraktar däremot endast $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. I detta delkapitel låter vi dessutom I vara identitetsmatrisen för motsvarande dimension.

Definition A.1 (Inre produkt). *En inre produkt på ett vektorrum V är en funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ som har följande egenskaper:*

- $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ för alla $\mathbf{v} \in V$, och $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ om och endast om $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
- $\langle \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$, för några skalärer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ och för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

Anmärkning. Ett vektorrum som har en inre produkt kallas för ett *inre produktrum*. Notera att den euklidiska skalärprodukten som vi använder i arbetet är en inre produkt.

Vi låter nu V vara ett inre produktrum om inget annat anges.

Definition A.2 (Invariant delrum). *Låt $T \in \mathcal{L}(V)$. Ett delrum U av V kallas invariant under T om $\mathbf{u} \in U$ implicerar att $T\mathbf{u} \in U$, det vill säga om $T|_U \in \mathcal{L}(U)$.*

Givet $\mathbf{v} \in V$ och $T \in \mathcal{L}(V)$ kan vi definiera en *funktional* $\mathbf{u} \mapsto \langle \mathbf{v}, T\mathbf{u} \rangle$. *Riesz lemma* säger då att det finns en unik vektor $\mathbf{w} \in V$ sådan att $\langle \mathbf{v}, T\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$.

Definition A.3 (Adjunkten till en linjär avbildning). *Adjunkten till $T \in \mathcal{L}(V)$ är avbildningen $T^* : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{w}$, det vill säga att T^* är den unika linjära avbildningen sådan att*

$$\langle \mathbf{v}, T\mathbf{u} \rangle = \langle T^*\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle, \text{ för alla } \mathbf{u} \in V.$$

T kallas *självadjungerad* om $T = T^*$.

Vi påminner läsaren att i ett vektorrum över \mathbb{R} så är T^* transponatet av avbildningsmatrisen till T .

Lemma A.4. *Antag att $V \neq \{\mathbf{0}\}$ och att $T \in \mathcal{L}(V)$ är självadjungerad. Låt U vara ett delrum av V som är invariant under T . Då gäller följande:*

- Alla egenvärden till T är reella,
- T har minst ett egenvärde,
- U^\perp är invariant under T ,
- $T|_U \in \mathcal{L}(U)$ är självadjungerad,
- $T|_{U^\perp} \in \mathcal{L}(U^\perp)$ är självadjungerad.

Bevis. (a) Antag att $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ där $\mathbf{v} \neq 0$. Vi visar att λ är reell.

$$\begin{aligned}\langle T\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle &= \langle \lambda\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \lambda\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \lambda\|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \langle \mathbf{v}, T\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \lambda\mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \lambda\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \overline{\lambda}\|\mathbf{v}\|^2.\end{aligned}$$

Eftersom $\|\mathbf{v}\|^2 \neq 0$ så följer det att $\lambda = \overline{\lambda}$, det vill säga $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Vi bevisar (b) för en $n \times n$ -matris. Eftersom vi är i ett vektorrum över \mathbb{R} så följer det att T är symmetrisk, ty $T = T^* = T^t$. Ställer vi upp dess karakteristiska ekvation och noterar att T också är självadjungerad i \mathbb{C} , så får vi enligt algebrans fundamentalsats att ekvationen har minst ett komplext nollställe. Men vi har från (a) att alla dess egenvärden är reella. Därmed har T minst ett egenvärde i \mathbb{R} .

(c) Låt $\mathbf{v} \in U^\perp$ och tag $\mathbf{u} \in U$. Dessa tillsammans med att T är självadjungerad och att U är invariant under T ger att

$$\langle T\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, T\mathbf{u} \rangle = 0,$$

vilket gäller för alla $\mathbf{u} \in U$. Det vill säga, $T\mathbf{v} \in U^\perp$ och alltså är U^\perp invariant under T .

(d) Antag att $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$. Notera att

$$\langle (T|_U)\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle T\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, T\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, (T|_U)\mathbf{u} \rangle.$$

Således är $T|_U$ självadjungerad.

(e) följer från (c) och (d). □

Sats A.5 (Reella spektralsatsen). *Antag att T är en linjär avbildning på V . Då är följande ekvivalenta:*

a) T är självadjungerad.

b) V har en ortonormal bas som består av egenvektorerna till T .

c) T har en diagonalmatris med avseende på någon ortonormal bas till V .

Bevis. Vi visar först att (c) implicerar (a). Antag att T har en diagonalmatris med avseende på någon ortonormal bas till V . En diagonalmatris bevaras under transponering, därmed är $T = T^*$, det vill säga T är självadjungerad.

Antag nu att (a) gäller. Vi visar (b) via induktion på $\dim V$. Basfallet $\dim V = 1$ följer omedelbart. Antag att $\dim V = n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ och att (a) medför (b) för alla reella inre produktrum av dimension upp till $n - 1$. Enligt Lemma A.4 har T en egenvektor \mathbf{u} , antag att den är normerad (normera om den inte är det). Låt $U = \text{Span}(\mathbf{u})$. Då är U ett en-dimensionellt delrum till V som är invariant under T . Avbildningen $T|_{U^\perp} \in \mathcal{L}(V)$ är självadjungerad enligt Lemma A.4 och har därför en ortonormal bas bestående av egenvektorer till $T|_{U^\perp}$ enligt induktionsantagandet. Läger vi till vektorn \mathbf{u} till ortonormalbasen för U^\perp så får vi en ortonormal bas till V som består av egenvektorer till T , ty $\dim(U^\perp) = n - 1$. Läger vi till \mathbf{u} så är $\dim(U^\perp) = \dim V$. Vi har nu visat att (a) medför (b).

Det följer att (b) medför (c), ty vi kan diagonalisera T så att diagonalmatrisen består av egenvärdena till T .

Därmed har vi visat att påståendena är ekvivalenta. □

Vi avslutar delkapitlet med definitionen av *spåret* till en matris och två efterföljande satser som är väsentliga för teorin i kapitel 2.

Definition A.6 (Spår). *För en $n \times n$ -matris A är dess spår, betecknat $\text{Tr}(A)$, summan av dess diagonalelement.*

Notera att om $A = (a_{ij})$ och $B = (b_{ij})$ är sådana att AB och BA är väldefinierade så är

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{kj} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{jk} a_{kj} = \text{Tr}(BA). \quad (32)$$

Antag nu att $T \in \mathcal{L}(V)$ har en avbildningsmatris av storlek $n \times n$ som är diagonaliserbar, det vill säga $T = PDP^{-1}$ där D är en diagonalmatris vars diagonal består av egenvärdena till T , och P består av motsvarande egenvektorer till egenvärdena. Då är

$$\text{Tr}(T) = \text{Tr}(PDP^{-1}) = \text{Tr}((PD)P^{-1})$$

$$= \text{Tr}(P^{-1}(PD)), \text{ enligt ekvation (32).}$$

Vi använder den associativa lagen och får att

$$\text{Tr}(T) = \text{Tr}((P^{-1}P)D) = \text{Tr}(ID) = \text{Tr}(D).$$

Även

$$\begin{aligned} \det(PDP^{-1}) &= \det(P) \det(D) \det(P^{-1}) \\ &= \det(PP^{-1}) \det(D) = \det(D), \end{aligned}$$

vilket är produkten av dess diagonalelement. Vi har därmed visat följande proposition:

Proposition A.7. *Spåret av en diagonaliserbar matris är summan av dess egenvärden. Determinanten av en diagonaliserbar matris är produkten av dess egenvärden.*

För en bas \mathcal{B} så betecknar vi T med avseende på basen \mathcal{B} som $[T]_{\mathcal{B}}$. Basbyte till basen \mathcal{C} blir då $[I]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C}}$.

Proposition A.8. *Determinanten och spåret av en linjär avbildning är oberoende av bas.*

Bevis. Låt $T \in \mathcal{L}(V)$. Vi har att

$$\begin{aligned} \text{Tr}([T]_{\mathcal{C}}) &= \text{Tr}([I]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}) = \text{Tr}([I]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}([T]_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}\mathcal{C}})) \\ &= \text{Tr}([T]_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}[I]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}) = \text{Tr}([T]_{\mathcal{B}}([I]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}[I]_{\mathcal{C}\mathcal{B}})) \\ &= \text{Tr}([T]_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}}) = \text{Tr}([TI]_{\mathcal{B}}) = \text{Tr}([T]_{\mathcal{B}}). \end{aligned}$$

På liknande vis får vi att

$$\begin{aligned} \det([T]_{\mathcal{C}}) &= \det([I]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}) \\ &= \det([I]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}) \det([T]_{\mathcal{B}}) \det([I]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}) = \det([T]_{\mathcal{B}}). \end{aligned}$$

□

A.2 Grundläggande topologi och flervariabelanalys

Detta delkapitel anger vad vi menar med en *öppen mängd* som dyker upp ett flertal gånger under arbetet, och utvecklar vidare om *topologiska egenskaper* som nämns i delkapitel 1.3. Dessa egenskaper motiveras utifrån definitionen av *kontinuitet* i topologiska termer. Till sist påminner vi läsaren om vad en *slut avbildning* är för något och hur man konstruerar ett tangentplan till en funktionsyta, eftersom dessa begrepp är relevanta för arbetets teori.

Definition A.9 (Topologi). *Låt X vara en mängd. En topologi över X är en samling τ av delmängder till X med följande egenskaper:*

- i) $X, \emptyset \in \tau$.
- ii) För $A_i \in \tau$ så är den godtyckliga unionen $\cup_i A_i \in \tau$.
- iii) För $A_1, \dots, A_n \in \tau$ så ska $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$.

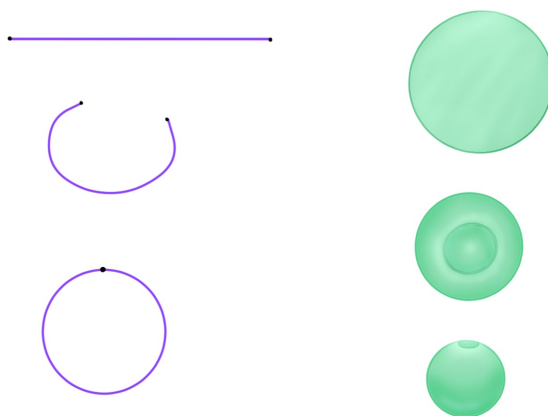
Anmärkning. Om $A \in \tau$ så säger vi att A är en *öppen mängd* och att $X \setminus A$ är en *sluten mängd*. Vi preciserar även begreppet *omgivning* genom att säga för en punkt $p \in X$ så är $U \in \tau$ en omgivning till p om $p \in U$.

En naturlig topologi över \mathbb{R}^n är att låta en mängd vara öppen om den kan skrivas som en union av mängder på formen $\{B_r(\mathbf{x})\}$, där $B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y}; |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r, r > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$. Vi kallar $B_r(\mathbf{x})$ för en "öppen boll". Denna topologin kallas för *standardtopologin* på \mathbb{R}^n . Notera att för $n = 1$ så genereras öppna mängder av öppna intervall. Vi betraktar endast standardtopologin på \mathbb{R}^n i detta arbete. Framöver när vi hänvisar till en mängd X så menar vi det *topologiska rummet* (X, τ) som är mängden X tillsammans med en topologi τ . Vi kan nu med hjälp av topologiska rum definiera *kontinuitet* för en funktion.

Definition A.10 (Kontinuerlig funktion). *Låt X och Y vara topologiska rum. Vi säger att $f : X \rightarrow Y$ är kontinuerlig om för alla öppna mängder $U \subset Y$ så är $f^{-1}(U)$ öppen i X .*

Anmärkning. Kontinuitet för funktioner i standardtopologin över \mathbb{R} är ekvivalent med ε - δ definitionen från analysen. Beviset för detta kräver dock ytterligare terminologi från topologin som vi inte tar upp här.

Om $f : X \rightarrow Y$ är en homeomorfi så följer det naturligt att för alla öppna mängder $V \subset X$ så är $f(V)$ öppen, ty f^{-1} är kontinuerlig. På detta vis bevaras egenskaper som kompakthet, sammanhängande med mera mellan dessa två mängder, då bilden av exempelvis en kompakt mängd under en kontinuerlig funktion är kompakt, vilket vi vet från envariabelanalysen. Vi kallar de egenskaper som är invarianta under homeomorfi för *topologiska egenskaper*. Intuitivt är två mängder homeomorfa om den ena kan deformas till den andra genom att sträcka ut eller böja mängden, men inte ta isär eller sätta ihop mängden. På liknande sätt som vi betraktar grupper upp till isomorfi så betraktar vi topologiska rum upp till homeomorfi.



Figur 9: Figuren till vänster visar när ett intervall sätts ihop till en cirkel. Alltså är ett intervall och en cirkel inte homeomorfa då ändpunkterna i intervallet skickas till samma punkt på cirkeln. Figuren till höger visar när en disk deformas till en sfär med ett hål genom att böja på disken. Intuitivt borde en disk och en sfär med ett hål vara homeomorfa (vilket de faktiskt är).

I följande definition preciserar vi vad en slät avbildning är, ett begrepp som används återkommande under arbetet.

Definition A.11 (Slät avbildning). *Låt f vara definierad i en öppen mängd $X \subset \mathbb{R}^n$. Vi säger att f är en slät avbildning, eller att f är av klass $C^\infty(X)$ om f är oändligt deriverbar (oändligt partiellt deriverbar) och om alla dessa (partiella) derivator är kontinuerliga.*

Ett enkelt exempel på en slät avbildning är exponentialfunktionen e^x , ty alla dess derivator är sig själva.

Avslutningsvis påminner vi läsaren om hur vi konstruerar ett tangentplan till en graf av en funktion av två variabler från flervariabelanalysen. Låt $f(x, y)$ vara en differentierbar funktion definierad i en öppen mängd $X \subset \mathbb{R}^2$. Tag någon punkt $(a, b) \in X$. Vi har enligt definitionen av differentierbarhet i punkten (a, b) att

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k + \sqrt{h^2 + k^2}\rho(h, k),$$

för små värden på h och k , där $\rho \rightarrow 0$ när $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Låt nu

$$x = a + h, \quad y = b + k.$$

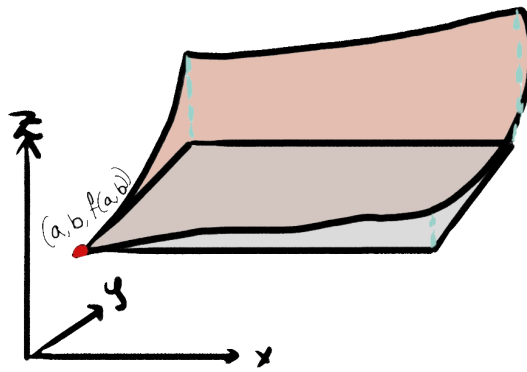
Då är

$$h = x - a, \quad k = y - b.$$

Vi får planet

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$$

som vi kallar för *tangentplanet* till funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$.



Figur 10: Grafen till en funktion $f(x, y)$ och dess tangentplan i punkten $(a, b, f(a, b))$.

A.3 Fördjupning i ytteori

Detta delkapitel, som namnet antyder, fördjupar den intresserade läsaren i ytteori. Delkapitlet visar dessutom viktiga resultat som följer från kapitel 2 men som inte används i de andra huvudkapitlen, vilket är varför de bevisas i detta appendix istället. Vi inleder delkapitlet med ett exempel som en utökning av delkapitel 1.3 och en sats som ger oss ett alternativt sätt för att avgöra när en nivåyta är en slät yta.

Exempel A.12. Låt $U \subset \mathbb{R}^2$ vara öppen och $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ vara en slät avbildning. Vi ska visa att dess graf $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$ är en slät yta. Tag $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3, F(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Notera att $F(U) = S \cap \mathbb{R}^3 = S$ och att F är slät, samt att dess invers $F^{-1} : S \rightarrow U, (x, y, z) \mapsto (x, y)$ är kontinuerlig. Dessutom är $F_x(x, y) = (1, 0, f_x(x, y))$ och $F_y(x, y) = (0, 1, f_y(x, y))$ linjärt oberoende. Således är S en slät yta.

I följande sats låter vi $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$ där f är en slät reellvärd avbildning.

Sats A.13. Om $\nabla f(p) := (f_x(p), f_y(p), f_z(p)) \neq \mathbf{0}$ för alla $p \in S$, så är S en slät yta.

Bevis. Låt $p = (x_0, y_0, z_0) \in S$. Minst en av komponenterna i gradienten är nollskild i punkten p , antag att $f_z(p) \neq 0$. Enligt implicita funktionssatsen existerar en omgivning $U \subset \mathbb{R}^2$ runt (x_0, y_0) och en omgivning $V \subset \mathbb{R}$ runt z_0 , samt en slät funktion $g : U \rightarrow V$ sådan att $(x, y, g(x, y)) \in S, (x, y) \in U$. Lokalt runt punkten p är ytan en graf, och alltså har vi en lokal parametrisering $F(x, y) = (x, y, g(x, y))$ av S . Enligt Exempel A.12 är S en slät yta. \square

Exempel A.14. Tag en ellipsoid $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, a, b, c \in \mathbb{R}$. Dess gradient $\nabla f(x, y, z) = (\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}) = \mathbf{0}$ om och endast om $x = y = z = 0$. Men $(x, y, z) = \mathbf{0}$ ligger ej på ellipsoiden. Därmed är ellipsoiden en slät yta enligt Sats A.13.

Precis som för kurvor kan vi för ytor bilda *normalfält*.

Definition A.15 (Normalfält för yta). Låt S vara en yta i \mathbb{R}^3 . Ett normalfält på S är en avbildning $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ sådan att $N(p) \perp T_p S$ för alla $p \in S$. Ett normalfält kallas ett enhetsnormalfält om $\|N(p)\| = 1$ för alla $p \in S$.

Eftersom att enhetsnormalen N_σ kan peka åt två olika håll beroende på tecknet hos N_σ , är det naturligt att försöka definiera begreppet *orientation* av en yta. Intuitivt borde ett val av normalfält inducera en orientation i en omgivning runt varje punkt $p \in S$. Det vill säga om varje par av omgivningar kring punkten p skär varandra och har samma orientering så sägs S vara *orienterbar*, ty annars är normalfältet inte slätt.

Definition A.16 (Orienterbar yta). En yta S är orienterbar om det existerar ett slätt normalfält på S .

Exempel A.17. Enhetssfären S^2 är ett exempel på en orienterbar yta. Enhetssfären kan implicit skrivas som nivåytan $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Sätt $p = (x, y, z)$ och låt $N(x, y, z) = (x, y, z)$, vilket är en slät avbildning. Kom ihåg att $\nabla f(p) \perp T_p S^2$. Vi har då att $\nabla f(p) = (2x, 2y, 2z) = 2(x, y, z) = 2N(x, y, z)$. Alltså är $N(x, y, z)$ ett slätt normalfält och således är S^2 orienterbar.

Det är möjligt att välja normalen som en av de två enhetsnormalerna till $T_p S$ och kalla den för $N(p)$. Men detta val behöver inte nödvändigtvis vara kontinuerligt, se följande exempel.

Exempel A.18. Ett Möbiusband är ett klassiskt exempel på en yta som inte är orienterbar. Ett Möbiusband konstrueras genom att ta ett band, vrida det ett halvt varv, och sedan limma ihop ändarna. Då kommer det inte att finnas någon naturlig "insida" eller "utsida" och geometriskt ser vi att Möbiusbandet är en icke-orienterbar yta (se Figur 11c). Vi bevisar detta mer rigoröst.

Tag punkten $p = (1, 0, 0)$. Antag att p rör sig runt enhetscirkeln S^1 i xy -planet. Låt \mathcal{L} vara linjesegmentet i xz -planet av längd 1 som först är parallellt med z -axeln, och antag att \mathcal{L} till att börja med har p som mittpunkt. Det vill säga \mathcal{L} är först givet av $x = 1$ och $|z| < 1$ (se Figur 11a). Roterar vi \mathcal{L} runt enhetscirkeln S^1 så får vi spåret av en cylinder, $(\cos \theta, \sin \theta, t)$, $\theta \in (0, 2\pi)$, $t \in (-1/2, 1/2)$. När p roteras med θ radianer runt z -axeln så ska \mathcal{L} roteras med $\theta/2$ radianer runt p (se Figur 11b). En punkt $(1, 0, t)$ på \mathcal{L} har nu vandrat till punkten

$$\begin{aligned} \sigma(t, \theta) &= (\cos \theta, \sin \theta, 0) - t \sin(\theta/2)(\cos \theta, \sin \theta, 0) + t \cos(\theta/2)(0, 0, 1) \\ &= ((1 - t \sin(\theta/2)) \cos \theta, (1 - t \sin(\theta/2)) \sin \theta, t \cos(\theta/2)), \end{aligned}$$

vilket är en lokal parametrisering av möbiusbandet där definitionsmängden är

$$U = \{(t, \theta) \in \mathbb{R}^2, -1/2 < t < 1/2, 0 < \theta < 2\pi\}.$$

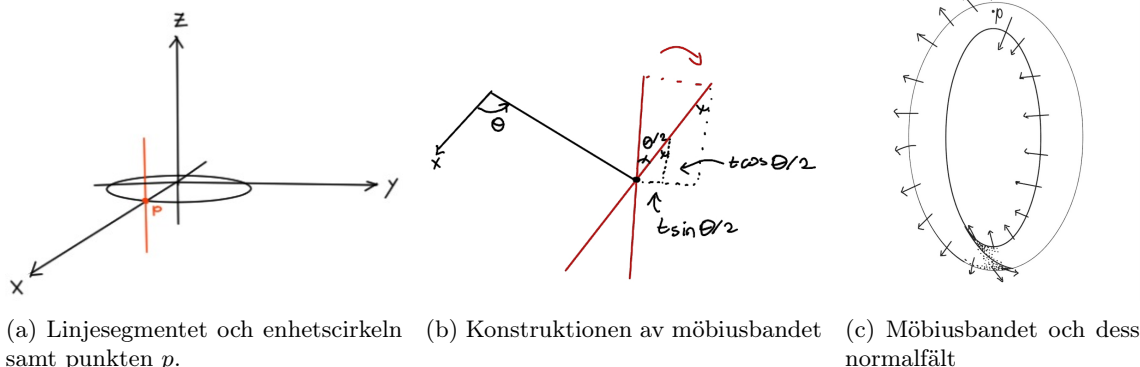
Ett naturligt val av normalfält är enhetsnormalen,

$$\sigma_t \times \sigma_\theta = (-\cos \theta \cos \theta/2, -\sin \theta \cos \theta/2, -\sin \theta/2) = N_\sigma.$$

Notera nu att

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} N_\sigma &= (-1, 0, 0), \\ \lim_{\theta \rightarrow 2\pi^-} N_\sigma &= (1, 0, 0). \end{aligned}$$

Eftersom sinus och cosinus har period 2π så följer det att N_σ inte är kontinuerlig i $\theta = 0$ och $\theta = 2\pi$.



Figur 11

Vi bevisar nu viktiga resultat från kapitel 2 men som ligger utanför huvuddelens ämne.

Proposition A.19. *Differentialen av en diffeomorfi är oberoende av valet av kurva. Dessutom är differentialen en linjär avbildning.*

Bevis. Låt $f : S_1 \rightarrow S_2$ vara en diffeomorfi mellan två ytor S_1 och S_2 . För en punkt $p \in S_1$, tag ytstycket $\sigma_1 : U_1 \rightarrow S \cap V_1$ runt p av S_1 , och kurvan $\gamma(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$ för något $\varepsilon > 0$ sådant att $\gamma(0) = p$ och så att bilden av definitionsmängden ligger helt i V_1 . Låt $\sigma_2 : U_2 \rightarrow S \cap V_2$ vara ett ytstycke av S_2 runt punkten $f(p)$. Sätt $q = \gamma'(0) \in T_p S_1$. Vidare låter vi $(u(t), v(t)) = \sigma_1^{-1}(\gamma(t)) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U_1$ och $u_0 = \sigma_1^{-1}(p) \in U_1$. Låt även $\tilde{f} = \sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 : U_1 \rightarrow U_2$ och beteckna $\tilde{f}(u_1, u_2) = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2))$, samt $\tilde{f}(u_0) = x_0$ där $u_1 = u(t)$ och $u_2 = v(t)$. Notera att $\gamma(t) = \sigma_1(u(t), v(t))$ och $\sigma_2 \circ \tilde{f} = f \circ \sigma_1$. Vi beräknar nu differentialen av f i punkten p ,

$$\begin{aligned} d_p f(q) &= (f \circ \gamma)'(0) = (f(\sigma_1(u(t), v(t))))'|_{t=0} \\ &= (\sigma_2 \circ \tilde{f}(u(t), v(t)))'|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \sigma_2(x_0)}{\partial x_i} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial x_i(u_0)}{\partial u_j} \cdot u'_j(0). \end{aligned} \quad (33)$$

Eftersom $q = \gamma'(0) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \sigma_1(u_0)}{\partial u_i} \cdot u'_i(0)$ så beror ekvation (33) endast på konstanten q och inte på kurvan γ . Notera att ekvation (33) är Jacobianen av $\sigma_2 \circ \tilde{f}$ i punkten u_0 multiplicerat med $\begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}$, som är en linjär avbildning. \square

Proposition A.20. *Kurvor på ett ytstycke med samma tangentvektor i en punkt p har samma normala krökning.*

Bevis. Vi studerar kurvorna $\gamma_1(t) = \sigma(u_1(t), v_1(t))$ och $\gamma_2(t) = \sigma(u_2(t), v_2(t))$, där $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = p$. Antag att kurvorna har samma tangentvektor i punkten p , det vill säga $u'_1(t_1) = u'_2(t_2)$ och $v'_1(t_1) = v'_2(t_2)$. Men då har de två kurvorna samma normalkrökning enligt Proposition 2.18, ty den andra fundamentala formen beror endast på p som är konstant i detta fall, samt då derivatorna i p är lika. \square

Följande resultat visar vad förhållandet till Weingarten-avbildningen innebär för de principala krökningarna och riktningarna. För den principala krökningen κ_i med principalvektor $\mathbf{p}_i = u'_i \sigma_u + v'_i \sigma_v$ gäller det från Definition 2.9 och Sats 2.4 att

$$\begin{aligned} W_p \mathbf{p}_i &= \kappa_i \mathbf{p}_i \\ [W_p]_{\mathcal{B}} \mathbf{p}_i &= \kappa_i \mathbf{p}_i \\ \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II} \mathbf{p}_i &= \kappa_i \mathbf{p}_i \\ \mathcal{F}_{II} \mathbf{p}_i &= \mathcal{F}_I \kappa_i \mathbf{p}_i \\ \begin{pmatrix} Lu'_i + Mv'_i \\ Mu'_i + Nv'_i \end{pmatrix} &= \kappa_i \begin{pmatrix} Eu'_i + Fv'_i \\ Fu'_i + Gv'_i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (34)$$

Nästkommande sats säger att om vi känner till de principala krökningarna och vektorerna av en yta så kan vi enkelt beräkna normalkrökningen.

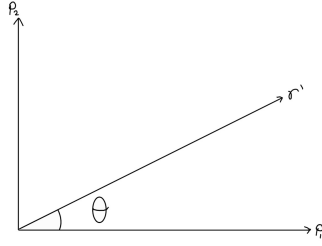
Sats A.21 (Eulers sats). *Betrakta ett ytstycke σ med principala krökningar κ_1 och κ_2 och motsvarande principala vektorer \mathbf{p}_1 och \mathbf{p}_2 . Då gäller att den normala krökningen för en kurva γ på ytstycket σ med vinkel θ mellan γ' och \mathbf{p}_1 är*

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta.$$

Bevis. Vi kan anta att γ har normerad hastighetsvektor (gör annars en omparametrisering). Låt $\gamma'(t) = \gamma \sigma_u + \delta \sigma_v$ och sätt $T = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$.

Fall 1, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$. Proposition 2.18 och ekvation (34) ger att

$$\begin{aligned} \kappa_n &= T^t \mathcal{F}_{II} T = \kappa \gamma' \cdot \gamma = \kappa \\ &= \kappa(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \kappa \cos^2 \theta + \kappa \sin^2 \theta. \end{aligned}$$



Figur 12

Fall 2, $\kappa_1 \neq \kappa_2$. Enligt Proposition 2.10 är \mathbf{p}_1 och \mathbf{p}_2 ortogonala samt normerade. Låt

$$\mathbf{p}_i = \gamma_i \boldsymbol{\sigma}_u + \delta_i \boldsymbol{\sigma}_v \quad (35)$$

för $i = 1, 2$. Notera att $\boldsymbol{\gamma}'(t) = \mathbf{p}_1 \cos \theta + \mathbf{p}_2 \sin \theta$ (se Figur 12). Detta tillsammans med ekvation (35) ger att

$$\boldsymbol{\gamma}' = \gamma \boldsymbol{\sigma}_u + \delta \boldsymbol{\sigma}_v,$$

där

$$\gamma = \gamma_1 \cos \theta + \gamma_2 \sin \theta, \quad \delta = \delta_1 \cos \theta + \delta_2 \sin \theta.$$

Låt $T_i = \begin{pmatrix} \gamma_i \\ \delta_i \end{pmatrix}$. Proposition 2.18 och ekvation (34) ger

$$\begin{aligned} \kappa_n &= (\cos \theta T_1 + \sin \theta T_1^t) \mathcal{F}_{II} (\cos \theta T_1 + \sin \theta T_2) \\ &= \cos^2 \theta T_1^t \mathcal{F}_{II} T_1 + \cos \theta \sin \theta (T_1^t \mathcal{F}_{II} T_2 + T_2^t \mathcal{F}_{II} T_1) + \sin^2 \theta T_2^t \mathcal{F}_{II} T_2. \end{aligned} \quad (36)$$

Vidare får vi från ekvation (34) och faktumet att de principala vektorerna är ortogonala att

$$T_i^t \mathcal{F}_{II} T_j = \kappa_i T_i^t \mathcal{F}_I T_j = \kappa_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = \begin{cases} \kappa_i, & \text{om } i = j \\ 0, & \text{annars.} \end{cases} \quad (37)$$

Vi substituerar ekvation (37) i ekvation (36) och får resultatet i satsen. \square

Proposition A.22. *De principala krökningarna i en punkt på ett ystykke är maximum och minimum för de normala krökningarna för alla kurvor på ystycket i punkten. Riktningarna med de principala krökningarna ges av motsvarande principala vektorer, och kallas principala riktningar.*

Bevis. Antag att $\kappa_1 > \kappa_2$ och låt θ vara vinkeln mellan en kurvas tangentvektor $\boldsymbol{\gamma}'$ och \mathbf{p}_1 . Vi har att

$$\kappa_1 = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_1 \sin^2 \theta \geq \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta \geq \kappa_2 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta = \kappa_2.$$

Med resultatet från Sats A.21 får vi även att $\kappa_n \leq \kappa_1$ med likhet om och endast om $\theta = 0$ eller $\theta = \pi$. Vi får alltså ett maximumvärde för normalkrökningen då $\sin \theta = 0$, det vill säga när $\boldsymbol{\gamma}' = \mathbf{p}_1$. Vi får på samma sätt att $\kappa_n \geq \kappa_2$, det vill säga minimumvärdet uppstår när vinkeln mellan \mathbf{p}_1 och $\boldsymbol{\gamma}'$ är $\theta = \frac{\pi}{2}$. Riktningen som är ortogonal mot \mathbf{p}_1 är \mathbf{p}_2 enligt Proposition 2.10.

Om $\kappa_1 = \kappa_2$ så är normalkrökningen hos varje kurva κ_1 enligt Sats A.21. Detta tillsammans med Proposition A.20 ger att varje tangentvektor till ytan är en principalvektor. \square

Vi avslutar delkapitlet med ett lemma som knyter ihop en ytas första fundamentala form med dess areaelement. Betrakta ytan S med motsvarande tangentplan $T_p S$ i punkten p , som spänns upp av basvektorerna $\boldsymbol{\sigma}_u$ och $\boldsymbol{\sigma}_v$. Arean av ett parallelogram ges av normen av kryssprodukten mellan vektorerna som spänner upp parallelogrammet. Således kan vi beskriva areaelementet av en liten bit area runt punkten p på ytan S genom $\|\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v\|$.

Lemma A.23. $\|\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v\| = \sqrt{EG - F^2}$.

Bevis. Vi har att

$$\|\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v\|^2 = (\boldsymbol{\sigma}_u \cdot \boldsymbol{\sigma}_u)(\boldsymbol{\sigma}_v \cdot \boldsymbol{\sigma}_v) - (\boldsymbol{\sigma}_u \cdot \boldsymbol{\sigma}_v)^2 = EG - F^2.$$

\square

A.4 Notationstabell

Notation	Vad
(x, y, z)	Vektor i \mathbb{R}^3
$\gamma, l(\gamma)$	Kurva i både plan och rum, längd av kurva
Φ	Parametertransformation
$\cdot, \ \cdot\ $	Euklidisk skalärprodukt, euklidisk norm
s, t, u, v	Reella parametrar
S^2	Enhetssfären i \mathbb{R}^3
$\sigma, \sigma_u, \sigma_v$	Lokal parametrisering av yta, partiella derivator av σ med avseende på u och v
I, J	Intervall i \mathbb{R}
I_n	Identitetsavbildningen av dimension n
$\mathbf{n}_\gamma(t), N_S(p)$	Normalfält för kurvor respektive normalfält för ytor i punkten p
$\mathbf{n}(s)$	Principalnormalvektor för kurva i \mathbb{R}^3
N_σ	Enhetsnormalvektor för yta
S, p	Yta i \mathbb{R}^3 , punkt på yta
U, \tilde{U}, R	Definitionsmängder för parametrisering i \mathbb{R}^2
X, Y, W	Delmängder av \mathbb{R}^3
$T_p S$	Tangentplan till ytan S i punkten p
\mathbf{b}	Binormal
$\kappa, \kappa_n, \kappa_g$	Krökning av kurva, normal krökning, geodesisk krökning
$N_\sigma(u, v)$	Gaussavbildningen
$f, d_p f$	Avbildning mellan ytor, differentialen av avbildningen f i punkten p
$W_p, [W_p]_{\mathcal{B}}$	Wiengarten-avbildningen och dess avbildningsmatris
K, H	Gausskrökning och medelkrökning
$\mathcal{F}_I, \mathcal{F}_{II}$	Matrisrepresentaton av de första och andra fundamentala formerna
E, F, G, L, M, N	Koefficienter i första respektive andra fundamentala formen
$\kappa_1, \kappa_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$	Principala krökningar, principala vektorer
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$	Ortonormerade basvektorer i \mathbb{R}^3
$a, b, c, \alpha, \beta, \lambda, \mu, \varepsilon, \gamma, \delta$	Reella tal
\mathbf{pq}	Vektor mellan punkt p och punkt q
θ, ϕ	Vinklar
$A_\sigma(R)$	Area av ytstycket $\sigma(R)$
\mathcal{C}	Storcirkel på sfär
\mathcal{D}	Disk

Tabell 1: Notationstabell för arbetets huvuddel.

B Inledning till Riemanngeometri

I projektets huvuddel studerades krökningen hos ytor i det euklidiska rummet \mathbb{R}^3 . Där mättes avstånd med den euklidiska metriken, och en ytas krökning definierades av en linjär avbildning från ytans tangentrum i en punkt. I detta fall var tangentrummet $T_p S$ utrustat med den euklidiska skalärprodukten, med vilken krökning, avstånd och vinklar på ytan beskrevs med de första och andra fundamentala formerna. Detta koncept kan generaliseras för att kunna studera krökning för fler och mer komplicerade geometriska objekt än de som definierades som ytor i \mathbb{R}^3 . Sådana generaliserade geometriska objekt kallas *mångfalder*. Appendix B är till för den intresserade läsaren som har en bakgrund i topologi, ty definitionen av en mångfald kräver kunskap om topologiska begrepp som till exempel Hausdorff-rum.

Detta appendix utforskar en generalisering av ytor för att ge en inledning till den matematiska gren som kallas *Riemanngeometri*. Där kallas objekten vi studerar för *Riemannmångfalder*, på vilka avstånd, vinklar och krökning mäts med så kallade *Riemann-metriker*, som är en naturlig generalisering av den fundamentala formen. Att studera krökning i flera dimensioner är en svårare uppgift, ty en högre dimensionell mångfald kan kröka sig i många olika riktningar. Det gör det svårare att få en geometrisk intuition till problemet. Appendix B kulminerar med att bevisa Gauss remarkabla sats med Riemanngeometri. I delkapitel B.1 om mångfaldbegreppet används kapitel 1 i Lee [10], och i delkapitel B.2 om Riemann-metriker används kapitel 1 Do Carmo [7]. Vi refererar även till kapitel 4 i Lee [9] i B.3, samt kapitel 2 i [7]. I B.4 används kapitel 4 i [7] och kapitel 4 i [3].

B.1 Mångfalder

Innan begreppet *slät mångfald* introduceras som en generalisering av begreppet slät yta, definieras begreppet *topologisk mångfald*.

Definition B.1 (Topologisk mångfald). *En topologisk mångfald av dimension n är ett topologiskt rum M som uppfyller följande villkor:*

- i) M är Hausdorff,*
- ii) M är 2:a uppräknelig,*
- iii) Varje punkt $p \in M$ har en omgivning som är homeomorf med en delmängd av \mathbb{R}^n .*

Anmärkning. Enligt Definition 1.11 av en yta är en yta en topologisk mångfald av dimension 2, ty en yta är lokalt homeomorf med en delmängd av \mathbb{R}^2 .

En topologisk mångfald kan studeras för dess olika topologiska egenskaper som till exempel kompaktitet eller om de är sammanhängande. Av intresse här är mångfalder som det går att utföra analys på. Därför begränsar vi oss till släta mångfalder, precis som vi begränsar oss till släta ytor i rapportens huvuddel. En slät yta är en yta vars atlas består av lokala parametriseringar som är släta. En slät mångfald är en topologisk mångfald med en extra struktur sådan att det är möjligt att avgöra vilka avbildningar från och till mångfalder som är släta.

Enligt *iii*) i Definition B.1 ingår varje punkt p på en mångfald M i definitionsmängden U till någon homeomorfi $\varphi : U \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$. Sådana homeomorfier kallas för *koordinatavbildningar*, ty de avbildar in i \mathbb{R}^n som har ett naturligt koordinatsystem. Eftersom koordinatavbildningar är homeomorfier är varje sammansättning av koordinatavbildningar också en homeomorfi. Detta faktum gör det möjligt att göra följande definition.

Definition B.2 (Övergångsavbildning, slät kompatibilitet). *Avbildningen $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ kallas för övergångsavbildningen från φ till ψ , där (φ, U) och (ψ, V) är två koordinatavbildningar, och U och V är delmängder av M sådana att $U \cap V \neq \emptyset$. Avbildningarna φ och ψ sägs också vara slätt kompatibla om $U \cap V = \emptyset$ eller $\psi \circ \varphi^{-1}$ är en diffeomorfi.*

Anmärkning. Eftersom både $\varphi(U \cap V)$ och $\psi(U \cap V)$ är delmängder av \mathbb{R}^n är det naturligt att tala om släthet av övergångsavbildningen $\psi \circ \varphi^{-1}$.

I huvuddelen definieras en atlas för en yta som mängden av alla släta lokala parametriseringar vars definitionsmängder tillsammans utgör hela ytan. För mångfalder följer motsvarande definition.

Definition B.3 (Slät atlas). *En slät atlas \mathcal{A} för mångfalden M är samlingen av alla koordinatavbildningar på M som är parvis slätt kompatibla och vars definitionsmängder tillsammans utgör hela M . En slät atlas är maximal om den inte är en äkta delmängd av någon större atlas.*

Definitionen av en maximal atlas görs av samma anledning som i delkapitel 1.3, för att undvika förvirring om vilken atlas som betraktas för mångfalden. Den maximala atlasen \mathcal{A} kallas för en *slät struktur* på M . Med en sådan slät struktur sägs en generell funktion från en mångfald $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ vara slät om och endast om $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ är slät för alla koordinatavbildningar (φ, U) i den släta strukturen \mathcal{A} . Detta ger oss en beskrivning av släta funktioner på M , och ger en bild av hur analys kan utföras på funktioner från M .

Definition B.4 (Slät mångfald). *En slät mångfald (M, \mathcal{A}) är en mångfald M tillsammans med en slät struktur \mathcal{A} .*

Anmärkning. Den släta strukturen \mathcal{A} utelämnas vanligen när vi talar om släta mångfalder.

Exempel B.5. Ett triviale exempel på en slät mångfald är \mathbb{R}^n självt, ty \mathbb{R}^n är Hausdorff, 2:a uppräknelig, triviale lokalt homeomorf med öppna mängder i \mathbb{R}^n samt att varje par av övergångs-avbildningar φ och ψ är slätt kompatibla. Detta då om $M = \mathbb{R}^n$ så är $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ en slät funktion på "vanligt" vis. Således har \mathbb{R}^n en slät struktur och är en slät mångfald.

B.2 Riemann-mångfalder och Riemann-metriker

I kapitel 2, 3 och 4 i rapportens huvuddel diskuteras hur den första fundamentala formen för en yta är ett verktyg för att mäta flera viktiga kvantiteter på en yta S , som längd och vinklar. Därför kan den första fundamentala formen kallas för en *metrik*⁶ på ytan S . Att den kallas för *form* är ingen slump, ty den är en kvadratisk form genererad av den euklidiska inre produkten, där koefficienterna definieras enligt $E = \sigma_u \cdot \sigma_u$, $F = \sigma_u \cdot \sigma_v = \sigma_v \cdot \sigma_u$, samt $G = \sigma_v \cdot \sigma_v$. När begreppet yta nu har generaliserats till slät mångfald följer också en generalisering av begreppet metrik till släta mångfalder.

Definition B.6 (Riemann-metrik). *En Riemann-metrik på en slät mångfald M är en avbildning som till varje punkt $p \in M$ tilldelar en inre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ på tangentrummet $T_p M$, sådan att för varje två vektorfält X och Y som är släta i någon omgivning V till M , så är funktionen $\langle X, Y \rangle_p$ slät i $p \in V$.*

Anmärkning. Den inre produkten $\langle X, Y \rangle_p$ mellan två vektorfält X och Y betyder den inre produkten mellan vektorerna $X(p)$ och $Y(p)$, det vill säga de vektorer i vektorfälten X och Y som vi finner i punkten p .

En Riemann-metrik betecknas och uttrycks vanligen på följande vis: om vi har en "invers koordinatavbildning" $\varphi^{-1} : \hat{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ sådan att $\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = p \in \varphi^{-1}(U) \subset M$, och $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = d\varphi_p^{-1}(0, \dots, 1, \dots, 0)$ där $d\varphi_p^{-1}$ betecknar differentialen av φ^{-1} i p , så kallas funktionen

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle_p$$

för Riemann-metriken på M . Notera att $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ är basvektorer för tangentrummet $T_p M$, precis som σ_u och σ_v är detsamma för $T_p S$ för en yta S .

Om en Riemann-metrik g_{ij} kan associeras till en slät mångfald M kallas (M, g_{ij}) för en *Riemann-mångfald*. Vanligtvis skrivs inte metriken g_{ij} ut. Det är inte självklart att det finns en associerad Riemann-metrik till varje slät mångfald, men följande resultat ger ett svar.

Sats B.7. *Varje slät mångfald har en associerad Riemann-metrik.*

För beviset till Sats B.7 hänvisas den intresserade läsaren till beviset av Proposition 2.10 i [7], ty beviset kräver en uppbyggnad av förkunskaper som inte är relevanta för resten av detta appendix.

Exempel B.8. Betrakta ett exempel på en Riemann-metrik som induceras på en kartesisk produkt $M_1 \times M_2$ av Riemann-mångfalderna M_1 och M_2 . Låt $\pi_1 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1$ och $\pi_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$ vara projektionsavbildningarna, och ansätt den inre produkten

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1 \mathbf{u}, d\pi_1 \mathbf{v} \rangle_p + \langle d\pi_2 \mathbf{u}, d\pi_2 \mathbf{v} \rangle_q$$

⁶Innebörden av begreppet metrik är i detta sammanhang inte samma som en metrik i ett metriskt rum från topologin.

för alla $(p, q) \in M_1 \times M_2$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$. Detta är en Riemann-metrik, ty termerna i summan är Riemann-metriker på M_1 respektive M_2 . Med hjälp av denna metrik är det möjligt att till exempel definiera en Riemann-metrik på en n -faldig torus $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ genom att betrakta den vanliga metriken på \mathbb{R}^2 begränsad till S^1 , och sedan ta produkt-metriken.

För att kunna mäta längder och avstånd är det viktigt att definiera vad en isometri innebär i termer av en Riemann-metrik.

Definition B.9 (Isometri). *En diffeomorfi $f : M \rightarrow N$ mellan två Riemann-mångfaldar M och N kallas för en isometri om $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_p = \langle d_p f(\mathbf{u}), d_p f(\mathbf{v}) \rangle_p$ för alla $p \in M$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p M$, där $d_p f$ betecknar differentialen av f .*

För att studera avstånd och längder av kurvor på Riemann-mångfaldar införs begreppet *vektorfält längs en kurva* på en Riemann-mångfald M , ty längden av en kurva beskrivs med hjälp av en Riemann-metrik som i sin tur definieras i termer av vektorfält. En kurva på en Riemann-mångfald definieras analogt med Definition 1.1, där \mathbb{R}^n byts mot en Riemann-mångfald M .

Definition B.10 (Vektorfält längs kurva). *Ett vektorfält V längs en kurva $\gamma : I \rightarrow M$ är en slät avbildning sådan att $t \mapsto V(t) \in T_{\gamma(t)}M$, där $t \in I$. Vektorfältet $\frac{d\gamma}{dt}$ kallas det tangerande vektorfältet till kurvan γ .*

Längden av en kurva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ definieras på liknande vis som i Definition 1.2, enligt

$$l(\gamma) := \int_a^b \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle^{1/2} dt.$$

Här betraktas nu Riemann-metriken på M i integranden, istället för den euklidiska normen av derivatan av γ .

B.3 Kovariant derivata och parallelltransport

I kapitel 2.1 diskuterades differentialen av en avbildning och hur den representerar en riktningsderivata längs en given riktning $\mathbf{w} \in T_p S$. Vi generaliserar konceptet av en riktningsderivata och diskuterar hur en riktningsderivata av ett vektorfält i ett annat vektorfälts riktning definieras. Låt M vara en Riemann-mångfald och $\gamma : I \rightarrow M$ vara en kurva på M , samt låt V vara ett vektorfält längs γ som tangerar M . För att studera en mångfalds inneboende geometri, som när en ytas Gausskrökning visades vara en inneboende egenskap hos ytan, betraktar vi derivatan av vektorfältet sett från perspektivet hos en varelse som lever på M . Den "vanliga derivatan" $\frac{dV}{dt}$ behöver inte nödvändigtvis ligga i $T_{\gamma(t)}M$, men för att garantera detta betraktas istället den ortogonala projektionen av $\frac{dV}{dt}$ på $T_{\gamma(t)}M$, som betecknas $\frac{DV}{dt}$. Detta kallas den *kovarianta derivatan av V* . Konceptet av att derivata ett vektorfält i riktningen av ett annat vektorfält introduceras i följande definition. För notation, låt $\mathcal{X}(M)$ vara mängden av alla släta vektorfält, och $\mathcal{D}(M)$ vara mängden av alla reellvärda funktioner $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition B.11 (Affin kovariant derivata). *En affin kovariant derivata ∇ på en Riemann-mångfald är en avbildning $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$, betecknad med $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, sådan att:*

- i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
- ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ där $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ och $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Definitionen är formell, och vad notationen $\nabla_X Y$ innebär diskuteras efter följande proposition som relaterar definitionen av en affin kovariant derivata till det generella begreppet kovariant derivata.

Proposition B.12. *Låt M vara en Riemann-mångfald med en affin kovariant derivata ∇ , och V vara ett vektorfält längs kurvan $\gamma : I \rightarrow M$. Då finns en unik avbildning $V \mapsto \frac{DV}{dt}$ mellan vektorfälten V och $\frac{DV}{dt}$ som kallas den kovarianta derivatan av V , sådan att:*

- a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$,
- b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$ för någon slät funktion f på I ,
- c) Om vi kan skriva $V(t) = Y(\gamma(t))$ för något $Y \in \mathcal{X}(M)$, så är $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} Y$.

Bevis. Antag först att det existerar en sådan avbildning som uppfyller alla tre kriterier i propositionen. Vi härleder ett uttryck för $\frac{DV}{dt}$ som vi visar är unikt. Låt $\varphi^{-1} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ vara ett koordinatsystem (härlett från en koordinatavbildning φ) sådant att $\gamma(I) \cap \varphi^{-1}(U) \neq \emptyset$, det vill säga att (åtminstone delar av) bilden av kurvan ligger i bilden av koordinatsystemet på M . Uttryck $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. För notation, låt $e_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Vi skriver på detta vis ty $\frac{\partial}{\partial x_i}$ i någon punkt $p \in M$ representerar en basvektor för $T_p M$. Eftersom V är ett vektorfält längs γ så kan vi skriva $V = \sum_j v^j e_j$, där för notationens skull $e_j = e_j(\gamma(t))$ och $v^j = v^j(t)$. Kombinerar vi linjäriteten i a) och b) för den kovarianta derivatan får vi att

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} e_j + v^j \frac{De_j}{dt}.$$

c) och i) i Definition B.11 ger oss att

$$\frac{De_j}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} e_j = \nabla_{\sum_i \frac{dx_i}{dt} e_i} e_j = \sum_i \frac{dx_i}{dt} \nabla_{e_i} e_j.$$

Kombinerar vi dessa uttryck får vi ett komplett uttryck för $\frac{DV}{dt}$, enligt

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} e_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{e_i} e_j. \quad (38)$$

Om det skulle finnas en avbildning $V \mapsto \frac{DV}{dt}$ så skulle den vara unik, ty den är entydigt bestämd av kurvan γ som genererar V . Om vi definierar den som $\frac{DV}{dt}$ enligt (38) uppfyller den alla tre kriterier a), b) och c) enligt konstruktion. För att visa att definitionen enligt (38) gäller över hela mångfalden M och inte bara i koordinatsystemet $\varphi^{-1}(U)$, tag något annat koordinatsystem $\psi^{-1}(W)$ på M sådant att $\psi^{-1}(W) \cap \varphi^{-1}(U) \neq \emptyset$. Om vi definierar $\frac{DV}{dt}$ i $\psi^{-1}(W)$ enligt (38), så överensstämmer denna definition i $\psi^{-1}(W) \cap \varphi^{-1}(U)$ med den i $\varphi^{-1}(U)$ enligt unikheten. Upprepar vi detta förfarande kan vi således utvidga definitionen till hela M . \square

Notationen $\nabla_X Y$ betyder att vi beräknar en riktningsderivata av vektorfältet Y i riktningen X , enligt c) i Proposition B.12. Med hjälp av detta uttrycker vi hädanefter begreppet kovariant derivata på detta vis. Även uttrycket $\nabla_{e_i} e_j$ kommer att återkomma flera gånger. En konvention är att skriva att

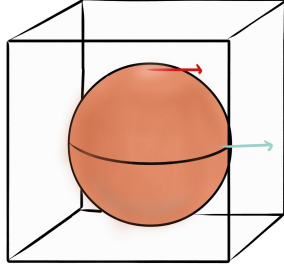
$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k, \quad (39)$$

vilket uttrycker den kovarianta derivatan av basvektorerna e_i för $T_p M$ som en linjärkombination av basvektorer e_k . Vi kan göra detta, ty den kovarianta derivatan är definierad på ett sådant sätt att den kovarianta derivatan av ett tangerande vektorfält till M ska ligga i $T_p M$. Koefficienterna Γ_{ij}^k är släta funktioner som kallas för *Christoffel-symbolerna*. Om vi sätter in dessa i (38) och byter bokstav på indexet j till k i den första summan i (38) för att kunna skriva allt i en summa och faktorisera ut e_k , får vi följande:

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left(\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt} \right) e_k.$$

Det enda som saknas för att få en komplett beskrivning av $\frac{DV}{dt}$ är att beskriva Christoffel-symbolerna Γ_{ij}^k explicit. För att göra detta krävs lite arbete, och att vi introducerar två egenskaper hos den kovarianta derivatan ∇ som vi härledde $\frac{DV}{dt}$ från. Men först diskuteras ett koncept som är viktigt för både den explicita beskrivningen av Christoffel-symbolerna, men också för hur mångfalders krökning beskrivs i kommande delkapitel: konceptet av *parallelltransport*.

Parallelltransport handlar om att transportera vektorer i ett vektorfält på en mångfald på ett sådant sätt att vinkeln mellan vektorn och mångfalden hålls konstant när vektorn transporteras längs mångfalden. Betrakta ett icke-krökt rum, till exempel \mathbb{R}^3 , där vektorer kan identifieras som samma vektor om de har samma storlek och riktning och den ena vektorn bara kan "flyttas" till den andra. Men i ett krökt rum fungerar detta inte på samma vis. Betrakta en varelse som befinner sig långt ut i rymden och ser två vektorer på jordklotet: en på nordpolen som upplevs peka österut, och en på ekvatorn som också upplevs peka österut. Vektorerna upplevs från ett utomstående perspektiv som parallella enligt Figur 13.



Figur 13: I vilken riktning vektorerna på sfären pekar upplevs olika beroende på om observatören står långt ifrån eller på ytan.

Om vi sedan byter perspektiv och betraktar jorden från nordpolen, så upplevs vektorn från nordpolen peka rakt fram, medan vektorn på ekvatorn pekar rakt upp som en normalvektor till jorden. Från det utomstående perspektivet ser vektorerna först ut som samma vektor, men vid byte av perspektiv har riktningen ändrats. Detta är skillnaden när vi istället betraktar ytans inneboende geometri. Vid parallelltransport handlar konceptet om parallellism inte om att hålla vektorns transport längs ytan parallell från ett utomstående perspektiv, utan från ett inneboende perspektiv. Om ett vektorfält parallelltransporteras längs en mångfald och garanterar att vektorfältet hålls parallellt

med mångfalden under hela transporten, så innebär det att derivatan av vektorfältet alltid ligger i tangentrummet $T_p M$. Den ortogonala projektionen av derivatan av vektorfältet på $T_p M$ är då alltid 0. För att konkretisera begreppet parallelltransport görs följande definition.

Definition B.13 (Parallelltransport). *Låt M vara en Riemannmångfald med en affin kovariant derivata ∇ . Ett vektorfält V längs en kurva $\gamma : I \rightarrow M$ är parallellt om $\frac{DV}{dt} = 0$ för alla $t \in I$.*

Att längden av vektorerna i vektorfältet V och vinkeln mellan M och V bevaras under parallelltransport garanteras om den kovarianta derivatan ∇ är kompatibel med metriken g_{ij} . En annan viktig egenskap för ∇ som vore värdefull är symmetri hos ∇ , enligt följande.

Definition B.14 (Metrik-kompatibilitet, symmetri). *Låt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vara en Riemann-metrik på Riemannmångfalden M , och ∇ vara en affin kovariant derivata på M .*

- i) ∇ är kompatibel med $\langle \cdot, \cdot \rangle$ om $\nabla_W \langle V, U \rangle = \langle \nabla_W V, U \rangle + \langle V, \nabla_W U \rangle$ för alla $V, W, U \in \mathcal{X}(M)$.
- ii) ∇ är symmetrisk om $\nabla_W V = \nabla_V W$ för alla $V, W \in \mathcal{X}(M)$.

Vi härleder ett uttryck för Christoffel-symbolerna för en kovariant derivata ∇ som uppfyller i) och ii) i Definition B.14. Symmetrin ger oss att $\nabla_{e_i} e_j = \nabla_{e_j} e_i$, vilket enligt (39) ger att $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Vi tillämpar kompatibilitetsegenskapen på basvektorerna e_i och e_j . Vi minns först att $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$, och att eftersom $\langle e_i, e_j \rangle$ är en skalär funktion så sammanfaller den kovarianta derivatan $\nabla_{e_k} (\langle e_i, e_j \rangle)$ med den vanliga derivatan, betecknad $\partial_k (\langle e_i, e_j \rangle)$. Sammantaget ger detta att

$$\begin{aligned} \nabla_{e_k} (\langle e_i, e_j \rangle) &= \langle \nabla_{e_k} e_i, e_j \rangle + \langle e_i, \nabla_{e_k} e_j \rangle \iff \\ \partial_k (\langle e_i, e_j \rangle) &= \sum_l \Gamma_{ik}^l \langle e_j, e_l \rangle + \sum_l \Gamma_{jk}^l \langle e_i, e_l \rangle \iff \\ \partial_k (g_{ij}) &= \sum_l \Gamma_{ik}^l g_{jl} + \Gamma_{jk}^l g_{il}, \end{aligned}$$

där vi kan byta ordning i det nedre indexet på Christoffel-symbolerna då vi antagit den symmetriska egenskapen.

Gör vi motsvarande för de andra kombinationerna g_{ki} och g_{jk} får vi liknande uttryck för $\partial_k (g_{ij})$, $\partial_j (g_{ki})$ och $\partial_i (g_{jk})$. Adderar vi ekvationerna vi får av detta så får vi att

$$\partial_k (g_{ij}) + \partial_j (g_{ki}) - \partial_i (g_{jk}) = 2 \sum_l \Gamma_{jk}^l g_{il}.$$

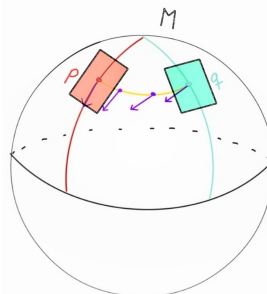
Multiplicerar vi med den inversa Riemann-metriken som vi betecknar g^{ij} (analogt med elementen i \mathcal{F}_I^{-1}) kan vi skriva

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k g^{km} (\partial_i (g_{jk}) + \partial_j (g_{ki}) - \partial_k (g_{ij})). \quad (40)$$

Vi har nu härlett ett självständigt uttryck för Christoffel-symbolerna för den metrik-kompatibla och symmetriska kovarianta derivatan ∇ , och har i huvudsak bevisat existensen i följande sats.

Sats B.15 (Riemanngeometris fundamentalsats). För varje Riemannmångfald M så finns en unik affin kovariant derivata ∇ sådan att ∇ är symmetrisk och kompatibel med Riemann-metriken på M .

Den unika kovarianta derivatan ∇ i Sats B.15 kallas för *Levi-Civita-förbindelsen*, efter den italienska matematikern med samma namn. Det är denna kovarianta derivata som är vanligast att betrakta vid studiet av Riemannmångfalden på grund av dess viktiga egenskaper. Det finns även andra kovarianta derivator, och det innebär att de utför parallelltransport på olika sätt. Det går att betrakta begreppet kovariant derivata som något som gör det möjligt att parallelltransportera vektorer på mångfalden, och därmed "förbinda" två tangentrum T_pM och T_qM när vektorerna transporteras mellan punkterna p och q på M enligt Figur 14.

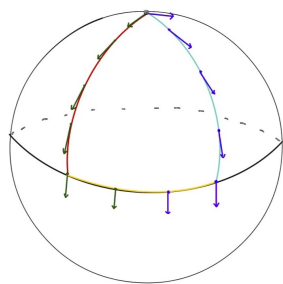


Figur 14: En förbindelse mellan T_pM och T_qM genom parallelltransport.

B.4 Riemanns krökningstensor och krökning av mångfalden

Appendix B avslutas med en diskussion om hur det är möjligt att avgöra om en mångfald är krökt. Att visualisera detta som för ytor i \mathbb{R}^3 är sällan möjligt eftersom en Riemannmångfald generellt är av högre dimension än två, som beskriver en yta. Till hjälp för att avgöra om en mångfald är krökt eller inte är en Riemann-metrik och ett uttryck för Christoffel-symbolerna i termer av Levi-Civita-förbindelsen. Med dessa verktyg är det möjligt att studera hur vektorfält som tangerar mångfalden M beter sig om de parallelltransporteras längs en sluten kurva på mångfalden, där beteendet hos vektorfältet under parallelltransporten beror på mångfaldens krökning.

I B.3 definierades och diskuterades parallelltransport, som är ett sätt att "transportera" ett vektorfält längs en mångfald där vi håller vektorfältet parallellt med mångfalden ur ett inneboende geometriskt perspektiv. Om ett vektorfält parallelltransporteras längs en sluten kurva i ett plan, som inte är krökt, kan vi förvänta oss att när vektorfältet har transporterats tillbaka till sin startpunkt så kommer det att vara samma vektorfält som från början. Betrakta nu en sfär och utför parallelltransport längs en sluten kurva som ges av en kurvlinjär triangel på sfärens yta, med start i nordpolen och ned till ekvatorn, längs ekvatorn en bit, och sedan upp och tillbaka till nordpolen igen enligt Figur 15.

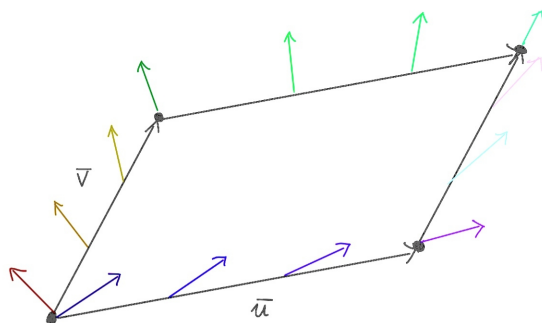


Figur 15: Parallelltransport av ett vektorfält längs en sluten kurva på en sfär.

När vektorfältet har återkommit till startpunkten i nordpolen så är det inte samma vektorfält som parallelltransporten startade med. Detta är en konsekvens av sfärens krökning. Konceptet av att studera hur parallelltransport längs en sluten kurva på en mångfald misslyckas med att bevara geometriska egenskaper kallas *holonomi*⁷. Låt V vara ett vektorfält som parallelltransporteras längs en sluten kurva γ på en mångfald M , och låt $P(V)$ vara det resulterande vektorfältet när V har transporterats tillbaka till startpunkten. Riemannmångfalden M sägs vara krökt om $V - P(V) \neq 0$.

Av intresse är krökning i en given punkt på mångfalden, precis som krökning definierades för ytor i \mathbb{R}^3 . Vi studerar då två tangentvektorfält till M i punkten, där två vektorer u och v spänner upp ett tangerande plan till M enligt Figur 16.

⁷Holonomi är ett ämne i sig självt och studeras i samband med symmetrigrupper för mångfalden, vilket inte är relevant för just detta appendix.



Figur 16: Parallelltransport av en vektor längs ett parallelogram.

Vi utför parallelltransport av vektorn w längs parallelogrammet som spänns upp av vektorerna u och v , och mäter skillnaden mellan w och $P(w)$. Här är parallelogrammet konstruerat på ett sådant sätt att om vi går från punkten där u och v börjar, via u och sedan i riktning av v så hamnar vi i samma punkt som vi gör om vi först hade gått via v och sedan i riktningen av u . Med andra ord är Figur 16 ritad på ett sådant sätt att ordningen av rörelse, uv eller vu , inte spelar någon roll. För icke-krökta ytor gäller detta trivialt, men för krökta mångfalder behöver det inte nödvändigtvis gälla. Avvikelsen från kommutativitet av rörelseordning mäts med *Lieparentesen* (eller *kommutatorn*) $[u, v] := uv - vu$ för u och v . Generellt mäter Lieparentesen i vilken grad två operationer inte kommuterar med varandra, och är 0 om operationerna kommuterar. Det visar sig att objektet som studeras för att avgöra om en mångfald är krökt, det som kallas *Riemanns krökningstensor*, beror på Lie-parentesen för att krökningstensorerna faktiskt ska ha egenskaperna av en tensor. Detaljerna i detta faktum är dock mindre viktiga för detta appendix. Vad en tensor är förklaras mer precist efter definitionen av Riemanns krökningstensor.

Definition B.16 (Riemanns krökningstensor, krökt mångfald). *Krökningen R för en Riemannmångfald M är en avbildning som för varje par av vektorfält $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ tilldelar en avbildning $R(X, Y)Z : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ som ges av*

$$R(X, Y)Z := \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M),$$

där ∇ är Levi-Civita-förbindelsen på M . Vi säger att mångfalden M är krökt om $R(X, Y)Z$ inte är konstant 0.

En tensor är ett multilinjärt objekt, det vill säga något som är linjärt i alla sina argument. Mer precist är en generell *tensor av ordning r* på en Riemannmångfald en multilinjär avbildning

$$T : \mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$$

med r stycken $\mathcal{X}(M)$ -faktorer, sådan att för $Y_1, \dots, Y_r \in \mathcal{X}(M)$ så är $T(Y_1, \dots, Y_r)$ en slät funktion på M och

$$T(Y_1, \dots, fX + gY, \dots, Y_r) = fT(Y_1, \dots, X, \dots, Y_r) + gT(Y_1, \dots, Y, \dots, Y_r)$$

för alla $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Eftersom att Riemanns krökningstensor definieras i termer av Levi-Civita-förbindelsen har ∇ de symmetriska och metrik-kompatibla egenskaperna, enligt Sats B.15. Vi härleder ett uttryck för krökningstensorernas komponenter, för att därefter med hjälp av några symmetrier i komponenterna betrakta den tvådimensionella krökningstensorerna. Det är denna som används när vi studerar tvådimensionella Riemann-mångfalder, det vill säga ytor där Riemann-metriken är den första fundamentala formen.

Betrakta ett koordinatsystem (φ^{-1}, U) baserat i en punkt $p \in M$, där $e_i(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ är en bas i $T_p M$ som innan. Vi skriver

$$R(e_i, e_j)e_k = \sum_l R^l_{ijk} e_l,$$

där R^l_{ijk} är komponenterna i krökningstensorerna i koordinatsystemet U .

Använder vi Definition B.16 för basvektorerna e_i, e_j och e_k försvinner termen i R med Lieparantesen, ty basvektorerna $e_i(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ är definierade i termer av partiella derivator, vilket är en kommutativ operation, och $[e_i, e_j] = 0$. Vi får då, i termer av Christoffel-symbolerna, att

$$R(e_i, e_j)e_k = \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}e_k - \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}e_k = \nabla_{e_j}\left(\sum_l \Gamma_{ik}^l e_l\right) - \nabla_{e_i}\left(\sum_l \Gamma_{jk}^l e_l\right).$$

Använder vi produktregeln för derivering med den kovarianta derivatan ∇ får vi att komponenterna beskrivs av

$$R_{ijk}^s = \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^s - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^s, \quad (41)$$

där vi kan byta ∇ mot partiella derivator i de sista termerna då Γ_{ik}^s är funktioner från \mathbb{R} till \mathbb{R} enligt (40). Med Riemann-metriken g_{ij} som definieras av en inre produkt skriver vi

$$\langle R(e_i, e_j)e_k, e_s \rangle = \sum_l R_{ijk}^l g_{ls} =: R_{ijks}.$$

Betrakta nu krökningstensorn R i två dimensioner, där dess komponenter kan studeras för att avgöra om en yta är krökt. Då tensorn är av dimension två är $i, j, k, s \in \{1, 2\}$, och R har då $2^4 = 16$ komponenter. En allmän egenskap hos R_{ijks} är att den är symmetrisk i par (ij) och (ks) , det vill säga $R_{ijks} = R_{ksij}$, och antisymmetrisk i i och j respektive k och s , enligt $R_{ijks} = -R_{jiks}$ och $R_{ijks} = -R_{ijsk}$. Denna egenskap ger att den tvådimensionella krökningstensorn endast har en oberoende komponent, R_{1212} . Därför är det bara denna komponent som vi behöver beräkna för att avgöra om en yta är krökt.

Vi avslutar appendix B med att vidare betrakta den tvådimensionella krökningstensorn, och med hjälp av den hitta en alternativ formulering och bevis av Gauss remarkabla sats. Vi betraktar därmed tvådimensionella Riemann-mångfaldar, det vill säga släta ytor $S \subset \mathbb{R}^3$ där Riemann-metriken är den första fundamentala formen. I detta fall betraktas ytan S som en delmängd inbäddad i \mathbb{R}^3 , och därför inte som sitt eget topologiska rum, som när vi betraktade en Riemann-mångfald som sitt eget topologiska rum. Vi kan då inte bara uttrycka andraderivatan av basvektorerna e_i för $T_p S$ i termer av en linjärkombination av dessa basvektorer enligt (39), eftersom vi nu behöver uttrycka dessa i termer av en bas för \mathbb{R}^3 istället. Därmed har vi en normal komponent till $T_p S$ att ta hänsyn till, ortogonal mot båda basvektorerna för $T_p S$. För att följa notationen från detta appendix betecknar vi matrisrepresentationen för den första respektive andra fundamentala formen med $(g_{ij})_{i,j=1}^2 := \mathcal{F}_I$, $(h_{ij})_{i,j=1}^2 := \mathcal{F}_{II}$.

Låt σ vara en lokal parametrisering av S . Då kan vi skriva

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^i \partial u^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \sigma}{\partial u^k} + h_{ij} \mathbf{N}_\sigma. \quad (42)$$

Vi påminner oss även om hur vi definierade den andra fundamentala formen i kapitel 2: för en bas $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ för $T_p S$ beskrev vi koefficienterna i den andra fundamentala formen genom en skalärprodukt mellan en basvektor för $T_p S$ och bilden av en basvektor under Weingarten-avbildningen enligt (3). Väljer vi en godtycklig bas $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ för $T_p S$ kan vi anpassa detta till notationen i detta appendix och skriva den andra fundamentala formen i termer av en inre produkt som definierar en Riemann-metrik (i detta fall den första fundamentala formen), enligt $\langle W_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle$. Detta förbereder oss för att bevisa ett lemma som kommer att göra beviset av Gauss remarkabla sats mycket kort.

Lemma B.17 (Gauss ekvation). *Låt S vara en slät yta och $p \in S$. Då gäller för godtyckliga $\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{z} \in T_p S$ att*

$$R_p(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{z} = \langle W_p(\mathbf{w}), \mathbf{z} \rangle W_p(\mathbf{v}) - \langle W_p(\mathbf{v}), \mathbf{z} \rangle W_p(\mathbf{w}).$$

Med avseende på en lokal parametrisering σ ges detta av

$$R_{ijk}^l = h_{jk} w_i^l - h_{ik} w_j^l,$$

där $w_i^l = \sum_k h_{ik} g^{kl}$ är element i matrisrepresentationen av W_p .

Bevis. Vi bevisar satsen i termer av en lokal parametrisering σ . Derivera (42) med avseende på u^l . Detta ger att

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \sigma}{\partial u^l \partial u^i \partial u^j} &= \sum_k \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} \frac{\partial \sigma}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^l \partial u^k} \right) + \frac{\partial h_{ij}}{\partial u^l} \mathbf{N}_\sigma + h_{ij} \frac{\partial \mathbf{N}_\sigma}{\partial u^l} \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} \frac{\partial \sigma}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^k \sum_m \Gamma_{lk}^m \frac{\partial \sigma}{\partial u^m} + \text{normal komponent} \right) \\ &\quad + \text{normal komponent} + h_{ij} \left(-W_p \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u^l} \right) \right) \\ &= \sum_m \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^l} + \sum_k \Gamma_{ij}^k \Gamma_{lk}^m - h_{ij} w_l^m \right) \frac{\partial \sigma}{\partial u^m} + \text{normal komponent} \end{aligned}$$

efter ett namnbyte av index i den första summan från k till m så att vi kan faktorisera ut $\frac{\partial \sigma}{\partial u^m}$. Eftersom partiell derivering med avseende på u^l och u^i är en kommutativ operation kan vi byta plats på derivatorna av (42) med avseende på u^i och u^l . Subtraktion ger

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^3 \sigma}{\partial u^l \partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial^3 \sigma}{\partial u^i \partial u^l \partial u^j} \\ &= \sum_m \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{lj}^m}{\partial u^i} + \sum_k \left(\Gamma_{ij}^k \Gamma_{lk}^m - \Gamma_{lj}^k \Gamma_{ik}^m \right) - h_{ij} w_l^m + h_{lj} w_i^m \right) \frac{\partial \sigma}{\partial u^m} + \text{normal komponent} \\ &= \sum_m \left(R_{lij}^m - h_{ij} w_l^m + h_{lj} w_i^m \right) \frac{\partial \sigma}{\partial u^m} + \text{normal komponent.} \end{aligned}$$

Eftersom vi har delat upp uttrycket i en normal komponent och en tangentskomponent måste dessa vara 0 oberoende av varandra för att hela uttrycket ska vara 0, ty vi har skrivit tredjederivatan som en summa av vektorer med en normal komponent och samt dess ortogonala komplement, tangentplanet. Eftersom $\frac{\partial \sigma}{\partial u^m}$ är en basvektor för $T_p S$ är den speciellt inte $\mathbf{0}$, och således måste

$$R_{lij}^m - h_{ij} w_l^m + h_{lj} w_i^m = 0,$$

vilket bevisar lemmat upp till ett namnbyte av index. □

Sats B.18 (Gauss remarkabla sats). *Låt $S \subset \mathbb{R}^3$ vara en slät yta och $p \in S$. Då gäller att $K(p) = \langle R_p(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$, där $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ är en ortonormal bas för $T_p S$.*

Anmärkning. Satsen uttrycker att Gausskrökningen i p endast beror på ytans första fundamentala form, vilket i kapitel 3 visades vara ekvivalent med Gauss remarkabla sats som den formulerades i Sats 3.4.

Bevis. Vi konstaterar först att eftersom $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ är en ortonormal bas för $T_p S$ så gäller det att $\det((g_{ij})_{i,j=1}^2) = 1$. Eftersom $K(p) = \det(W_p) = \frac{\det((h_{ij})_{i,j=1}^2)}{\det((g_{ij})_{i,j=1}^2)}$ så är $K(p) = \det((h_{ij})_{i,j=1}^2)$ i detta fall. Lemma B.17 ger att

$$\begin{aligned} \langle R_p(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_p &= \langle \langle W_p(\mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle W_p(\mathbf{v}) - \langle W_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle W_p(\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \langle W_p(\mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle W_p(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle - \langle \langle W_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle W_p(\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle W_p(\mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle \langle W_p(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle - \langle W_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle \langle W_p(\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle \\ &= \det((h_{ij})_{i,j=1}^2) = K(p). \end{aligned}$$

□

C Kartprojektioner

I detta kapitel ges mer bakgrund till de olika kartprojektionerna som introducerats i kapitel 4 i huvudrapporten. Den huvudsakliga källan är *Map projections: A working manual* av Snyder [17], där inledningen och kapitel 1-3 används för inledningen av detta appendix. Kapitel 7 har använts i C.1.1, kapitel 10 i C.1.2 samt kapitel 22 i C.1.3 och C.2.3.

Det är känt att kartprojektioner har diskuterats i litteratur sedan åtminstone ungefär 150-talet före vår tid och att projektioner använts sedan minst ytterligare tre århundraden tidigare. Trots detta är de flesta kartprojektioner som används idag från 1500-talet eller senare. En kartprojektion inkluderar vanligtvis meridianer och paralleller⁸, men inte alltid beroende på kartans användningsområden. Inom kartografi representeras jorden ofta av en sfär, vilket den även gör i detta arbete, trots att formen egentligen är en oregelbundet formad ellipsoid.

C.1 Mer om några kartprojektioner

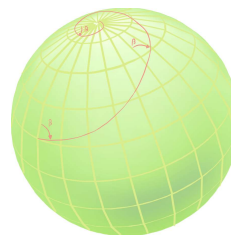
C.1.1 Mercatorprojektionen

Mercatorprojektionen är en av de mest kända kartprojektionerna, och uppfanns av Gerardus Mercator år 1569. Meridianerna avbildas på raka, jämnt fördelade vertikala linjer. Parallellerna avbildas också på raka linjer som korsar meridianerna i en rät vinkel. Avstånden mellan parallellerna ökar längre bort från ekvatorn för att konformitet ska vara uppfyllt.

Mercatorprojektionen passar bra för navigering eftersom en egenskap är att den avbildar loxodrom⁹

på räta linjer. Detta innebär att en resa där en konstant kompassriktning följs motsvaras av en rät linje på kartan, även om det oftast inte är den kortaste vägen mellan två platser. De enda tillfällena i vilka det skulle sammanfalla med den kortaste vägen är om den antingen följer en meridian eller ekvatorn.

En nackdel med denna karta är de stora förvrängningarna av areor. Då Mercatorprojektionen är den mest använda kartprojektionen i undervisningssammanhang leder detta till att många får en felaktig uppfattning av hur världen ser ut. En annan nackdel är att varken nord- eller sydpolen kan visas, eftersom de är oändligt långt bort från de andra parallellerna i projektionen till följd av hur Mercatorprojektionen är konstruerad.



Figur 17: Representation av loxodrom på en sfär. Vinkeln β mellan loxodromen och longituderna är konstant.



Figur 18: Mercatorprojektionen

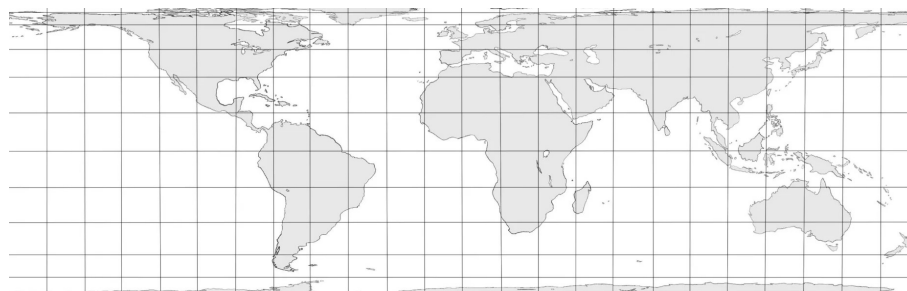
⁸Longitud och latitud på jorden används för att identifiera läget av punkter. Dessa refereras ofta till som meridianer respektive paralleller.

⁹En loxodrom är en kurva vars korsningsvinkel mot meridianer, det vill säga storcirkel mellan nord- och sydpolen, är konstant.

C.1.2 Lamberts ytriktiga cylindriska projektion

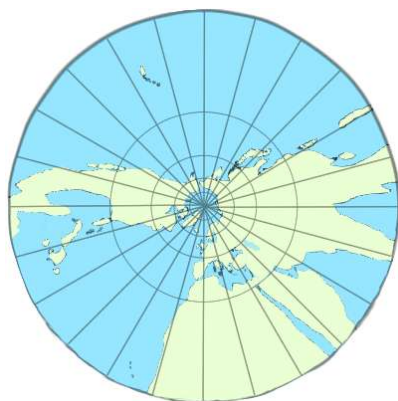
Lamberts ytriktiga cylindriska projektion beskrevs först av Johann H. Lambert, som var en schweizisk matematiker, år 1772. Flera olika variationer av projektionen har tagits fram sedan dess. Den passar bra för kartor av stora områden nära ekvatorn, exempelvis vissa delar av Stilla havet. Likt andra cylindriska kartprojektioner avbildar den meridianer på parallella och jämnt fördelade vertikala linjer. Parallellerna avbildas på horisontella raka linjer med samma längd som ekvatorn, där avståndet mellan dem är mindre ju längre bort från ekvatorn de befinner sig.

Denna projektion kan även användas för kartor av mindre områden som inte nödvändigtvis är nära ekvatorn. Om detta ska göras är det lämpligt att skärningspunkten mellan sfären och cylindern den projiceras på är i mitten av området som ska kartläggas. Detta eftersom skalor stämmer längs den parallellen och förvrängningar blir större ju längre bort från parallellen vi kommer. En sådan variant är möjlig så länge parallellen inte är någon av polerna.



Figur 19: Lamberts cylindriska ytriktiga projektion

C.1.3 Gnomoniska projektionen



Figur 20: Gnomonisk karta över det norra halvklotet.

Den gnomoniska projektionen är en azimutal projektion som använder jordens mitt som perspektivpunkt, vilket innebär att det inte är möjligt att visa ett helt halvklot med denna projektion. Den har använts av filosofen och matematikern Thales av Miletus (600-500-talet före vår tid) för kartor av stjärnhimlen. Idag används denna typ av karta främst för navigering. Projektionen bevarar varken areor eller vinklar, men har egenskapen att den avbildar storcirklar på räta linjer. Om kartan konstrueras från att sfären tangerar planet den avbildas på i någon av polerna, blir förvrängningarna större längre bort från polen. Riktningar och vinklar stämmer endast i mitten av projektionen. Meridianerna avbildas på räta linjer som utgår från polen, samtidigt som parallellerna avbildas på ojämnt utspridda, koncentriska cirklar med polen som mittpunkt. Avståndet mellan dessa cirklar ökar snabbt vid rörelse bort från polen.

C.2 Egenskaper hos de olika kartprojektionerna

I huvudrapporten visades i Exempel 4.4 att Mercatorprojektionen är konform, i Exempel 4.8 att Lamberts cylindriska ytriktiga projektion är areabevarande och i Proposition ?? att den gnomoniska projektionen avbildar storcirklar på räta linjer, eller bevarar den kortaste sträckan mellan punkter. Det visades även i Sats 4.13 att endast en i taget av dessa egenskaper kan uppfyllas av en platt karta av jorden. I detta delkapitel visas mer konkret varför de specifika kartprojektionerna som tagits upp inte har de två övriga egenskaperna.

C.2.1 Mercatorprojektion

För att visa att Mercatorprojektion inte är areabevarande kan vi enligt Sats 4.7 visa att koefficienterna till den första fundamentala formen E_1, F_1 och G_1 för S^2 utan dess poler, samt koefficienterna för avbildningens första fundamentala form E_2, F_2 och G_2 inte uppfyller

$$E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2. \quad (43)$$

Om S^2 utan dess poler parametriseras av

$$\sigma(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v), \quad u \in [0, 2\pi), v \in (-\pi/2, \pi/2) \quad (44)$$

har vi att $E_1 = \cos^2 v$, $F_1 = 0$ och $G_1 = 1$. Från (27) och (28) kan vi beräkna $E_2 = 1$, $F_2 = 0$ och $G_2 = \sec^2 v$. Från detta ser vi att $E_1 G_1 - F_1^2 = \cos^2 v \neq E_2 G_2 - F_2^2 = \sec^2 v$. Dessa är endast ekvivalenta då $\cos v = 1$, vilket innebär att Mercatorprojektion endast är areabevarande vid ekvatorn.

Vi vill nu visa att Mercatorprojektion inte avbildar storcirklar på räta linjer. För att göra detta börjar vi med att konstatera att en storcirkel på S^2 är där ett plan genom origo skär S^2 . Ett plan genom origo kan beskrivas av $ax + by + cz = 0$ där a, b och c är godtyckliga konstanter. Vi har även att S^2 utan dess poler ges av (44). Utifrån detta ser vi att planet skär S^2 i $a \cos v \cos u + b \cos v \sin u + c \sin v = 0$. Eftersom $\cos v \neq 0$ för $v \in (-\pi/2, \pi/2)$, är detta ekvivalent med $\tan v = \frac{a \cos u + b \sin u}{-c}$, och därmed

$$v = \arctan\left(\frac{a \cos u + b \sin u}{-c}\right). \quad (45)$$

Detta tillsammans med ekvation (28) innebär att Mercatorprojektion avbildar storcirklar på

$$x = \ln\left(\tan\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{a \cos y + b \sin y}{-c}\right) + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

vilket inte är en rät linje.

C.2.2 Lamberts ytriktiga cylindriska projektion

För att visa att Lamberts ytriktiga cylindriska projektion inte är konform kan vi enligt Sats 4.2 visa att den första fundamentala formen för S^2 utan dess poler inte är proportionell mot avbildningens första fundamentala form. Från exempel 4.8 vet vi att den första fundamentala formen för avbildningen på cylindern är $E_2 = 1$, $F_2 = 0$ och $G_2 = \cos^2 v$. Vi vet även att motsvarande för S^2 utan dess poler är $E_1 = \cos^2 v$, $F_1 = 0$ och $G_1 = 1$. Om deras första fundamentala former ska vara proportionella måste de uppfylla

$$\begin{cases} E_2 = \lambda E_1 & (46) \\ F_2 = \lambda F_1 & (47) \\ G_2 = \lambda G_1 & (48) \end{cases}$$

där λ är en slät, överallt positiv funktion. Från ekvation (46) får vi att $\lambda = \sec^2 v$, vilket innebär att $\lambda G_1 = \sec^2 v \neq \cos^2 v = G_2$. Från detta ser vi att ekvation (48) inte är uppfylld, och därmed är Lamberts ytriktiga cylindriska projektion inte konform. Likheter gäller endast då $v = 0$, vilket innebär att projektionen endast är konform vid ekvatorn.

För att visa att Lamberts cylindriska ytriktiga projektion inte avbildar storcirklar på räta linjer används en liknande metod som för Mercatorprojektion. Som tidigare har vi att storcirklar på S^2 kan beskrivas av ekvation (45). Från ekvation (31) och (44) får vi att Lamberts ytriktiga cylindriska projektion avbildar S^2 på enhetscylindern som tangerar S^2 i ekvatorn enligt $(x, y, z) = (\cos u, \sin u, \sin v)$. Cylindern kan vecklas ut till ett plan där y -axeln motsvarar ekvatorn, det vill säga $(x, y) = (\sin v, u)$. Om detta kombineras med ekvation (45) får vi att Lamberts cylindriska ytriktiga projektion avbildar storcirklar på

$$x = \sin\left(\arctan\left(\frac{a \cos y + b \sin y}{-c}\right)\right)$$

i planet, vilket inte är en rät linje.

C.2.3 Gnomoniska projektionen

Delen av S^2 som är ovanför ekvatorn kan parametriseras av

$$\sigma(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v), \quad u \in [0, 2\pi), v \in (0, \pi/2].$$

Då fås den gnomoniska projektionen centrerad i nordpolen av

$$\begin{cases} x = \cot v \sin u \\ y = -\cot v \cos u. \end{cases}$$

Från tidigare vet vi att koefficienterna till den första fundamentala formen för S^2 är $E_1 = \cos^2 v$, $F_1 = 0$ och $G_1 = 1$. Beräkningar ger att motsvarande för den gnomoniska projektionen på planet är $E_2 = \cot^2 v$, $F_2 = 0$ och $G_2 = \csc^4 v$. Om avbildningen ska vara konform måste deras första fundamentala former vara proportionella, det vill säga uppfylla ekvation (46)-(48). Från ekvation (46) får vi att $\lambda = \csc^2 v$, vilket i (48) ger att $G_2 = \csc^2 v \neq \csc^4 v$. Likhet gäller endast då $v = \frac{\pi}{2}$. Från detta kan vi se att den gnomoniska projektionen med centrum i nordpolen endast bevarar vinklar just vid nordpolen.

Om en projektion ska vara areabevarande måste koefficienterna för den första fundamentala formen uppfylla (43). Vi ser dock att $E_2 G_2 - F_2^2 = \csc^6 v \cos^2 v \neq \cos^2 v = E_1 G_1 - F_1^2$. Alltså bevaras endast areor där $v = \frac{\pi}{2}$, det vill säga vid nordpolen.