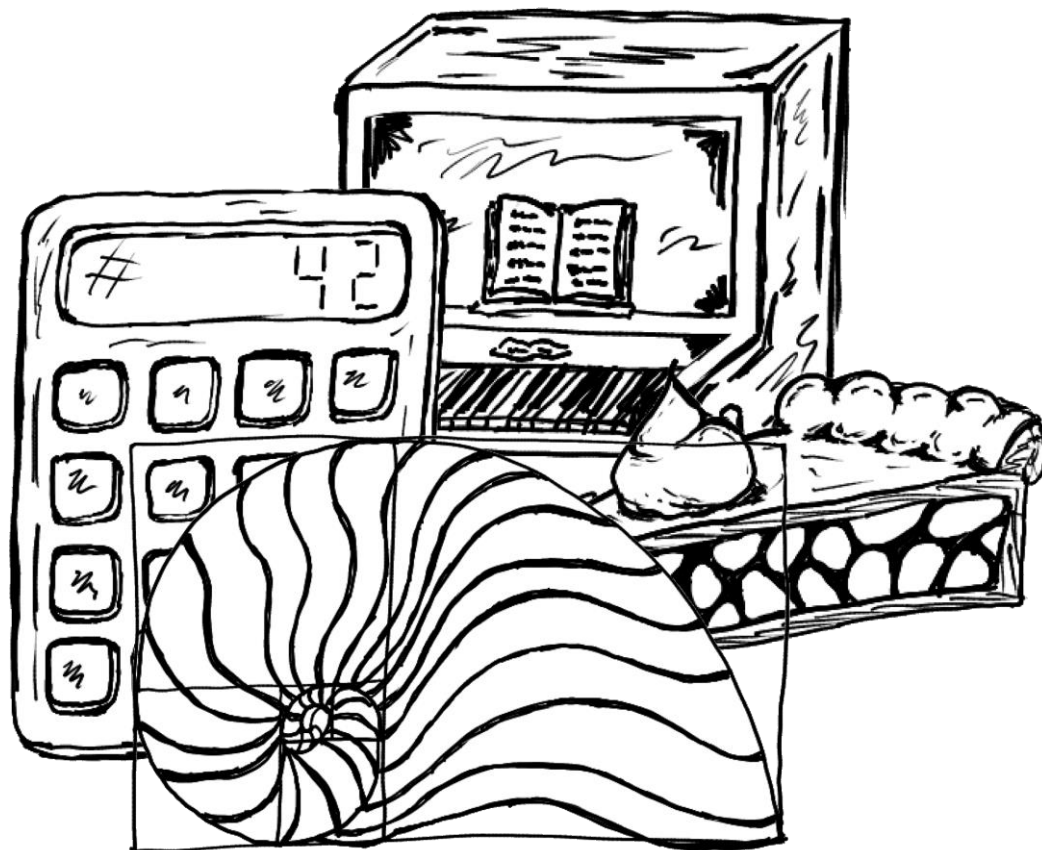




CHALMERS
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



Problemlösningssuppgifter för gymnasiet

Med fokus på verklighetsanknytning, modellering,
programmering och diskussion

Kandidatarbete inom civilingenjörsprogrammet

AXEL BERGRAHM
BJÖRN BERGQVIST
IDA PETTERSSON
MATTIAS JOHANSSON
POYA KABOTEH

Tack!

Först och främst vill tacka vår handledare Dag Wedelin för allt! Dels för att ha dragit igång hela projektet och dels för all den hjälp och vägledning han gett oss längs vägen. Han har tipsat om källor och bidragit till idéutbyten och givande diskussioner under alla projektets olika stadier. Vi vill även tacka alla lärare och elever som har bidragit genom test och enkäter. Speciellt stort tack skickas till Niklas Grip, som även lät oss komma till hans skola och diskutera hans tankar kring problemlösning och undervisning. Slutligen vill vi även tacka Annika Pettersson för att hon gav oss nödvändiga resurser och insikter angående vårt arbete, genom många långa diskussioner.

”Tell me and I forget
Teach me and I remember
Involve me and I learn”

- Benjamin Franklin

Sammandrag

Matematik är ett kärnämne i skolan idag, och anses av de flesta mycket viktigt. Samtidigt är det en vanlig uppfattning att det är svårt, tråkigt och oanvändbart. Med detta projekt vill vi underlätta för lärare att arbeta mer med problemlösning i sin undervisning. Detta görs genom att införa nya typer av matematiska problem för gymnasieskolan, eftersom vår undersökning visade att 91% av de svarande gymnasielärarna arbetade med att inkludera problemlösning i undervisningen, men 42% hade svårt att hitta bra problem. Huvudsyftet med detta projekt har därför varit att utforma problem för att hjälpa dessa lärare. Problemen är öppna, verklighetsanknutna, ger underlag för diskussion, och ska framför allt ge känslan av att matematik är användbart. Eftersom programmering snart ska införas i skolmatematiken är även en del av problemen konstruerade för att förbereda inför det. Till problemen följer även ett förslag på en komplett lektionsplanering och allt presenteras på en användarvänlig hemsida som ger enkel tillgång för alla lärare som är intresserade. De skapade problemen testades även på gymnasieskolor vilket visade att av de 26 svarande ansåg 80% att de lärde sig något och 75% uttryckte på något sätt att problemet var roligt eller meningsfullt. Alla lärare var också nöjda med det problem de testat och ansåg att den tillhörande informationen gjorde dem enkla att sätta sig in i.

Nyckelord: Matematik, Gymnasiet, Problemlösning, Problem, Verklighetsanknytning, Modeller, Programmering, Diskussion, IT, Pedagogik

Abstract

Mathematics is a core subject in the Swedish school system. Parallel to this, it is a common occurrence that the subject is perceived as hard, boring and useless. With this project we want to facilitate the teachers by introducing new mathematical problems targeted for upper secondary school pupils. We conducted a survey for teachers; where 91% asserted that they are working to include problem-solving in their teachings, while 42% have issues finding good problems. The main purpose of this project has then been to produce problems designed to help the teachers in question. The problems are open, applicable to real-life, give ground for discussion and, perhaps most importantly, make mathematics feel relevant. Also, since programming is soon going to be part of mathematics, a share of our problems have been constructed to prepare students for this inclusion. Additionally to these problems, a suggested "complete" lesson plan is provided and presented on an easily accessible and user-friendly web page. Finally, from all our tested problems, the 26 student answers assert that: 80% declare they learnt something new and that 75% state they found the problem fun or meaningful in some way. All teachers were content with the problems that they tested and thought that the information that followed made it easy to familiarize themselves.

Key words: Mathematics, Upper secondary school, Problem solving, Problem, Applicability, Modelling, Programing, Discussion, IT, Pedagogy

Innehåll

1	Inledning	1
2	Matematikundervisning förr och nu	1
2.1	Hur matematikundervisningen såg ut förr	2
2.2	Hur matematikundervisningen har förändrats	2
2.3	Undervisningen idag och glappet till yrkeslivet och högskolan	3
3	Vårt syfte med projektet	4
3.1	Varför gymnasiet?	4
3.2	Webbplatsens roll	5
4	Varför är problemlösning viktigt?	5
4.1	Vad är problemlösning?	6
4.2	Polya's fyra steg	7
4.3	Problembaserat lärande	8
4.4	Arbeta i grupp	8
4.5	Diskussion och kommunikation inom matematik	9
4.6	Verklighetsanknytning i matematiken	9
4.7	Göra eleverna delaktiga i undervisningen	10
4.8	Programmering: Tillämpad problemlösning	11
4.9	Vem är problemlösning bra för?	11
5	Undersökning av hur matematikundervisningen ser ut idag	12
5.1	Enkät till matematiklärare om deras undervisning	12
5.1.1	Hur ser matematikundervisningen ut?	12
5.1.2	Vad är problemlösning för dig?	14
5.1.3	Mer problemlösning i matematiken	14
5.2	Intervju med Niklas Grip	15
5.2.1	Niklas syn på problemlösning	16
5.2.2	Niklas kommentarer på våra problem	17
6	Skapande av problembank med tillhörande problem	18
6.1	Konstruktion av matematiska problem	18
6.2	Utvecklingen av webbplatsen	19
7	De slutgiltiga problemen	20
7.1	Fermiproblem	20
7.2	Flygplan	21
7.3	Fritt fall	21
7.4	Försvåring av en ekvation	22
7.5	Matematisk modell för bil och löpare	23
7.6	Sortera en kortlek	23
7.7	Sorteringsalgoritmer	24

7.8	Approximera ett irrationellt tal	24
7.9	Binär till decimal	25
7.10	Fibonaccis talsekvens	25
7.11	Identifiera primtalsfaktorer	25
7.12	Personnummer	26
7.13	Skapa ett chiffer	26
8	Webbplatsens slutgiltiga upplägg	26
9	Test av problemen	27
9.1	Hur testet genomfördes	27
9.2	Vad testet visade	30
9.2.1	Sammanfattning av några av de viktigaste resultaten .	30
9.2.2	Fermiproblem	31
9.2.3	Försvåring av en ekvation	33
9.2.4	Matematisk modell för bil och löpare	33
9.2.5	Programmeringsproblem	34
9.2.6	Elevernas tankar om vad problemlösning är	35
10	Diskussion	35
10.1	Reflektioner kring resultatet från bakgrundsenkäten	36
10.2	Tankar bakom framtagandet av problemen	36
10.3	Reflektioner kring de färdiga problemen	37
10.4	Reflektioner kring testresultaten	38
10.4.1	Våra generella tankar kring resultatet	38
10.4.2	Fermiproblem	39
10.4.3	Försvåring av en ekvation	39
10.4.4	Matematisk modell för bil och löpare	40
10.4.5	Programmeringsproblemen	41
10.5	För- och nackdelar med den testmetod som användes	41
10.6	Vad är viktigt i matematiken?	42
10.7	Hur vi kan påverka	43
A	Information till lärare	I
B	Den fullständiga versionen av problemen	II
B.1	Fermiproblem	II
B.2	Flygplan	VI
B.3	Fritt fall	X
B.4	Försvåring av en ekvation	XIII
B.5	Matematisk modell för bil och löpare	XVII
B.6	Sortera en kortlek	XX
B.7	Sorteringsalgoritmer	XXIV
B.8	Approximera ett irrationellt tal	XXVII

B.9	Fibonaccis talsekvens	XXX
B.10	Identifiera primtalsfaktorer	XXXIII
B.11	Personnummer	XXXVI
B.12	Skapa ett chiffer	XL
C	Presentationerna tillhörande problemen	XLIV
C.1	Fermiproblem	XLIV
C.2	Flygplan	XLV
C.3	Fritt fall	XLVIII
C.4	Försvåring av en ekvation	L
C.5	Matematisk modell för bil och löparen	LII
C.6	Sortera en kortlek	LV
D	Enkäter	LVII
D.1	Förundersökning - Lärare	LVII
D.2	Problemutvärdering - Lärare	LX
D.3	Problemutvärdering - Elever	LXIV

1 Inledning

Matematik är en av de största delarna i skolan både idag och historiskt, vilket bland annat visar sig genom att matematiken är ett kärnämne i både grundskolan och gymnasiet i Sverige. Trots det är det ett ämne som många elever blir stressade över, och som ofta framställs som svårt, tråkigt, oavvärbart och abstrakt [1]. En vanlig uppfattning verkar vara att matematik är ett ämne som bara vissa kan bli bra på [2]. Undersökningar visar också att Sverige inte är ledande när det kommer till matematik, något vi tror skulle kunna uppnås [3]. I början av detta projekt hade vi uppfattningen om att skolan till stor del präglas av genomgångar av lärare samt egen räkning i boken, och inkluderar sällan problemlösning i form av verkliga utmaningar som kräver reflektion. Men är det sant? Hur ser undervisningen ut idag och hur har den förändrats genom åren? Vad kan man ändra för att göra den bättre?

Detta är något vi bestämt oss för att ta reda på i detta projekt. Vi har därför dels studerat den nuvarande situationen, både med hjälp av källor och egna undersökningar, och vi har även gjort ett bidrag för att försöka förbättra den svenska matematikundervisningen. Detta vill vi göra genom att införa mer problemlösning i gymnasiet, och vi har därför skapat ett antal matematiska problem, tänkta att genomföras på gymnasienivå. Dessa presenteras på en användarvänlig hemsida och ska kunna användas av lärare som vill inkludera mer problemlösning i sin undervisning, men kanske inte har den tid över som det krävs för att planera sådana lektioner.

Det som vi framförallt anser att vi kan bidra med till ämnet är vår utgångspunkt som blivande ingenjörer. På så sätt hoppas vi kunna se på problemet från en annan vinkel jämfört med författarna bakom den forskning som redan finns. Dessa är nämligen mer eller mindre uteslutande lärare, pedagoger eller matematiker. Med vår erfarenhet från utbildningar inriktade mot IT och fysik hoppas vi kunna tillföra nya tankar, och skapa problem med en riktig och därmed trovärdig verklighetsanknytning. Vi vill att våra problem ska visa på friheten, men också användbarheten, hos matematiken och fokusera på verklighetsanknytning, modellering, programmering och diskussion.

2 Matematikundervisning förr och nu

I kapitlet undersöks konceptet matematikundervisning samt hur den sett ut genom historien fram till idag. Vad har karakteriserat hur matematik lärs ut, och hur har det utvecklats genom åren?

2.1 Hur matematikundervisningen såg ut förr

Den traditionella undervisningen var länge den som mer eller mindre uteslutande användes i Sverige, särskilt i högre åldrar [4]. Denna metod kan delas in i två delar: *genomgång* och *egen räkning* [5]. Det innebär att lektionen börjar med att läraren står framme vid tavlan och går igenom ny teori varefter varje elev individuellt får träna på detta med hjälp av ett stort antal likartade uppgifter. Därefter kan eleverna kontrollera om de gjort rätt genom att jämföra svaret med facit, och sedan gå vidare. Om man får rätt svar på alla uppgifter anser man sig färdig och går vidare till nästa del. Därefter upprepas samma procedur med ett nytt begrepp i centrum.

Med den här metoden lär sig eleverna använda olika matematiska begrepp och metoder, men först efter att det specifika begreppet eller metoden just presenterats. På det faktiska provet, när de själva måste ta reda på vilken metod som ska användas i varje uppgift, blir det betydligt svårare [6].

2.2 Hur matematikundervisningen har förändrats

På senare år har man börjat att aktivt se över hur undervisningsmetoden skulle kunna förbättras. Intresset för problemlösning vaknade internationellt under 1980-talet [7] och nu är ämnet mycket aktuellt i didaktiska sammanhang. År 2011 infördes en ny och uppdaterad kursplan för gymnasiet, GY11, som bland annat påverkade matematiken. Jämfört med de tidigare kursplanerna från 2000 fanns det ett antal viktiga ändringar som gällde alla de olika matematikkurserna. Dessa förändringar diskuteras i en jämförelse mellan de båda kursplanerna [8], där den nya anges lägga mer fokus på att kurserna ska anpassas efter varje program och inriktning. På så sätt plockas verklighetsanknytningen upp på ett tydligare sätt. Man ska alltså lära sig hur matematik kan användas i vardagssammanhang som exempelvis att betala räkningar, men även i mer specifika situationer beroende på vad man kan behöva i yrkeslivet alternativt vidareutbildningen efter gymnasiet. Samma källa tar också upp en annan viktig ändring som gäller problemlösning. Detta hade ingått även tidigare, men då bara som ett av *målen*. Nu poängteras att det ska användas som *medel* för inläring av andra mål. I GY11 poängteras också att undervisningen ska varieras och även innehålla undersökande aktiviteter.

För att dessa förändringar ska kunna implementeras på ett så bra sätt som möjligt har man gjort en stor satsning genom att fortbilda alla lärare. Detta har gjorts genom *Matematiklyftet*, som är en kompetensutveckling i didaktik för matematiklärare [4] och den största satsning som någonsin gjorts i ett enskilt ämne i Sverige [9]. Här belyses den kommunicerande, reflekterande samt undersökande del av matematiken som återfinns i samband med problemlösning.

I mars i år (2017) beslutades att skolan även ska verka för att “stärka

elevernas digitala kompetens” [11]. För gymnasiematematiken innebär detta att användningen av digitala verktyg ska bli mer central i matematikundervisningen och programmering ska användas för att lösa matematiska problem [12]. Även här ska det genomföras fortbildning av lärare [13].

2.3 Undervisningen idag och glappet till yrkeslivet och högskolan

Dagens gymnasieskola misslyckas i flera avseenden med att förbereda elever både inför yrkeslivet [6] och högskolematematiken [15]. Enligt en studie från Kungliga Tekniska högskolan [15] förklaras det misslyckade förberedandet för vidare studier med att det finns en kulturklyfta mellan gymnasieskolan och högskolan, alltså en skillnad i vilka egenskaper och färdigheter som värderas i synen på matematik. Enligt studien handlar det om inställningen till *räknefärdighet*, *formelkunskap*, *hjälpmedel* och *beräkningskomplexitet*.

När det kommer till beräkningskomplexitet nämner studien att uppgifter med icketriviala beräkningar, det vill säga problemlösningssuppgifter, är vanligt förekommande på högskolan men att det tycks vara ovanligt i gymnasiet. Studien är från 2006 och sedan dess har GY11 trätt i kraft (2011), som nämnts i avsnitt 2.2. Eftersom problemlösning ska ha blivit ett större inslag sedan dess har vi även valt att titta på några uppgifter från en aktuell matematikbok.

Nedan finns tre uppgifter tagna från kapitlet ”Problemlösning” i en matematikbok ämnad för matematik 1c [16]. Boken trycktes 2011, alltså ska uppgifterna vara anpassade utefter förändringarna som ska vara aktuella med GY11.

Marcus läser en bok som innehåller 420 sidor. Mellan kl 19.45 och 20.15 läser han 14 sidor.
Hur lång tid tar det att läsa hela boken?

Jonas kör sin bil samma sträcka varje dag. Sträckan är en mil och Jonas brukar köra med hastigheten 90 km/h en dag kör han sträckan med 100 km/h .
Hur många sekunder ”tjänar” Jonas på det?

En sandstrand är 2km lång, 30 m bred och 3 m djup.
Vi antar att ett sandkort ryms inom ett kubiskt område med sidan 0,2 mm.
Hur många sandkorn finns på stranden?

Vi vill hävda att vad dessa tre uppgifter har gemensamt är att de är ekvationer som har blivit forcerade in i ”verkliga” sammanhang. Behöver exempelvis den översta uppgiften vara svårare än att lösa ekvationen $\frac{420 \cdot 30}{14} = x$? Det finns fler frågor man kan ställa sig efter att ha observerat dessa uppgifter.

Vad är överhuvudtaget ett matematiskt problem? Och vad gör ett sådant problem till ett "bra" problem? Detta är frågor som utforskas djupare under kapitel 4 och som kommer vara centrala frågeställningar i detta arbete.

3 Vårt syfte med projektet

De många förändringar och satsningar som nämndes i avsnitt 2.2 bekräftar att problemlösning är ett mycket aktuellt ämne, som man lägger mycket resurser på att införa i matematikundervisningen. Det är dock en mycket stor förändring att genomföra och tar därför, som alla andra stora förändringar, tid. Många lärare tycker att det är svårt att hinna med problemlösning vid sidan av det övriga material som ska täckas enligt kursplanen [10]. Vi anser också att det är rimligt att anta att även den kommande satsningen, med att införa mer programmering, kommer att bli svår och ta lång tid att genomföra.

Med det här projektet vill vi bidra till att införa mer problemlösning i undervisningen, eftersom vi innan detta arbete hade uppfattningen att detta inte inkluderas tillräckligt. Projektets syfte är därför att skapa matematiska problem med förslag på tillhörande lektionsplanering som lärare kan använda i sin undervisning. På så sätt vill vi minimera den tid som lärarna behöver lägga på lektionsplanering och på så sätt göra det lättare att variera kursboksaterialet med mer problemlösning. Med dessa uppgifter vill vi visa matematikens många sidor och ge eleverna en känsla för hur relevant matematiken är, och hur den kan användas. Problemen ska uppmuntra eleverna till att diskutera matematik och upptäcka friheten och kreativiteten som finns i matematiken. Flera av problemen bygger också på programmering, några direkt och ett mer indirekt. Med problemens tydliga struktur hoppas vi också kunna inspirera och förenkla för lärare som vill utveckla egna problemlösningslektioner utifrån egna idéer.

Vi ville även undersöka om vår ursprungliga hypotes om problemlösning i undervisningen, som nämndes i kapitel (2), stämmer samt ifall det finns några specifika faktorer som motverkar detta. I så fall ville vi anpassa projektet efter de motverkande faktorer som uppdagades, så att vi kan bidra till att minska dessa. För att göra det enkelt för lärare att hitta och använda problemen ska de presenteras på en webbplats, tillsammans med övrig information om hur de kan användas.

3.1 Varför gymnasiet?

Vi har valt att rikta in detta arbete specifikt mot gymnasimatematik. Även om vi tror att det är viktigt att utveckla matematiken på likande sätt i alla åldrar, så har vi valt en mindre målgrupp för att kunna genomföra arbetet på ett bra sätt och med ett användbart resultat.

Det finns flera anledningar till varför valet av målgrupp föll på just gymnasiet. Dels finns det forskning som visar att en förändring i matematiskt tänkande, tvärtom vad man kan tro, är bättre att införa i den senare delen av skolan [6]. Det är lätt att tro att en ändring som införs tidigt fortplantar sig till efterföljande matematikkunskaper, men så är det alltså inte i allmänhet. Gymnasiet är också sista steget innan man eventuellt fortsätter till universitet, högskola eller arbetsliv där man förväntas lösa problem utan att ha alla fakta och metoder givna på förhand. En försmak på detta är något som vi saknade i gymnasiet, och hoppas därför kunna ge till andra.

I högstadiet ersätts ofta den glädje för att lära sig matematik, som är vanligt i de yngre åldrarna, utav rena prestationsmål [2]. Detta är något som vi tror håller i sig även i gymnasiet. Vi hoppas däremot kunna visa en annan sida av matematiken som väcker den glädjen igen.

3.2 Webbplatsens roll

Webbplatsen är ett lättillgängligt sätt att förmedla de problem som vi utformat till fler än de som vi testat problemen med. Med hjälp av webbplatsen kan vi ge lärare möjligheten att ta del av våra problem när de vill och känner att de har tid. I slutändan så hoppas vi att så många som möjligt kan ha hjälp av de problem som vi utformat.

Webbplatsen är också det som kommer att leva kvar efter projektet, därför har vi valt att inkludera en kort beskrivning om oss och vårt arbete, samt en liten informativ text till lärare med vad vi vill uppnå med våra problem och hur vi tänkt att de ska utföras.

Med en färdig webbplats så skulle projektet med enkelhet kunna vidareutvecklas i framtiden. Det enda som skulle krävas av de eventuella framtida utvecklarna är några få instruktioner på hur informationen läggs in för nya problem. Den underliggande arkitekturen tillåter utbyggnad på så pass enkelt vis att man kan lägga mer fokus på annat, exempelvis att utveckla problem.

4 Varför är problemlösning viktigt?

För att förstå detta måste man först fundera på vad problemlösning egentligen är, vad det innebär och hur det kan användas. Detta kapitel förklarar därför begreppet och vilka fördelar som följer med denna typ av undervisning. Eftersom problemlösning ofta leder till intressanta diskussioner och därmed med fördel genomförs i grupp beskrivs även dessa koncept mer ingående. Kapitlet avslutas med att förklara hur problemlösning kan gynna alla elever, oavsett nivå.

4.1 Vad är problemlösning?

Begreppet problem är ett brett uttryck och hur det ska tolkas är inte självklart. I en studie från Umeå universitet [17] försökte man klargöra hur begreppet problem var tänkt att tolkas enligt Skolverkets läroplan och jämföra det med hur lärare faktiskt tolkade begreppet. I studien framkom det att Skolverket i sin läroplan inte uttryckligen definierade vad ett problem var och att lärarnas uppfattningar om vad ett problem var varierade stort. Denna bakgrund belyser alltså tydligt att det inte råder konsensus kring någon specifik definition om vad ett matematiskt problem är. Idag däremot har Skolverket en definition på sin webbplats och eftersom denna rapport handlar om matematiska problem för gymnasiet anser vi det lämpligt att i första hand titta på vad skolverket säger i frågan. De skriver följande [18]:

Ett problem är en uppgift som inte är av standardkaraktär och kan lösas på rutin. Det innebär att varje frågeställning där det inte på förhand för eleven finns en känd lösningsmetod kan ses som ett problem.

Denna definition belyser svårigheten med att kalla något för ett problem, nämligen att den uppgift som är ett problem för en person, kan vara en enkel standarduppgift för någon annan. Trots detta kommer vi benämna våra framtagna matematiska problem som just problem, eftersom de är gjorda för att vara nya och utmanande för gymnasieelever. I detta arbete har vi valt att använda en något mer sammanfattad version av samma definition som Skolverket använder, nämligen att:

Ett problem är en uppgift som man inte på förhand vet hur man ska lösa.

Problemlösning i sin tur beskrivs enligt Skolverket som förmågan att kunna lösa ett problem. Vidare skriver de att [18]:

Problemlösningsförmåga innebär att kunna analysera och tolka problem vilket inkluderar ett medvetet användande av problemlösningstrategier som att till exempel förenkla problemet, införa lämpliga beteckningar, ändra förutsättningarna. Att lösa problemet innebär att genomföra ett resonemang där grunderna för resultatets giltighet blir tydligt och resultatet korrekt.

Definitionen visar att problemlösning är ett mycket brett område.

Nedan presenteras några viktiga egenskaper som hör samman med problem och problemlösningstrategier. Dessa egenskaper kan tillsammans, eller var och en för sig, lyftas fram i ett bra problem.

Till att börja med kräver problemlösning ett *undersökande arbetssätt*. Det handlar om att analysera problemet och bryta ner det i mindre delar,

och därefter hantera varje del var för sig. Ofta måste man prova sig fram med olika lösningsmetoder innan man hittar en som fungerar.

En vanlig form av problemlösning är också att använda *öppna problem*. Det innebär ett problem till vilket det finns flera olika möjliga lösningsgångar för att hitta ett svar, och detta svar behöver inte heller vara unikt utan kan variera beroende på vilka antaganden som gjorts. Ett exempel på ett öppet problem är att man ska planera en pool med en viss volym, vilket självklart kan göras på en mängd olika sätt.

En annan viktig del är att kunna översätta ett problem till *matematiska modeller*. Detta är en nyttig förmåga att besitta i många olika sammanhang, även i arbetslivet [6]. Det är också minst lika viktigt att kunna granska en modell med kritisk blick, och fundera på i vilka sammanhang den gäller och när den leder till orimliga resultat. Inte minst är det ett kunskapskrav för gymnasiematematiken att kunna tillämpa matematiska modeller, något som Skolverket beskriver som *modelleringsförmåga* [18] [19]. Denna förmåga beskrivs som följande:

Modelleringsförmåga innebär att kunna formulera en matematisk beskrivning – modell – utifrån en realistisk situation.

Vidare beskrivs modelleringsförmåga som förmågan att kunna koppla resultatet till en verklig situation och bedöma ifall det är rimligt, för att sedan eventuellt utvärdera modellen på nytt.

4.2 Polya's fyra steg

Redan under 1940-talet skrevs litteratur om problemlösning. Polya framhäver i sin bok *How to solve it* [20] behovet av iteration, det vill säga att upprepade gånger titta tillbaka på ett och samma problem men med olika synsätt. Detta är också ett viktigt steg i de *fyra faser* som han har tagit fram för hur man löser ett problem. Det första är att *förstå* problemet, vad som efterfrågas. Det andra är att kunna koppla olika element i problemet och se hur det okända är länkat till den data man har, för att i tredje steget genomföra problemet. Fjärde steget handlar om att man tittar tillbaka på vad man har fått fram och diskuterar resultatet.

Vidare beskriver Polya mer ingående för det fjärde steget att elever tenderar att gå vidare och göra annat efter att ha kommit fram till ett svar, och att de då missar en viktig fas. Genom att utvärdera sina resultat och framför allt *processen* att komma fram till resultatet, ges det utrymme för personen att stärka sin kunskap och utveckla förmågan att lösa problem. Han menar vidare att det alltid finns sätt att förbättra sin lösning men också sin förståelse för lösningen.

4.3 Problembaserat lärande

Problembaserat lärande, förkortat *PBL* [22] är en undervisningsmetod. Metoden går ut på att lära sig matematik genom att lösa verklighetsanknutna och ostrukturerade problem. Detta är synonymt med öppna problem, som definierades i avsnitt 4.1. Problemen kan alltså lösas på olika sätt och lösningen är tänkt att vara oförutsägbar. Tanken är att arbetet med realistiska problem ska ge möjlighet att tillämpa de matematiska teorier som är relevanta för just dessa problem. PBL nyttjar människans medfödda förmåga och nyfikenhet att lära sig, vilket ger en djupare förståelse för den kunskap som lärs in [21].

Alla gynnas dock inte av denna undervisningsmetod, visar bland annat en metastudie om styrkor och svagheter med PBL [23]. Den visar att elever både i grundskolan och gymnasieskolan med större pedagogiska behov kan ha svårt att arbeta under denna undervisningsmetod. Framför allt så handlar det om både att söka egen information och vara aktiv i grupparbetet. Därtill visar studien att PBL är mer resurskrävande arbetsmetod för lärare jämfört med än traditionell undervisning.

Daniel Willingham skriver i sin bok *Why Students Don't Like School?* om vikten av repetition för inläring [25]. Enligt Willingham så är faktabaserad kunskap starkt sammankopplat till kritiskt tänkande så som problemlösning, och för att uppnå den kunskapen krävs repetition. Han skriver att övning hjälper människor att överföra information till nya situationer vilket är en mycket central del av problemlösning. Willingham beskriver även skillnaden mellan novisers och experters (till exempel matematiker) och deras olika arbetssätt. Det går inte att förvänta sig att novisen ska lösa samma problem som experten tar sig an då de har helt olika kunskapsbas. Istället anser han att man kan låta elever inspireras av experternas arbete utan att faktiskt låta dem göra samma sak.

Det som kan ses som motsatsen till PBL är *deduktiv inläring*. Deduktiv inläring är den undervisningsmetod som den traditionella matematikundervisningen, som definieras i avsnitt 2.1, använder sig av. Det innebär alltså att i första hand lära ut teorier för att sedan tillämpa dessa på lämpliga uppgifter och problem [24].

4.4 Arbeta i grupp

Att låta elever arbeta med problemlösning i små grupper om två till fyra personer leder till att eleverna ges möjlighet att diskutera och reflektera angående problemet. Eleverna får prata om sina förslag på lösningar, lyssna på andra elevers idéer, samt även ges möjlighet att fråga, kritisera och bemöta kritik på ett positivt sätt. När eleverna får förklara sina tankar på det här sättet leder det till ökad matematikförståelse [26].

Det är vanligt att dela upp elever efter hur snabbt de anses lösa uppgifter

[2], däremot hävdar både Boaler [6] och Hagland m.fl. [26] att det är bättre med heterogena grupper vad det gäller matematikkunskap. I blandade grupper där man arbetar efter metoder anpassade för detta arbetssätt får elever lära av varandra vilket leder till ett mer rättvist klassrum enligt Boaler. Hagland m.fl. rekommenderar att läraren blandar medelpresterande elever med högpresterande eller lågpresterande elever när man gör gruppindelningen, men varnar samtidigt för att inte göra grupperna extremt homogena eller heterogena [26].

En negativ aspekt med grupparbete är att vissa elever kan bli sittande passivt medan resten av gruppen löser uppgiften åt dem [26]. Detta problemet kan rimligen antas bli värre ju större gruppen blir.

4.5 Diskussion och kommunikation inom matematik

Givande diskussioner kan få elever att inse att det är tillåtet att ha egna idéer och tankar kring matematik, ett ämne som annars kan upplevas handla om att följa regler. När elever diskuterar problem med varandra så lär de av varandra och elever kan ofta uttrycka sig på ett sätt som kan göra det lättare för andra elever att förstå än vad läraren kan [6].

Faktum är att diskussion är så viktigt för problemlösning att Hagland m.fl. skriver, i boken *Rika matematiska problem*, att den viktigaste skillnaden mellan ett vanligt problem och vad de kallar ett rikt problem är att det rika problemet leder till diskussion [26]. Även Skolverket lyfter att matematikundervisning där elevers egna lösningstrategier diskuteras leder till mycket positiva resultat och ökar elevers lust att lära [2].

I *Rika matematiska problem* beskrivs även vikten av att ha en avslutande klassdiskussion [26]. Anledningen till att boken lägger vikt vid diskussion just på slutet är att alla elever då haft tid att jobba med problemet, även om alla kanske inte har löst det, och därmed kan bidra till diskussionen. Även läraren har haft möjlighet att bilda sig en uppfattning om vilka metoder eleverna har använt sig av för att lösa problemen. Hen kan därmed leda diskussionen och ta upp intressanta idéer som uppstått och lyfta dem till resterande elever.

Ett land som tas upp av både Skolverket och Boaler att lära av vad det gäller diskussionens roll inom matematikundervisningen är Japan [6][2]. Skolverket beskriver hur det i Japan läggs stor vikt vid att efter eleverna löst ett problem så ska de dela med sig utav sina lösningar och diskutera dem med varandra. Där används diskussionen som en utgångspunkt för att läraren ska kunna lyfta viktiga aspekter ur deras lösningar och tillvägagångssätt.

4.6 Verklighetsanknytning i matematiken

En vanlig uppfattning är att det finns för lite verklighetsanknytning i matematiken som lärs ut idag [6]. Mot denna bakgrund är det lätt att förstå att

elever kan tolka ämnet som onödigt och irrelevant, vilket förklarar varför det är så viktigt att eleverna upplever uppgifterna som relevanta.

Enligt vår erfarenhet känns den så kallade verklighetsanknytningen i uppgifter ofta forcerad, och det blir snarare dåligt förklädda standarduppgifter än faktiska problem som man kan föreställa sig att någon skulle vilja lösa. Som exempel kan tas uppgiften med sandstranden, som nämns i avsnitt 2.3. En sandstrand är visserligen något som eleverna kan relatera till, men vem vill egentligen räkna ut hur många sandkorn det finns där? Dessa typer av uppgifter riskerar att ge eleverna en känsla av att matematik inte är användbart, eftersom de får se så få exempel från relevanta användningsområden. I vissa fall har man också tänkt för mycket på att den relevanta matematiken ska finnas med i uppgiften, vilket kan leda till att rimligheten blir lidande. Jo Boaler beskriver det som att eleverna inser att det finns ett speciellt ”matteland”, där det vanliga sunna förnuftet inte längre gäller [6].

De textuppgifter som skrivs i kursböcker med avsikt att införa en verklighetsanknytning kan också enligt vår erfarenhet i många fall brytas ner till standardproblem enbart genom att plocka ut siffrorna ur texten. På så sätt kan man ofta bortse från den verklighetsanknytning som eventuellt finns.

Det verkar alltså vara viktigt med verklighetsanknytning i matematiken, så att eleverna kan relatera till uppgiften och få känslan av att matematik är viktigt och användbart. Dock framhäver Lockhart i boken *A Mathematician's Lament* [27] behovet av att elever ska få utforska matematiken och att man ska försöka underbygga deras fantasi, snarare än att låsa alla problem vid verklighetsanknytning. Alltså bör uppgifter med verklighetsanknytning inte bara framhäva att matematik är användbart i det verkliga livet, utan också få eleven att känna att även abstrakt matematik kan vara rolig och spännande.

4.7 Göra eleverna delaktiga i undervisningen

Om ett par elever lyckas komma på en lösning, eller en del av en lösning till ett problem, så kan det bidra till att göra matematiken mindre främmande. Om en viss del av den teori som lärs ut i matematiken blir i form av egen utforskning, och att man lyckas komma en bit eller hela vägen, så kan de få en belönande känsla som är motiverande [6]. Genom att utifrån en fråga upptäcka ett matematiskt begrepp ges detta även automatiskt ett sammanhang och eleverna inser att det är användbart. På samma sätt är det motiverande för elever att känna att de äger problemet [6], det vill säga att de själva får forma problemet genom att vara med och bestämma till exempel frågeställning och bakgrundsinformation.

All teori som en elev stöter på under sin skolgång har en gång i tiden varit ”verkliga” problem, innan de blev formler eller modeller färdiga att använda. Vi anser att det kan vara ett kraftfullt verktyg för elevernas delaktighet i sin utbildning att få känslan av att vara med och upptäcka matematiken. När en

individ behärskar förmågan att analysera och granska olika situationer på ett sakligt vis så har hen större kapacitet till att förstå, utforska och utmana existerande begrepp.

4.8 Programmering: Tillämpad problemlösning

Att lära sig programmera är inte bara att lära sig ett programmeringsspråks syntax. Framförallt så är det att kunna bryta ner ett problem i mindre delar, i datasammanhang även kallat *subrutiner*, och definiera tydliga steg för hur man genomför dessa. Att få träning och efter hand färdighet för detta gör att man med större sannolikhet kommer att kunna bemöta ett nytt problem på ett mer systematiskt och rationellt sätt, oavsett om det är relaterat till programmering eller inte.

Eftersom en dator behöver exakta instruktioner och inte själv har förmåga att tolka vad som är rätt och fel så är det viktigt att man är tydlig med vad man menar att ett program ska göra. Vad en dator däremot är bra på är att utföra dessa instruktioner på väldigt mycket kortare tid än vad människor kan. Detta ger ett väldigt kraftfullt verktyg för många saker, faktum är att detta används i så stor utsträckning att vårt moderna samhälle still stor del är beroende av det. Det kan handla om att kunna betala sina räkningar på internetbanken på ett säkert sätt till att hitta ett lunchställe i en ny stad med hjälp av sökmotorer.

Kunskap i programmering är mer efterfrågad i samhället idag än någonsin tidigare. Att lära sig programmera är också en möjlighet för elever att med relativt fria tyglar få syssla med problemlösning. Detta är något som man har väldigt stor nytta av i matematik [6], och som matematik i stor utsträckning även går ut på. Som vi nämnt i 2.2 så kommer programmering framöver även ingå i kursplanen för gymnasimatematik. Detta gör det väldigt aktuellt att inkludera matematikrelaterade programmeringsuppgifter i vårt projekt, och de flesta av de programmeringsuppgifter som vi tagit fram har en tydlig koppling till matematiken.

4.9 Vem är problemlösning bra för?

Enligt en studie om problemlösning i grupp så har elever ett stort behov av att arbeta med problem som är på deras nivå, då de behöver vara lagom svåra för att behålla motivationen uppe, samtidigt som de ska vara utmanande [28]. Detta gäller både elever som har fallenhet för matematik likaväl som de som har inlärningssvårigheter. Vidare så visar studien att traditionella matematikuppgifter sällan erbjuder detta då uppgiftsformuleringarna brukar innehålla "nyckelord" som elever lär sig att identifiera. Man blir då som elev framtagen möjligheten att öva på att möta och tolka nya problem.

Studien visar även att risken med att välja problem av fel svårighetsgrad minskar vid val av problem vars lösning på förhand inte är uppenbar. Detta

eftersom de kan lösas på olika abstraktionsnivåer vilket gör att elever med olika förutsättningar att inte hamna utanför den ordinarie undervisningen.

5 Undersökning av hur matematikundervisningen ser ut idag

Innan vi började med projektet hade vi uppfattningen att problemlösning, trots den ändrade kursplanen, ändå inte inkluderas tillräckligt mycket i matematikundervisningen på gymnasiet. För att undersöka detta gjordes dels en enkät, och dels genomfördes en längre intervju med en lärare.

5.1 Enkät till matematiklärare om deras undervisning

Enkäten skickades ut via en facebook-sida för matematiklärare. Den gav lärarna en chans att berätta till vilken grad och på vilket sätt de arbetar med problemlösning, samt vilka faktorer de anser hindrar dem i detta arbete. Totalt fick vi in 58 svar från lärare över hela Sverige.

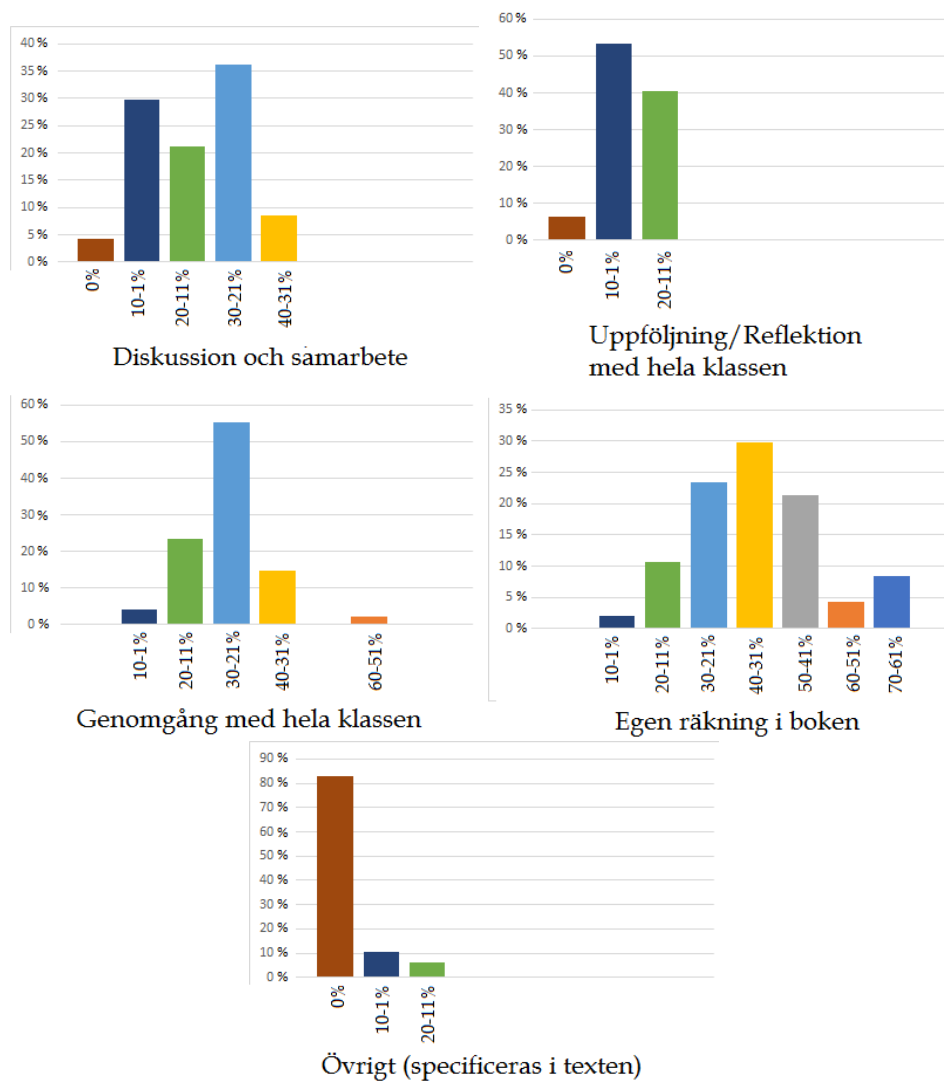
Resultatet består till största del av fritext där lärarna själva har fått uttrycka sin syn på de olika frågorna. Dessa svar har analyserats och sorterats utifrån olika gemensamma nämnare. De svar som presenteras i kursiv text nedan är alltså inte nödvändigtvis svar från enkäten, utan representerar det som vi tolkat som den bakomliggande tanken i de olika svaren. Notera även att ett enskilt svar från en lärare kan falla under flera av dessa kategorier.

5.1.1 Hur ser matematikundervisningen ut?

Här löd frågeställningen "Uppskatta ungefär hur många procent av lektionstiden som spenderas på följande:" och därefter följde förslag på vad man kan göra på en lektion, samt en punkt för "Övrigt" där man även fick specificera vad detta innebar. Resultatet av detta presenteras nedan, samt i figur 8. Här har dock de svar som inte summerade till 100% inte inkluderats, så antalet svarande lärare är här 47.

Genom att studera stapeldiagrammen i figur 8 kan man notera att den största delen av lektionstiden används till genomgång och egen räkning. Därefter följer elevdiskussion och uppföljning, och utöver detta lägger en liten andel av lärarna även tid på andra saker. Under övrigt faller framförallt laborationer, spel, digitala quiz, redovisningar framförda av eleverna samt problemlösning.

Några av lärarna kommenterade också i samband med den här frågan att de uppmuntrar eleverna att jobba tillsammans med uppgifterna i boken, och att det på så sätt blir mindre individuellt arbete, och mer diskussion mellan eleverna.



Figur 1: Figurerna visar stapeldiagram som representerar hur stor andel av lektionstiden som de olika lärarna anger att de lägger på olika delar av undervisningen. På y-axeln presenteras procentandelen av lärare, och på x-axeln uppskattad andel tid lagd på de olika momenten. Notera att y-axeln växlar skala mellan de olika diagrammen.

5.1.2 Vad är problemlösning för dig?

För att få en tydligare bild av hur svenska gymnasielärare ser på problemlösning bad vi dem skriva en kort förklarande text om hur de definierar begreppet *problemlösning*. I de svar vi fick in kunde vi hitta några olika karaktäriserande åsikter, och undersöka hur stor andel av lärarna som nämner de olika delarna.

Många lyfte fram att ett problem är *en uppgift som man på förhand inte vet hur man ska lösa, och där man får applicera känd kunskap på nya situationer*. Detta är den vanligaste definitionen, och även den vi enligt avsnitt 4.1 använder i denna rapport. Hela 79% hade med detta som ett kriterium i sina definitioner av problemlösning. En annan viktig faktor, som nämndes av ungefär 20%, var *öppna problem*. Dessa definieras i avsnitt 4.1. som problem som går att lösa på flera olika sätt, och i vissa fall även kan ge olika svar. Ett exempel på ett öppet problem är att man ska planera en pool med en viss volym, vilket självklart kan göras på en mängd olika sätt.

Därefter följde två kriterier, som vardera nämndes av cirka 16%. Det ena var att problemlösning *ska utgå från en större uppgift, vilket man måste använda flera olika metoder för att lösa*. Den andra pekar på att ett problem *innehåller antingen för mycket eller för lite information*. Det innebär att man antingen måste sortera ut det man behöver eller finna ytterligare information. Detta kan göras genom att hitta denna via någon källa eller genom egna uppskattningar.

Ungefär 5% av lärarna nämnde att problemlösning bör genomföras *i par eller grupper* och att det handlar om *diskussion och reflektion*. Lika många angav att det inkluderar att använda sig av *modellering*, att man får *tillämpa matematik* eller att problemlösningssuppgifter har en *verklighetsanknytning*. En liten andel poängterade att problemlösning ofta innebär att man *måste prova sig fram för att hitta en korrekt lösningsmetod* och cirka 7% tog upp att problemlösningssuppgifter ofta utgår från en *textuppgift*. En lärare svarade även enbart med ordet "Textuppgifter".

5.1.3 Mer problemlösning i matematiken

Hela 91% anger att de arbetar för att inkludera problemlösning i sin undervisning. Detta motiveras till viss del med att det ingår i kursplanen, vilket 19% av lärarna nämner i sin motivering. Men utöver det skriver även hela 81% av lärarna att de gör det för att de tycker att det är viktigt med problemlösning. De poängterar att det är en stor del av matematiken, och att det är bra att kunna angripa problem man inte tidigare stött på i många sammanhang, även inför framtiden på arbetet eller universitetet. De 9% som angav att de inte arbetade med problemlösning angav tidsbrist som en motverkande faktor. Det är mycket som behöver gås igenom, och då man ofta kan klara nationella provet utan problemlösning prioriteras detta ner.

Någon sa också att det berodde på att de inte visste hur man skulle göra det på ett bra sätt, och att det är svårt att gå ifrån den undervisningsmetod man är van vid.

När vi bad alla lärare att fundera på vad det finns för svårigheter med att införa mer problemlösning, fick vi många intressanta infallsvinklar. Av de som svarade nämnde 42% att de tyckte att det är *svårt att hitta bra problem*. Ett bra problem ska ju vara utmanande för hela klassen, och då det ofta finns en mycket stor spridning i matematikkunskaperna hos en klass är detta inte helt lätt. Det tar också *tid*, och det nämns också som en stor bidragande faktor till varför man inte har mer problemlösning än vad man har, och nämns av 38% av de svarande lärarna. Att elevernas tidigare skolor präglats till stor del av traditionell undervisning är också del av problematiken. 29% av lärarna tar upp att eleverna ofta har för dåliga förkunskaper för att kunna ta sig an större problemuppgifter, samt att de också ofta är skeptiska till annan form av matematik än den de är vana vid. Detta anges gälla speciellt för de högpresterande eleverna. En liten andel anger också att det som lärare kan vara svårt att ändra sin undervisning, och lätt att "falla tillbaka i gamla hjulspår".

Trots dessa svårigheter är det ändå som sagt 91% av lärarna som arbetar med att införa mer problemlösning i sin undervisning. Varför jobbar man så hårt med detta? Lärarna fick frågan om vad de ser för möjligheter med problemlösning. Många framhäver här att det är väldigt nyttigt att lära sig att *tänka på nya sätt*, och att även *lyfta styrkorna i olika tankesätt*. Det är också viktigt att kunna *hitta relevant information* vid ett givet problem, och detta är färdigheter som kan appliceras i många fler sammanhang än bara vid skolbänken. Mer problemlösning nämns också som ett bra sätt att få *tillämpa* sin kunskap, och därmed få se hur matematikens många delar kan användas i verkligheten, vilket ger en *relevans* till ämnet. Det är också ett bra sätt för eleverna att träna på att *samarbeta* samt att få *diskutera* matematik, samt att det *går att anpassa till olika nivåer*. Rätt uppgift kan vara ett problem för en hel klass, och ger alla en chans att *utgå från liknande villkor*.

5.2 Intervju med Niklas Grip

För att få ett perspektiv ifrån någon som faktiskt undervisar i matematik och höra den personens åsikter om problemlösning kontaktade vi Niklas Grip. Niklas är ämneslärare i matematik på Mikael Elias teoretiska gymnasium i Göteborg och har bland annat kursen Matematik – specialisering som han har valt att inrikta mot just problemlösning. Han arbetar också mycket med problemlösning även i övriga matematikkurser.

Intervjun genomfördes som ett djupgående samtal mellan oss och Niklas, där Niklas gavs stort utrymme att svara fritt. Samtalet utgick från följande fyra frågor, samt följdfrågor på dessa:

- Arbetar du med problemlösning i din undervisning?
- Hur definierar du problemlösning?
- Kan du ge några exempel på problem du använt i din undervisning?
- Hur arbetar du med teknik i din matematikundervisning?

Följande är en sammanfattning utav intervjun där vi försökt komprimera det det viktigaste som Niklas sa. De citat som tas upp kommer beskriva det som vi tycker var av särskilt intresse eller vikt under intervjun.

5.2.1 Niklas syn på problemlösning

Niklas arbetar med problemlösning på flera olika sätt. Dels så använder han problemlösning som en metod för att introducera nya begrepp för sina elever, men han har även lektioner helt inriktade på problemlösning och öppna frågeställningar. Han berättar att han inte får in lika mycket öppna problem som han skulle önska. Som ett exempel på vad ett öppet problem är tar Niklas upp att han bett sina elever räkna ut hur stor sannolikheten är att bli träffad av en fågelskit under ett liv. Andra problem han jobbar med är klassiska optimeringsproblem, så som att dra en kabel över en flod. Till sist så har han hand om gymnasiearbeten som inriktar sig mot problemlösning, några av hans elever räknade ut vilken ”starter pokémon” som var bäst i ett pokémonspel. Själv tycker han att han lyckas få in hela skalan av problemlösning i sin undervisning.

Niklas ser tre svårigheter med sitt arbete med problemlösning. Den första är att han har många högpresterande elever som har en väldigt klar bild av vad matematik är och som ofta blir negativt inställda till lektioner som går utanför deras bild av vad en matematiklektion ska innehålla. Den andra är att de nationella proven i framför allt matematik 2 till 4 inte testat problemlösning, vilket leder till att både Niklas och hans elever tappat lite av motivationen för att jobba med problemlösning.

Den tredje svårigheten som Niklas nämner är det rent pedagogiska i hur man ska undervisa om problemlösning. Niklas upplever att överallt så talas det gott om problemlösning, men att det finns för lite hjälp att få ifrån andra lärare eller andra personer när det gäller saker som hur man ska göra när en elev fastnar i ett problem. Han efterfrågar en undervisningskultur runt problemlösning där han kan diskutera sina erfarenheter och svårigheter med andra lärare:

Det är väl kanske de här sakerna som jag sa förut att det finns en lite väldigt svag kultur och med det också goda exempel på hur man undervisar om just själva problemlösandet. Det finns både forskning och litteratur om det, och det har funnits länge.

Niklas upplever alltså att trots tillgång till mycket resurser så känner han att hans arbete med problemlösning bedrivs mycket på egen hand. När det gäller undervisning av andra delar av matematiken så har han hjälp av böcker, andra lärare och YouTube-kanaler som visar hur man löser uppgifter. Han upplever däremot att det är väldigt få som inriktar sig på den generella förmågan att lösa problem. Niklas tar upp att han försökt lära sina elever att arbeta enligt Pólyas metoder (se 4.2). Han känner dock att han misslyckas få dem att förstå stegen och inse vad som är relevant med dem. Här hade andra lärares tankar kunnat vara till stor hjälp för honom.

Niklas definierar själv problemlösning väldigt brett, för honom kan allt vara problemlösning. Huruvida en uppgift är ett problem eller ej beror på kunskapen hos personen som försöker lösa det:

Kommer man till problem som man inte riktigt vet hur man ska lösa så upplever jag att det är då man använder sin problemlösning förmåga.

Det är viktigt att man förstår var elevernas kunskap ligger. Niklas berättade att han ibland har haft lärarpraktikanter som varit med på hans lektioner där han använt problemlösning som en metod för att lära sina elever hur de ska använda enhetscirkeln. Praktikanterna förstod inte hur det kunde vara problemlösning när Niklas hade haft genomgång om enhetscirkeln dagen innan, men i och med att eleven själv fick ta reda på hur de skulle använda sig av den så blev det ändå problemlösning i slutändan.

Niklas har introducerat sina elever till Geogebra (ett interaktivt verktyg för matematik), kalkylark och programmering, och han ser hur verktygen hjälper eleverna att förstå vad olika uppgifter handlar om. Han förklarar att elever som använder sig av Geogebra kommer få en större överblick över problemet som de försöker lösa, och därigenom ha lättare att förstå det än vad en elev som endast använder sig av algebra skulle göra. Niklas trycker på att det han vill är att eleverna själva ska använda sig av verktygen utan att han behöver visa dem hur de ska göra. Det är när eleverna själva får sitta med verktygen som de verkligen börjar lära sig teknikerna.

5.2.2 Niklas kommentarer på våra problem

Under intervjun presenterade vi även prototyper till vad som senare skulle komma att bli fyra av våra problem, varpå Niklas fick kommentera dem.

För vad som skulle bli "Försvarning av en ekvation" (se 7.4) och "Matematisk modell för bil och löpare" (se 7.5) ansåg Niklas att de var kreativa problem, som kanske gick lite utanför vad han ansåg vara klassisk problemlösning. Niklas tryckte på att det är viktigt att tänka på tidsaspekten för de problemen. Niklas har själv jobbat mycket med Fermiproblem och var positivt inställd till exemplet med "Hur många mobiltelefoner som det säljs på ett år".

Niklas hade många tankar angående vår idé om att introducera gymnasieelever till stoteringsalgoritmer, något som han själv hade tänkt mycket på. Niklas föreslog att om vi skulle använda en kortlek så var det bättre att vända korten så att baksidan var uppåt för att därmed simulera att en dator inte kan få samma överblick över mängder som en människa kan.

6 Skapande av problembank med tillhörande problem

Här presenteras processen bakom hur problemen konstruerades och vilka tankar som låg bakom. Även utvecklingen av webbplatsen samt de metoder som användes där förklaras mer ingående.

6.1 Konstruktion av matematiska problem

De problem som har skapats har som tidigare nämnts konstruerats med målet att hjälpa lärarna att öka andelen problemlösning i gymnasiet. För att uppnå detta har vi vid skapandet av problemen utgått från ett antal riktlinjer, där en eller flera av dessa belyses i varje problem.

Den första, vilken vi ser som den viktigaste, riktlinjen är att problemen ska leda till ett *undersökande arbetssätt*, se avsnitt 4.1. I samma avsnitt diskuteras även *öppna problem*, som också var en bakomliggande tanke för många av problemen. Vi har även skapat problemen med avsikt att träna eleverna på *modellering* och *programmering*, vilka tas upp i avsnitt 4.1 respektive 4.8. *Verklighetsanknytning* ska också enligt avsnitt 4.6 finnas med i flera av problemen. Alla problemen har också konstruerats för att vara *rika problem*, se avsnitt 4.5 som kan leda till en givande diskussion.

Med detta som underlag har vi skapat olika problem. Vi har tagit inspiration från våra egna erfarenheter från hela vår skolgång, inklusive universitetet, samt från en mängd olika böcker, som nämns i samband med respektive problem. Utifrån varje grundidé har vi därefter arbetat oss vidare för att skapa ett problem som passar gymnasieelever. På så sätt har vi tagit fram problem som alla har tre gemensamma delar: *Introduktion*, *Genomförande* och *Diskussion*.

I introduktionen presenteras problemet, och i vissa fall ingår där ett antal frågor att diskutera innan man börjar räkna på problemet. Själva problemet genomförs i grupper om två, och därefter kommer diskussionen. Denna börjar i vissa fall med att man går ihop i lite större grupper och presenterar och diskuterar sina lösningar av problemet, förklara varför man gjort som man gjort och jämföra eventuella olika lösningsgångar. Avslutningsvis diskuterar klassen problemet tillsammans, eventuellt med hjälp av våra föreslagna diskussionsfrågor. Vikten av att diskutera problemet ordentligt presenteras i avsnitt 4.5.

Till varje problem följer också *Information till läraren*, med information om problemets mål samt eventuella förkunskaper och material som behövs. Det finns också *Ytterligare information*. Dit kan höra förslag på hur problemet kan introduceras, bakgrundsinformation som kan vara bra för läraren att repetera innan problemet genomförs med klassen samt tankar om vilka frågor som skulle kunna dyka upp vid diskussionerna och hur dessa kan hanteras. Till många problem finns också en presentation, som läraren kan välja att använda. På så sätt presenteras problemen tillsammans med en komplett lektionsplanering.

Vi har även skrivit en text som förklarar tanken med våra problem. Där presenteras upplägget samt några idéer på hur man ska agera som lärare, bland annat genom att undvika att framställa ett förslag som felaktigt.

De problem som ska testas har planerats för att ta ungefär 50 minuter att genomföra. Detta för att de ska kunna genomföras under en lektion på en timme, och att det ska finnas tid över att svara på utvärderingsenkäten, vilken kommer att presenteras i kapitel 9.

Metoden kring hur vi utformade problemen och vilken nivå de skulle ligga på var att vi med relativt stor frihet tog fram problem på gymnasienivå. Den mer specifika nivån var menad att vara anpassningsbar, på det sättet att man med hjälp av fördjupningsfrågor kunde fördjupa sig inom ämnet och därmed kunna försvåra problemet om så önskas. I det senare stadiet av projektet blev det dock viktigare att bestämma en nivå då lärare som skulle testa problemen ofta enbart undervisade på en specifik nivå. Behovet av att bestämma en nivå för problemen, alternativt anpassa problem utefter en viss nivå, blev därmed större.

6.2 Utvecklingen av webbplatsen

Webbplatsen utvecklades i skriptspråket Javascript. Fördelarna med detta jämfört med att till exempel använda HTML är att man kan designa webbplatsen med fler verktyg och får större kontroll över sidans innehåll. Med större kontroll menas det att man skulle kunna ha annat material på webbplatsen än bara text- och bildmaterial. Det skulle kunna vara någon form av digitalt verktyg, till exempel ett matematiskt problem som använder sig av en simulator. Detta kan göras med hjälp av Javascripts många olika bibliotek.

Biblioteket som användes för att utveckla webbplatsen var React JS. React JS är ett populärt bibliotek för att bygga webbplatser med i Javascript. I Reacts bibliotek finns främst verktyg för att jobba med vy-delen av en hemsida, det vill säga det visuella som besökaren ser. Vill man integrera tyngre applikationer på webbplatsen så finns även möjligheter för det. När vyn är det största fokuset så är React ett mycket lämpligt val då det är väldokumenterat och gör det enkelt att bygga vidare på hemsidans design. Detta är till stor del baserat på våra tidigare erfarenheter och personliga

preferenser inom webbutveckling.

7 De slutgiltiga problemen

Här presenteras huvuddragen av varje problem samt den tillhörande informationen. Notera att allt enbart är förslag, och att varje lärare har friheten att anpassa genomförandet efter hur hen tror att det blir bäst i en specifik klass. Problemen i avsnitt 7.1 till och med 7.6 kräver inte några speciella förkunskaper från läraren, utan allt som inte anses som allmän kunskap skickas med som kompletterande information. Övriga problem baseras på programmering, och det är då lättare för läraren att hjälpa till med koden om hen kan programmera. Notera dock att det är problemlösningen som står i centrum, och inte kodens specifika syntax. Lärarna får även själva välja vilket programmeringsspråk som ska användas, men som vägledning skickas ett lösningsförslag skrivet i Java. Alla problemen finns även i sin fullständiga form i appendix B.1.

7.1 Fermiproblem

Ett *Fermiproblem* går ut på att man, i fall där ett specifikt värde är svårt alternativt omöjligt att mäta, bryter ner problemet i många små delar och uppskattar varje del för sig. På så sätt kan man uppskatta lösningen på frågor som vid första anblick kan verka omöjliga. denna definition används för att introducera problemet. För att illustrera detta visas även ett exempel på ett fermiproblem, samt exempel på hur man kan dela upp det i minde delar.

Eleverna får en lista med olika fermiproblem att välja mellan, och ska arbeta i grupper om två. Några exempel på frågeställningar är "Hur många iPhones säljs det i Sverige på ett år?", "Hur stor blir den sammanlagda arean av alla löv i Göteborgs innerstad (alternativt byt ut mot den egna staden)?" och "Hur många hjärtslag slår ett hjärta under en livstid?". Problemen har olika svårighetsgrad och tema, för att varje elevgrupp ska kunna välja en fråga som de är intresserade av att få svar på. Först ska de gissa på svaret, och sedan beräkna det genom att dela upp i delar som man kan uppskatta. Därefter får de i mindre grupper presentera och diskutera sitt arbete. Slutligen diskuteras i helklass om resultaten kändes rimliga, hur genomförandet gick, ifall lösningsmetoden är användbar samt varför den fungerar så bra som den gör. För den sista frågan ger vi även läraren svaret, det vill säga att det fungerar eftersom man ibland överskattar och ibland underskattar varje del för sig, vilket gör att det slutgiltiga resultatet ofta blir en mycket bra uppskattning.

Som tips på vidareutveckling av problemet anges att man kan utöka det till ett projekt. Eleverna kan börja med att testa ett enkelt Fermiproblem för att förstå definitionen, och därefter få arbeta i grupper med att lösa

detta, utanför lektionstid. Senare kan varje grupp få chans att presentera sin lösning för resten av klassen.

Målet med detta problem är att eleverna ska få träna på att göra uppskattningar, samt att bryta ner ett problem i mindre delar.

7.2 Flygplan

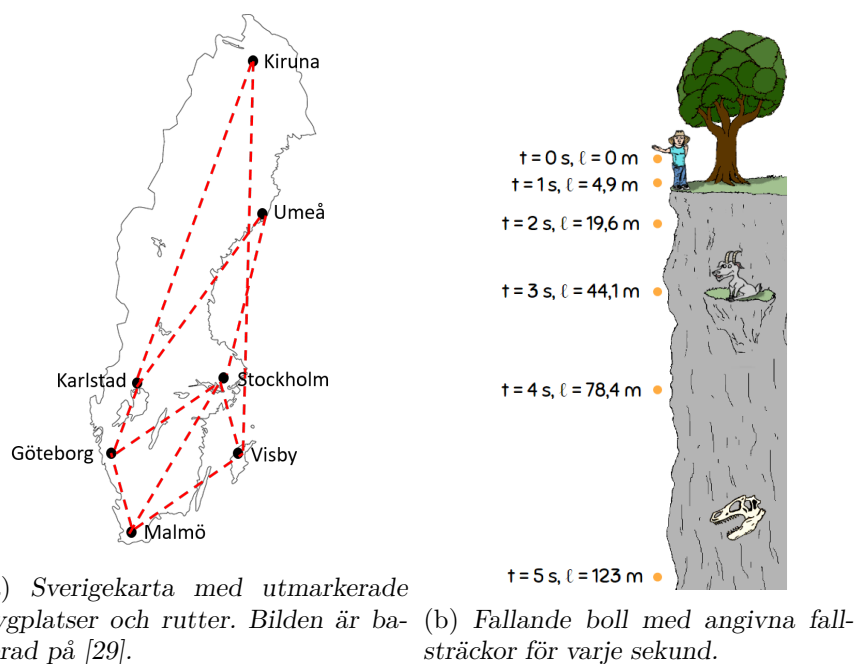
En Sverigekarta med utmarkerade flygplatser och flygrutter presenteras för klassen, se figur 2a. Detta görs bitvis, med plats för en kort diskussion om vad frågeställningen skulle kunna vara, givet den dittills givna informationen. Med all information given får eleverna i grupper om två arbeta med en specifik sträcka, Visby-Karlstad. På vilka olika sätt kan man ta sig mellan dessa två städer? Vilken sträcka är bäst och vilka faktorer påverkar detta? Därefter specificeras problemet ytterligare, genom att de får reda på hur mycket det kostar att åka mellan två olika direkta flygsträckor. De ska nu hitta den *billigaste* vägen mellan Karlstad och Visby, samt vilken väg som blir billigast om man ska från Karlstad till Stockholm, där sträckan Stockholm-Göteborg är fullbokad. Den avslutande helklassdiskussionen tar bland annat upp vilka faktorer som påverkar bränslekostnaden, vilka faktorer som påverkar biljettpris för en specifik sträcka och ifall det är det totala avståndet eller antalet mellanlandningar som avgör priset för en resa.

Under punkten "Ytterligare information" diskuteras tankar bakom uppgift och diskussion. Eleverna får själva upptäcka att priset beror på sträckan, men att det också tillkommer ett fast pris för start och landning, vilket speciellt visar sig i att det för sträckan Karlstad-Göteborg blir billigare att flyga en längre sträcka, men med färre mellanlandningar. De får också själva reflektera över ytterligare faktorer som skulle kunna påverka priset, till exempel löner och vinstmarginal.

Detta problem syftar till att träna eleverna på ett undersökande arbetsätt där inte alla påverkande faktorer är givna, utan måste resoneras fram av eleverna. Den leder också fram till ett ekvationssystem, vilket ger ett exempel på när dessa är användbara.

7.3 Fritt fall

Som en introduktion till problemet diskuterar man tillsammans i klassen vad derivata är och hur man kan beräkna den. Därefter presenteras en bild av en fallande boll, med utmarkerade fallsträckor för olika tider, se figur 2b. Frågan är nu vad man utifrån detta kan komma fram till om bollens hastighet och acceleration, vilket klassen får arbeta med i grupper om två. Tanken är att man ska konstruera en graf över sträcka som en funktion av tid, och utifrån denna använda en linjal för att rita tangenter längs med grafen och därmed skapa en graf över hastigheten som en funktion av tiden. Därefter kan samma procedur genomföras för att rita accelerationen som funktion av



Figur 2: Figurer tillhörande två av problemen, "Flygplan" till vänster och "Fritt fall" till höger.

tiden. Denna bör, med avvikelser på grund av felkällor, bli konstant och ungefär lika med tyngdaccelerationen, det vill säga ungefär 10. Avslutningsvis diskuteras denna metod med avseende på resultat och noggrannhet.

Tanken med problemet är att eleverna ska få använda derivata utifrån en verklig situation istället för utifrån en färdig formel, samt få en djupare förståelse för vad derivata egentligen är.

7.4 Försvåring av en ekvation

Inledningsvis diskuteras begreppet ekvation, samt hur man löser en ekvation, i helklass. Det viktiga här är att komma fram till att så länge man gör samma sak på båda sidorna om likhetstecknet, och använder prioriteringsreglerna rätt, så får man göra vad som helst. Eleverna får därför två och två arbeta med att "försvåra" ekvationen $x=2$, genom att i flera steg göra en bestämd operation i både vänster- och högerledet. Följande enkla exempel presenteras för eleverna som tips på hur de kan komma igång:

$$\begin{aligned}
 x &= 2 \\
 2x &= 4 & (\cdot 2 = \cdot 2) \\
 2x + 5 &= 7 + 2 & (+5 = +3 + 2)
 \end{aligned}$$

Varje steg ska även skrivas upp och motiveras enligt ovan. Därefter diskuteras lösningsgången, samt potentiella utvecklingar. Eleverna får också diskutera ifall det finns någon lösning på ekvationen, och hur den i så fall ser ut. De får på så sätt reflektera över att de nu har "löst en ekvation baklänges" och att varje ekvation, som kan tyckas se jobbig ut, kan brytas ner i små, enkla steg.

Detta är ett mycket fritt problem med målet att ge eleverna en djupare förståelse för ekvationer och ekvationslösning.

7.5 Matematisk modell för bil och löpare

Inledningsvis får eleverna i par lösa två till synes likartade uppgifter av standardkaraktär. I den ena får de givet hur snabbt det tar att köra en viss sträcka med bil, och ska beräkna hur lång tid ett antal andra sträckor tar att köra. I den andra uppgiften är bilen utbytt mot en löpare, men i övrigt är det samma frågeställning. Vi upplyser här läraren om att vi antar att de flesta elever kommer använda en linjär modell, det vill säga anta att både bilen och löparen håller samma fart oavsett sträcka. Därefter diskuteras resultaten i helklass, samt vilka antaganden man har gjort, om de är rimliga och om det skiljer sig mellan bilen och löparen. Som jämförelse får man reda på att den tid som med den linjära modellen fås för den längsta sträckan för löparen är betydligt snabbare än världsrekordet, och man får även verkliga tider för de efterfrågade sträckorna¹. Utifrån detta får eleverna diskutera vilka faktorer som avgör, till exempel att man orkar springa snabbare på kortare sträckor, men också att startsträckan tar upp större delen av tiden.

Detta problem är ursprungligen förklätt som en enklare standarduppgift, men låter därefter eleverna fundera över den matematiska modell de har använt, samt ifall den är rimlig. Målet är att visa fördelar och nackdelar med matematiska modeller, samt införa ett sunt kritiskt tänkande hos eleverna.

7.6 Sortera en kortlek

Lektionen kommer innefatta att eleven får en introducerande beskrivning på vad en algoritm är och hur den kan användas. Sedan kommer eleverna få fundera en stund på hur man kan utnyttja algoritmer till att bryta ner större problem till enkla upprepande arbetsflöden. Till uppgiften så kommer kortlekar att tillhandahållas till eleverna som får instruktioner på vad man får göra med sina kort när man försöker sortera dem. Dessa instruktioner efterliknar sättet en dator jämför och byter position på element i en lista. När eleverna fått experimentera och kommit fram till sina algoritmförslag så skriver de ner sina instruktioner. De byter instruktioner med en annan grupp

¹Tiderna för löparen som använts är tagna från hur fort Axel, medförfattare i detta arbete, springer dessa sträckor.

och ska kunna sortera sina lekar genom att enbart följa instruktionerna, precis som en dator hade gjort.

Kortleken är ett enkelt sätt för en elev att få en god introduktion till hur enkla sorteringsalgoritmer fungerar samt hur man nyttjar sig av dem. Lärdomen i denna uppgift är att eleverna i fråga troligtvis kommer lyckas skapa algoritmer som har givna namn och som faktiskt används i ”den riktiga världen”. Eleverna kommer få reflektera över vad som gått bra, eller dåligt, och hur man kan göra optimeringar eller fixa sina problem, eller ”buggar”, som uppstod. Ungefär som en riktig programmerare får göra.

7.7 Sorteringsalgoritmer

För denna uppgift så antas det att klassen i fråga är bekväm med grundläggande programmering, speciellt hantering av fält och loopar. Läraren kan presentera några av de vanligare sorteringsalgoritmerna som finns, för att sedan företrädesvis presentera förbestämda listor som sorteringsalgoritmerna ska klara av att sortera. I små grupper om två eller tre ska eleverna implementera sina sorteringsalgoritmer. Avslutande diskussion kommer beröra vidare hur det gått att sortera listorna och vilka algoritmer de olika grupperna tillämpade. Vidare kan även diskuteras hur de olika sorteringsalgoritmernas tidskomplexitet skulle förhålla sig till varandra om listorna var mycket längre.

Till skillnad från problemet ”Sortera en kortlek” i avsnitt (7.6), så kommer eleverna att få lära sig grundläggande teori om sorteringsalgoritmer från läraren. Eftersom vi antar att eleverna behärskar programmering till viss del så ligger övningen i att faktiskt få testa att implementera några av de sorteringsalgoritmer som faktiskt finns.

7.8 Approximera ett irrationellt tal

Detta lektionstillfälle kommer innefatta att läraren introducerar problemet. Förelagsvis så kan uppgiften gå ut på att approximera π , som kan göras med hjälp av Leibniz’ serie [30]. Efter detta kommer eleverna gå ihop två och två, alternativt tre. I dessa grupper ska eleverna skapa modeller för att approximera det valda irrationella talet. Nästa steg är att omvandla modellerna till kodavsnitt som skriver ut deras approximationer med utvald noggrannhet. Vid diskussion kan eleverna få chans att fundera på hur stor noggrannhet man egentligen behöver ha vid approximering av ett irrationellt tal, och hur detta kan skilja sig för olika syften.

Detta problem kan ge eleven övning i att djupare förstå var olika irrationella tal kommer ifrån och få en djupare förståelse för begreppet att ett tal är irrationellt.

7.9 Binär till decimal

Lektionen utförs förslagsvis genom att läraren presenterar uppgiften och introducerar den binära talbasen. Om det behövs kan läraren gå igenom en omvandling för att förtydliga uppgiften. I grupper om två eller tre ska eleverna ta fram en modell för konverteringen för att sedan skriva ett program som utför omvandlingen. Vid diskussionen kan eleverna få fundera på hur man skulle kunna göra omvandlingen omvänt, samt slutligen få fundera på hur man kan utföra omvandlingar mellan godtyckliga talbaser.

7.10 Fibonaccis talsekvens

Undervisningen börjar med att läraren introducerar Fibonaccis talsekvens och några steg av hur talföljden utvecklar sig. Efter detta kommer eleverna att få i uppgift att implementera en algoritm som beräknar talsumman för godtyckligt steg i fibonaccitalföljden. Mer erfarna programmerare uppmuntras till att prova att lösa problemet med hjälp av rekursion. När väl eleverna provat att lösa problemet så kommer en diskussionstund där man bör reflektera på hur det har gått, hur väl sin kod fungerar och på vilka olika sätt som talföljden kan beräknas.

I detta problem så får eleven träning både i iterativa och rekursiva loopar, som båda är grundläggande programmeringsverktyg. Lär man sig behärska dessa tekniker så kommer man i sin tur enklare att kunna lösa andra problem som har iterativ eller rekursiv struktur.

Detta problem är tänkt att ge elever övning i att konvertera mellan talbaser och få en grundläggande känsla för det binära talsystemet, något som är centralt inom datavetenskap.

7.11 Identifiera primtalsfaktorer

Läraren kan påbörja lektionen exempelvis med att tala om vad ett primtal är. Sedan kan läraren visa att alla icke-primtal går att primtalsfaktorisera och visa några enkla exempel. Efter detta presenterar läraren programmeringsuppgiften. Problemet blir att implementera en metod som givet ett tal returnerar talets primtalsfaktorer, alternativt anger att det självt är ett primtal. Detta görs i grupp om två eller tre. Lektionen avslutas sedan med diskussion, där eleverna kan diskutera hur man hanterat olika fall, som tal med fler än två primtalsfaktorer. Vidare kan det diskuteras huruvida lösningen är optimal, det vill säga ifall man undersöker fler fall än nödvändigt när man vill undersöka ifall ett tal är ett primtal.

Detta problem ger elever övning i både booleanska uttryck och hantering av fält eller listor, men också hur man på bästa sätt kan identifiera primtal.

7.12 Personnummer

Läraren börjar förslagsvis lektionen med att gå igenom hur ett personnummer är uppbyggt och att kontrollsiffran i ett personnummer inte är arbiträr. Detta kan visas genom att gå igenom Luhn-algoritmen, som är en algoritm för att verifiera personnummer [31]. I grupper om två eller tre ska eleverna sedan följa den kravspecifikation som algoritmen innebär och implementera en metod som beräknar om ett personnummer är äkta. Alternativt, givet ett personnummer utan kontrollsiffran, beräkna kontrollsiffran. Diskussionen tar upp varför man vill kunna kontrollera personnummer samt hur man kan utveckla kontrollen vidare beroende på vad man känner till. Exempelvis så bör man kolla så att månadssiffrorna inte är större än 12.

Det man kan få ut av det här problemet är att lära sig hur personnummer kan verifieras och hur kontrollsiffran bestäms. Vidare så är det en bra övning på att arbeta med att extrahera information från en given sträng och verifiera format samt innehåll.

7.13 Skapa ett chiffer

Detta problem är menat att lära elever vad ett chiffer är, och med det ge en introduktion till kryptering, och hur man kan använda sig av olika typer av chiffer för att kryptera ett meddelande. Läraren bör företrädesvis sedan presentera en ASCII-tabell som eleverna kan utnyttja sig av när de skapar sitt chiffer. Detta görs i grupper om två eller tre. När uppgiften är färdig så kan förslagsvis två grupper gå ihop för att försöka tolka den andra gruppens kryptering. Avslutningsvis så kan det diskuteras olika sätt som man kan kryptera meddelanden på samt ifall man med blotta ögat kan tyda varandras krypteringar. Vidare kan det även diskuteras hur man potentiellt kan göra chiffren mer svårlösta.

Detta problem berör grundläggande teori kring kryptering där eleverna får övning i enkla former av detta samtidigt som de lär sig behärska transformering av textsträngar.

8 Webbplatsens slutgiltiga upplägg

Webbplatsen består framför allt av olika problem som med hjälp av titel samt varsin tillhörande ikon listas i ett rutnät på webbplatsens "Problem"-sida. Klickar man på ett av problemen så kommer man vidare till en mer detaljerad vy med en kort beskrivande text följt av en länk till det fullständiga problemet. Till problemen 7.1 till 7.6 bifogas även en tillhörande Google-presentation, som är tänkt att underlätta utförandet.

Webbplatsen har även en startsida där besökaren ges en introducerande text om webbplatsens syfte och innehåll samt att man via ett enkelt knapptryck lätt tar sig vidare till problemen. Dessa kommer man givetvis också



Figur 3: Webbplatsens startsida

åt via menyn, skillnaden är att vi vill fånga uppmärksamheten på ett mer välkomnande sätt för den som besöker webbplatsen för första gången genom att ha en knapp över en bild som illustrerar några av våra problem, något som kan ses i figur 3.

Till sist så inkluderas sidan "Om oss", som beskriver projektets arbete, samt sidan "Information till lärare", vars innehåll beskrivs i avsnitt 6.1. Webbplatsen visas i figurerna 3, 4, 5, 6 respektive 7 och kan även besökas på adressen <https://matematiskaproblem.github.io/>.

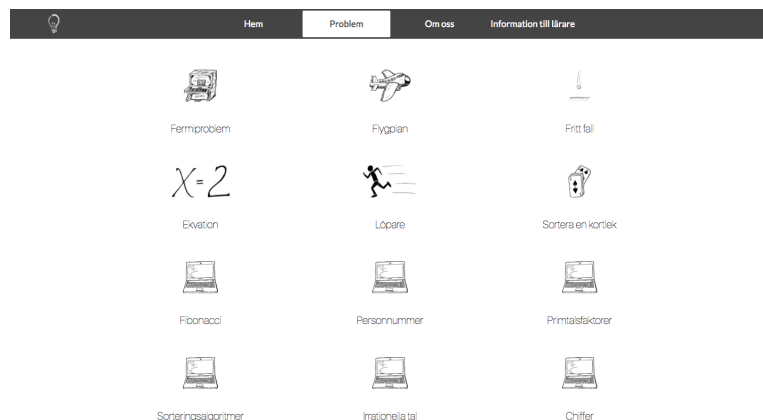
9 Test av problemen

Det här kapitlet behandlar de testresultat som mottogs från utvärderingsenkäten för de lärare som testat ett eller flera av de framtagna problemen. Inledningsvis förklaras testmetoden och därefter följer testresultaten. Här sammanfattas även några av de resultat som ansågs vara viktigast och efter det beskrivs varje testat problem i detalj. Avslutningsvis presenteras elevernas egna definitioner av begreppet problemlösning.

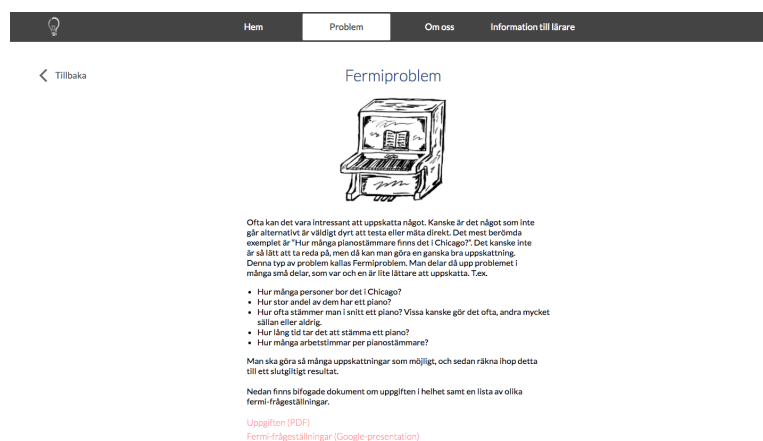
9.1 Hur testet genomfördes

Av de 58 lärare som svarade på utvärderingsenkäten som presenterades i avsnitt 5.1 var det 20 stycken som fyllde i ett intresse för att testa ett av våra problem.

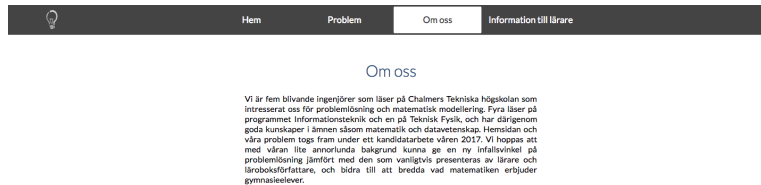
De sex problem som presenterades i avsnitt 7.1 till och med 7.6 fördelades mellan dessa, där hänsyn även togs till vilka kurser lärarna hade angivit att de för tillfället undervisade i. De fick också reda på att de hade möjlighet att skriva och be om ett annat problem om de så önskade. Problemen



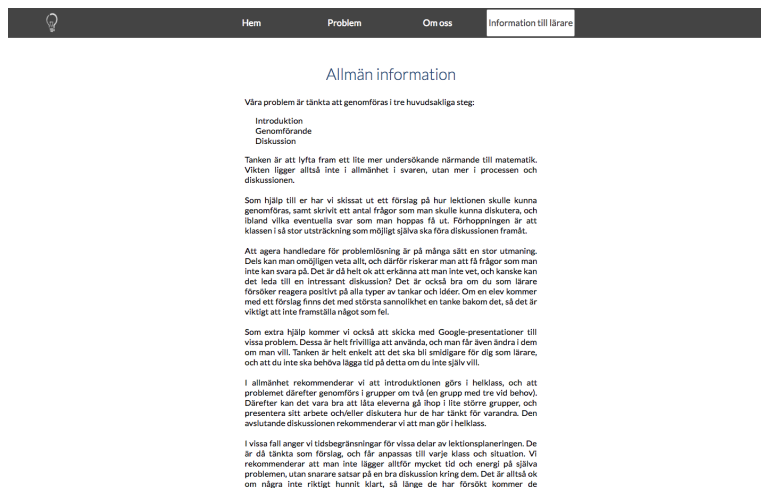
Figur 4: Webbplatsens problemsida



Figur 5: Webbplatsens problemvy



Figur 6: Webbplatsens ”Om oss”-sida



Figur 7: Webbplatsens ”Information till lärare”-sida

skickades ut fredagen den 31:e mars, tillsammans med dokumentet "Allmän information till lärare" samt tillhörande presentation. Därefter fick lärarna 5 veckor på sig att genomföra problemen, det vill säga till den 5:e maj.

Lärarna hade som tidigare nämnt möjlighet att följa det givna upplägget till den grad de själva ville, och därefter fick de en utvärderingsenkät. Den innehöll frågor om hur de tyckte att problemet presenterats från vårt håll, om de valt att ändra något eller om det var något annat de saknade samt om hur de tyckte att problemet togs emot av eleverna. Eleverna fick en liknande utvärderingsenkät där de fick skriva sin definition av problemlösning, vad de tyckte om problemet, vad de tyckte om nivån på problemet samt om de upplevde att de lärt sig något.

9.2 Vad testet visade

Nedan presenteras svaren på de utvärderingsenkäter vi fick in. I slutändan var det fyra av de tjugo anmälda som genomförde ett problem, samt Niklas Grip, som presenterades i avsnitt 5.2 i samband med den intervju han medverkade i. För tre av dessa fick vi även elevsvar, totalt 25 stycken. De lärare som hörde av sig och sa att de inte skulle kunna genomföra problemen förklarade att det berodde på tidsbrist inför de nationella proven. De flesta skrev dock att de tyckte att det verkade vara bra problem med ett genomarbetat och tydligt upplägg.

De problem som testades var "Fermiproblem", "Försvåring av ekvation" och "Matematisk modell för bil och löpare", vilka förklaras närmare i avsnitt 7.1, 7.4 respektive 7.5. Vidare testade Niklas programmeringsproblemen "Binär till decimal", "Fibonaccis talsekvens", "Identifiera primtalsfaktorer" samt "Personnummer", vilka förklaras närmare i avsnitt 7.9, 7.10, 7.11, respektive 7.12. Först presenteras de viktigaste resultaten av undersökningen, och därefter följer varje problem för sig, med svar från lärare och i de flesta fall elever. Sist följer elevernas svar på frågan "Vad är problemlösning för dig?".

9.2.1 Sammanfattning av några av de viktigaste resultaten

Sammanfattningsvis var alla lärare till största delen nöjda med problemen. En lärare uttryckte visserligen att den rent matematiska delen av "Matematisk modell för bil och löpare" var för lätt, men var mycket nöjd med den diskussion med rimlightesananlys som följde. Alla lärarna var också väldigt nöjda med hur vi presenterade problemen, och alla hade upplevt att eleverna lärt sig något av problemet.

Några av de viktigaste elevsvaren presenteras i figur 8. Där kan man se att ungefär 80% tyckte att de lärde sig av problemet och att ungefär 75% på något sätt uttryckte att de tyckte att problemet var roligt eller meningsfullt. Ungefär 58% av eleverna tyckte att problemet var lagom svårt,

medan cirka 19% ansåg att det var för svårt, och 23% tyckte att det var för enkelt. Slutligen ville 38,5% hellre jobba med den här typen av problem än uppgifter i boken, medan 25% föredrog boken. Resterande 38,5% ville att undervisningen skulle bestå av en blandning av båda.

9.2.2 Fermiproblem

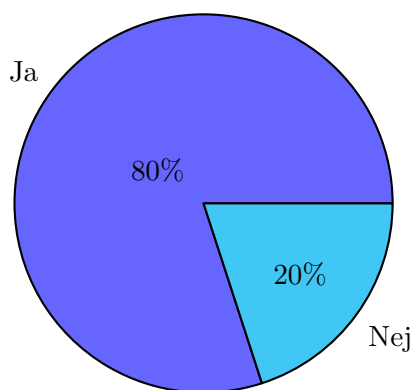
Fermiproblemen testades i kursen matematik 4, med en klass som enligt läraren arbetade en del med problemlösning under det första året på gymnasiet, men inte så mycket i år två. Den problemlösning de gjort tidigare har varit i form av ”praktiska öppna problem och problemlösning i bok och på genomgångar”.

Problemet angavs vara tydligt beskrivet, och eleverna ”gick igång” när läraren presenterade de olika fermiproblemen. Läraren anger att alla elever deltagit aktivt under hela lektionen, och ställde frågor som ”Är det här rimligt?” och ”Kan det vara sant att...”. Som extra information berättade läraren även om Fermis liv, vilket väckte elevernas intresse. De googlade vidare på egen hand och upptäckte bland annat fermiparadoxen², som det blev en diskussion om.

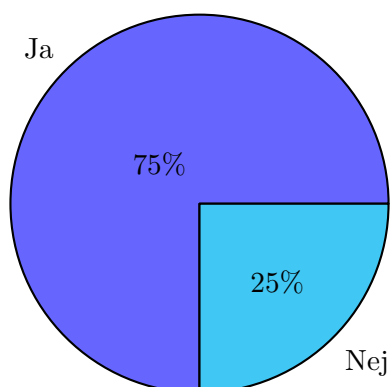
Läraren ansåg att eleverna lärde sig av problemet, framförallt att de fick en koppling till verkligheten och att de insåg att ”alla svar inte går att hitta i matteboken och att man kommer långt med att tänka realistiskt”. Dock anmärkte läraren att det var någon grupp som direkt kunde hitta svaret på någon om frågorna genom att googla, vilket gjorde dem mindre motiverade att uppskatta detta själva. Läraren planerade också in så att problemet genomfördes under en ”klämläktion” precis innan lovet, istället för att då introducera ett nytt område, vilket hen ansåg fungerade väldigt bra.

Av de tretton elever som svarade på enkäten tyckte nio stycken att problemet var roligt, intressant eller meningsfullt. Fyra eleverna var istället negativt inställda, och tyckte att det var tråkigt eller irrelevant. En av dessa tyckte även att det var dåligt att det inte var tillräckligt med data givet till problemet. En elev lämnade blankt på denna fråga. Problemet var lagom utmanande för fem av eleverna, medan sex stycken tyckte att det var för lätt och två att det var för svårt. Även här angav en av eleverna bristen på data som anledning. Den andra tyckte att det blev svårt eftersom det blev många uträkningar att genomföra. Däremot har hela elva av dessa tretton angivit att de lärt sig något av uppgiften. En del av lärdomarna har varit rena faktasvar, t.ex hur många slag ett hjärta slår under en livstid, medan andra har angett en mer principiell insikt, som till exempel att ”det går att räkna ut saker som kan verka omöjliga” eller ”hur enkel matte kan användas för att lösa problem och hur uppdelning kan förenkla”. De som angett att de inte lärde sig något säger att det berodde på att de inte var intresserade.

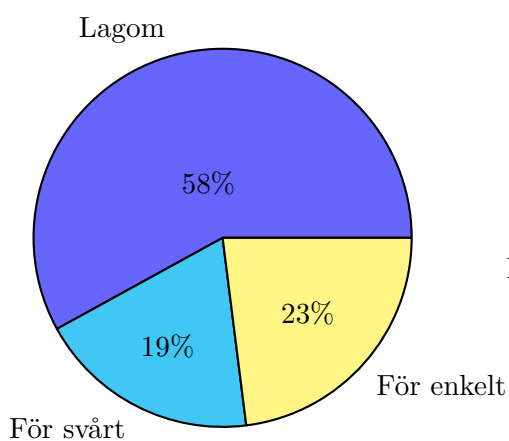
²Motsägelsen i att universum är oändligt stort och det därmed är mycket stor sannolikhet för utomjordiskt liv, men att inga tecken på detta ännu har hittats.



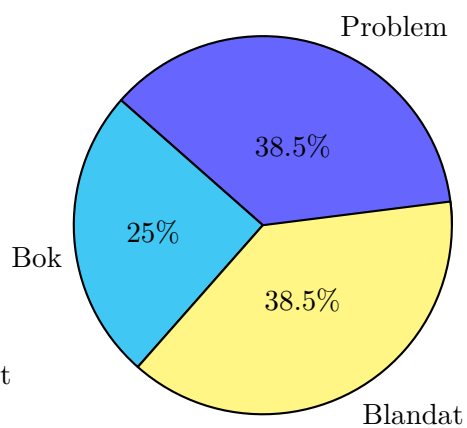
(a) Lärde du dig något av problemet?



(b) Tyckte du att problemet var roligt? Meningsfullt?



(c) Var nivån på problemet lagom, eller var det för lätt eller för svårt?



(d) Vill du jobba mer med den här typen av problem, eller vill du hellre jobba med uppgifter i boken?

Figur 8: Figurerna visar hur eleverna svarat på några utav de frågor som de fick efter att de genomfört något av våra problem. Se texten för mer information om både frågor och svar.

Gällande vilka typer av uppgifter de helst vill jobba med anger fyra av eleverna att de hellre arbetar i boken, men lika många tyckte att uppgiften var rolig och lärorik och vill gärna göra fler liknande uppgifter. Fyra elever poängterar att de gärna vill ha en blandning av båda, och en elev har valt att svara blankt på denna fråga.

9.2.3 Försvåring av en ekvation

En lärare testade problemet ”Försvåring av en ekvation” i kursen matematik 1a. Klassen hade enstaka gånger arbetat med problemlösning tidigare, på ungefär samma sätt med grupper och därefter diskussion i helklass.

Läraren var nöjd med den information som hörde till problemet, och upplevde att eleverna blev ganska engagerade och intresserade av det. De hade tyckt att det var extra roligt att få visa upp sina jobbiga ekvationer, och läraren tyckte att problemet passade de allra flesta. Läraren lyfter dock fram att många hade problem med prioriteringsreglerna, och inte hanterade instruktionerna att ”man får göra vilka matematiska operationer som helst med en ekvation, bara man gör det på båda sidorna” på riktigt rätt sätt. Några hade också haft lite svårt för att skriva om ekvationen stegvis, men de flesta hade förstått det momentet.

Läraren upplevde att eleverna lärde sig av problemet, framförallt påmin-des de om vikten av att göra samma sak i båda led, och läraren hoppas att de fick en djupare förståelse för hur en ekvation byggs upp. Problemet kändes relevant, läraren kommenterar att man borde förtydliga så att det inte blir så stora problem med prioriteringsreglerna, samt föreslår att man skulle kunna börja med en lite mindre uppgift så att eleverna kommer in i uppgiften först.

Här var det fyra elever som svarade på utvärderingsenkäten. Två av dem tyckte att problemet var lagom svårt, medan en tyckte det var för lätt och en att det var för svårt. Tre av dem tyckte att problemet var roligt och lika många angav att de lärt sig något om ekvationer eller om att lösa svåra uppgifter. En elev nämnde också att lektionen blev väldigt rörig, och att det därför var svårt att lära sig något. Hälften skulle vilja göra mer av den här typen av uppgifter, medan hälften hellre arbetar själva i boken.

9.2.4 Matematisk modell för bil och löpare

Problemet testades av två lärare. Den ena, som vi kallar lärare A, testade problemet i kursen matematik 1a, och den andra, lärare B, testade det i 1b. Båda lärarna har även angett att de arbetat med problemlösning i klasserna förut.

Båda två tyckte att informationen om problemet var tydlig och bra. Lärare A upplevde inget större intresse för uppgiften från eleverna, medan lärare B förklarar att eleverna ”körde igång med full fart”. Båda klasserna löste utelutande uppgiften genom att anta en linjär modell. Som extra intres-

sant del har de kommenterat på den linjära modellen i uppgiften. Lärare A säger att det gav en bra diskussion om begränsningar hos den matematiska modellen, medan lärare B kommenterade att eleverna även kunde formulera antagandet om konstant hastighet.

Lärare A uppskattar att alla elever deltog i problemet, och att de flesta hade nytta av diskussionen om rimligheten. Däremot uppskattar hen att bara 20% hade nytta av beräkningsdelen av uppgiften. Lärare B tror att både hög- och lågpresterande elever hade nytta av problemet. Båda utvecklade också problemet genom att skissa en graf. Lärare B skissade den linjära modellen medan lärare A gemensamt med klassen försökte skissa hur modellen borde se ut för löparen. Lärare A fick inga särskilda frågor under lektionen, medan lärare B fick frågor om hur man omvandlade mellan m, km och mil.

Båda lärarna tror att eleverna lärde sig av problemet, framförallt om att man måste granska och värdera rimligheten i ett svar samt i matematiska modeller. Dock tyckte lärare B att uppgiften var lite väl lätt för att kallas problemlösning, och hade velat ha ett mer öppet problem. Lärare B var däremot väldigt nöjd, och tyckte att det var "väl använd tid", eftersom de annars "är ganska låsta vid kursboken".

Av de åtta elever som fyllde i utvärderingsenkäten var det en elev som inte alls tyckte att problemet kändes meningsfullt. Tre stycken tyckte att det var intressant, användbart eller båda delarna, och en kommenterade att det var bra att "jämföra med verkligheten och tänka på rimligheten och relevansen". Två elever tyckte att det var bra för att det var relativt lätt matematik och en elev gav den svårtolkade kommentaren att "vissa problem är meningsfulla". Vid frågan om svårighetsgrad tyckte två stycken att det var för svårt, en att det var för lätt och övriga 6 att det var lagom utmanande.

Sex av eleverna, det vill säga 75%, upplevde att de hade lärt sig något av uppgiften, exempelvis "att tänka efter mer och inte bara skriva den uppenbara lösningen". En av de som inte ansåg sig ha lärt någonting kommenterade att det var för att hen genomförde uppgiften på enklast möjliga sätt, och att det hade blivit svårare om hen hade funderat på relevansen i modellen.

Eleverna fick också frågan om ifall de vill göra fler uppgifter av den här typen eller hellre arbetar i boken. Två personer har svarat att det inte spelar någon roll, tre har angett att de vill ha en kombination av båda och lika många vill hellre göra den här typen av uppgifter. Två av de senare har dock angett att detta berodde på att de tyckte att uppgiften var lätt.

9.2.5 Programmeringsproblem

Matematikläraren Niklas Grip från intervjun i avsnitt 5.2 testade några av våra programmeringsproblem i sin kurs matematik specialisering. Mer specifikt var det problemen "Binär till decimal" (7.9), "Fibonaccis talsekvens" (7.10), "Identifiera printalsfaktorer" (7.11) samt "Personnummer" (7.12).

Klassen har både under år ett och två arbetat ganska mycket med problemlösning, och specifikt i samband med programmering.

Niklas tyckte att instruktionerna till problemet var tydliga och hjälpsamma, och att eleverna fångades av programmeringsproblemen. Speciellt av de med en tydlig verklighetsanknytning, som till exempel problemet om kontroll av personnummer. Han hade valt ett upplägg som gjorde att eleverna själva fick välja om de ville genomföra uppgifterna. Han tror att de som valde att inte göra uppgifterna inte heller hade klarat av att genomföra dem själva, och att det då hade varit ett krav att eleverna fick arbeta i grupp.

När det gällde de frågor som Niklas fick av eleverna var det en blandning av problemlösningssfrågor i form av till exempel "Hur ska man tänka här" och rena syntaxfrågor. Han upplevde att eleverna lärde sig olika sätt som man kan använda programmering på, samt att "Det var ganska olika problem vilket ställer högre krav på problemlösningssförmåga och kreativitet." Han ansåg att svårighetsgraden var perfekt för de som ville ha lite mer avancerade uppgifter, men nämnde som sagt att han tror att de något svagare eleverna hade behövt arbeta tillsammans för att klara av att lösa problemen.

9.2.6 Elevernas tankar om vad problemlösning är

Det vanligaste svaret på frågan "Vad är problemlösning för dig?" var svar liknande antingen "matematik" eller "Att lösa problem". Denna tolkning gavs som svar av ungefär 44% av eleverna. Därutöver svarade några att det var svåra problem medan någon tvärtom sa att det var lätt. Cirka 12% sa att det var problem som "kräver ett friare tänkande" eller att det går ut på att "kunna förstå frågan och bearbeta den". Ungefär 19% nämner verklighetsanknytning som en viktig faktor, eller mer specifik "problem som man kan stöta på i vardagen".

10 Diskussion

I det här avsnittet så lyfts bland annat frågan kring vad vi anser vara ett bra problem och vad man ska få ut av det. Vidare diskuteras projektets process, framför allt sett till hur vi utformat problemen och hur vi kunde utfört projektet annorlunda. Där läggs vikt vid vilka begränsningar vi fått göra, brister kring testningen samt urvalet av testpersoner. Vi försöker även svara på huruvida vi lyckats med vårt mål att underlätta för lärare att få in mer problemlösning i sin undervisning. Slutligen så vill vi nyansera vårt projekt genom att diskutera huruvida denna typ av undervisning verkligen är bra, och i vilken utsträckning den bör inkluderas.

10.1 Reflektioner kring resultatet från bakgrundsenkäten

Bakgrundsenkäten, som presenteras i avsnitt 5.1, gjordes för att undersöka om den uppfattning vi hade om matematikundervisning stämde överens med verkligheten. Enkäten skickades ut via en Facebook-sida för matematikundervisning. Detta gjordes för att nå ut till så många lärare som möjligt, vilket lyckades, men det innebar också att vi i första hand riktade oss mot en viss typ av lärare. Mer specifikt de lärare som använder Facebook och är intresserade av att samlas för att läsa eller delta i diskussioner om matematikundervisning. Vi bad även lärarna om hjälp med att sprida enkäten, men det är omöjligt att säga till vilken grad detta verkligen skedde. Metoden gör också att vi inte kan beräkna någon typ av svarsfrekvens.

Däremot fungerade metoden över förväntan på det sättet att vi fick in många svar. Man kan också se att många lärare ansåg att även om 91% av lärarna svarade att de arbetade för att inkludera problemlösning i sin undervisning, så nämnde de också många faktorer som hindrade detta arbete. Så även om vi antar att detta är den mest motiverade delen av lärarkåren, som arbetar hårdast med problemlösning, så finns det alltså ändå ett svårighet med att jobba med problemlösning.

Enkäten visade också att de flesta av dessa lärare hade en mycket god bild av vad problemlösning är. Detta kan kanske kännas självklart, men det fanns också svar som antydde att det finns lärare som inte känner till en bra definition av vad problemlösning faktiskt är. Som exempel kan nämnas att vi reagerade mycket starkt på ett av svaren, som enbart löd "Textuppgifter". Även om problemuppgifter ofta är textuppgifter är detta inte ett krav, och alla textuppgifter är definitivt inte problemlösning. Som tur är var det bara en av 56 som uttryckte sig på det här sättet, men det är ändå en för mycket.

10.2 Tankar bakom framtagandet av problemen

Något som är centralt för de problem som vi utformat för detta projekt är att elever ska få arbeta i grupp och därmed tillåtas att diskutera matematik, vilket är bra av många anledningar, se avsnitt 4.4 och 4.5. Därför innefattar varje problem *Introduktion*, *Genomförande* och *Diskussion*, som nämns i avsnitt 6.1. Vi anser att framförallt diskussionen är väldigt viktig och bakgrundsenkäten i avsnitt 5.1 visade att det läggs alltför lite tid på att reflektera över och bedöma rimligheten i sina svar och metoder. Vi vill därmed understryka att resultatet inte alltid nödvändigtvis behöver vara korrekt, och att ett problem inte alltid enbart har ett svar. Vi anser istället att det är diskussionen och reflektionen som är det viktigaste.

Att ta fram problem har inte varit lätt. Till en början så hade vi ett angreppssätt där vi inte alltid tog hänsyn till nivå och nödvändig teori, utan tog för givet att eleven med hjälp av nyfikenhet skulle vilja ta till sig den nya teori som skulle vara nödvändig för att lösa uppgiften. Ju mer kontakt

vi fick med lärare desto mer insåg vi att vi var tvungna att i någon mån anpassa våra problem för att de skulle passa in i deras undervisning. Vi bestämde oss därför också för att avgränsa oss till kortare problem. Detta dels för att underlätta testning och dels för att det skulle vara lättare för lärare att inkludera i sin undervisning även efter projektets slut. Vi har även diskuterat att utforma längre problem också. Vi tror nämligen att det kan vara bra att få gott om tid för att fundera, och även ha tid till att testa olika metoder för att se vilken som fungerar bäst. Denna tanke ligger bakom till exempel ”Fermiproblem”, som är planerad för att kunna utföras under en enda lektion, men även kan utföras som ett längre projekt som kan avslutas med att eleverna får presentera sina olika resultat och metoder för klassen.

Med det sagt så har vi alltså framförallt begränsat oss till kortare problem om cirka 50 minuter. Hade vi haft mer tid och möjlighet hade vi troligtvis även velat testa längre, mer projektliknande problem. Eftersom nästan hela projektgruppen tidigare läst kursen *Mathematical modelling and problem solving* [32] där man fick veckovisa problem, samt ett längre projekt som sträckte sig över merparten av kursen, så är vi också medvetna om vikten av att reflektera kring problem över en längre tid. Detta gör det möjligt att få en djupare förståelse för något än om man begränsar problemet till en enda lektion.

I enkäten uttrycktes att det är ett problem att hitta uppgifter, samt att hinna planera problemlösningslektioner. Niklas uttryckte även i sin intervju 5.2 att han till viss del saknade hjälp på *hur* problemlösning ska läras ut. Utifrån detta känns det som ett utmärkt komplement till matematikboken att kunna ta del av kompletta lektionsplaneringar med problemlösning. I samband med problemen har vi därför valt att vara så utförliga som möjligt med instruktioner och förslag på utförande samt innehåll. Samtidigt har vi försökt understryka att de ska känna att de får styra innehållet utefter vad de anser passar bäst för sina egna klasser. Problemet ”Försvåra en ekvation” skapades också för att kännas mest som en lek, och därmed kunna användas i en klass som inte sedan tidigare är vana vid att arbeta med problemlösning.

10.3 Reflektioner kring de färdiga problemen

I avsnitt 4.3 presenterades PBL. De problem som skapades i detta arbete ger förutsättningar för en likartad undervisningsmetod. Med det menar vi att problemen vi har utvecklat är utformade med idén att eleverna i första hand ska jobba med problemen för att sedan stöta på matematiska teorier under arbetets gång.

I avsnitt 6.1 nämndes de viktigaste faktorerna som vi har försökt inkludera i problemen. Som tidigare nämnts appliceras dock inte alla dessa faktorer på samtliga problem, eftersom vi till exempel inte anser att alla problem behöver ha verklighetsanknytning. Den enligt oss viktigaste av dessa faktorer är att eleverna använder ett *undersökande arbetssätt*, vilket vi anser att vi

har inkluderat i samtliga av våra problem. I de flesta problemen lägger detta grunden för att lösa de givna frågeställningarna medan det i problemet med den matematiska modellen, som presenteras i avsnitt 7.5, snarare dyker upp i den avslutande diskussionen. I samma problem tas även begreppet *matematisk modell* in. Eleverna får här upptäcka hur matematiska modeller kan användas och även reflektera över dess begränsningar.

Om man tittar på "Fermiproblem" (7.1), "Flygplan" (7.2), "Fritt fall" (7.3), "Matematisk modell för bil och löpare" (7.5) och "Personnummer" (7.12) finns där också en mycket tydlig *verklighetsanknytning*. Problemen vid namn "Sortering av kortlek", (7.6) "Sorteringsalgoritmer" (7.7) och "Skapa ett chiffer" (7.13) har också en förankring i verkligheten även om denna är någon mindre tydligt än för ovanstående exempel. I dessa problem har vi dock inkluderat information om hur de används i verkligheten, och uppmuntrar även läraren till att berätta om detta. Övriga problem är något mer abstrakta.

Problemen 7.7 till och med 7.13 är problem som är tänkta att framför allt förbereda elever för grundläggande koncept inom *programmering*. Vi skriver i avsnitt 4.8 om att programmering framöver kommer att ingå i kursplanen för gymnasie matematik, vilket gör det väldigt relevant att utforma problem som även ska testa programmeringskunskaper, samtidigt som många av dem även har en tydlig matematisk koppling. I problemet "Sortera en kortlek" (7.6) finns programmeringen också med, om än något i bakgrunden. Här får eleverna testa på att tänka som en dator, och även ge varandra instruktioner på liknande form som man skulle göra i en programkod. På så sätt är detta tänkt som en bra introduktion innan man börjar med programmeringssyntax i ett specifikt språk.

Läraren Niklas Grips tankar om våra prototyper (5.2.2) var dels stärkande då han bekräftade våra idéer. Samt att hans förbättringsförslag till vad som senare skulle bli "Sortera en kortlek" (7.6) var vägledande till för utvecklingen utav det problemet och utan Niklas hade det inte blivit lika bra i slutändan.

10.4 Reflektioner kring testresultaten

Detta avsnitt diskuterar testresultaten, dels utifrån hur enkätsvaren kan tolkas och dels den metod som användes, vilka konsekvenser det ger och tankar kring andra metoder som skulle ha kunnat användas.

10.4.1 Våra generella tankar kring resultatet

Totalt sett är vi väldigt nöjda med de resultat vi fått om utvärdering av problemen. Dels eftersom utvärderingen visade anser att eleverna i allmänhet var nöjda, men kanske framförallt för att lärarna var det. Våra undersökningar visade att det fanns ett behov av hjälp med planering av problem-

lösningslektioner och de lärare som testade problemen tyckte att de var bra och att de presenterades på ett tydligt sätt som gjort det lätt för dem att snabbt sätta sig in i hur det skulle utföras. Denna åsikt speglades även av de flesta av de lärare som anmält intresse med som sedan tackade nej på grund av tidsbrist.

10.4.2 Fermiproblem

När det gäller bemötandet av problemet "Fermiproblem" (7.1) verkade de olika frågeställningarna engagera eleverna, och få dem att reflektera över rimligheten i ett svar. Vi tror även att möjligheten att välja uppgift gav dem en känsla av äganderätt till problemet, vilket enligt avsnitt 4.7 är viktigt för inläringen. Det var också roligt att höra att planeringen utvidgades genom att läraren berättade om Fermis intressanta liv, samt att eleverna hittade information om Fermiparadoxen på nätet och började diskutera detta.

Både läraren och de flesta elever har angett att problemet var lärorikt. En elev tyckte att det var för lite given data, vilket tyvärr tyder på att eleven missuppfattat vad som skulle göras. Del av målet med uppgiften var att man skulle träna på att uppskatta värden och inse att det går att göra en bra approximation av ett komplicerat svar utan givna data. Detta kan vara något vi behöver vara tydligare med i informationen till problemet, för att öka chansen att läraren verkligen trycker på detta i samband med att problemet presenteras för eleverna. En elev angav att det var svårt för att det blev många uträkningar, så vi ska förtydliga i uppgiften att man bör låta eleverna använda miniräknare till detta, eftersom svåra uträkningar knappast bidrar till att eleverna uppnår målen med problemet.

Det var fantastiskt roligt att läsa lärdomar som att "hur enkel matte kan användas för att lösa problem och ur uppdelning kan förenkla", eftersom detta visar att vi i alla fall till viss del uppnått det vi ville med uppgiften. Andra elever angav att de lärt sig om vad ett fermiproblem är eller hur många hjärtslag ett hjärta slår. Dessa lärdomar speglar inte våra mål med problemet på samma sätt, men vi hoppas att dessa elever ändå kan komma ihåg det här i framtiden. Även om de kanske inte kommer lägga sina exakta svar på minnet kanske de kommer ihåg att de räknat ut något som de tyckte var häftigt, och kanske kommer de även kunna komma ihåg ungefär hur de gjorde.

10.4.3 Försvåring av en ekvation

Klassen som testade "Försvåring av en ekvation", vars enkätsvar presenteras i avsnitt 9.2.3, tyckte att det var roligt att försvåra ekvationen, men hade svårigheter med prioriteringsreglerna. Vi hade redan varnat för detta i informationen som hörde till problemet, men kanske borde detta förtydligas ytterligare. Förhoppningsvis tillförde det också en ytterligare faktor,

eftersom eleverna även fick träna på och lära sig mer om detta. Läraren säger också att han upplevde att problemet gav eleverna en djupare förståelse för ekvationer.

De svar vi fick in var också spridda i den mening att vissa tyckte att problemet var svårt, lätt eller lagom. Vi antar att detta beror på att de hade svårt med prioriteringslagarna, eftersom problemet för övrigt är tänkt att kunna anpassas till varje elevs individuella nivå. Detta genom att eleverna själva får välja vilka medel och matematiska operationer de ska använda för att försvåra ekvationen. En elev angav också att lektionen blev väldigt rörig. Till viss del är vi glada att lektionen frångick den tysta matematiklektionen utan diskussioner, eftersom det verkar som att det här blev en lektion som gav mer liv och frihet till matematiken. Däremot är det självklart synd att det gick så långt att någon tyckte att det var jobbigt.

10.4.4 Matematisk modell för bil och löpare

Avsnitt 7.5 presenterar resultatet för ”Matematisk modell för bil och löpare”. Detta problem testades av två olika lärare, varav tyvärr bara en klass svarade på enkäten. Den ena läraren ansåg att den matematiska delen av problemet var för lätt. Vi kan hålla med om denna åsikt, eftersom tanken med dessa inledande uppgifter främst var att ge ett underlag för diskussionen om matematiska modeller och vilka fördelar och brister det finns att tänka på innan man använder dem. Läraren har också skrivit att hen tyckte att denna diskussion var väldigt givande. Den andra läraren var väldigt nöjd med hela problemet, och svårigheten i den klassen var att omvandla mellan enheterna m, km och mil. Det är tråkigt att se att detta är en såpass stor svårighet på gymnasiet, men vi hoppas att problemet i så fall gav en tankeställare om att dessa grundläggande kunskaper är viktiga.

Båda lärarna valde också att utveckla problemet genom att skissa varsin graf. För den klassen som hade relativt svårt med den matematiska delen av problemet skissades den linjära modellen, och den klass som tyckte att uppgiften varit lätt gjorde istället ett gemensamt försök att skissa den verkliga modellen för löparen. På så sätt anpassade varje lärare problemet efter klassens nivå, vilket vi tror var mycket bra. Båda lärarna tror att det som eleverna framförallt tog med sig från lektionen var att man måste fundera över rimligheten i sina svar och metoder, vilket var precis det vi ville få fram med problemet.

De flesta av eleverna, närmare bestämt 75%, tyckte att de lärt sig något av uppgiften och att det var bra att få ”jämföra med verkligheten och tänka på rimligheten och relevansen”. Detta var roligt att höra, eftersom detta var vad vi framförallt ville att eleverna skulle få ut av uppgiften. En av de som angett att hen inte lärde sig något sa även att det berodde på att hen genomförde uppgifterna på enklast möjliga sätt och att det hade blivit svårare om hen hade funderat på relevansen. Detta tyder på att eleven faktiskt ändå

lärde sig något. Kanske har eleven inte tagit den efterföljande diskussionen i åtanke när hen svarade på enkäten, utan enbart själva beräkningsuppgifterna.

10.4.5 Programmeringsproblemen

I avsnitt 9.2.5 sammanfattas responsen från testningen av programmeringsproblemen, varav de som testades fick väldigt god respons. Det framgick också att Niklas trodde att vissa elever hade tyckt att problemen var svåra och hade behövt arbeta i grupp för att kunna klara att lösa dem. Detta är dock inte nödvändigtvis något negativt, utan rentav bra, se avsnitt 4.4. Niklas valde dock här att frågå vårt förslag om grupparbete och istället ge dessa problem till högrepresterande elever som arbetade enskilt. Hur som helst så framgick det att problemen var väldigt passande för de som sökte lite mer avancerat material, men att Niklas tror att det skulle ha varit utvecklande även för andra elever, så länge de fått jobba i par.

Eventuellt vore det även önskvärt att dessa problem skulle kunna anpassas i svårighetsgrad. Alternativt skulle man kunna tillhandahålla kodskal som är delvist implementerade, eller helt enkelt ge ledtrådar som hjälper eleven på vägen till en lösning. Detta material skulle på så sätt kunna fylla en roll som en lärare som är oerfaren inom programmering inte klarar, vilket kan bli ett problem när programmering förhållandevis hastigt ska inkluderas i undervisningen. Risken med detta är dock att man på det här sättet utarmar problemet en aning och att eleven inte får samma insikter och lärdomar, eftersom det är omöjligt att få samma lyhördhet som från en bra lärare som kan lyssna in eleverna och ställa lämpliga och vägledande frågor. Dessa problem behöver alltså en hel del mer arbete om de ska kunna användas av lärare utan programmeringskunskaper. Men kanske är det som sagt även tillräckligt att eleverna arbetar i par och får fundera och diskutera tillsammans.

10.5 För- och nackdelar med den testmetod som användes

Som nämnts i avsnitt 9.1 valdes lärarna som fick testa problemen ut genom att de fick anmäla intresse via den bakgrundsenkät som skickades ut via en facebookgrupp för matematikundervisning. Tänkbara följder av detta diskuterades ovan i avsnitt 10.1. Till skillnad från bakgrundsenkäten, till vilken vi fick många svar, var det här totalt fem lärare som testade något av våra problem. Detta gör tyvärr att resultatet inte kan anses statistiskt tillförlitligt, speciellt i de fall då det var mycket få elever som svarade på enkäten. Vi har inte heller någon information om hur många elever som verkligen deltog i varje problem, utan enbart hur många som svarade på enkäten. Trots denna osäkerhet har vi ändå valt att diskutera de svar vi har fått, och hur vi tolkar dem.

En nackdel med den metod som användes är att vi inte haft någon möjlighet, utöver korta frågor på enkäten, att kontrollera hur problemet genomfördes. Lärarna har som tidigare nämnt även haft relativt fria tyglar att förmedla uppgifterna på det sätt de fann lämpliga. En annan tänkbar metod för genomförandet hade varit att vi hade medverkat under lektionerna och deltagit aktivt i utförandet av varje problem. Vi hade då kunnat forma utförandet till en mycket högre grad och eventuellt till och med kunnat testa uppgifterna på precis samma sätt med många olika klasser. Datan vi sedan hade samlat in hade därmed varit mer kvalitativ, eftersom vi hade varit konsekventa med tillvägagångssättet vi testade uppgifterna på. Vi hade även kunnat kontrollera att alla elever svarade på enkäten. En medelväg hade kunnat vara att delta på lektioner när lärarna testade problemen. Detta hade nog varit det mest optimala alternativet då vi hade haft möjlighet att se lärarna arbeta i sin naturliga miljö. Vi hade även kunnat jämföra hur olika lärare testar problemen för att se för- och nackdelar. Detta hade sedan kunnat användas till att bland annat förbättra den övriga informationen som var avsedd till lärarna angående undervisningsmetodikerna gällande våra uppgifter.

Nackdelen med förslagen ovan är att de hade krävt mer organisation mellan oss och lärarna. Inget av dem hade heller löst det huvudsakliga problemet att det var få lärare som hade möjligheten att testa ett problem. Fördelen med den valda metoden jämfört med dessa är även att utförandet nu efterliknande hur vi hoppas att problemen ska användas efter projektets slut. Det vill säga att lärarna ska kunna hitta problemen på vår webbplats, använda givna instruktioner och information till den grad de anser lämpligt och sedan kunna genomföra problemet.

10.6 Vad är viktigt i matematiken?

Något som vi inte har undersökt i det här projektet är att uppskatta *hur stor del* av undervisningen som bör läggas på problemlösning. Som vi nämnde i avsnitt 4.3 så krävs det grundläggande kunskap för att kunna tänka som en expert, och det enda sättet att få den grundkunskapen är genom repetition. Detta belyser att det även finns ett behov av vanlig mekanisk räkning. Vi vill därför förtydliga att vi inte förespråkar att man fullständigt bör ersätta dagens matematik med problemlösning. Det vi vill få fram av den här rapporten är att problemlösning kan användas för att ge eleverna en djupare förståelse för de matematiska teorier som de lär sig. Det har visat sig att detta i många fall inte appliceras så mycket som Skolverket och lärarna önskar.

Enligt bakgrundsenkäten som finns under avsnitt 5.1, så är det största hindret mot att införa mer problemlösning i undervisningen olika typer av tidsbrist. Det blev även märkbart i praktiken när sexton av tjugo lärare som hade anmält intresse att genomföra problemen avböjde på grund av tidsbrist

i samband med de nationella proven. Detta stärkte våra farhågor att alltför mycket vikt läggs vid de nationella proven och det som testas där.

I enkäten framkom bland annat åsikter om problemlösning baserad undervisning. De flesta av lärarna vet om att det är bra och viktigt för inläringen, men tycker att det tar mer tid från själva lektionerna. Dessutom angav de att det tar längre tid att planera än att låta eleverna räkna färdiga uppgifter från boken. Det här anges som tid man inte har efter att allt övrigt material har gått igenom, för att eleverna ska kunna prestera på nationella provet. Och självklart är matematikens grundläggande teori viktig, men vad betyder den om man aldrig får träna på att använda den? Vi anser att vissa delar av kraven i de olika kurserna borde nedprioriteras, och att problemlösning bör få en tydligare roll i undervisningen av matematik.

Idag är problemlösning något som till alltför stor del lämnas som extrauppgifter till de elever som har fallenhet för matematik, men vi anser att det är andra delar av matematiken som kan hanteras på detta sätt. Att man bör utforska matematiken med problemlösning som främsta verktyg, och låta eleverna själva upptäcka de begrepp och metoder som då dyker upp. Och de delar av matematiken som inte går att hitta på ett rimligt problem om, antingen hörande till nutida eller dåtida behov eller intressen, kanske helt enkelt inte kan vara så centrala i alla fall. Vårt mål är därför att underlätta för lärare att inkludera mer problemlösning i sin undervisning. På så sätt hoppas vi att problemlösning på sikt kan ta sin roll som det huvudsakliga verktyget för att låta eleverna undersöka och upptäcka matematiken, för att i samband med undervisningen själva skapa sig en känsla för hur viktig och användbar matematiken verkligen är.

10.7 Hur vi kan påverka

I 5.1.3 så framgår det att många lärare påpekar att de anser att problemlösning är viktigt. Samtidigt känner de att de inte kan arbeta med det till den grad de skulle vilja på grund av tidsbrist, både på och inför lektionerna, och för att de inte vet hur man skulle göra det på ett bra sätt. De tyckte bland annat att det var svårt att hitta bra problem som är utmanande för hela klassen.

Med den fullständiga lektionsplanering som följer med hoppas vi kunna avlasta lärarna från en del av det förberedande arbete som krävs för att genomföra en problemlösningsslektion, och därmed förbättra deras arbetssituation. Med den brist på lärare som råder idag är det viktigt ur ett samhällsperspektiv att spara på de resurser vi har, för att kunna utnyttja deras fulla potential genom att de får finnas till hands och handleda problemlösningen. Bristen av ren lektionstid är svårt för oss att påverka, men dels har vi även tryckt på den bevisade nyttan av problemlösning och dels hoppas vi som sagt att detta ska hjälpa med en del av de nuvarande faktorer som motverkar mer problemlösning i undervisningen.

Även om man arbetar hårt för att ändra matematikundervisningen, och utvecklingen enligt oss är på väg åt rätt håll, så tror vi att det finns mer som kan göras för att hjälpa den på traven. Vi vill därför genom det här arbetet bidra till att hjälpa lärarna att få eleverna att gå från att beskriva matematiken som "tråkig" och "onödig" och istället börja använda ord som "rolig", "spännande" och "användar". Kanske till och med "kreativ".

Referenser

- [1] N.G. Ignacio, L.J.B.N.a.E.G. Barona, The Affective Domain in Mathematics Learning,"i *IEJME-Mathematics Education*. [Online]. Tillgänglig: <http://iejme.com/makale/70>. Hämtad: 5 apr 2017.
- [2] Skolverket, "Lusten att lära : med fokus på matematik : nationella kvalitetsgranskningar 2001-2002", Skolverket, Stockholm, Skolverkets rapport, 1103-2421 ; 221, 2003
- [3] "Compare your country - PISA 2015," Compare your country by OECD. [Online]. Tillgänglig: <http://www.compareyourcountry.org/pisa/country/SWE>. Hämtad: Feb. 10, 2017.
- [4] E. Silver, M. Smith, "Samtalsmiljöer," *Nämnamnaren*, nr. 1, ss. 55-59, feb. 2015. [Online]. Tillgänglig: http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/5559_15_1.pdf. Hämtad: 4 Apr., 2017
- [5] E. Berggren, Traditionell skolmatematik: En studie av undervisning och lärande under en matematiklektion,"examensarbete, Institutionen för datavetenskap, fysik och matematik, Linnéuniversitetet, Växjö, Sverige, 2010. [Online]. Tillgänglig: <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:337889/FULLTEXT01.pdf>. Hämtad: 7 mars, 2017.
- [6] J. Boaler, "The Elephant in the Classroom: Helping Children Learn and Love Maths," London, England: Souvenir Press Ltd, 2010.
- [7] K. Johansson, "Problemlösning i matematik på gymnasiet," examensarbete, Pedagogutbildningarna, Luleå Tekniska Universitet, Luleå, Sverige, 2003. [Online]. Tillgänglig: <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1016004/FULLTEXT01.pdf>. Hämtad 5 Apr., 2017.
- [8] Skolverket, "Jämförelse med kursplan 2000," 2011. [Online]. Tillgänglig: <https://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat>. Hämtad: Apr. 11, 2017.
- [9] Skolverket, "Matematiklyftet," *Skolverket.se*, 2017. [Online]. Tillgänglig: <https://www.skolverket.se/kompetens-och-fortbildning/larare/matematiklyftet>. Hämtad: 1 maj, 2017.
- [10] "Senare matematik i gymnasieskolan (matematik 3c)," Startsidan - Skolinspektionen. [Online]. Tillgänglig: <https://www.skolinspektionen.se/globalassets/publikationssok/granskningsrapporter/kvalitetsgranskningar/2016/matematik-3c/senare-matematik-i-gymnasieskolan-matematik-3c-170203.pdf>. Hämtad: 10 Feb, 2017.

- [11] Regeringskansliet, "Stärkt digital kompetens i läroplaner och kursplaner," *regeringen.se* 2017. [Online]. Tillgänglig: <http://www.regeringen.se/pressmeddelanden/2017/03/starkt-digital-kompetens-i-laroplaner-och-kursplaner/>. Hämtad: Apr. 11, 2017.
- [12] M. Halápi, K.L. Rüter, "Redovisning av uppdraget om att föreslå nationella IT-strategier för skolväsendet", Skolverket, https://www.skolverket.se/om-skolverket/publikationer/visa-enskild-publikation?_xurl_=http%3A%2F%2Fwww5.skolverket.se%2Fwtpub%2Fws%2Fskolbok%2Fwtpubext%2Ftrycksak%2Fblob%2Fpdf3647.pdf%3Fk%3D3647
- [13] Skolverket, "Tydligare om digital kompetens i läroplaner, kursplaner och ämnesplaner", 2017. [Online]. Tillgänglig: <https://www.skolverket.se/skolutveckling/resurser-for-larande/itiskolan/styrdokument>. Hämtad: Apr. 11, 2017.
- [14] E. Leijnse, "Så har det gått för Sverige i Pisa", december 2016. [Online], <http://www.sydsvenskan.se/2016-12-04/sa-har-det-gatt-for-sverige-i-pisa>. [Hämtad: Maj 10, 2017]
- [15] H. Thunberg, et al. "Gymnasiets mål och högskolans förväntningar", *Nämnamn*, no. 2, pp. 10-15, 2006.
- [16] Alfredsson L, Bråting, K, Erixon P, Heikne H., *Matematik 5000 - Kurs 1c Blå lärobok*, Stockholm, Sverige, Natur & Kultur, 2011.
- [17] E. Bergqvist, T. Bergqvist, "Intentions with and Interpretations of the Concept of Problem", [Online]. Matematikdidaktiska Forskningsseminariet, Jan. 2012. <http://www.mai.liu.se/SMDF/madif8/Bergqvist%26Bergqvist.pdf>. Hämtad: 4 maj, 2017.
- [18] Skolverket, "Om ämnet Matematik" 2011. [Online]. Tillgänglig: <https://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:u6xMQy4vk8kJ:https://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat/comment.pdf%3FsubjectCode%3DMAT%26commentCode%3DALL%26lang%3Dsv+&cd=3&hl=sv&ct=clnk&gl=se>. Hämtad: Maj 04, 2017.
- [19] "Matematik," *Ämne - Matematik*, Skolverket. [Online]. Tillgänglig: <https://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat/subject.pdf?subjectCode=MAT&tos=gy&lang=sv>. Hämtad: 12 maj, 2017.
- [20] G. Polya, "How to Solve It : a New Aspect of Mathematical Method. Princeton University Press", 1948.

- [21] H. S. Barrows, "Problem-Based, Self-directed Learning," JAMA J. Am. Med. Assoc., vol. 250, no. 22, pp. 3077–3080, 1983.
- [22] W. Hung, D. H. Jonassen, and R. Liu, "Problem-Based Learning," Handb. Res. Educ. Commun. Technol., pp. 485–506, 2008.
- [23] H. Gunnarsson, "Styrkor och svagheter med problembaserat lärande-en metastudie," 2012.
- [24] D. Wedelin and T. Adawi, "Teaching Mathematical Modelling and Problem Solving - A Cognitive Apprenticeship Approach to Mathematics and Engineering Education," International Journal of Engineering Pedagogy (iJEP), vol. 4, no. 5, p. 49, Mar. 2014.
- [25] D. Willingham, "Why Don't Students Like School? - A cognitive scientist answers questions about how the mind works and what it means for your classroom" San Fransisco, Jossey-Bass, 2009.
- [26] Hagland, K., Hedrén, R. and Taflin, E., *Rika matematiska problem - inspiration till variation*, Malmö, Sverige, Elanders Berlings AB, 2005.
- [27] P. Lockhart, "A mathematician's lament". New York: Bellevue Literary Press, 2009.
- [28] K. Fredriksson, "Matematikundervisning via problemlösning : En litteraturstudie om lärandefaktorer som kan påverkas av matematikundervisning via problemlösning," 2014.
- [29] Pixabay, Clker-Free-Vector-Images, Sverige karta land Europa. 2012 [Online]. Tillgänglig: <https://pixabay.com/sv/sverige-karta-land-europa-23576/>:<https://pixabay.com/sv/sverige-karta-land-europa-23576/> Hämtad: Maj 08, 2017.
- [30] "pi - Uppslagsverk - NE." [Online]. Tillgänglig: <http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/lång/pi>. Hämtad: Maj 08, 2017.
- [31] "modulus 10 - Uppslagsverk - NE." [Online]. Tillgänglig: <http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/lång/modulus-10>. Hämtad: Apr. 25, 2017.
- [32] "Course PM." [Online]. Tillgänglig: <http://www.cse.chalmers.se/edu/year/2010/course/DAT026/CoursePM/index.html>. Hämtad: Apr. 27, 2017.

A Information till lärare

Allmän information

Våra problem är tänkta att genomföras i tre huvudsakliga steg:

Introduktion

Genomförande

Diskussion

Tanken är att lyfta fram ett lite mer undersökande närmande till matematik. Vikten ligger alltså inte i allmänhet i svaren, utan mer i processen och diskussionen.

Som hjälp till er har vi skissat ut ett förslag på hur lektionen skulle kunna genomföras, samt skrivit ett antal frågor som man skulle kunna diskutera, och ibland vilka eventuella svar som man hoppas få ut. Förhoppningen är att klassen i så stor utsträckning som möjligt själva ska föra diskussionen framåt.

Att agera handledare för problemlösning är på många sätt en stor utmaning. Dels kan man omöjligen veta allt, och därför riskerar man att få frågor som man inte kan svara på. Det är då helt ok att erkänna att man inte vet, och kanske kan det leda till en intressant diskussion? Det är också bra om du som lärare försöker reagera positivt på alla typer av tankar och idéer. Om en elev kommer med ett förslag finns det med största sannolikhet en tanke bakom det, så det är viktigt att inte framställa något som fel.

Som extra hjälp kommer vi också att skicka med Google-presentationer till vissa problem. Dessa är helt frivilliga att använda, och man får även ändra i dem om man vill. Tanken är helt enkelt att det ska bli smidigare för dig som lärare, och att du inte ska behöva lägga tid på detta om du inte själv vill.

I allmänhet rekommenderar vi att introduktionen görs i helklass, och att problemet därefter genomförs i grupper om två (en grupp med tre vid behov). Därefter kan det vara bra att låta eleverna gå ihop i lite större grupper, och presentera sitt arbete och/eller diskutera hur de har tänkt för varandra. Den avslutande diskussionen rekommenderar vi att man gör i helklass.

I vissa fall anger vi tidsbegränsningar för vissa delar av lektionsplaneringen. De är då tänkta som förslag, och får anpassas till varje klass och situation. Vi rekommenderar att man inte lägger alltför mycket tid och energi på själva problemen, utan snarare satsar på en bra diskussion kring dem. Det är alltså ok om några inte riktigt hunnit klart, så länge de har försökt kommer de förhoppningsvis ändå få nytta av diskussionen.

Tanken är att lektionsupplägget ska genomföras på ungefär 50 minuter, så att klassen därefter kan spendera tio minuter på att svara på vår reflekterande enkät. Vi tror att det är dumt att dra ner på denna tid alltför mycket, men det går självklart att ägna mer tid åt problemet om man har möjlighet. På flera av problemen har vi även förslag på eventuella vidareutvecklingar och fördjupningar.

B Den fullständiga versionen av problemen

B.1 Fermiproblem

Fermiproblem

Information till läraren

Mål med problemet

Att eleverna ska få träna på att göra uppskattningar samt på att bryta ner ett problem i mindre delar, och inse värdet av denna typ av beräkningar. Tanken med dessa typer av problem är att elever ska modellera problemet genom att resonera sig fram till vilka faktorer man ska ta ställning till, göra en rimlighetsanalys och sedan komma fram till en kvalificerad slutsats/gissning där det nödvändigtvis inte ens finns ett rätt svar.

Förkunskaper

Inga speciella förkunskaper krävs.

Övergripande upplägg

Introduktion

Presentation av problemet samt exempel. Eleverna får en lista av olika Fermiproblem att välja mellan.

Genomförande

Grupper om 2 (alternativt 3 i en grupp). Eleverna kan först göra en ren gissning på svaret (det är ok om detta inte stämmer alls). Därefter ska problemet brytas ner i mindre delar, och resultatet beräknas. Lösningen ska skrivas ner. Förslag på tidsbegränsning ca 20 minuter.

Diskussion

Presentation i större grupper:

Grupperna går ihop två och två (tre om det behövs) och presenterar sina lösningar och resultat för varandra.

Diskussion i helklass:

- Vad tror ni om ert resultat? Känns det rimligt?
- Hur gick det med att komma fram till lämpliga faktorer (delar) att bryta ner ert problem i?
- Är den här typen av lösningsmetod praktisk och användbar i verkligheten?
- Blev det lättare att uppskatta de mindre delarna var för sig än att gissa på hela från början?
- Varför fungerar den här typen av beräkningar (i alla fall ungefärligt)? Varför ska man gissa så många saker som möjligt?
 - *Då har man troligen gissat för stort ibland och för litet ibland, och på så sätt jämnar det ut sig så att svaret blir bra.*

Ytterligare information

Förslag på hur man kan introducera fermiproblem för klassen

Ofta kan det vara intressant att uppskatta något. Kanske är det något som inte går alternativt är väldigt dyrt att testa eller mäta direkt. Det mest berömda exemplet är "Hur många pianostämmare finns det i Chicago?". Det kanske inte är så lätt att ta reda på, men då kan man göra en ganska bra uppskattning. Denna typ av problem kallas Fermiproblem. Man delar då upp problemet i många små delar, som var och en är lite lättare att uppskatta. T.ex.

- Hur många personer bor det i Chicago?
- Hur stor andel av dem har ett piano?
- Hur ofta stämmer man i snitt ett piano? *Vissa kanske gör det ofta, andra mycket sällan eller aldrig.*
- Hur lång tid tar det att stämma ett piano?
- Hur många arbetstimmar per pianostämmare?

Man ska göra så många uppskattningar som möjligt, och sedan räkna ihop detta till ett slutgiltigt resultat.

Nu ska ni få testa på att lösa såna här typer av problem. Här är en lista som ni kan välja ifrån. Denna lista finns även i bifogad Google-presentation.

Förslag på olika typer av Fermiproblem

1. Hur många iPhones säljs det i Sverige på ett år?
2. Hur många personer kommer du uppskattningsvis att korsa väg med under en dag? (Egen definition av att "korsa väg")
3. Hur stor blir den sammanlagda arean av alla löv i Göteborgs innerstad (alternativt byt ut mot den egna staden)?
4. Hur mycket mjölk säljs i Sverige per år?
5. Hur många bilar passerar Gårdamotet varje dag (eller annat vältrafikerat mot)?
6. Hur många snapchats skickas varje dag från Sverige?
7. Hur många liter vatten använder ni i gruppen tillsammans varje vecka?
8. Hur många hjärtslag slår ett hjärta under en livstid?
9. Om alla väggar (inner- och ytterväggar) i er skola vore gjorda med tegelsten, hur många tegelstenar skulle det bli?
10. Hur mycket mindre skräp skulle det bli om det blev förbjudet att slänga matkassar av plast i Sverige? (Man får bestämma enhet själv, t.ex m^2 eller kg)
11. Om man beslutade att alla skolklasser maximalt skulle få innehålla 20 elever, hur mycket skulle det kosta att anställa de nya lärarna som krävs?
12. Om en allvarig influensa skulle spridas i Sverige, och alla behöver vaccineras av kvalificerad sjukvårdspersonal, hur snabbt skulle det kunna göras?

Förslag på utveckling

Detta upplägg är planerat för att kunna genomföras under en lektion, men en rolig utveckling skulle vara att ge eleverna mer tid att arbeta med problemet. Det skulle kunna göras genom att först låta eleverna börja med ett enklare fermiproblem på lektionen, och att de därefter får välja ett lite svårare att arbeta med hemma i grupper. Därefter kan de på lektionstid få diskutera sitt resultat och hur de har kommit fram till det.

B.2 Flygplan

Flygplan

Information till läraren:

Mål med problemet:

Problemet ska leda till ett undersökande arbetssätt, där man får titta på flera olika Lösingsstrategier, och även själv fundera på vilka faktorer som skulle kunna påverka. Man får även ta fram och lösa ett linjärt ekvationssystem.

Förkunskaper:

Eleverna bör känna till och ha arbetat med linjära ekvationssystem.

Övergripande upplägg

Introduktion

Problemet kan för att ge tid till reflektion presenteras med lite information i taget, där man för varje steg kan låta eleverna reflektera över vad bilden representerar samt vad frågeställningen skulle kunna vara. Detta görs förslagsvis i helklass.

Genomförande

Görs i grupper om två (eller tre i en grupp) och med en tidsbegränsning på förslagsvis 10 minuter.

Eleverna får reda på att de ska tänka sig att de driver ett företag, som kör de angivna sträckorna.

- Hur kan man flyga sträckan Visby-Karlstad? Går det att göra på flera sätt?
- Är några vägar bättre än andra? Vilka faktorer skulle kunna tänkas avgöra det?



Flygrutter:

Kiruna	-	Karlstad	(999 km)
		Visby	(1142 km)
Umeå	-	Karlstad	(610 km)
		Stockholm	(514 km)
Stockholm	-	Umeå	(514 km)
		Göteborg	(397 km)
		Visby	(189 km)
		Malmö	(514 km)
Karlstad	-	Kiruna	(999 km)
		Umeå	(610 km)
		Göteborg	(206 km)
Göteborg	-	Stockholm	(397 km)
		Karlstad	(206 km)
		Malmö	(243 km)
Visby	-	Kiruna	(1142 km)
		Stockholm	(189 km)
		Malmö	(395 km)
Malmö	-	Stockholm	(514 km)
		Göteborg	(243 km)
		Visby	(395 km)

Samma grupper, men nu får de även två givna bränslepriser:

Malmö-Visby: 11200 kr

Stockholm-Umeå: 13580 kr

De får även sträckorna mellan de olika städerna.

- Vilket sätt är billigast att köra mellan Visby och Karlstad?
- Antag att man vill ha en resa mellan Karlstad och Stockholm, men att sträckan Göteborg-Stockholm är fullbokad. Vilka andra vägar kan man ta? Vilken är billigast?

Här sätts förslagsvis en tidsbegränsning på ca 20 minuter.

Diskussion

- Vilka faktorer inverkar på bränslekostnaden? Vad kom ni fram till?
- Vad behöver man tänka på om man ska beräkna hur mycket man ska ta betalt för varje biljett mellan t.ex. Visby och Karlstad?
- Tror ni att man skulle tjäna på att lägga till ett extrainsatt flyg mellan Göteborg och Stockholm när det är fullsatt?
- Vad avgör vilken sträcka som är billigast? Det totala avståndet eller antalet mellanlandningar?

Ytterligare information

Förslag på introduktion:

Vi har även skickat med en Google-presentation som man kan använda om man vill.

Läraren visar en karta över Sverige med ett antal prickar utmarkerade.

- Vad tror ni att prickarna är för något?
- Vad skulle man kunna ställa för frågor utifrån den här bilden?

Läraren visar nästa bild, där stadsnamn är utplacerade. Eleverna får reda på att prickarna representerar några av de flygplatser som finns i Sverige.

- Vad skulle man kunna ställa för frågor nu? Vad kan man kunna vilja ta reda på?

Läraren går vidare med att visa en lista på vilka rutter som finns.

- Hur kan man ta sig från en stad till en annan? Finns det flera sätt?
- På vilka sätt kan man visa de möjliga rutterna?

Tankar kring lösningen

Eleverna får alltså två givna bränslepriser för vissa direkta sträckor och får lösa priserna med ett ekvationssystem. Tanken är här att man ska inse/gissa att det är ett pris för start landning (oberoende av sträcka) och ett pris per kilometer. Alternativt börjar man med att gissa att det enbart beror på sträckan, men inser att det inte blir samma kilometerpris och att man behöver en annan lösning. Med rätt ekvationssystem fås att priset per kilometer är 20 kr och att det fasta priset för start och landning är 3300 kr.

Tankar kring diskussionen

När det gäller priset per biljett kan man ju också tänka sig att det beror på fler faktorer än enbart bränslepris.

- Hur många biljetter säljs?
- Hur mycket kostar piloter och flygvärdinnor/flygvärdar?
- Behöver man betala flygskatt?
- Hur stor vinstmarginal vill/kan man ha?

Detta är bara några exempel man kan diskutera. Det finns alltså inget rätt svar på den här frågan, utan uppskattningen beror på hur man har hanterat de olika faktorerna.

En viktig skillnad mellan sträckorna Visby-Karlstad och Karlstad-Stockholm (utan sträckan Göteborg-Stockholm) är att i den senare delen av problemet blir påslaget för start och landning så stort att det blir billigare att flyga en längre sträcka, för att undvika en mellanlandning. Detta hoppas vi att eleverna ska reflektera över i den sista frågan, som alltså har svaret att "Det beror på".

Fritt fall

Information till läraren

Mål med problemet

Tanken med detta upplägg är att man istället för att utgå från en färdig ekvation, och derivera detta, får utgå från en verklig situation. Ofta lär man sig deriveringsreglerna, och utgår från derivatans definition, men förhoppningsvis ger detta en tydligare koppling och en djupare förståelse till vad derivata egentligen är.

Förkunskaper

Problemet kan användas antingen i samband med introduktion av begreppet derivata, eller till elever som redan kan derivata, och då som en fördjupning eller ett sätt att se på derivata på ett annat sätt.

Övergripande upplägg

Introduktion

Diskussion om derivata:

- Vad är derivata?
- Hur beräknar man en derivata? Vad behöver man? Finns det flera sätt?
 - Via en funktion, t.ex $f(x)=...$
 - Via en graf, rita tangenter och använd $\Delta y/\Delta x$

Presentera problemet:

Börja med en bild av en fallande boll. Bilden är hopsatt av flera bilder och visar bollens position med jämna tidsintervall. På bilden finns också markeringar så att man kan avgöra bollens höjd vid de olika tiderna. Vad kan man komma fram till om bollens hastighet och acceleration vid olika tider?

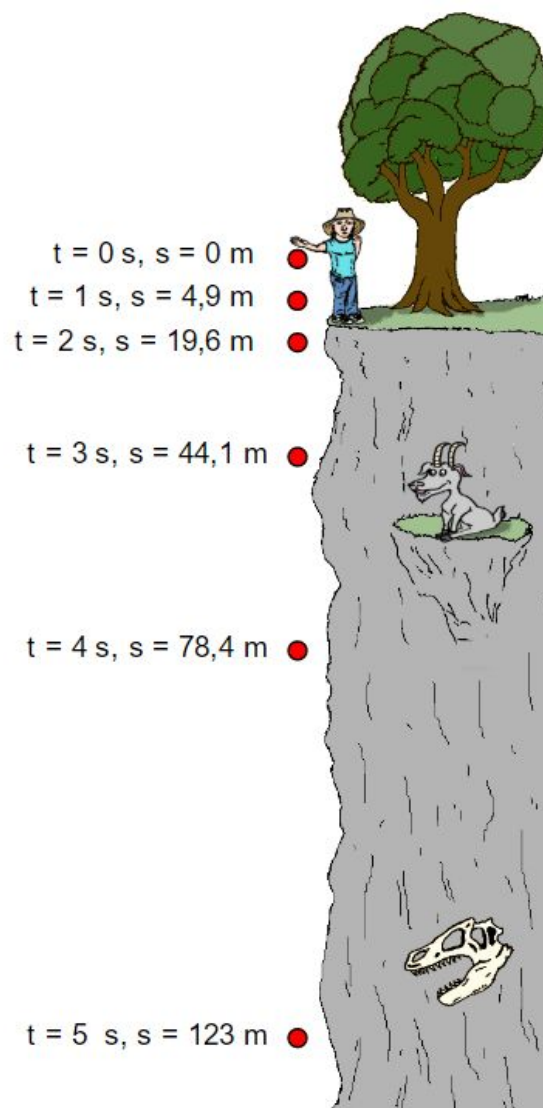
Genomförande

Problemet genomförs i grupper om två (alternativt 3 i en grupp) och förslagsvis med en tidsbegränsning av ca 20 minuter. Utifrån bilden kan man rita en s-t-graf, med punkter för bollens höjd för olika tider. Med hjälp av t.ex. en linjal kan man då uppskatta lutningen i de olika punkterna (alternativt genom att använda $\Delta y/\Delta x$ för de intilliggande punkterna). Detta kan ritas i en ny graf. Med samma procedur kan man därefter rita en graf för accelerationen.

Diskussion

I helklass:

- Vad blev resultatet?
- Blev svaret exakt?
- Vad hade man kunnat göra för att få ett bättre resultat?



Ytterligare information

Tankar bakom problemet:

Problemet är i grunden mycket klassisk, men förhoppningen är att lösningsmetoden ger en ny syn på derivata. Ofta får man ett uttryck som ska deriveras med hjälp av deriveringsreglerna, men det kan vara svårt att se hur man skulle få detta uttryck i ett verkligt problem. Här får man chansen att använda derivata på ett mer direkt sätt, och utifrån värden som känns som om man skulle kunna ta reda på själv.

Man kan därför också som lärare poängtera att detta går att göra själv, t.ex genom att ta en bildserie med kända tidsintervall och mäta på denna.

En annan viktig aspekt som man kan peka på är den historia som finns bakom problemet. Att fundera ut hur ett föremål faller har en gång varit ett verkligt problem, vilket kan vara roligt att tänka på i samband med att man genomför problemet.

Noggrannhet

Metoden bygger på att i flera steg uppskatta lutningen på en kurva genom att rita egna tangenter. Dessutom har man inte hela kurvan från början, utan endast givna punkter. Detta gör att det är väldigt svårt att få ett exakt resultat. Målet är dock att komma fram till att accelerationen ligger runt 10 (men du kan få kanske ± 5 eller mer). Med fler punkter hade man troligen fått ett något bättre resultat.

Förslag på vidareutveckling och variationer:

Man kan också utföra samma problem men utgå ifrån bilder av en bil, en löpare osv. Man skulle också kunna tänka sig att eleverna själva får ta bilder på när någon springer, eller att man t.ex gör det tillsammans i klassen genom att släppa en boll längst fram och ta bilder. Detta ger eleverna ytterligare känsla av att de äger problemet.

Man skulle också kunna lösa samma problem genom att anpassa en kurva efter punkterna (på en dator) och derivera denna två gånger för att få accelerationen.

B.4 Försvåring av en ekvation

Försvåring av ekvation

Information till läraren

Mål med problemet

Det här problemet är mycket fritt och ger eleverna chansen att undersöka matematiken. Det kan också användas som en introduktion till problemlösning, eftersom den leder fram till att ett stort problem kan delas in i flera små steg och på så sätt bli ett enklare problem, eller till och med en lösning.

Förhoppningen med problemet är att det ska ge en djupare förståelse om vad en ekvation innebär, nämligen att båda sidorna är lika, samt att man löser den genom att utföra samma operationer på båda sidorna. Även om ekvationer tas upp redan i högstadiet kan många ha nytta av att få den här chansen till djupare förståelse. Det kan även användas som en förklaring till varför additionsmetoden fungerar vid lösning av ekvationssystem.

Tanken med problemet är att eleverna ska få känslan av att de kan leka med matematiken och att det är de som har makten över matematiken, inte tvärtom.

Förkunskaper

Upplägget av problemet förutsätter att eleverna vet vad en ekvation är, och har arbetat med ekvationer tidigare. Därutöver krävs dock inga förkunskaper, utan problemet kan anpassas till den nivå som passar varje par av elever.

Övergripande upplägg

Introduktion

Man kan inleda med den diskussion om ekvationer i helklass

- Vad är en ekvation?
- Hur löser man en ekvation?
- Vilka operationer får man göra?

Genomförande

Eleverna får utgå från $x=2$. Elevernas uppgift är nu att i grupper om två (3 i en grupp om udda antal i klassen) arbeta vidare med ekvationen för att få den att se så "jobbig" ut som möjligt (där tolkningen av detta lämnas till eleverna). De får 10 minuter på sig.

För diskussionens skull rekommenderar vi att varje steg i "försvåringen" skrivs ner, t.ex enligt:

$$x = 2$$

$$2x = 4 \quad (\cdot 2 = \cdot 2)$$

$$2x + 5 = 7 + 2 \quad (+ 5 = + 3 + 2)$$

osv. Kommentarer inom parentes visar alltså vilken operation som utförts i varje steg.

Diskussion

Börja med att låta eleverna presentera, jämföra och diskutera sina slutgiltiga jobbiga ekvationer i lite större grupper.

Därefter kan man avsluta med en diskussion i helklass

- Går ekvationerna att lösa? Eller har de blivit för jobbiga?
- Hur gör man då för att lösa dem?
- Om vi nu skulle vilja göra den jobbigaste ekvationen någonsin, utifrån det vi har gjort nu, hur skulle vi göra?

Här kan även vara lämpligt att dra en parallell till additionsmetoden för lösning av ekvationssystem, om det är något klassen har kikat på. Detta eftersom den ju fungerar eftersom man lägger till samma sak på båda sidorna.

Ytterligare information

Tankar bakom problemet

Detta är ett mycket fritt problem. Dels eftersom ordet "jobbig" självklart kan definieras på olika sätt. Man kan då tänka sig att man kan addera, subtrahera, dividera, multiplicera eller upphöja med såväl siffror som fler x eller andra variabler. Med hjälp av t.ex kvadreringsregeln, konjugatregeln, trigg-ettan eller vad man nu kan tänka sig kan man därefter försvåra delar av uttrycket för att få det att se ännu värre ut. På så sätt kan man sluta på en ekvation som ser oerhört komplicerad ut, och som de flesta hade ansett omöjlig att lösa. Men har man gjort rätt har den alltså fortfarande lösningen $x=2$.

Tanken är att eleverna ska inse att något som ser ut som en väldigt avancerad ekvation egentligen bara är en lösning som någon har "krånglat till". Kanske kan det ta bort en del av den avskräckande känslan som riskerar att hindra någon från att ens försöka lösa ekvationen.

En viktig tanke med problemet är också att det bör kunna genomföras på liknande villkor för elever som har olika lätt eller svårt för algebra, eftersom eleverna själva väljer svårighetsgrad.

Diskussion om ekvationer

Det som här är viktigast att man kommer fram till är att man får göra vilka matematiska operationer som helst med en ekvation, bara man gör det på båda sidorna!

Man kan även poängtera att även om en operation inte nödvändigtvis leder närmare till lösningen, så behöver den inte vara fel. Har den genomförts korrekt på båda sidorna har man bara skapat en ny ekvation, men med SAMMA LÖSNING.

Genomförande

När eleverna arbetar med ekvationen är det bra om de i största möjliga mån får tänka själva inom sina grupper. Om några elever ändå ber om hjälp kan man dock t.ex tipsa om att man kan sätta in $x=2$ (eller vad man utgick ifrån, för att kontrollera att ekvationen fortfarande stämmer. Alternativt kan man bara poängtera att de verkligen har fria händer med ekvationen.

Tänkbara svar på den avslutande diskussionen

- Hur gör man då för att lösa dem?
 - Sätta in $x=2$ och prova! *Ett bra svar, eftersom det är ett sätt att kontrollera lösningen när man känner till den! Här kan man även poängtera att det ju kan gå att gissa sig fram till lösningen på en ekvation som man inte känner till*

lösningen för. Speciellt om man kommer fram till ett bra system och tar hjälp av en dator, som är bra på att göra många beräkningar snabbt.

- *Arbeta sig baklänges med samma metoder som vi använde för att skapa ekvationen. En mycket viktig iakttagelse, som man kan försöka leda fram till genom att be eleverna fundera på hur de har skapat ekvationerna. Det de har gjort är en baklänges lösning av en ekvation! Det de ska göra för att lösa ekvationen är alltså att börja bakifrån och därefter dividera där de har multiplicerat, addera där de har subtraherat osv. Lösningen till en jättejobbig ekvation kan alltså delas upp i små och förhållandevis enkla steg.*
- Om vi nu skulle vilja göra den jobbigaste ekvationen någonsin, utifrån det vi har gjort nu, hur skulle vi göra?
 - *Vi kan kombinera de ekvationer vi har. Målet här är att komma fram till att varje ekvation är en likhet. Därmed kan man t.ex ta VL och HL av en ekvation och addera eller multiplicera det på motsvarande led hos en annan. Detta är inte heller något ni kanske bör göra, men det kan vara roligt att inse att det går att utveckla i all oändlighet.*

B.5 Matematisk modell för bil och löpare

Matematisk modell för löpare och bil

Information till läraren

Mål med problemet

Att eleverna ska inse för- och nackdelar med matematiska modeller, samt få ett kritiskt tänkande kring dessa.

Förkunskaper

Inga förkunskaper över högstadienivå krävs. De båda deluppgifterna i problemet kan lösas genom att en hastighet tas fram från den givna sträckan och tiden, och därefter används för att beräkna tid för olika sträckor. Alternativt kan den lösas genom ren multiplikation av givna värden, t.ex $2 \text{ km} = 2 \cdot 1 \text{ km} \Rightarrow$ Dubbla tiden.

Övergripande upplägg

Introduktion

Presentera uppgifterna

1. Det tar Hanna 40 sekunder att köra 1 km med bil.
Hur lång tid tar det för Hanna att köra:
 - a. 2 km
 - b. 10 km
 - c. 20 km
 - d. 20 mil
2. Det tar Axel 11,5 sekunder att springa 100 m.
Hur lång tid tar det för Axel att springa:
 - a. 200 m
 - b. 400 m
 - c. 800 m
 - d. 1,5 mil

Genomförande:

Uppgifterna löses förslagsvis i grupper om 2 personer (en grupp med 3 om udda antal i klassen). Förslagsvis en tidsbegränsning på ca 10-15 minuter. Det är helt ok om man inte hinner med alla fallen.

Diskussion:

Presentera resultaten för att ha dem framför er när de diskuteras.

Diskutera i helklass:

- Vad gjorde ni för antaganden?
- Gjorde ni någon skillnad mellan de olika uppgifterna?
- Är svaren rimliga? Jämför mellan de olika uppgifterna. Vad är det som skiljer sig i de olika fallen?

Visa därefter denna information, och förklara att det är Axels verkliga tider för de olika sträckorna. Du kan även berätta att världsrekordet för den sista sträckan, 1,5 mil, är 41 min och 29 s.

Beroende på vad som dykt upp tidigare kan man diskutera varför det ser ut som det gör, alternativt konstatera att det stämmer med de faktorer man kom fram till.

- Vad ser vi för skillnader mellan detta och det man fick med den linjära modellen?
- Vad kan skillnaderna bero på?

Ytterligare information

Resultat

Resultaten som fås om man använder den linjära modellen. Det är dessa svar vi tror att många elever kommer få fram.

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------|
| 1a) 80 s = 1 min och 20 s | 2a) 23 s |
| 1b) 400 s = 6 min och 40 s | 2b) 46 s |
| 1c) 800 s = 13 min och 20 s | 2c) 92 s = 1 min 32 s |
| 1d) 8000 s = 2 h, 13 min och 20 s | 2d) 1725 s = 28 min och 45 s |

Samt Axels verkliga tider för de olika sträckorna

100 m:	11.5 s
200 m	22.5 s
400 m	48.5 s
800 m	1 min och 59 s
1.5 mil	55 min

Diskussion

Detta är de svar på frågorna som vi tror kommer dyka upp, även om det självklart även finns fler möjligheter.

- Vad gjorde ni för antaganden?
 - Att samma medelhastighet hölls oberoende av sträcka.
- Gjorde ni någon skillnad mellan de olika uppgifterna?
 - Många gjorde troligtvis inte det, utan ansåg att det var olika former av samma uppgift. Ofta har nämligen uppgifter presenterats på det här sättet i skolan, utan att ge utrymme för någon rimlighetsanalys.
- Är svaren rimliga? Jämför mellan de olika uppgifterna. Vad är det som skiljer sig i de olika fallen?
 - En löpare kan inte hålla samma hastighet oavsett sträcka
 - Det tar tid för acceleration
 - Hur mycket bränsle finns det i bilen? Kan den stanna och tanka? Hur lång tid tar det?
 - Kör bilen på samma typ av väg hela tiden? Eller finns det olika hastighetsbegränsningar?

Om eleverna har svårt att svara på sista frågan kan de få fler ledtrådar längre fram, av de verkliga tider som vi har för löparen Axel.

Sortera en kortlek

En introduktion till sorteringsalgoritmer

Information till läraren

Mål med problemet

Problemet går ut på att lära sig sorteringsalgoritmer specifikt, men målet är också att på ett övergripande plan förstå hur man kan ge instruktioner till en dator samt förstå begreppet algoritm och hur en sådan kan konstrueras.

Förkunskaper

Inga speciella förkunskaper krävs.

Material

I problemförslaget används ett antal kortlekar. Vi rekommenderar att man har en kortlek per 8 elever. De bör också sorteras i färg innan lektionen.

Bakgrund

Det är bra om du som lärare har en viss förkunskap om sorteringsalgoritmer. Vi skickar även med en kort text om detta.

Övergripande upplägg

Introduktion

Förklara vad en algoritm är.

- Vad tror ni att man kan använda sorteringsalgoritmer till?
- Vad för typer av kommandon tror ni att man kan ge till en dator när det gäller sortering?
- Vad krävs för att en lista ska kunna vara sorterbar?

Genomförande

I grupper om 2 (alternativt 3 i en grupp), förslagsvis med en tidsbegränsning på ca 15-20 minuter. Varje grupp får en färg utav en kortlek. Eleverna får nu i uppgift att sortera sina kort enligt följande regler (Vi skickar även med en Google-presentation med reglerna):

1. 10 kort placeras med baksidan uppåt.
2. Du får vända på två kort i taget, jämföra dem och om du vill byta plats på dem.
3. Du kan inte minnas vad för värde ett kort som du inte tittar på (dvs ett nedåtvänt kort) har, men du får hålla koll på om kortet är sorterat eller inte.

När du anser dig ha sorterat alla kort så får du vända på alla kort och kolla om du har gjort rätt.

När de kommit fram till en algoritm för att sortera korten så får de i uppgift att skriva ner de steg de gör. Därefter ska de byta sina instruktioner med en annan grupp och de ska kunna sortera sin kortlek genom att enbart följa instruktionerna.

Diskussion

Eleverna har nu alltså försökt att komma på egna sorteringsalgoritmer

- Fungerar de?
 - Om inte, vad gick fel?
- Hur gick det att följa instruktionerna? (Var det svårt/lätt?)
- Hur gick det att skriva instruktioner? (Var det svårt/lätt?)
- Hur kändes det att försöka tänka som datorer?

Ytterligare information

Bakgrund

Vi har konstruerat problemet så att du som lärare inte ska behöva några förkunskaper om sortering eller programmering. Istället har vi skrivit ihop en kort sammanfattning med allt du behöver veta innan du genomför problemet.

En dator kan inte som människor se vilket kort som är lägst genom att titta på alla korten samtidigt. Istället behöver den jämföra korten två och två, vilket vi här illustrerar med att man har korten med baksidan upp, och bara får titta på två kort i taget. Ett sätt att sortera korten är nu att titta på de två första korten, och byta plats på dem om de ligger i fel ordning. Därefter vänder man det andra och tredje kortet och gör samma sak, osv. På så sätt förflyttar du det största kortet längst ut till höger. Därefter upprepar du samma sak, men nu utan det sista kortet. På så sätt lägger du för varje upprepning, eller iteration, ett kort på rätt plats. Detta kallas "bubble sort".

Tanken är att eleverna själva ska få komma på sorteringsalgoritmer, så din uppgift är att presentera problemet och finnas som stöd. Eleverna får alltså vända på två kort i taget, titta på dem och eventuellt byta plats på dem (dessa regler ska efterlikna hur en dator fungerar. De skulle kunna sortera korten enligt det som nämns ovan, eller på ett annat sätt. Det viktiga är att det fungerar. Tanken är alltså INTE att man ska komma ihåg vart korten ligger, utan man ska se det som att det bara är de som man just då tittar på som man känner till. När man kommit på sin algoritm ska man försöka skriva ner de steg man gör, på ett sådant sätt att en annan grupp kan använda dessa instruktioner för att sortera sin kortlek. Instruktionerna ska alltså inte vara specifika för en viss ursprunglig blandning, utan fungera oberoende av startläge.

Ett tips för elever som tycker det är svårt kan vara att de kan utgå från hur de i vanliga fall skulle sortera en kortlek. När de kommit på det kan de försöka bryta ner detta i mindre steg som följer dessa regler.

Förslag på hur problemet kan presenteras

En algoritm är en process för att lösa ett specifikt problem bestående av flera steg som utförs efter varandra. Ett enkelt exempel kan vara att du rostar bröd genom att först stoppar ner brödet i brödrosten, sedan trycker du på start knappen och sist väntar du på att maskinen ska bli färdig. Sen tar du ut brödet och äter det.

En dator är väldigt bra på att utföra små enkla steg väldigt snabbt och därför är de väldigt bra på att lösa problem med hjälp av algoritmer. Problemet är att vi måste ge väldigt specifika instruktioner till datorn vad den ska göra, och sådana saker som vi anser vara väldigt enkla kan vara komplicerat att förklara för en dator.

I dagens lektion ska vi fokusera på en specifik typ av algoritmer, de så kallade sorteringsalgoritmerna. Som ni kanske hör på namnet används de för att sortera saker.

- Vad tror ni att man kan använda sorteringsalgoritmer till?
 - Sortera en lista av namn
 - Organisera en spellista för musik
 - Ranka resultat av en google sökning
 - Visa nyheter i kronologisk ordning
 - Hitta medianer
 - Hitta närmaste par
 - Sökning i en databas
 - Hitta dubbletter i en maillista
 - Komprimera data
 - Datorgrafik
- Vad för typer av kommandon tror ni att man kan ge till en dator när det gäller sortering?
 - Jämföra två kort.
 - Gå ett steg till höger/vänster.
 - Byta plats på två kort.
 - Minnas att den tittar på ett kort.
 - Säga till att den är färdig.
 - (Hålla koll på flera kortlekar/listor och flytta kort mellan dem.)
 - (Veta vilken position ett visst kort har i listan.)
- Vad krävs för att en lista ska vara sorteringsbar?
 - Elementen ska gå att jämföras med varandra

De sista två är för något mer avancerade algoritmer.

Förslag på fördjupning

- En idé på vidareutveckling är att de får leta reda på en eller flera existerande sorteringsalgoritmer, genom att till exempel använda wikipedia, och sedan skriva instruktioner för hur dessa skulle användas för att sortera en kortlek.
- Skriv ner hur många jämförelser som ni gör i era algoritmer. Försökt lista ut hur många som kommer göras i värsta fallet.

Sorteringsalgoritmer

Information till läraren

Mål med problemet

Att eleverna ska få lära sig övergripande teori om olika sorteringsalgoritmer och hur man kan implementera någon eller några av de mer vanliga sorterna.

Förkunskaper

Man bör känna sig bekväm med hantering av fält (arrays) och loopar.

Övergripande upplägg

Introduktion

Presentera problemet och eventuellt en förutbestämd lista som ska sorteras.

Här är några exempel:

[1, 2, 3, 4, 5, 7, 6]

[9, 8, 3, 6, 4, 2, 7, 1, 5, 0]

Genomförande

Eleverna ska, förslagsvis i grupper om två (alternativt 3 i en grupp), implementera en eller flera sorteringsalgoritmer (behöver inte begränsas till de som vi har använt oss av i lösningsförslaget) som sorterar en given lista.

Diskussion

Diskutera i helklass:

- Lyckades ni sortera listan?
- Vilka sorteringsalgoritmer använde ni?
 - Tror ni, givet en mycket längre lista, att någon är snabbare än de andra?

Ytterligare information

Bakgrund och lösningsförslag

Att sortera data är väldigt centralt i de flesta system, och varje programmerare förväntas ha koll på hur många av de vanligare sorteringsalgoritmerna fungerar och när man bör välja den ena framför den andra.

Lösningsförslag för bubble sort och insertion sort: <https://pastebin.com/8AM8Nnue>

Användningsområden:

För att sortera varor i webbshoppar efter kategori, pris etc. Kontakter i din mobil är t.ex ofta sorterade i bokstavsordning, och länkarna som dyker upp när du googlar något efter hur många andra sidor som refererar till dem.

Förslag på vidareutveckling

Sorteringsalgoritmer har så kallade komplexiteter, ett sätt att beskriva hur snabbt det tar att utföra en algoritm i olika fall. Som man kanske kan gissa så finns det sorteringsalgoritmer som i många fall är bättre än andra. En av dessa är merge sort, som använder sig av så kallad "divide and conquer"-metoden. Det innebär att listan delas upp i mindre delar som sorteras var och en för sig, och sedan sammanförs. Detta är alltså en av de många metoder som man kan använda för att effektivisera sorteringen.

Approximera ett irrationellt tal

Information till läraren

Mål med problemet

De flesta är bekanta med talet π , men vad innebär det egentligen att det har oändligt med decimaler? Varifrån kommer det? Hur många steg behövs för att få en tillräckligt bra approximation?

Det här skulle kunna vara ett problem som på ett roligt sätt kombinerar matematik med programmering, samtidigt som man lär sig att skapa en enkel algoritm.

Förkunskaper

Grundläggande programmeringskunskap. If-satser, loopar.

Övergripande upplägg

Inledning

Presentera problemet, gå igenom sätt att approximera π på, förslagsvis Archimedes metod, då den är väldigt illustrativ. Sedan så kan förslagsvis Leibniz formel presenteras, som en enklare praktisk metod för att approximera π på.

Genomförande

Problemet genomförs förslagsvis i grupper om 2 (alternativt 3 i en grupp). Eleverna ska alltså använda en modell för att approximera π och skriva om denna till en kod som kan printa ut en approximation med önskad noggrannhet.

Diskussion

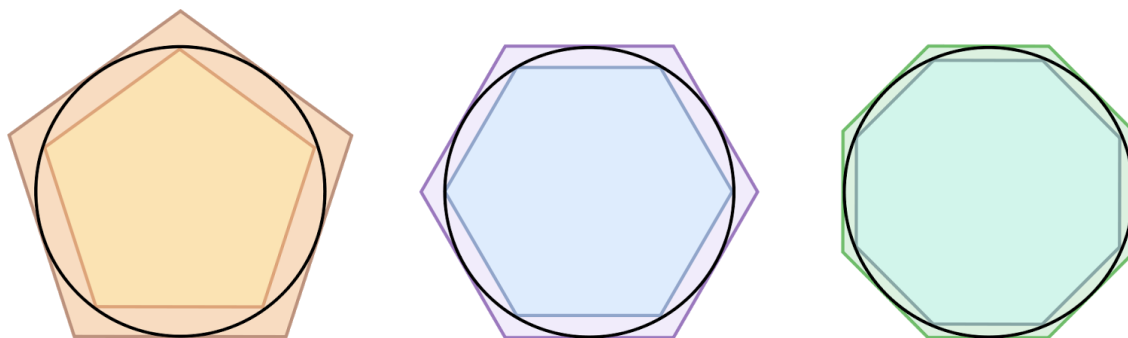
I helklass

- Hur noggrant beräknade ni π ?
- Hur många decimaler behöver man egentligen?

Ytterligare information

Archimedes metod

Genom att rita polygon med fler och fler hörn inuti en cirkel så närmar man sig tillslut en cirkel och kan på det sättet approximera en cirkels omkrets. Tanken med detta exempel är mer att ge ett illustrativt exempel på hur man kan tänka kring approximeringen av pi, där andra formler, som Leibniz, blir mer applicerbar i detta sammanhang.



Lösningsförslag

För att approximera Pi kan man använda Leibniz formel, som endast kräver en for-loop och en if-sats som skiftar mellan subtraktion och addition

$$\pi/4 \approx (1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots)$$

Man får då dels träna på att hitta sambandet för hur serien växer, samt skriva ner detta som en kod.

Lösningsförslag: <https://pastebin.com/0RhSMaLR>

Noggrannhet

Frågan om hur många decimaler man behöver på π är självklart väldigt svårt att svara på, men man kan få en liten hint av följande:

“Om du har 40 decimaler kan du beräkna omkretsen på en cirkel med diameter lika stor som det observerbara universumet (46 miljarder ljusår) med en noggrannhet på en väteatom.”

Förslag på vidareutveckling

Givetvis kan man använda sig av ett annat irrationellt tal än pi också ifall man vill. Det kan också vara roligt om eleverna själva får leta fram approximationsformler och välja en valfri metod beroende på vad de tycker vore roligt att implementera. Kanske vill man implementera olika varianter för att sedan jämföra dom?

Fibonacci-sekvens

Information till läraren

Mål med problemet

Att eleverna ska få hitta ett mönster i en talföljd och sedan överföra detta till en kod som skriver ut talföljden.

Förkunskaper

Grundläggande programmeringskunskap. If-satser, samt loopar eller rekursion.

Övergripande upplägg

Introduktion

Presentera problemet och gå igenom några steg av Fibonacci-serien.

Genomförande

Eleverna ska, förslagsvis i grupper om 2 (alternativt 3 i en grupp), skriva en algoritm som skriver ut Fibonacciföljden.

För elever som är lite mer bekväma med att programmera så kan de uppmanas att lösa problemet med hjälp av rekursion.

Diskussion

Diskutera i helklass:

- Hur gick det att förstå hur serien växte?
- Hur löste ni problemet? Använde ni for-loopar? Rekursion? Något annat?
- Vad kan man använda detta till?

Ytterligare information

Bakgrund och lösningsförslag

Detta är ett exempel på en talföljd som är väldigt enkel att implementera: den har två basfall, sedan följer den ett enkelt mönster.

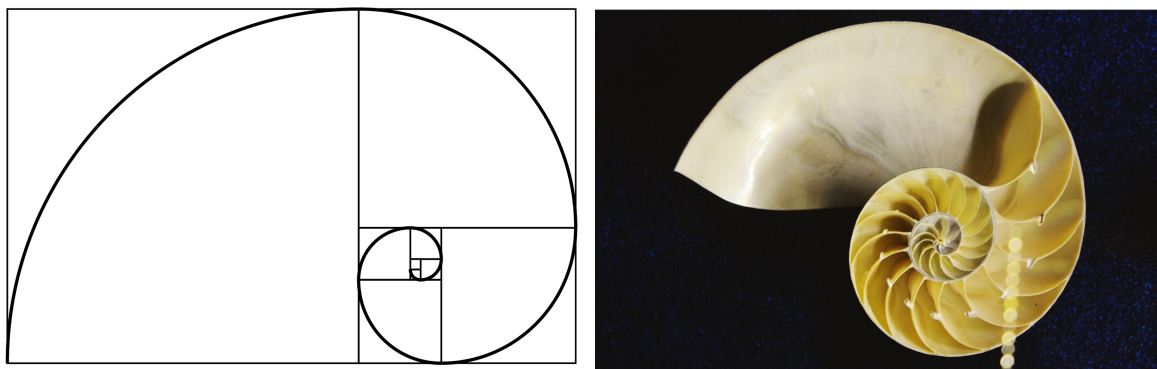
En sådan här metod implementeras med fördel via rekursion, som ofta är ett effektivt sätt att utföra beräkningar.

Lösningsförslag: <https://pastebin.com/SeYp4SDj>

Användningsområden:

Vid frågan om vad man kan använda den här typen av beräkningar till kan man bland annat peka på bakgrunden till Fibonaccis talföljd. Den sägs nämligen komma från att Fibonacci funderade på hur många kaniner det skulle bli i ett samhälle om man började med 2, och deras barn sedan kunde få barn o.s.v. Denna modell har givetvis brister, t.ex räknar den inte med att kaniner dör, men det kan ändå leda till en intressant diskussion. Med en sådan här kod skulle man då t.ex kunna ta reda på hur många kaniner det finns efter 100 parningsperioder, något som skulle vara mycket jobbigt att göra för hand.

Om man illustrerar Fibonacci-serien på ett geometriskt vis där varje "block" har $n * n$ rutor så ser man att följden bildar en slags spiral, vars form ofta ses i naturen. Allt ifrån formen på ett snäckskal till hur fröna i en solros är ordnade. De förekommer även mycket inom konst, då det gyllene snittet är länkat till Fibonacci-serien.



Förslag på vidareutveckling

Problemet går självklart att genomföra även med andra talföljder än just Fibonaccis. Man skulle kunna börja lektionen med att visa en talföljd, och sedan diskutera hur den växer. Att sedan behöva få en dator att skriva ut samma talföljd är ett bra sätt att få testa att man verkligen förstått. Man skulle också kunna låta eleverna skriva en kod för en egen talföljd, och därefter byta med varandra.

B.10 Identifiera primtalsfaktorer

Identifiera primtalsfaktorer

Information till läraren

Mål med problemet

Förstå hur man på ett effektivt sätt hittar primtalsfaktorer för ett tal och hur man implementerar en algoritm för detta.

Förkunskaper

Grundläggande programmeringskunskap. If-satser, loopar, eventuellt fält/arrays eller listor.

Övergripande upplägg

Introduktion

Presentera problemet, förslagsvis så kan man illustrera något exempel på värden som programmet ska klara av (exempelvis 7293).

Genomförande

Eleverna ska, förslagsvis i grupper om 2 (alternativt 3 i en grupp) skriva en algoritm som, givet ett tal > 1 , undersöker ifall det är ett primtal, och om inte, hittar dess primtalsfaktorer.

Diskussion

I helklass

- Hur hanterade ni tal som hade fler än 2 primtalsfaktorer?
- Vilka värden testade ni när ni försökte att hitta primtalsfaktorerna till ett tal?

Ytterligare information

Lösningförslag

Här kan eleverna börja fundera också på vilka tal man faktiskt behöver testa (tänker då på att det räcker med att undersöka tal under $\sqrt{x}$). Om ett tal har fler än 2 primtalsfaktorer så sparar man helt enkelt undan den funna faktorn och letar vidare på vad som är kvar av divisionen.

Lösningförslag: <https://pastebin.com/kTWFCZwU>

Verifiera personnummer

Information till läraren

Mål med problemet

Att undersöka rimliga siffror i ett personnummer samt implementera en given algoritm.

Förkunskaper

Grundläggande programmeringskunskap. If-satser, loopar.

Övergripande upplägg

Introduktion

Diskussion i helklass:

- Hur ser ett personnummer ut?

Låt klassen komma med förslag, och visa därefter Luhn-algoritmen (Läs mer om denna i "Ytterligare information").

Genomförande

Ni ska skriva en algoritm som avgör om ett personnummer är giltigt eller inte. Arbeta i grupper om 2 (alternativt 3 i en grupp).

Diskussion

I helklass

- Varför vill man kontrollera om ett personnummer stämmer?
- Om man har alla siffror i ett personnummer utom den sista, hur kan man i så fall beräkna denna?

Ytterligare information

Bakgrund

Det finns vissa regler för hur ett personnummer ska se ut för att vara giltigt i Sverige. T.ex ska siffran som motsvarar månaden vara högst 12, och siffran som motsvarar datumet har också en maxgräns, som här även beror på månaden. Den näst sista siffran är jämn för kvinnor och udda för män. Den sista siffran är också en kontrollsiffra, som kan kontrolleras med Luhn-algoritmen. Den går ut på att man (utgående från formatet YYMMDD-XXXX) omväxlande multiplicerar varje siffra med 2, 1, 2, 1 osv. Därefter adderas de resulterande siffrorna. Om multiplikationen ger ett tvåsiffrigt tal adderar man varje siffra i talet. Om resultatet är jämnt delbart med 10 är personnumret ok.

Till exempel kan man titta på personnumret: 011124-7243. Det ger

0	1	1	1	2	4	7	2	4	3
•2	•1	•2	•1	•2	•1	•2	•1	•2	•1
0	1	2	1	4	4	14	2	8	3

$$\Rightarrow 0 + 1 + 2 + 1 + 4 + 4 + 1 + 4 + 2 + 8 + 3 = 30$$

Man kan också givet de övriga siffrorna beräkna den sista. Man gör då på samma sätt, men utan den sista siffran. När man genomfört additionen är den sista siffran differensen till närmaste högre tiotal.

Som en liten bonus kan man nämna att de första av de fyra sista siffrorna talar om var man är född (personen med personnumret ovan är född i Kopparbergs län)

Tänkvärt:

De personnummer som ges till svenska invandrare följer inte alltid dessa regler, utan kan vara helt slumpmässiga siffror, utan överensstämmelse med dagar, månader, kön eller kontrollsiffror. Har du en eller flera elever i klassen utan ett korrekt svenskt personnummer kan detta vara värt att tänka på om du vill genomföra problemet.

Lösningsförslag

Tillvägagångssättet här är att personnumret matas in som en sträng. Det första man bör göra är att kontrollera längden på strängen för att göra verifikationen så effektiv som möjligt (om den inte är av rätt längd så kan vi förkasta den direkt). Sedan kan man gå vidare med att kolla allt annat som man kan tänka sig komma på. Medan det finns en gräns för vad man kan kontrollera så kanske man bör fråga sig i vilken grad man ska bedöma rimligheten av exempelvis ett födelsedatum (inte så rimligt att en elev är född på 1800-talet exempelvis), men det är något som eleverna själva får avgöra.

Det finns alltså två tillvägagångssätt på problemet:

- Antingen att man matar in sitt personnummer så att Luhn-algoritmen kan bedöma om det är ett giltigt personnummer eller inte (samt att man själv gör vissa kontroller, t.ex.

att månaden är ≤ 12).

- Alternativt att eleven matar in sitt ofullständiga personnummer på liknande format: YYMMDD-XXX, där det viktiga är att man inte anger sin kontrollsiffra. Då kan programmet, även här då med hjälp av Luhn-algoritmen, bestämma kontrollsiffran.

Lösningsförslag: <https://pastebin.com/YiDSFvBN>

B.12 Skapa ett chiffer

Skapa ett chiffer

Information till läraren

Mål med problemet

Få en övergripande kunskap om hur ett chiffer fungerar och en introduktion till kryptering.

Förkunskaper

Grundläggande programmeringskunskap. If-satser, loopar.

Övergripande upplägg

Introduktion

Diskussion i helklass

- Vad är ett chiffer?
- Hur kan man kryptera ett meddelande?

Introducera elever till en ASCII-tabell (om möjlighet finns så kan den vara uppe på exempelvis en projektor under lektionen, bild finns i appendix).

Genomförande

Eleverna arbetar förslagsvis i grupper om 2 (alternativt 3 i en grupp). Här får eleverna konstruera en slags krypteringsalgoritm där inputen är en sträng innehållandes ett ord eller mening som ska krypteras, förslagsvis med hjälp av ett Caesarchiffer.

Därefter kan man gå ihop två grupper så att den andra gruppen kan skriva in en mening eller ord, så kan man sedan dekryptera det som den andra gruppen skrev.

Diskussion

I helklass

- Kunde ni tyda varandras krypteringar? Hur gjorde ni?
- Hur hade man kunnat göra för att göra det ännu svårare att dekryptera?

Ytterligare information

Bakgrund

Att vilja skicka hemliga meddelande till varandra är något som man har gjort i tusentals år. Bland den tidigaste krypterade informationen man har hittat är användandet av unika hieroglyfer i egyptiska kryptor. En flitig användare av chiffer var Julius Caesar som ofta dolde sin text genom att förskjuta bokstävernas platser i alfabetet, och därifrån har vi fått det så kallade Caesarchiffret. Den här typen av simpla chiffer såg flitig användning fram tills att datorer kunde lösa de för snabbt, och idag används mycket mer avancerade metoder för att kryptera text.

Lösningsförslag

Här löser jag problemet med Caesarchiffer, och har helt enkelt tagit ut motsvarande värde i ASCII-tabellen för sedan teckenvis addera ett visst förskjutningsvärde och göra om det till en karaktär igen, som motsvarar det nya värdet i ASCII-tabellen. I exemplet så tas inte ställning till att det krypterade tecknet ska bli en ny bokstav, då vi inte ville blanda in modulatoräkning. Huruvida ni vill avgränsa problemet är givetvis upp till er.

Lösningsförslag: <https://pastebin.com/F1Jc73sL>

Appendix

ASCII TABLE

Decimal	Hex	Char	Decimal	Hex	Char	Decimal	Hex	Char	Decimal	Hex	Char
0	0	[NULL]	32	20	[SPACE]	64	40	@	96	60	`
1	1	[START OF HEADING]	33	21	!	65	41	A	97	61	a
2	2	[START OF TEXT]	34	22	"	66	42	B	98	62	b
3	3	[END OF TEXT]	35	23	#	67	43	C	99	63	c
4	4	[END OF TRANSMISSION]	36	24	\$	68	44	D	100	64	d
5	5	[ENQUIRY]	37	25	%	69	45	E	101	65	e
6	6	[ACKNOWLEDGE]	38	26	&	70	46	F	102	66	f
7	7	[BELL]	39	27	'	71	47	G	103	67	g
8	8	[BACKSPACE]	40	28	(	72	48	H	104	68	h
9	9	[HORIZONTAL TAB]	41	29	)	73	49	I	105	69	i
10	A	[LINE FEED]	42	2A	*	74	4A	J	106	6A	j
11	B	[VERTICAL TAB]	43	2B	+	75	4B	K	107	6B	k
12	C	[FORM FEED]	44	2C	,	76	4C	L	108	6C	l
13	D	[CARRIAGE RETURN]	45	2D	-	77	4D	M	109	6D	m
14	E	[SHIFT OUT]	46	2E	.	78	4E	N	110	6E	n
15	F	[SHIFT IN]	47	2F	/	79	4F	O	111	6F	o
16	10	[DATA LINK ESCAPE]	48	30	0	80	50	P	112	70	p
17	11	[DEVICE CONTROL 1]	49	31	1	81	51	Q	113	71	q
18	12	[DEVICE CONTROL 2]	50	32	2	82	52	R	114	72	r
19	13	[DEVICE CONTROL 3]	51	33	3	83	53	S	115	73	s
20	14	[DEVICE CONTROL 4]	52	34	4	84	54	T	116	74	t
21	15	[NEGATIVE ACKNOWLEDGE]	53	35	5	85	55	U	117	75	u
22	16	[SYNCHRONOUS IDLE]	54	36	6	86	56	V	118	76	v
23	17	[ENG OF TRANS. BLOCK]	55	37	7	87	57	W	119	77	w
24	18	[CANCEL]	56	38	8	88	58	X	120	78	x
25	19	[END OF MEDIUM]	57	39	9	89	59	Y	121	79	y
26	1A	[SUBSTITUTE]	58	3A	:	90	5A	Z	122	7A	z
27	1B	[ESCAPE]	59	3B	;	91	5B	[	123	7B	{
28	1C	[FILE SEPARATOR]	60	3C	<	92	5C	\	124	7C	
29	1D	[GROUP SEPARATOR]	61	3D	=	93	5D	]	125	7D	}
30	1E	[RECORD SEPARATOR]	62	3E	>	94	5E	^	126	7E	~
31	1F	[UNIT SEPARATOR]	63	3F	?	95	5F	_	127	7F	[DEL]

C Presentationerna tillhörande problemen

C.1 Fermiproblem

OLIKA FERMIPROBLEM:

- Hur många iPhones säljs det i Sverige på ett år?
- Hur många personer kommer du uppskattningsvis att korsa väg med under en dag? (Egen definition av att "korsa väg")
- Hur stor blir den sammanlagda arean av alla löv i Göteborgs innerstad (alternativt byt ut mot den egna staden)?
- Hur många snapchats skickas varje dag från Sverige?
- Hur mycket mindre skräp skulle det bli om det blev förbjudet att slänga matkassar av plast i Sverige? (Man får bestämma enhet själv, t.ex m² eller kg)
- Hur många liter vatten använder ni i gruppen tillsammans varje vecka?
- Hur många hjärtslag slår ett hjärta under en livstid?
- Om alla väggar (inner- och ytterväggar) i er skola vore gjorda med tegelsten, hur många tegelstenar skulle det bli?
- Hur mycket mjölk säljs i Sverige per år?
- Hur många bilar passerar Gårdamotet varje dag (eller annat vältrafikerat mot)?
- Om man beslutade att alla skolklasser maximalt skulle få innehålla 20 elever, hur mycket skulle det kosta att anställa de nya lärarna som krävs?
- Om en allvarlig influensa skulle spridas i Sverige, och alla behöver vaccineras av kvalificerad sjukvårdspersonal, hur snabbt skulle det kunna göras?

matgymkand@gmail.com

C.2 Flygplan





matgymkand@gmail.com



Flygrutter:

Kiruna	-	Karlstad Visby
Umeå	-	Karlstad Stockholm
Stockholm	-	Umeå Göteborg Visby Malmö
Karlstad	-	Kiruna Umeå Göteborg
Göteborg	-	Stockholm Karlstad Malmö
Visby	-	Kiruna Stockholm Malmö
Malmö	-	Stockholm Göteborg Visby

matgymkand@gmail.com



Flygrutter:

Kiruna	-	Karlstad Visby
Umeå	-	Karlstad Stockholm
Stockholm	-	Umeå Göteborg Visby Malmö
Karlstad	-	Kiruna Umeå Göteborg
Göteborg	-	Stockholm Karlstad Malmö
Visby	-	Kiruna Stockholm Malmö
Malmö	-	Stockholm Göteborg Visby

matgymkand@gmail.com



- Hur kan man flyga sträckan Visby-Karlstad? Går det att göra på flera sätt?
- Är några vägar bättre än andra? Vilka faktorer skulle kunna tänkas avgöra det?

matgymkand@gmail.com

Malmö-Visby: 11200 kr
Stockholm-Umeå: 13580 kr

- Vilket sätt är billigast att köra mellan Visby och Karlstad?
- Antag att man vill ha en resa mellan Karlstad och Stockholm, men att sträckan Göteborg-Stockholm är fullbokad. Vilka andra vägar kan man ta? Vilken är billigast?

Flygrutter:

Kiruna	-	Karlstad	(999 km)
		Visby	(1142 km)
Umeå	-	Karlstad	(610 km)
		Stockholm	(514 km)
Stockholm	-	Umeå	(514 km)
		Göteborg	(397 km)
		Visby	(189 km)
		Malmö	(514 km)
Karlstad	-	Kiruna	(999 km)
		Umeå	(610 km)
		Göteborg	(206 km)
Göteborg	-	Stockholm	(397 km)
		Karlstad	(206 km)
		Malmö	(243 km)
Visby	-	Kiruna	(1142 km)
		Stockholm	(189 km)
		Malmö	(395 km)
Malmö	-	Stockholm	(514 km)
		Göteborg	(243 km)
		Visby	(395 km)

matgymkand@gmail.com



- Vilka faktorer inverkar på bränslekostnaden? Vad kom ni fram till?
- Vad behöver man tänka på om man ska beräkna hur mycket man ska ta betalt för varje biljett mellan t.ex. Visby och Karlstad?
- Vad behöver man tänka på om man ska beräkna hur mycket man ska ta betalt för varje biljett mellan t.ex. Visby och Karlstad?
- Vad avgör vilken sträcka som är billigast? Det totala avståndet eller antalet mellanlandningar?

matgymkand@gmail.com

C.3 Fritt fall

- Vad är derivata?
- Hur beräknar man en derivata? Vad behöver man? Finns det flera sätt?

matgymkand@gmail.com

Vad kan vi ta reda på om bollens hastighet och acceleration?

matgymkand@gmail.com

- Vad blev resultatet?
- Blev svaret exakt?
- Vad hade man kunnat göra för att få ett bättre resultat?

matgymkand@gmail.com

$t = 0 \text{ s}, \ell = 0 \text{ m}$

$t = 1 \text{ s}, \ell = 4,9 \text{ m}$

$t = 2 \text{ s}, \ell = 19,6 \text{ m}$

$t = 3 \text{ s}, \ell = 44,1 \text{ m}$

$t = 4 \text{ s}, \ell = 78,4 \text{ m}$

$t = 5 \text{ s}, \ell = 123 \text{ m}$

$t = 0 \text{ s}, \ell = 0 \text{ m}$

$t = 1 \text{ s}, \ell = 4,9 \text{ m}$

$t = 2 \text{ s}, \ell = 19,6 \text{ m}$

$t = 3 \text{ s}, \ell = 44,1 \text{ m}$

$t = 4 \text{ s}, \ell = 78,4 \text{ m}$

$t = 5 \text{ s}, \ell = 123 \text{ m}$

C.4 Försvåring av en ekvation

- VAD ÄR EN EKVATION?
- HUR LÖSER MAN EN EKVATION?

matgymkand@gmail.com

$$x=2$$

matgymkand@gmail.com

EXEMPEL:

$$x = 2$$

$$2x = 4 \quad (\cdot 2 = \cdot 2)$$

$$2x + 5 = 4 + 5 \quad (+ 5 = + 5)$$

matgymkand@gmail.com

- GÅR EKVATIONERNA ATT LÖSA? ELLER HAR DE BLIVIT FÖR JOBBIGA?
- HUR GÖR MAN DÅ FÖR ATT LÖSA DEM?
- OM VI NU SKULLE VILJA GÖRA DEN JOBBIGASTE EKVATIONEN NÅGONSIN, UTIFRÅN DET VI HAR GJORT NU, HUR SKULLE VI GÖRA?

matgymkand@gmail.com

C.5 Matematisk modell för bil och löparen

1. DET TAR HANNA 40 SEKUNDER ATT KÖRA 1 KM MED BIL

Hur lång tid tar det för henne att köra:

- a) 2 km
- b) 10 km
- c) 20 km
- d) 20 mil

2. DET TAR AXEL 11,5 SEKUNDER ATT SPRINGA 100 METER

Hur lång tid tar det för Axel att springa:

- a) 200 m
- b) 400 m
- c) 800 m
- d) 1,5 mil

matgymkand@gmail.com

RESULTAT?

Hanna

- a) 2 km: 80 s = 1 min och 20 s
- b) 10 km: 400 s = 13 min och 20 s
- c) 20 km: 800 s = 13 min och 20 s
- d) 20 mil: 8000 s = 2 h, 13 min och 20 s

Axel

- a) 200 m: 23 s
- b) 400 m: 46 s
- c) 800 m: 1 min 32 s
- d) 1,5 km: 1725 s = 28 min och 45 s

matgymkand@gmail.com

- Vad gjorde ni för antaganden?
- Gjorde ni någon skillnad mellan de olika uppgifterna?
- Är svaren rimliga? Jämför mellan de olika uppgifterna. Vad är det som skiljer sig i de olika fallen?

matgymkand@gmail.com

AXELS VERKLIGA TIDER

100 m:	11.5 s
200 m:	22.5 s
400 m:	48.5 s
800 m:	1 min och 59 s
1.5 mil:	55 min

matgymkand@gmail.com

- Vad ser vi för skillnader mellan detta och det man fick med den linjära modellen?
- Vad kan skillnaderna bero på?

matgymkand@gmail.com

SORTERINGSALGORITMER

- Vad för typer av kommandon tror ni att man kan ge till en dator när det gäller sortering?
- Vad tror ni att man kan använda sorteringsalgoritmer till?
- Vad krävs för att en lista ska vara sorterbar?

HUR SKULLE NI SORTERA EN FÄRG I EN KORTLEK?

matgymkand@gmail.com

REGLER

1. 10 kort placeras med baksidan uppåt.
2. Du får vända på två kort i taget, jämföra dem och om du vill byta plats på dem.
3. Du kan inte minnas vad för värde ett kort som du inte tittar på har, men du får hålla koll på om kortet är sorterat eller inte.

matgymkand@gmail.com

DISKUSSION

- Fungerade era sorteringsalgoritmer?
 - Om inte, vad gick fel?
- Hur gick det att följa instruktionerna?
- Hur gick det att skriva instruktioner?
- Hur kändes det att försöka tänka som datorer?

matgymkand@gmail.com

D Enkäter

D.1 Förundersökning - Lärare

Matematik för gymnasiet

Vi är fem Chalmerister som studerar IT respektive Teknisk fysik. Denna enkät görs som en del av vårt kandidatarbete, där vi arbetar med gymnasiematematik. Den här enkäten riktar sig till dig som undervisar i matematik på gymnasienivå.

1. I vilken stad undervisar du?

2. På vilken skola undervisar du?

3. Vilken/vilka kurser undervisar du i?

Markera alla som gäller.

- ☐ Matematik 1a
- ☐ Matematik 1b
- ☐ Matematik 1c
- ☐ Matematik 2a
- ☐ Matematik 2b
- ☐ Matematik 2c
- ☐ Matematik 3b
- ☐ Matematik 3c
- ☐ Matematik 4
- ☐ Matematik 5

Uppskatta ungefär hur många procent av lektionstiden som spenderas på följande:

4. Genomgång med hela klassen

5. Egen räkning i boken

6. Att elever diskuterar med varandra och arbetar tillsammans

7. Uppföljning/Reflektion med hela klassen

8. Övrigt: Specificera

Problemlösning

9. Vad är problemlösning för dig? Beskriv med en kort text

I följande frågor anser vi problemlösning vara uppgifter som eleverna inte på förväg vet hur de ska lösa. Det innebär att en uppgift kan vara ett problem för vissa elever, men en standarduppgift för någon annan. Notera att vi när vi säger "arbeta med problemlösning" menar att man arbetar med ett problem i hela klassen. Det får alltså inte bara handla om de svårare uppgifterna i boken som inte alla elever hinner göra.

10. Arbetar du för att inkludera problemlösning i matematikundervisningen?

Markera endast en oval.

☐ Ja

☐ Nej

11. Varför/Varför inte?

12. Vad ser du för svårigheter/möjligheter med detta?

13. Om du svarade ja på första frågan, hur arbetar du med problemlösning?

Avslutning

14. Är det något mer du vill tillägga som du inte har fått sagt tidigare i enkäten?

15. Vi kommer konstruera ett antal problemlösningssuppgifter för gymnasiet. Skulle du kunna tänka dig att prova och utvärdera en eller flera av dessa tillsammans med din klass? Det skulle i så fall handla om ett eller två lektionstillfällen. Om ja, lämna en intresseanmälan med kontaktuppgifter nedan. Vill du veta mer eller har några frågor kan du kontakta oss på: matgymkand@gmail.com. Stort tack för din hjälp!

D.2 Problemutvärdering - Lärare

Problemutvärdering (Lärare)

Den här enkäten är tänkt för att vi ska få reda på vad du tyckte om problemet, samt hur det gick att genomföra det med klassen.

1. I vilken stad undervisar du?

2. På vilken skola undervisar du?

3. I vilken kurs testade du problemet?

Markera endast en oval.

- ☐ Matematik 1a
- ☐ Matematik 1b
- ☐ Matematik 1c
- ☐ Matematik 2a
- ☐ Matematik 2b
- ☐ Matematik 2c
- ☐ Matematik 3b
- ☐ Matematik 3c
- ☐ Matematik 4
- ☐ Matematik 5
- ☐ Övrigt:

4. I vilken klass går eleverna som testade problemet?

5. Vilken uppgift testade du?

Markera endast en oval.

- ☐ Fermiproblem
- ☐ Fritt fall
- ☐ Flygplan
- ☐ Sortera en kortlek
- ☐ Löpare
- ☐ Försvåring av ekvation

6. Hur mycket har ni arbetat med problemlösning tidigare med den här klassen?

7. På vilket sätt?

8. Hjälpte informationen/bakgrunden given i uppgiftsbeskrivningen? På vilket sätt?

9. Var det någon information som du saknade? Utveckla.

10. Upplevde du att eleverna blev engagerade och intresserade av problemet?

11. Var det några specifika delar som var extra intressanta? Några som var mindre intressanta?

12. Kändes det som att hela klassen deltog och hade glädje och nytta av problemet? Uppskatta den andel som problemet passade för. Utveckla gärna!

13. Lade du till något eget som inte fanns med som tips i uppgiftsbeskrivningen? Beskriv i så fall gärna vad samt hur det gick.

14. Vad fick du för typer av frågor av eleverna? Ge exempel!

15. I handledning av problemlösning så är det svårt att kunna svara på alla frågor. Hamnade du i en situation där du inte kunde svara på en fråga? Hur hanterade du det?

16. Kan du ge några exempel på hur eleverna hanterade/löste problemet? Ange gärna också ungefär hur stor andel som använde liknande lösningsgångar (t.ex "De flesta gjorde så här...", "Många använde sig istället av...", "Några..." eller "Någon...")

17. Upplevde du att eleverna lärde sig något av problemet?

18. Vad lärde de sig?

19. Upplevde du att problemet var värdefullt i din undervisning? Eller kändes det som att den upptog tid som du hade kunnat utnyttja bättre på andra sätt? Utveckla gärna!

20. Är det något med uppgiften du skulle vilja ändra?

21. Har du några övriga kommentarer?

D.3 Problemutvärdering - Elever

Problemutvärdering (Elever)

Den här enkäten är tänkt för att vi ska få reda på vad du tyckte om problemet, för att vi ska få reda på vad vi kan förbättra.

1. Vilken skola läser du på?

2. Vilken klass går du i?

3. Vilken matematikkurs läser du?

Markera endast en oval.

- ☐ Matematik 1a
- ☐ Matematik 1b
- ☐ Matematik 1c
- ☐ Matematik 2a
- ☐ Matematik 2b
- ☐ Matematik 2c
- ☐ Matematik 3b
- ☐ Matematik 3c
- ☐ Matematik 4
- ☐ Matematik 5
- ☐ Övrigt: _____

4. Vad är problemlösning för dig?

5. Tyckte du att problemet av roligt? Meningsfullt? Varför/varför inte?

6. Var problemet lagom utmanande för dig? Eller var det för svårt eller enkelt?

7. Lärde du dig någonting?

Markera endast en oval.

- ☐ Ja
- ☐ Nej

8. Om ja: Vad?

9. Om nej: Var det något som hindrade dig från att lära dig något? Isåfall vad?

10. Är det något med uppgiften som du skulle vilja ändra?

11. Skulle du vilja göra mer av den här typen av uppgifter i skolan? Eller sitter du hellre och arbetar med uppgifter i boken? Motivera!
