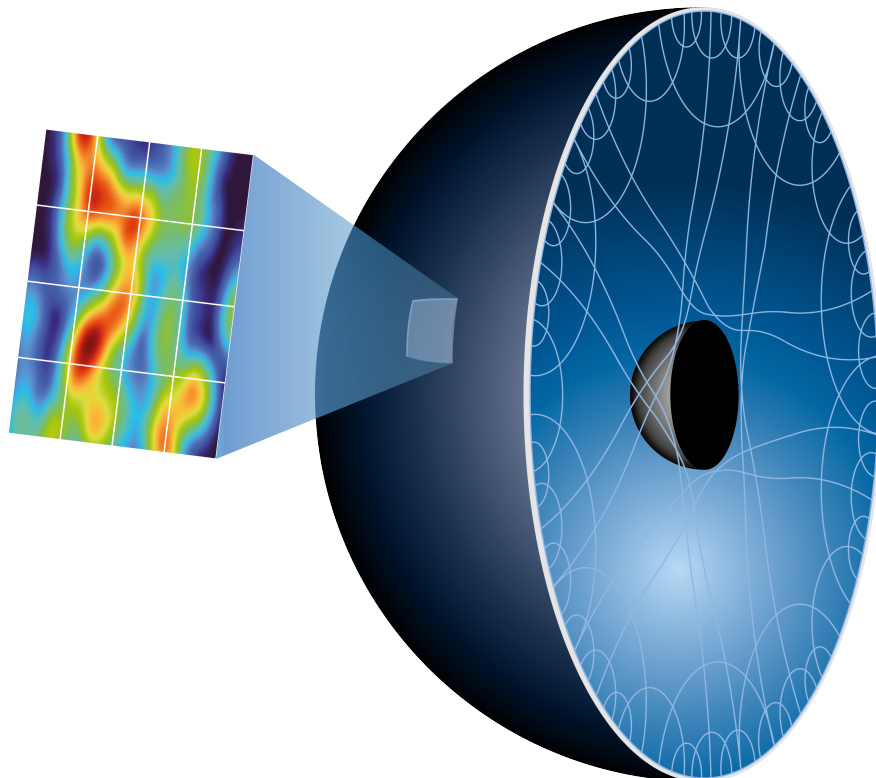




CHALMERS



# Konduktiviteten hos ett starkt kopplat 2D-material

En modellering med svarta hål utifrån den holografiska principen

Kandidatarbete i teknisk fysik

Leo Andersson, Linus Hagedorn, Albin Ledell,  
Carl Löv, Gustav Nilsson, Christian Russberg

---

**INSTITUTIONEN FÖR FYSIK**

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

Göteborg, Sverige 2024

[www.chalmers.se](http://www.chalmers.se)



KANDIDATARBETE 2024

## Konduktiviteten hos ett starkt kopplat 2D-material

En modellering med svarta hål utifrån den holografiska principen

Leo Andersson, Linus Hagedorn, Albin Ledell,  
Carl Löv, Gustav Nilsson, Christian Russberg



**CHALMERS**

Institutionen för fysik  
*Subatomär, högenergi- och plasmafysik*  
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA  
Göteborg, Sverige 2024



Konduktiviteten hos ett starkt kopplat 2D-material  
Leo Andersson<sup>a</sup>, Linus Hagedorn<sup>b</sup>, Albin Ledell<sup>c</sup>,  
Carl Löv<sup>d</sup>, Gustav Nilsson<sup>e</sup>, Christian Russberg<sup>f</sup>

E-post:

<sup>a</sup>leoand@chalmers.se

<sup>b</sup>linhaged@chalmers.se

<sup>c</sup>ledell@chalmers.se

<sup>d</sup>lovc@chalmers.se

<sup>e</sup>gustavni@chalmers.se

<sup>f</sup>chrruss@chalmers.se

© Leo Andersson, Linus Hagedorn, Albin Ledell,  
Carl Löv, Gustav Nilsson, Christian Russberg, 2024.

Handledare: Prof. Ulf Gran och Lic. Eric Nilsson, Institutionen för fysik  
Examinator: Prof. Jan Swenson, Institutionen för fysik

Kandidatarbete 2024  
Institutionen för fysik  
Subatomär, högenergi- och plasmafysik  
Chalmers tekniska högskola  
SE-412 96 Göteborg  
Telefon: +46 31 772 1000

Omslag: Visualisering av den holografiska principen: Strömtäthetsfältet för en kvantfältteori på randen av en  $AdS_4$ -rumtid med ett laddat, stationärt svart hål i centrum. Illustratör: Pontus Andersson.

Typsatt i  $\LaTeX$   
Tryckt av Chalmers digitaltryck  
Göteborg, Sverige 2024

Konduktiviteten hos ett starkt kopplat 2D-material  
Leo Andersson, Linus Hagedorn, Albin Ledell,  
Carl Löv, Gustav Nilsson, Christian Russberg  
Institutionen för fysik  
Chalmers tekniska högskola

## Sammanfattning

En aktiv forskningsfront inom materialfysik är studierna av olika 2D-material och dess unika egenskaper jämfört med 3D-material. Partikel-partikel-interaktionerna i dessa material uppvisar som regel starkt kopplat beteende och är således svåra att modellera, analytiskt liksom numeriskt. Med hjälp av den holografiska principen i form av AdS/CFT-dualiteten kan den tvådimensionella materialfysiken betraktas som en randprojektion av en högre dimensionell, svagt kopplad gravitationsteori i AdS<sub>4</sub>-metrik. Syftet med projektet är att beräkna den optiska konduktiviteten hos ett sådant starkt kopplat material med hjälp av den holografiska principen.

Beräkningar utan metriksvar ger en konstant konduktivitet, men genom att inkludera metriksvar erhålls ett frekvensberoende resultat. Realdelen går asymptotiskt mot ett konstant värde, medan imaginärdelen har en pol för låga frekvenser och försvinner för höga frekvenser. Liknande beteenden har tidigare påvisats experimentellt i det tvådimensionella materialet grafen. Även om modellen kan utvecklas ytterligare åskådliggör projektet den holografiska principens användbarhet vid lösning av fältteoretiska problem samt ett möjligt tillvägagångssätt att modellera starkt kopplade 2D-material i praktisk tillämpning.

**Nyckelord:** starkt kopplade material, 2D-material, optisk konduktivitet, holografiska principen, AdS/CFT-dualitet, allmän relativitet, svarta hål, anti-de Sitter-rumtid, kvantfältteori.

Conductivity of a strongly coupled 2D material.  
Leo Andersson, Linus Hagedorn, Albin Ledell,  
Carl Löv, Gustav Nilsson, Christian Russberg  
Department of Physics  
Chalmers University of Technology

## Abstract

An active research frontier within material physics concerns the investigations of various 2D materials and their unique properties compared to 3D materials. Particle-particle interactions in these materials typically exhibit strongly coupled behavior and are thus difficult to model, analytically as well as numerically. By employing the holographic principle in the form of the AdS/CFT duality, two-dimensional material physics can be regarded as a boundary projection of a higher-dimensional, weakly coupled gravitational theory in AdS<sub>4</sub> metric. The purpose of this project is to calculate the optical conductivity of such a strongly coupled material using the aforementioned holographic principle.

Calculations without metric response yields a constant conductivity, but including metric response results in a frequency-dependent outcome. The real part asymptotically approaches a constant value, while the imaginary part exhibits a pole for low frequencies and vanishes for high frequencies. Similar behaviors have previously been observed experimentally in the two-dimensional material graphene. Although the model can be further developed, the project demonstrates the utility of the holographic principle in solving problems in field theory and a potential approach to modeling strongly coupled 2D materials in practical applications.

**Keywords:** strongly coupled materials, 2D materials, optical conductivity, holographic principle, AdS/CFT-duality, general relativity, black holes, anti-de Sitter spacetime, quantum field theory.

## Tillkännagivande

Vi vill tacka våra handledare Prof. Ulf Gran och Lic. Eric Nilsson för deras engagemang under projektets gång. De har bidragit till vår förståelse i flera komplexa teoretiska fält samt givit värdefulla råd om pedagogiskt kursmaterial som hjälpte fördjupa oss ytterligare. Eric, i synnerhet, lade stor möda i att forma och hålla en rad anpassade privatföreläsningar i allt från analytisk mekanik till den holografiska principen för att accelerera vår inlärningsprocess. Dessutom har de båda aktivt stöttat oss genom att erbjuda regelbunden återkoppling på allt från inlärningsprocessen till våra beräkningar och rapportskrivande under vårt arbete.

Till sist vill vi ge ett stort tack till Pontus Andersson som lade ner sin tid för att producera omslagsbilden.

Leo Andersson, Linus Hagedorn, Albin Ledell,  
Carl Löv, Gustav Nilsson, Christian Russberg,  
Göteborg, juni 2024

# Viktiga storheter och ekvationer

---

Nedan ges en sammanställning av beteckningarna för de mest centrala storheterna som förekommer i rapporten. Dessutom presenteras de viktigaste ekvationerna som används i beräkningar och härledningar.

## Viktiga storheter

Verkan

Lagrangiandensitet

Skalärt fält

Metrik

Metrikdeterminant

Elektromagnetisk potential

Elektromagnetisk fälttensor

4-strömtäthet

Christoffel-symbol

Riemann-tensor

Ricci-tensor

Ricci-skalar

Einstein-tensor

Stress-energitensor

Kosmologisk konstant

Einsteins gravitationskonstant

Hyperbolisk radie

Radiell Poincaré-koordinat

Position för händelsehorisont

Kemisk potential

Temperatur

Hawking-temperatur

Genererande funktional

Källa

Operator

Konduktivitet

Vinkelfrekvens

Störning av elektromagnetisk potential

Metrikvar

## Ekvationer

Euler-Lagranges ekvationer

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i(x)} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i(x))} \right) = 0$$

Maxwells inhomogena ekvationer

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$$

Elektromagnetisk verkan

$$S_{\text{EM}} = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu j^\mu \right]$$

Einstein-Hilbert-verkan

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int \sqrt{-g} d^Dx [R - 2\Lambda]$$

Einsteins fältekvationer

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}$$

Metrik för Reissner-Nordström-svart hål i AdS<sub>4</sub>

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} \left( -f(z) dt^2 + \frac{1}{f(z)} dz^2 + dx_1^2 + dx_2^2 \right)$$

$$f(z) = 1 - \left( 1 + \frac{\kappa^2 \mu^2 z_{\text{H}}^2}{2L^2} \right) \left( \frac{z}{z_{\text{H}}} \right)^3 + \frac{\kappa^2 \mu^2 z_{\text{H}}^2}{2L^2} \left( \frac{z}{z_{\text{H}}} \right)^4$$

Hawking-temperatur

$$T_{\text{H}} = \frac{1}{4\pi} |f'(z_{\text{H}})|$$

Elektromagnetisk potential för Reissner-Nordström-svart hål i AdS<sub>4</sub>

$$A_t = \mu \left( 1 - \frac{z}{z_{\text{H}}} \right)$$

Tvåpunktsfunktion i AdS/CFT-dualiteten

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \mathcal{O}(x_2) \rangle \approx \frac{\delta^2 S_{\text{grav}}[\phi^*]}{\delta h(x_1) \delta h(x_2)} \Big|_{h=0}$$

# Innehåll

---

<b>1</b>	<b>Inledning</b>	<b>1</b>
1.1	Gravitation och kvantfysik . . . . .	1
1.2	Den holografiska principen . . . . .	1
1.3	Optisk konduktivitet och starkt kopplade material . . . . .	2
1.4	Konduktivitet i en svart hål-modell . . . . .	2
1.5	Syfte . . . . .	3
1.6	Upplägg . . . . .	3
1.7	Avgränsningar . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Matematiska verktyg</b>	<b>4</b>
2.1	Analytisk mekanik: Principen om stationär verkan . . . . .	4
2.2	Funktionalintegration . . . . .	4
2.3	Tensorer . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Elektromagnetism och Maxwells ekvationer</b>	<b>6</b>
3.1	Konvention . . . . .	6
3.2	Den elektromagnetiska fälttensorn och Maxwells ekvationer . . . . .	6
3.3	Den elektromagnetiska verkan . . . . .	6
3.4	Drude-modellen . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Allmän relativitet: Introduktion</b>	<b>8</b>
4.1	Bakgrund . . . . .	8
4.2	Metriken . . . . .	8
4.3	Christoffel-symbolen . . . . .	8
4.4	Kovariant derivata . . . . .	9
4.5	Integraler i allmän relativitet . . . . .	9
4.6	Riemann-, Ricci- och Einstein-tensorn . . . . .	10
4.7	Einsteins fältekvationer . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Allmän relativitet: Svarta hål</b>	<b>13</b>
5.1	Bakgrund . . . . .	13
5.2	Schwarzschild-lösningen . . . . .	13
5.3	Reissner-Nordström-lösningen . . . . .	15
5.4	Anti-de Sitter-rumtid . . . . .	16
5.5	Reissner-Nordström i AdS . . . . .	16
5.6	Hawking-temperaturen . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Kvantfältteori och holografisk dualitet</b>	<b>18</b>
6.1	Brott mot konform symmetri . . . . .	18
6.2	Vägintegraler och partitionsfunktioner . . . . .	18
6.3	AdS/CFT-dualiteten . . . . .	19
<b>7</b>	<b>Beräkning av ett starkt kopplat materials konduktivitet</b>	<b>21</b>
7.1	Konduktiviteten utan metriksvar . . . . .	21
7.2	Konduktiviteten med metriksvar . . . . .	23
<b>8</b>	<b>Diskussion och slutsatser</b>	<b>25</b>
8.1	Konduktiviteten utan metriksvar . . . . .	25
8.2	Konduktiviteten med metriksvar . . . . .	25
8.3	Praktisk tillämpbarhet . . . . .	26
8.4	Vidare forskning . . . . .	27
8.5	Sammanfattning och slutsatser . . . . .	27
	<b>Referenser</b>	<b>28</b>

---

<b>A</b>	<b>Härledningar och exempel inom elektromagnetisk fältteori</b>	<b>A-1</b>
A.1	Maxwells ekvationer på tensorform . . . . .	A-1
A.2	Gauge-invarians för den elektromagnetiska verkan . . . . .	A-1
A.3	Stress-energitensorn för Maxwell-verkan . . . . .	A-2
<b>B</b>	<b>Härledningar och exempel inom allmän relativitet</b>	<b>B-1</b>
B.1	Allmän relativitet i sfäriska koordinater . . . . .	B-1
B.2	Härledning av Christoffel-symbolens transformation . . . . .	B-1
B.3	Volymelementets invarians . . . . .	B-2
B.4	Asymptotiskt platt Reissner-Nordström-metrik . . . . .	B-2
B.5	Reissner-Nordström-lösningen i anti-de Sitter-rumtid . . . . .	B-3
<b>C</b>	<b>Härledningar och exempel inom kvantfältteori</b>	<b>C-1</b>
C.1	Feynmans vägintegral från Schrödingers ekvation . . . . .	C-1
C.2	Exempel på partitionsfunktion och vägintegral . . . . .	C-2
C.3	Differentialekvationer vid störning av metriken . . . . .	C-3
C.4	Numeriska beräkningar . . . . .	C-5

# 1. Inledning

---

Ett forskningsfält som fått mycket uppmärksamhet under 2000-talet är det som berör *2D-material*: material bestående av enstaka atomlager. De uppvisar unika materialegenskaper och det är följaktligen av intresse att kunna modellera dem teoretiskt. Detta visar sig vara ett svårlost problem på grund av de starka kvantmekaniska partikelinteraktionerna i materialen, varför nya modelleringsmetoder är av behov. En kandidat, som växte fram ungefär samtidigt som studierna av 2D-material, är den *holografiska principen* som modellerar en kvantfältteori som en randprojektion av en högre dimensionell gravitationsteori.

Kontraintuitiv som den holografiska principen må låta, visar den sig ha stora beräkningstekniska fördelar gentemot att bara betrakta en kvantfältteori i sig, och kan vara användbar i materialmodellering. Detta är också syftet med projektet: att utföra beräkningar av ett materials optiska konduktivitet i en kvantfältteori med hjälp av den holografiska principen. Samtidigt behöver också den nödvändiga bakomliggande teorin presenteras på ett pedagogiskt sätt. Vi inleder därmed rapporten med att ge en vetenskapshistorisk bakgrund, innan vi går vidare till själva teorin, och slutligen till beräkningen och slutsatserna.

## 1.1 Gravitation och kvantfysik

I ett brev till Franska vetenskapsakademien 1905 redogjorde Henri Poincaré för de fullständiga *lorentztransformationerna*, det vill säga byten av inertialsystem under vilka Maxwells ekvationer är fullkomligt invarianta [1]. Detta brev hade stort inflytande på Albert Einstein som arbetade på en egen teori om relativitet (det vill säga en teori om fysikens lagar i olika inertialsystem). Tack vare matematiken i Poincarés brev kunde han färdigställa och publicera sin *speciella relativitetsteori* redan samma höst [2]. Den speciella relativitetsteorin beskriver relationen mellan rum och tid på så sätt att alla fysiklagar samt ljushastigheten förblir invarianta under *lorentztransformationerna*.

I samma brev lade Poincaré även fram hypotesen om gravitationsvågor, det vill säga att effekten av gravitation *inte* upplevs omedelbart över ett avstånd som i Newtons klassiska gravitationsteori. Det var en revolutionerande idé som baserade sig på samma hypotes som Einstein använde i sin speciella relativitetsteori: att ljushastigheten är den övre gränsen för hastigheten varmed information kan färdas. Einstein blev varse om detta och påbörjade kort därefter en nästan tio år lång jakt efter ett sätt att förena sin speciella relativitetsteori med denna nya idé om gravitation. Resultatet, som publicerades i fyra delar 1915, var den *allmänna relati-*

*vetetsteorin* som beskriver gravitation som en egenskap av universums geometri, och ersatte därmed Newtons teori [3–6]. Teorins förutsäggelseförmåga var stark och ledde till så många revolutionerande upptäckter inom astronomi och kosmologi att den idag anses vara en av de viktigaste teorierna inom modern fysik.

Parallellt med Einsteins allmänna relativitetsteori växte en helt ny gren inom fysik fram: kvantfysiken. Dess fundament är *kvantmekaniken*, som efter många årtionden av experimentella upptäckter och misslyckade teorier till slut lyckades formuleras på mitten av 1920-talet [7, kap. 15]. Kvantmekaniken beskriver naturlagarna på atomär och subatomär nivå och behandlar koncept såsom våg-partikeldualitet, osäkerhetsprincipen och kvantsammanflätning [8].

Med syfte att förena kvantmekaniken med klassisk fältteori och Einsteins speciella relativitetsteori föddes *kvantfältteorin*. Arbetet med att formulera teorin påbörjades redan på 1920-talet, men det tog större delen av resten av 1900-talet innan den blev konsistent med resten av kvantfysiken och standardmodellen [9]. Kvantfältteorin behandlar partikel- och kvasipartikelfysik och beskriver partiklar som exciterade tillstånd av ett underliggande kvantfält [10, kap. 0][11].

Både den allmänna relativitetsteorin och kvantfältteorin anses vara robusta teorier med stark förutsäggelseförmåga i sin respektive gren av teoretisk fysik. Att båda också bygger på Einsteins speciella relativitetsteori har naturligt lett till många försök att förena dem i en gemensam teori som beskriver alla kända naturlagar på både mikro- och makronivå. Denna hypotetiska teori brukar ofta kallas för *teorin om allt*. Alla försök till detta har dock, på ett eller annat sätt, misslyckats på grund av fundamentala inkompatibiliteter i teorierna så som de är formulerade i nuläget.

Det finns visserligen ett matematiskt sätt att kombinera kvantfältteori med allmän relativitet, vilket uppkom från *strängteori*: en av kandidaterna till teorin om allt. Metoden berör ett specialfall inom kvantfältteorin: den så kallade *konforma fältteorin* (ofta förkortat *CFT*). Konform fältteori är den kvantfältteori som är invariant under konforma transformationer, det vill säga transformationer där vinklar bevaras lokalt. Det visar sig att den konforma fältteorin kan beskrivas av den allmänna relativiteten genom den *holografiska principen*.

## 1.2 Den holografiska principen

En ‘brygga’ mellan allmän relativitet och kvantmekanik har kunnat byggas med hjälp av den *holografiska*

*principen*, även kallad *holografisk dualitet* (framöver kommer båda dessa, samt *holografisk metod*, användas omväxlande). Idén om holografi tillskrivs Gerard 't Hooft, som föreslog att sammankopplingen mellan kvantmekanik och gravitation löses genom att information om en tredimensionell rymd kan projiceras på en tvådimensionell yta [12]. 't Hooft menade att den tvådimensionella rymden, likt en holografisk bild, måste innehålla all information om den tredimensionella rymden: därav namnet *holografisk dualitet*, som även syftar på att de två teorierna vid djupare anblick är ekvivalenta beskrivningar av samma fysik. 1994 publicerade Leonard Susskind ett papper som byggde vidare på dessa idéer, främst tack vare det ett år tidigare publicerade pappret av 't Hooft m.fl., genom att visa likheterna mellan holografin och strängteori.

Detta projekt använder den holografiska principen i form av den så kallade *AdS/CFT-dualiteten* för att sammanbinda kvantfysiken med gravitationsteorin. *AdS* är en förkortning av *anti-de Sitter-rumtid* och är ett sätt att beskriva en hyperbolisk rumtidsgeometri i vilken parallella linjer divergerar i konstant takt mot oändligheten, medan CFT som tidigare nämnts syftar på en kvantfältteori med konform symmetri. Denna dualitet, som introducerades av Juan Maldacena 1997, sammankopplar alltså en gravitationsteori i AdS med CFT genom att låta fältteorin vara den holografiska projiceringen av AdS [13]. AdS/CFT-dualiteten är det mest väldokumenterade fallet av holografi och Maldacenas artikel är den mest citerade publikationen inom teoretisk fysik, följt av bland andra en vidareutveckling av ämnet av Edward Witten 1998 [14].

Dualitetens praktiska innebörd är möjligheten att räkna på kvantmekaniska system av partiklar genom att projicera gravitationsteorin i en lägre dimension. Egenskaper hos systemet kan på så sätt beräknas med hjälp av gravitationsteorins mer hanterbara matematik. I detta projekt kommer specifikt partikelsystem kallade *starkt kopplade material* undersökas, och deras *optiska konduktivitet* beräknas.

### 1.3 Optisk konduktivitet och starkt kopplade material

Det existerar många olika materialmodeller för att förklara olika typer av fenomen som till exempel materialstyrka och elasticitet. Många av dem är strukturmässigt komplexa och kräver tunga beräkningar för att lösas. Ett exempel på en komplex modell är den för den *optiska konduktiviteten* hos ett *starkt kopplat material*.

Den välkända elektriska DC-konduktiviteten beskriver ett materials förmåga att transportera elektriska laddningar i det elektriska fältets riktning när en statisk spänning appliceras. Den optiska konduktiviteten är däremot ett specialfall av den frekvensberoende

de AC-konduktiviteten där materialet bestrålas av elektromagnetisk strålning [15, kap. 2.6]. På grund av den höga frekvensen och att det elektriska fältet är ortogonalt mot propagationsriktningen kan (framför allt anisotropa) material ge en annan respons än om en vanlig AC-spänning applicerats. I teorin och för materialen som undersöks i detta projekt uppträder inga distinkta egenskaper unika för optisk konduktivitet, och därför kommer begreppen *AC-konduktivitet*, *frekvensberoende konduktivitet* eller rentav bara *konduktivitet* också användas för att beskriva samma sak.

Starka kopplingar hos system gör dem komplexa, och försvårar därmed beräkningar av dess optiska konduktivitet. I klassiska metaller kan partikelsystemet ses som en uppsättning partiklar som växelverkar *svagt* med varandra genom till exempel den elektromagnetiska kraften. Effekten av svaga växelverknings påverkas inte betydligt av antalet partiklar i modellen, det vill säga partiklarna interagerar i princip bara med sin omedelbara omgivning. I starkt kopplade material är detta ej fallet: Partiklarna har en *stark* växelverkan vars effekt utanför den lokala omgivningen inte kan försummas. Materialet kan inte längre ses som ett system av unika partiklar utan måste beskrivas efter deras kollektiva beteende [16]. Detta medför att modeller för ett stort antal partiklar blir oerhört komplexa och nästan omöjliga att räkna på.

Exempel på starkt kopplade material är bland annat högttemperatursupraleddare och Mott-isolatorer. Att beskriva deras fysikaliska egenskaper är alltså ett beräkningsmässigt problem. Det är i dessa lägen som AdS/CFT-dualiteten blir användbar. Beräkningar för det starkt kopplade systemet kan göras med hjälp av en svagt kopplad gravitationsteori.

### 1.4 Konduktivitet i en svart hål-modell

Den holografiska principen gör det möjligt att beskriva ett starkt kopplat material (beskrivet av en fältteori) med hjälp av ett svart hål i AdS-rumtid (i den allmänna relativitetsteorin). Svarta hål är lösningar av Einsteins fältekvationer, rörelseekvationerna i allmän relativitet, och beskriver regioner i rymden där gravitationen är så stark att inte ens ljus kan lämna dem. De uppkommer i många typer av rumtidsgeometri, till exempel AdS-rumtiden, men deras exakta utseende varierar. Fysikaliskt innebär de alla i stort sett ändå samma sak: en matematisk singularitet som får alla kända naturlagar att bryta ihop.

Det är möjligt att beräkna den optiska konduktiviteten hos ett starkt kopplat material genom att beskriva det via holografisk dualitet i termer av en svart hål-modell [17, kap. 1]. Större delen av beräkningarna som utförs är alltså på storheter i svart hål-modellen, där egenskaper som optisk konduktivitet egentligen inte existerar,

men genom AdS/CFT-dualiteten kan matematiken relateras till materialmodellen i vilken konduktiviteten till slut beräknas.

## 1.5 Syfte

Målet med arbetet är att, med hjälp av AdS/CFT-dualiteten, beräkna den optiska konduktiviteten hos ett starkt kopplat 2D-material. Framst är det av intresse att studera dess frekvensberoende och jämföra med den vedertagna men förenklade Drude-modellen som istället gäller svagt kopplade material. Projektet utgör en introduktion till en aktiv forskningsfront inom teoretisk fysik och demonstrerar hur till synes helt abstrakta koncept som holografisk dualitet och kvantfältteori har praktisk tillämpbarhet. Det presenterar också en alternativ metod för att förenkla beräkningar på starkt kopplade material.

Projektet kommer, delvis genom den presenterade teorin men främst genom den slutgiltiga beräkningen, antingen bestyrka eller ifrågasätta AdS/CFT-dualiteten som en lämplig metod för att beräkna konduktiviteten hos starkt kopplade 2D-material. Detta är en form av granskning som är viktig för trovärdigheten av teorier inom teoretisk fysik.

## 1.6 Upplägg

För att uppnå syftet har denna rapport följande upplägg: I kapitel 2 introduceras nödvändiga matematiska verktyg; *principen om stationär verkan*, *funktionalintegration*, och *tensorer*. Läsare som sedan tidigare har kunskap om dessa områden kan gå direkt till kapitel 3. I kapitel 3 – 6 presenteras den nödvändiga fysiken som används för beräkningen av den optiska konduktiviteten i kapitel 7. Slutligen dedikeras kapitel 8 till diskussion och slutsatser.

För att rapporten ska hålla fokus på fysiken samt vara lättläst är den i stil mer lik ett kurskompendium än en teknisk rapport. Av läsbarhetsskäl kommer endast nödvändiga beräkningar och definitioner presenteras och intresserade läsare refereras till bilagor eller referensmaterial för vidare läsning.

De flesta tekniska begrepp som rapporten introducerar följs av en förenklad förklaring för att ge läsaren en känsla för termens betydelse, eftersom arbetet syftar till att ge en pedagogisk genomgång av den relevanta teorin. Betydelsen av vissa begrepp och ord utelämnas dock. Kunskap om sådana detaljer går utanför projektets huvudsakliga syfte och är inte nödvändig för att förstå arbetet.

## 1.7 Avgränsningar

Materialet vars konduktivitet ska beräknas är tvådimensionellt, men har ändå viss koppling till verkliga

material. Material av enstaka atomlager (som exempelvis grafen) beter sig approximativt tvådimensionellt då atomkärnor och elektroner är begränsade till ett enda (platt eller krökt) plan. Modellen som tas fram kan alltså användas för att beskriva atomlagerbaserade starkt kopplade material såsom högttemperatursupraleddare. Eftersom den holografiska projektionen av gravitationsteorin är i en lägre dimension är det av intresse att modellera det svarta hålet i en så kallad AdS<sub>4</sub>-metrik med tre rumsdimensioner och en tidsdimension, så att det starkt kopplade materialet på randen har två rumsdimensioner. Dock har de flesta material i vårt universum tre rumsdimensioner, vilket skulle kräva AdS<sub>5</sub>-metrik. En vidareutveckling av projektet vore därmed att även studera 3D-material, men i och med att AdS<sub>5</sub>-metriken är mycket komplex är den bättre lämpad för arbeten på högre nivåer. Projektet kommer därför avgränsas till att undersöka AdS<sub>4</sub>-metriken.

En annan avgränsning som görs är att de elektriska fält som kommer studeras saknar rumsberoende. Dessutom används fouriertransformer av fälten med vägtalet noll, det vill säga att de endast har ett frekvensberoende. Precis som i många andra fall kommer problemet hanteras som en linjär respons, vilket innebär att modellen kommer stämma överens med verkligheten så länge störningarna är små. Vidare beskrivs systemet endast med den elektromagnetiska Maxwell-verkan, även om generaliseringar kan göras genom att inkludera ytterligare fält i verkan. De svarta hål som kommer att betraktas är elektriskt laddade men saknar rörelsemängdsmoment.

Ett ordentligt försök att modellera ett specifikt materials egenskaper skulle anpassa modellens parametrar efter materialet. I detta arbete inskränker sig däremot modellen som byggs upp till en enda egenskap och modellens parametrar skräddarsys ej till ett specifikt material. Arbetet kan därför ses som en demonstration av den holografiska principen och dess användningar snarare än en direkt, kvantitativ tillämpning av teorin.

Det är dessutom värt att påpeka att AdS-metriken inte heller är en beskrivning av verkligheten: Vårt universum har, så vitt vi vet, platt geometri till skillnad från AdS-rumtidens hyperboliska geometri [18]. De svarta hålen som modelleras skiljer sig alltså från vårt universums svarta hål. Poängen är att använda modeller av svarta hål i AdS för att beräkna konduktiviteten av ett starkt kopplat material. De introduceras alltså inte för att studera svarta hål i vårt universum, utan som ett verktyg för att göra beräkningen. Matematiken och fysiken är dock robust: en följd av att teorierna är mer allmänna än att bara beskriva vad vi kan observera i vårt universum.

## 2. Matematiska verktyg

Innan fysiken som är relevant för projektet presenteras är det lämpligt att först etablera en konceptuell grund som underlättar förståelsen för kommande beräkningar. Detta kapitel kan ses som en verktygslåda med centrala koncept som behövs för att kunna angripa elektromagnetisk fältteori, allmän relativitet, kvantfältteori och holografisk dualitet.

### 2.1 Analytisk mekanik: Principen om stationär verkan

Den mest grundläggande metoden som kommer användas för att beskriva ett system är principen om stationär verkan. Metoden bygger på att all förståelse för det fysiska system som betraktas kan beskrivas av en funktion  $\mathcal{L}$ , *lagrangiandensiteten*, som beror på de funktioner som beskriver systemet [19, kap. 2]. Exempel på vad de senare funktionerna kan vara är det magnetiska  $\vec{B}(\vec{x}, t)$ -fältet och positionen  $\vec{q}(t)$  för en partikel. Fälten som  $\mathcal{L}$  beror på betecknas i allmänhet  $\phi^i(\vec{x}, t)$ .

Om lagrangiandensiteten integreras över rum och tid fås ett värde  $S$  kallat *verkan*. I och med att  $S = S[\phi^i]$  beror på hur  $\phi^i$  utvecklas över tid och rum är verkan en funktion av funktioner; en så kallad *funktional*. Genom att variera fälten  $\phi^i$  och därigenom också funktionalen går det att hitta de  $\phi^i(\vec{x}, t)$  som är stationära punkter till  $S$ , analogt med att hitta stationära punkter till en funktion. Det är dessa fält som i klassisk mekanik följer fysikens lagar (entydigheten avgörs av randvillkor), men också utanför klassisk mekanik är verkan av stor vikt.

Att hitta villkor för när verkan är stationär är ett matematiskt problem som kan lösas med hjälp av variationskalkyl. Verkan för ett allmänt system kan skrivas på formen

$$S[\phi] = \int_M d^D x \mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i), \quad (2.1)$$

där  $M$  är en  $D$ -dimensionell *mångfald* och  $\partial_\mu$  används som kortare notation för partialderivatan  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  [20, kap. 1]. En mångfald är ett topologiskt rum som på lokal nivå beter sig euklidiskt och kan användas för att beskriva de krökta rumtider, eller universum, som den allmänna relativitetsteorin beskriver. I denna rapport räcker det att tänka på en mångfald som ett möjligen krökt  $n$ -dimensionellt rum, såsom ytan på ett klot eller en torus. Den så kallade *funktionalderivatan* av en funktional på denna form ges av [20, kap. 1]

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi^i(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i(x)} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i(x))} \right).$$

Det stationära villkoret är att alla funktionalderivator är lika med noll, vilket resulterar i *Euler-Lagranges ekvationer*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i(x)} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i(x))} \right) = 0. \quad (2.2)$$

Dessa ekvationer är mycket centrala inom fysik. Ett systems rörelseekvationer, som beskriver systemets utfall, hittas genom att variera verkan vilket alltså är ekvivalent med att lösa Euler-Lagranges ekvationer.

### 2.2 Funktionalintegration

Med det nyintroducerade konceptet av funktionaler introducerar vi här även *funktionalintegration*, som är ett mycket användbart verktyg inom kvantfältteorin som presenteras i kapitel 6. En funktionalintegral är en integral av en viss funktional  $G$  över funktioner  $f$  i vårt funktionsrum och kan definieras som

$$I = \int G[f] dm(f), \quad (2.3)$$

där  $m$  är måttet vi integrerar med [21] [22]. Måttet, som inte alltid skrivs ut explicit, mäter hur stort bidrag varje del av rummet ger till integralen. Ett exempel är integration med polära koordinater i  $\mathbb{R}^2$ ; då används inte  $drd\theta$  utan istället det med radien viktade måttet  $dm(r, \theta) = r dr d\theta$ . Vi kan också ha ett mått som lägger all vikt i en enda punkt:  $dm(x) = \delta(x) dx$ , där  $\delta(x)$  är Diracs deltafunktion. I funktionalintegralen ovan avgör  $m$  hur vi väljer att mäta vårt, oftast oändligdimensionella, funktionsrum.

Funktionalintegraler förekommer ofta inom teoretisk fysik, men är sällan möjliga att lösa analytiskt och måste istället uppskattas med hjälp av *perturbationsmetoder*. De går ut på att börja med den exakta lösningen för ett enklare problem och sedan approximera lösningen för den mer komplexa integralen. Inom kvantfältteori används funktionalintegration för att generalisera principen om stationär verkan från klassisk mekanik. Kvanteffekter tillåter partiklar att ta fler än en given väg mellan två punkter, vilket sammanfattas i *Feynmans vägintegral* som introduceras i kapitel 6.

### 2.3 Tensorer

Ett matematiskt objekt som kommer att vara centralt i all kommande teori är den så kallade *tensor*. Den förväxlas ofta med det konventionella konceptet av vektorer och matriser inom linjär algebra på grund av de strukturella likheterna. Nödvändiga definitioner, tolkningar och räkneregler presenteras i detta avsnitt.

### 2.3.1 Fysikalisk tolkning

En tensor är, likt en vektor, en tabell-liknande sammanställning av alla enskilda komponenter som relaterar till varandra i ett vektorrum [23, kap. 12]. I en vektor svarar varje element mot ett index  $\mu$  motsvarande en koordinat  $x_\mu$ , medan de i en tensor av rang  $D$  svarar mot en kombination av  $D$  stycken index  $\mu_1\mu_2\dots\mu_D$ , som var för sig motsvarar en av de möjliga koordinaterna  $x_{\mu_i}$ . Därmed är en tensor en matematisk generalisering av vektorer. En tensor av rang 1 kan ses som en typ av vektor medan en tensor av rang 2 kan tolkas som en matris.

### 2.3.2 Metrik och index

Betrakta en tensor  $A^\mu$  av rang 1 i fyra dimensioner, som exempelvis kan utgöras av en tidsdimension och tre rumsdimensioner. Då betecknar  $A^0$  tidskomponenten medan  $A^1$ ,  $A^2$  och  $A^3$  betecknar rumskomponenterna ( $x$ ,  $y$  och  $z$ ). Notera positionen av index: Det spelar stor roll om index är upphöjt (*kontravariant form*) eller nedsänkt (*kovariant form*) [24, kap. 1]. Det går däremot alltid att transformera mellan kovariant och kontravariant form med en så kallad *metrik*  $g_{\mu\nu}$  enligt

$$A_\nu := g_{\mu\nu}A^\mu, \quad g^{\mu\nu}A_\nu = A^\mu. \quad (2.4)$$

Ekvation (2.4) använder, liksom resterande delar av denna rapport, *Einsteins summationskonvention*. Om ett index dyker upp två gånger är det underförstått att alla möjliga kombinationer med detta index summeras. Det saknar därför betydelse med vilken symbol ett summationsindex betecknas. Exempelvis gäller (i en tidsdimension och tre rumsdimensioner) att

$$g_{\mu\nu}A^\mu = g_{0\nu}A^0 + g_{1\nu}A^1 + g_{2\nu}A^2 + g_{3\nu}A^3.$$

Metriken  $g_{\mu\nu}$  är en tensor med inversen  $g^{\mu\nu}$ ,

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho \equiv \begin{cases} 1, & \mu = \rho \\ 0, & \mu \neq \rho \end{cases} \quad (2.5)$$

och den är symmetrisk, vilket innebär att  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ . Metriken beskriver mångfaldens geometriska egenskaper som sträckor, vinklar och volymer. Sträckor visar sig vara ett bra sätt att visualisera metriken. I punkten  $x$  i ett euklidiskt rum med dimension  $n$ , ges sträckan  $s$  till en närliggande punkt av Pythagoras sats

$$s^2 = \sum_{i=1}^n \Delta x^i \Delta x^i.$$

I ett mer allmänt, krökt rum generaliseras detta för små sträckor till

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j, \quad (2.6)$$

där  $g_{ij}(x)$  är den symmetriska metriktensorn [24, kap. 5]. Att metriken är beroende av positionen  $x^\mu$  innebär att avståndet mellan två punkter kan bero på

positionen i rumtiden. Platta rum, exempelvis euklidiska rum (där  $g_{ij} = \delta_{ij}$ ), har däremot inget sådant rumsberoende. Ett annat exempel på platt rum är det så kallade *Minkowski-rummet* som beskriver platt rumtid och definieras enligt

$$g_{ij}(x) = \eta_{ij} = \text{diag}(-1,1,1,1) \quad (2.7)$$

i fyra rumtidsdimensioner. Minkowski-metriken  $\eta_{ij}$  kommer att användas för att beskriva den elektromagnetiska fältteorin senare i kapitel 3.

### 2.3.3 Koordinattransformation och matematisk definition

En punkt i rumtiden kan också betraktas som en tensor och betecknas  $x^\mu$ . Vid ett koordinatbyte till  $y^\mu$  kommer tensorerna att transformera [25, kap. 6.2]. Relationen mellan en kontravariant tensor  $A^\mu$  och dess representation  $\tilde{A}^\mu$  i de nya koordinaterna är

$$\tilde{A}^\nu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} A^\mu. \quad (2.8)$$

Kovarianta tensorer transformeras istället som

$$\tilde{A}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} A_\mu. \quad (2.9)$$

På motsvarande sätt transformeras en allmän tensor  $A^{I_1 I_2 \dots}_{J_1 J_2 \dots}$  som

$$\tilde{A}^{K_1 K_2 \dots}_{L_1 L_2 \dots} = \prod_i \prod_j \frac{\partial y^{K_i}}{\partial x^{I_i}} \frac{\partial x^{J_j}}{\partial y^{L_j}} A^{I_1 I_2 \dots}_{J_1 J_2 \dots}. \quad (2.10)$$

Omvänt gäller

$$A^{I_1 I_2 \dots}_{J_1 J_2 \dots} = \prod_i \prod_j \frac{\partial x^{I_i}}{\partial y^{K_i}} \frac{\partial y^{L_j}}{\partial x^{J_j}} \tilde{A}^{K_1 K_2 \dots}_{L_1 L_2 \dots}. \quad (2.11)$$

En tensor kan helt enkelt definieras matematiskt som ett objekt som transformeras enligt ovanstående (ekvationer (2.8) – (2.11)) [24, kap. 3].

# 3. Elektromagnetism och Maxwells ekvationer

Med utgångspunkt i de grunder som lades i kapitel 2 presenteras här fundamentala koncept och definitioner inom den klassiska elektromagnetiska fältteorin. Målet är att omformulera denna som en fältteori i tensornotation med principen om stationär verkan. Den nya beskrivningen av den elektromagnetiska fältteorin är möjlig att förena med den allmänna relativitetsteorin, som presenteras i kommande kapitel. Dessutom sammanfattas den klassiska Drude-modellen för elektrisk ledningsförmåga utifrån vilken konduktiviteten som beräknas med hjälp av den holografiska dualiteten i kapitel 7 kan analyseras.

## 3.1 Konvention

Innan omformuleringen av elektromagnetismen görs noteras några anmärkningar kring rapportens konventioner. För att kunna skriva ekvationer på kompakta former måste lämpliga enheter användas. Det första valet som görs är att använda Heaviside-Lorentz-enheter, i vilka Maxwells ekvationer lyder

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{B} = 0, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho, \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} = \frac{1}{c} \vec{j}. \quad (3.2)$$

Här betecknar  $\rho$  den elektriska laddningstätheten,  $\vec{j}$  strömtätheten och  $\vec{E}$  och  $\vec{B}$  det elektriska respektive magnetiska fältet. För att eliminera ytterligare faktorer som gör ekvationer mindre eleganta används dessutom naturliga enheter, det vill säga att ljushastigheten och Plancks reducerade konstant  $c = \hbar = 1$ . Även Boltzmanns konstant  $k_B$  sätts till ett. I detta kapitel kommer elektromagnetism för *platt rumtid* presenteras. Signaturen som används för Minkowski-metriken är  $(-, +, +, +)$  och kallas *mostly plus* (det vill säga metriken enligt ekvation (2.7)). Teorin generaliseras dock till godtyckliga rumtider i samband med att den allmänna relativitetsteorin introduceras i kapitel 4.

## 3.2 Den elektromagnetiska fälttensorn och Maxwells ekvationer

En storhet som visar sig vara central i den relativistiska beskrivningen av elektromagnetism är den så kallade *elektromagnetiska potentialen*

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}), \quad (3.3)$$

som är en relativistisk 4-potential vars komponenter utgörs av skalärpotentialen  $\phi$  och vektorpotentialen  $\vec{A}$

[26, kap. 5.3]. De motsvarande elektriska och magnetiska fälten definieras som

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t},$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

Ur detta definieras den *elektromagnetiska fälttensorn*

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.4)$$

Det visar sig att alla permutationer av partialderivator sammanfaller med olika komponenter av fälten  $\vec{E}$  och  $\vec{B}$ . Om de sammanställs i matrisform fås

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Därmed kan de elektriska och magnetiska fälten sammanfattas i en enda tensor. Det är mycket användbart i allmän relativitet då det förenklar beräkningar.

$F_{\mu\nu}$  är den kovarianta elektromagnetiska fälttensorn, men den kontravarianta formen kan erhållas genom transformation med metriken:

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma}.$$

För att kunna teckna Maxwells ekvationer uttryckt i fälttensorn behövs även en 4-strömtäthet. Den betecknas  $j^\mu = (\rho, \vec{j})$  och består av den elektriska laddningstätheten och strömtätheten [26, kap. 5.2]. Med den nya notationen kan Maxwells två inhomogena ekvationer (3.2) skrivas som

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu, \quad (3.5)$$

vilket visas i bilaga A.1. I nästkommande avsnitt illustreras hur de kan härledas med principen om stationär verkan. Härnäst kan också den så kallade Bianchi-identiteten för den elektromagnetiska fälttensorn introduceras [27, kap. 2.4]:

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0. \quad (3.6)$$

Att så är fallet inses genom insättning av sambandet  $\partial_\rho F_{\mu\nu} = \partial_\rho \partial_\mu A_\nu - \partial_\rho \partial_\nu A_\mu$  och är alltså en direkt följd av fälttensorns definition. Bilaga A.1 visar att identiteten i själva verket är Maxwells två homogena ekvationer (3.1).

## 3.3 Den elektromagnetiska verkan

Ett viktigt steg för att hantera de elektromagnetiska fälten är att konstruera den elektromagnetiska verkan  $S[A_\mu]$ . Den ska vara simpel samt invariant under

lorentz- och gaugetransformationer [27, kap. 3.2]. De senare ändrar storheterna med vilka ett system beskrivs på så vis att verkan  $S$  lämnas invariant, exempelvis genom att ändra en potential med en konstant:  $V(x) \mapsto V(x) + V_0$ . I bilaga A.2 redogörs för invarians under transformationen  $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \Lambda$  för någon skalär  $\Lambda$ . Verkan behöver dessutom normeras så att det elektromagnetiska fältet får rätt energidensitet, som i vakuum ges av  $(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2)/2$ . Dessa villkor uppfylls av följande verkan för elektromagnetisk fältteori:

$$S[A_\mu] = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu j^\mu \right]. \quad (3.7)$$

Att ekvation (3.7) resulterar i rätt energitäthet visas i bilaga A.3. Verkan kan generaliseras genom att lägga till en elektromagnetisk kopplingskonstant  $1/g_{\text{em}}^2$  som avgör fältets styrka. För enkelhetens skull kommer det antas att  $g_{\text{em}} = 1$ .

Verkan används, i enlighet med avsnitt 2.1, för att hitta systemets rörelsekvationer. Det kan göras direkt med Euler-Lagranges ekvationer, men här demonstreras även hur verkan kan varieras och göras stationär. För elektromagnetiska fält gäller att

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}) + \delta A_\mu j^\mu \right] \\ &= \int d^4x \left[ -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} + \delta A_\mu j^\mu \right] \\ &= \int d^4x \left[ -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \delta A_\mu j^\mu \right] \\ &= \int d^4x \left[ \delta A_\nu (\partial_\mu F^{\mu\nu} + j^\nu) \right], \end{aligned}$$

där det i sista steget har utförts en partiell integration. Randtermen försvinner eftersom variationen  $\delta A_\nu$  antas vara noll på randen. Om det gäller att  $\delta S = 0$  för alla  $\delta A_\nu$  måste alltså  $\partial_\mu F^{\mu\nu} + j^\nu = 0$ , vilket stämmer överens med ekvation (3.5) eftersom  $F_{\mu\nu}$  är antisymmetrisk. Rörelsekvationerna är alltså Maxwells ekvationer.

### 3.4 Drude-modellen

En enkel beskrivning av en metalls konduktivitet ges av Drude-modellen [28][29]. Den använder klassisk mekanik och behandlar materialet som ett system med fixerade joner och fria elektroner. Elektronerna antas enbart växelverka med andra partiklar genom kollisioner med jonerna. Enligt Newtons rörelselagar beskrivs rörelsemängden  $\vec{p}$  för en elektron med massan  $m$  och laddningen  $q$  av rörelsekvationen

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = q\vec{E} - \frac{\vec{p}}{\tau}. \quad (3.8)$$

Den drivs alltså av det elektriska fältet, men påverkas också av en bromsande kraft till följd av växelverkan med jonerna. Relaxationstiden  $\tau$  motsvarar den genomsnittliga tiden mellan kollisionerna. Partiklarnas rörelsemängd kan relateras till strömtätheten  $\vec{j} = nq\vec{p}/m$ ,

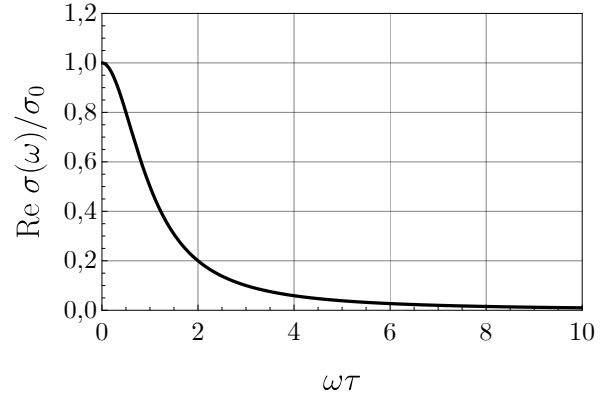
där  $n$  betecknar elektrontätheten. Ett oscillerande fält  $\vec{E} = \vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}$  ger upphov till en strömtäthet på formen  $\vec{j} = \vec{j}(\omega)e^{-i\omega t}$ . Insättning i ekvation (3.8) ger:

$$\left( -i\omega + \frac{1}{\tau} \right) \frac{m}{nq} \vec{j}(\omega) = q\vec{E}(\omega).$$

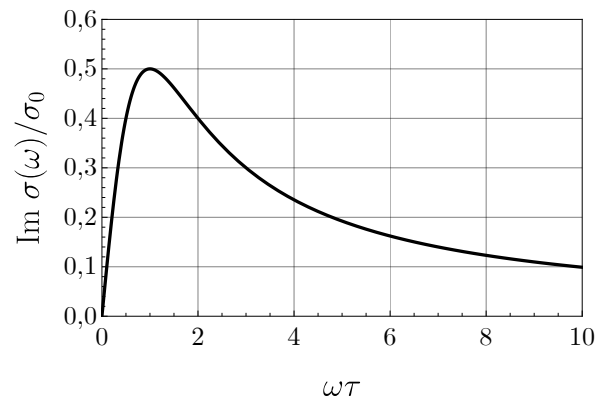
Det följer därför av sambandet  $\vec{j}(\omega) = \sigma(\omega)\vec{E}(\omega)$  att Drude-konduktiviteten blir

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}, \quad (3.9)$$

där  $\sigma_0 = nq^2\tau/m$  är konduktiviteten för statiska fält. Detta frekvensberoende medför att  $\text{Re } \sigma(\omega)$  uppvisar en så kallad Drude-topp vid låga frekvenser, vilket illustreras i figur 3.1. Dess form bestäms av  $\tau$ ; en kort relaxationstid ger en låg och bred Drude-topp. Konduktivitetens realdel kan tolkas som ett mått på dissipation av energi medan imaginärdelen beskriver systemets respons på det pålagda fältet [26, kap. 7.6]. Figur 3.2 visar imaginärdelens frekvensberoende, som är noll vid  $\omega = 0$  samt för höga frekvenser.



**Figure 3.1:** Realdelen av Drude-konduktiviteten  $\sigma$  som funktion av frekvensen  $\omega$ .



**Figure 3.2:** Imaginärdelen av Drude-konduktiviteten  $\sigma$  som funktion av frekvensen  $\omega$ .

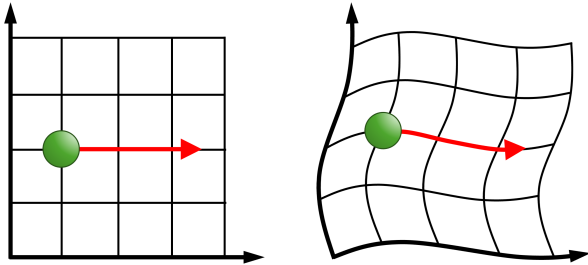
Hur Drude-modellen jämför sig med den kvantfältteoretiska modellen för ett starkt kopplat material förklaras i kapitel 8. Innan den starkt kopplade modellen kan tas fram måste dock teori inom allmän relativitet, kvantfältteori och holografisk dualitet gås igenom.

# 4. Allmän relativitet: Introduktion

Allmän relativitet är den mest centrala teorin i projektet och kommer således också ha den mest utvecklade och rigorösa presentationen. Teorin är uppdelad i två kapitel: detta, som introducerar alla nödvändiga koncept och beräkningstekniker, och nästkommande, som presenterar relevanta tillämpningar och lösningar. Detta kapitel fokuserar alltså huvudsakligen på att bygga en förståelse för den allmänna relativitetsteorin. Den förklaras både genom intuitiva fysikaliska tolkningar och längre uträkningar som är viktiga för förståelsen.

## 4.1 Bakgrund

Allmän relativitet är en teori som förklarar gravitation med geometri; effekterna av vad som tidigare (i klassisk mekanik) setts som gravitationskraft är i själva verket krökningar i rumtiden (se figur 4.1) [27, kap. 0]. Rumtidens krökning brukar visualiseras med en specifik typ av geometrilinjer kallade *geodeter*. Dessa beskriver banan som en partikel (som kan vara masslös) rör sig givet någon initial rörelsemängd samt utan påverkan av yttre (icke-fiktiva) krafter [27, kap. 1.2]. I platt rumtid är det helt enkelt 'rakt fram', men även en krökt geodet kan ses som att röra sig 'rakt fram' då det krävs en yttre kraft för att avvika från den.



**Figur 4.1:** Platt rumtid jämfört med krökt rumtid i två rumsdimensioner. En partikel med någon rörelsemängd rör sig längs sin geodet i respektive rumtid. På grund av den krökta rumtiden i det högra fallet ser rörelsemängdsvektorn för partikeln ut att förändra sig över tid, vilket upplevs som gravitation.

Teorin uppstod som ett sätt att förena gravitationen med speciell relativitet och ersätter därmed Newtons klassiska teori om gravitation. Enligt Newtons gravitationsteori förmedlas gravitationen omedelbart över långa distanser, vilket enligt den speciella relativitetsteorin bryter mot det grundläggande postulatet att ingen information kan röra sig snabbare än ljuset. Genom att bygga gravitationen på fältteori, likt elektromagnetisk fältteori som beror på både rum och tid, fås den allmänna relativitetsteorin ur den speciella relativitetsteorin.

I de flesta fall är korrektionerna införda av allmän relativitet extremt små och kan försummas, men det finns viktiga undantagsfall. Vissa är vardagliga situationer som till exempel att GPS-satelliter behöver göra korrigeringar av sin interna klocka på grund av en svagare upplevd gravitation (och därmed annorlunda upplevd tid) än vid jordytan. Andra är mer exotiska, som till exempel vid studier av svarta hål. Innan svarta hål studeras behövs dock en mer rigorös fysikalisk och matematisk grund presenteras, och en lämplig utgångspunkt är en kort sammanfattning av den mest grundläggande beskrivningen av rumtidens geometri: metriken.

## 4.2 Metriken

I och med att rumden är krökt är metriken  $g_{\mu\nu}(x)$  positionsberoende och avstånd beskrivs, som nämnt i ekvation (2.6), enligt generaliseringen av Pythagoras sats:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu.$$

Eftersom metriken är symmetrisk är den lokalt diagonaliserbar, och eftersom egenvärdena är nollskilda har den en invers, vilket beskrivs i ekvation (2.5).

De större korrigeringarna i allmän relativitet kommer att härstamma från detta positionsberoende; till exempel kommer begrepp såsom derivata och volymentelement behöva justeras på grund av detta.

## 4.3 Christoffel-symbolen

För att ta reda på hur metriken påverkar fält i krökt rumtid behöver ett annat användbart objekt introduceras: *Christoffel-symbolen*, som definieras enligt [24, kap. 7]

$$\Gamma^j_{kl} = \frac{1}{2}g^{ij}(\partial_k g_{il} + \partial_l g_{ik} - \partial_i g_{kl}) = \Gamma^j_{lk}. \quad (4.1)$$

Ett illustrerande exempel på beräkning av Christoffel-symbolen hittas i bilaga B.1, där metriken på en sfär behandlas. Christoffel-symbolen är inte en tensor, ty den följer annorlunda transformeringsregler. En tensor transformeras, i enlighet med teorin i avsnitt 2.3.3, som

$$\tilde{T}^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial y^\nu} T^\alpha_{\beta\gamma}, \quad (4.2)$$

men det visar sig att Christoffel-symbolen får ytterligare en term i sin transformation. Det är ett direkt resultat av insättning av den transformerade metriken i definitionen, vilket utförs i bilaga B.2. Christoffel-symbolen transformeras istället enligt

$$\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial y^\nu} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\alpha}. \quad (4.3)$$

Ett intressant specialfall är när två av Christoffel-symbolens index är identiska summeringsindex:  $\Gamma^\mu{}_{\mu\nu}$ . Enligt definitionen i ekvation (4.1) gäller det att

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\partial_\mu g_{\rho\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\partial_\nu g_{\rho\mu} - \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\partial_\rho g_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}g^{\rho\mu}\partial_\rho g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\partial_\nu g_{\mu\rho} - \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\partial_\rho g_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\partial_\nu g_{\mu\rho}.\end{aligned}$$

I det näst sista steget bytte de två summeringsindexen namn. Härnäst används identiteten  $\ln(\det M) = \text{tr}(\ln M)$  för matriser  $M$  [20, kap. 1]. Derivering av båda sidor ger

$$\partial_\nu \ln |\det M| = \text{tr}(\partial_\nu(\ln M)) = \text{tr}(M^{-1}\partial_\nu M).$$

Med ett koordinatval som gör  $g_{\mu\rho}$  diagonal, med invers enligt ekvation (2.5), erhålls

$$g^{\mu\rho}\partial_\nu g_{\mu\rho} = \partial_\nu \ln |\det g_{\mu\rho}| = \partial_\nu \ln |g|, \quad (4.4)$$

där  $g$  betecknar metriken determinant. Resultatet gäller även om metriken bara är lokalt diagonaliserbar ty både spår och determinant är invariant under konjugering [27, kap. 3.2]. Rumtiderna som betraktas i allmän relativitet är *lorentzianska*, vilket i vårt fall innebär att ett av de diagonala elementen är negativt och medför att  $g < 0$  [30, kap. 2]. Ett enkelt exempel är Minkowski-metriken  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  med determinanten  $\eta = -1$ . Sammanfattningsvis blir

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\partial_\nu \ln(-g) = \partial_\nu \ln \sqrt{-g} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu \sqrt{-g}.\end{aligned} \quad (4.5)$$

Detta är en användbar omskrivning som kommer att utnyttjas i avsnitt 4.5.

## 4.4 Kovariant derivata

En beskrivning av hur fält förändras i rum och tid i allmän relativitet kräver en generalisering av den 'konventionella' derivatan  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ . Den konventionella derivatan tar nämligen inte hänsyn till hur *koordinaterna* förändras i rum och tid. Lösningen på problemet är att införa den så kallade *kovarianta derivatan*  $\nabla_\mu$ . Den definieras med den nyintroducerade Christoffel-symbolen enligt [30, kap. 3.2]

$$\begin{aligned}\nabla_\mu A_{\nu\rho\sigma}^{\kappa\dots} &= \partial_\mu A_{\nu\rho\sigma}^{\kappa\dots} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_{\alpha\rho\sigma}^{\kappa\dots} \\ &\quad - \Gamma_{\mu\rho}^\alpha A_{\nu\alpha\sigma}^{\kappa\dots} - \dots + \Gamma_{\mu\alpha}^\zeta A_{\nu\rho\sigma}^{\alpha\kappa\dots} + \dots\end{aligned} \quad (4.6)$$

Detta val av definition kommer från att en tensors kovarianta derivata  $\nabla_\mu A_{\nu\rho\sigma}^{\kappa\dots}$  också är en tensor. Det visar sig också att metriken är kovariant konstant:

$$\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0. \quad (4.7)$$

## 4.5 Integraler i allmän relativitet

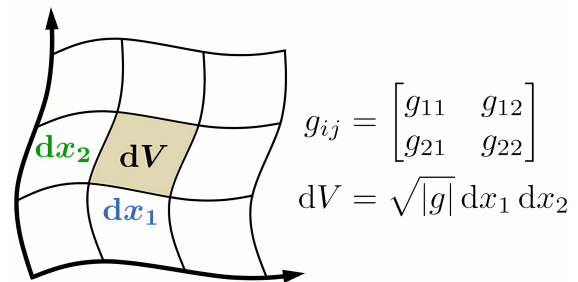
I förra avsnittet definierades en typ av derivata som är användbar i allmän relativitet. Här undersöks istället lämpliga integralformuleringar. Volymelementet i en krökt  $D$ -dimensionell rymd ges av

$$dV = \sqrt{|g_{ij}|} d^D x, \quad (4.8)$$

men för lorentzianska metriker skrivs det

$$dV = \sqrt{-g} d^D x,$$

eftersom determinanten  $g$  där är negativ [30, Kap. 2.10]. Se figur 4.2 nedan för visualisering av volymelementet i två dimensioner.



**Figur 4.2:** Visualisering av volymelementet för en krökt yta. Metriktens element beskriver den lokala krökningen och roten ur (beloppet av) dess determinant agerar jacobian för volymelementet.

Denna definition motiveras av att volymelement måste vara invariant under koordinatbytet  $dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\mu} dy^\mu$ . Att använda kvadratroten av metriken determinant säkerställer att så är fallet, vilket visas närmare i bilaga B.3. När volymelementet har definierats kan integraler hanteras och tillhörande räkneregler bestämmas. Det finns många sätt att skriva om integraler för att underlätta beräkningar, men som regel lyder de viktigaste integralsatserna som

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega, \quad (4.9)$$

där  $\omega$  är en differentialform [27, kap. 2.4]. På så sätt kan integraler över en mångfald  $M$  konverteras till randen  $\partial M$ . Exempel är bland annat Gauss och Stokes satser samt analysens fundamentalsats. Det är av intresse att hitta en kovariant motsvarighet som är lämplig för integraler som uppstår i allmän relativitet. Till hjälp används resultatet erhållet i ekvation (4.5) för att visa följande:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g} \nabla_\mu X^\mu &= \sqrt{-g} [\partial_\mu X^\mu + \Gamma^\mu{}_{\mu\nu} X^\nu] \\ &= \sqrt{-g} \left[ \partial_\mu X^\mu + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu \sqrt{-g} X^\nu \right] \\ &= \sqrt{-g} \partial_\mu X^\mu + \partial_\nu \sqrt{-g} X^\nu \\ &= \partial_\mu (\sqrt{-g} X^\mu).\end{aligned}$$

Alltså gäller identiteten

$$\sqrt{-g} \nabla_\mu X^\mu = \partial_\mu (\sqrt{-g} X^\mu). \quad (4.10)$$

För en antisymmetrisk tensor  $X^{\mu\nu} = -X^{\nu\mu}$  kan detta generaliseras till

$$\sqrt{-g} \nabla_\mu X^{\mu\nu} = \partial_\mu (\sqrt{-g} X^{\mu\nu}). \quad (4.11)$$

För att skriva den kovarianta formen av Stokes sats antas metriken vara på formen

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \gamma_{ij} & 0 \\ 0 & N^2 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Med dessa beteckningar är  $\gamma_{\alpha\beta}$  metriken på randen, vars determinant är  $\gamma$ . Vidare införs en utåtriktad normalvektor  $n_\mu = (0, \dots, 0, N)$ . Observera att  $g = \gamma N^2$  och att  $n_\mu X^\mu = N X^D$  för en godtycklig tensor  $X^\mu$ . Denna notation, tillsammans med identiteten (4.10), medför att

$$\begin{aligned} \int_M d^D x \sqrt{-g} \nabla_\mu X^\mu &= \int_M d^D x \left[ \partial_\mu (\sqrt{-g} X^\mu) \right] \\ &= \int_{\partial M} d^{D-1} x \left( \sqrt{-g} X^D \right) = \int_{\partial M} d^{D-1} x \sqrt{-\gamma} N^2 X^D \\ &= \int_{\partial M} d^{D-1} x \sqrt{-\gamma} n_\mu X^\mu. \end{aligned}$$

I det andra steget kunde divergenssatsen (ett fall av den allmänna integralsatsen, ekvation (4.9)) användas för att överföra integralen till randen. Sammanfattningsvis gäller att

$$\int_M d^D x \sqrt{-g} \nabla_\mu X^\mu = \int_{\partial M} d^{D-1} x \sqrt{-\gamma} n_\mu X^\mu. \quad (4.13)$$

Detta är den kovarianta motsvarigheten av Stokes sats som förekommer i allmän relativitet. Den kan användas för partiell integration med kovarianta derivator. Randtermen får då samma form som högerledet i ekvation (4.13).

## 4.6 Riemann-, Ricci- och Einstein-tensorn

Med hjälp av den tidigare introducerade Christoffel-symbolen definieras nu även en rad användbara tensorer som innehåller information om rumtiden i hanterbara format.

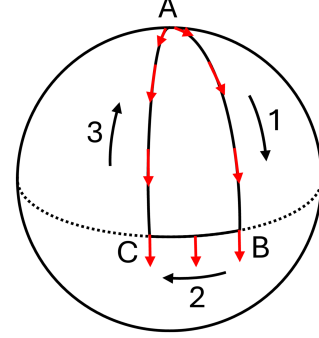
### 4.6.1 Riemann-tensorn

Krökning av rumtid innebär kortfattat att andra ordningens kovarianta derivata i allmänhet inte kommuterar:  $\nabla_\mu \nabla_\nu \neq \nabla_\nu \nabla_\mu$ . Att sätta ett mått på denna icke-kommutativitet kommer att bli väldigt användbart. I differentialgeometri används den så kallade *Riemann-tensorn* för detta ändamål, och likväl är denna tensor också användbar i allmän relativitet.

Med Christoffel-symbolerna definieras Riemann-tensorn enligt [27, kap. 3.4]

$$R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma{}_{\rho\mu} + \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} \Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho} \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}. \quad (4.14)$$

De enskilda komponenterna i Riemann-tensorn innehåller information om hur vektorer förändras under paralleltransportation genom en sluten kurva i mångfalden (se figur 4.3 nedan) [30, kap. 3.6].



**Figur 4.3:** Paralleltransport av vektor på en sfärisk yta. Under förflyttningen förblir vektorns vinkel mot vägen konstant, men i och med ytans krökning kommer den inte längre peka åt samma håll efter att ha gått ett helt varv. Riemann-tensorn beskriver hur denna förändring sker.

Förutom den uppenbara antisymmetrin  $R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} = -R^\sigma{}_{\rho\nu\mu}$  finns ett antal symmetriegenskaper som framträder då det kontravarianta indexet sänks

$$\begin{aligned} R_{\sigma\rho\mu\nu} &= -R_{\sigma\rho\nu\mu} = -R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\sigma\rho}, \\ R_{\sigma\rho\mu\nu} + R_{\sigma\mu\nu\rho} + R_{\sigma\nu\rho\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

I avsnitt 3.2 betraktades Bianchi-identiteten för  $F_{\mu\nu}$ . Nu kan den analoga identiteten för Riemann-tensorn formuleras [27, kap. 3.4]:

$$\nabla_\alpha R_{\sigma\rho\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\sigma\rho\alpha\mu} + \nabla_\mu R_{\sigma\rho\nu\alpha} = 0. \quad (4.16)$$

I beräkningar med kovarianta derivator, såsom i härledningen av ekvation (4.16), kan Christoffel-symbolerna bli överväldigande många. Det visar sig att givet en (lorentzisk) mångfald  $M$  och en punkt  $p \in M$  finns alltid koordinater så att [27, kap. 3.3]

$$g_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu} \quad \text{och} \quad \partial_\rho g_{\mu\nu}(p) = 0.$$

Dylika koordinater kallas *normala koordinater*. I synnerhet gäller att Christoffel-symbolerna för denna punkt och med detta koordinatval är noll. Vid användning av normala koordinater tar termerna i ekvation (4.16) formen

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha R_{\sigma\rho\mu\nu} &= \partial_\alpha R_{\sigma\rho\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\alpha \partial_\nu \partial_\rho g_{\sigma\mu} + \partial_\alpha \partial_\mu \partial_\sigma g_{\nu\rho} \\ &\quad - \partial_\alpha \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\rho} - \partial_\alpha \partial_\mu \partial_\rho g_{\sigma\nu}), \end{aligned}$$

och analogt för andra index. Eftersom partialderivatorna kommuterar följer att addition av de tre termerna resulterar i noll.

### 4.6.2 Ricci-tensorn och Ricci-skalären

Givet Riemann-tensorn kan en ny, mer kompakt tensor kallad *Ricci-tensorn* skapas. Denna tensor innehåller precis som Riemann-tensorn information om krökningen i rumtiden, men rent geometriskt handlar det nu om förändringen av *rumtidsvolymen* (se figur 4.4) i olika riktningar som resultat av denna krökning [31]. Explicit formuleras Ricci-tensorn av kontraktion av det övre indexet med ett av de två deriverande indexen i Riemann-tensorn [27, kap. 3.4]

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}. \quad (4.17)$$

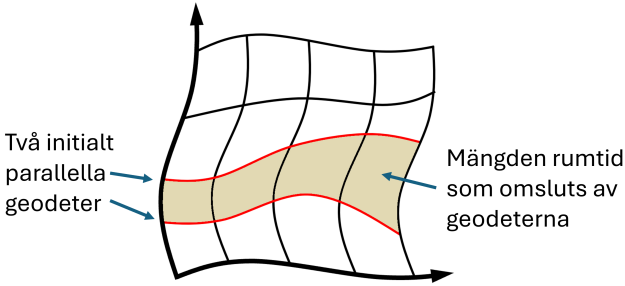
Riemann-tensorns egenskaper resulterar i att Ricci-tensorn får följande symmetri:

$$R_{\mu\nu} = g^{\sigma\rho} R_{\sigma\mu\rho\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\rho\nu\sigma\mu} = R_{\nu\mu}.$$

Ytterligare en kontraktion av index ger *Ricci-skalären*

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (4.18)$$

Skalären är invariant och ger information om rumtidens totala krökning, det vill säga förändring av rumtidsvolymen men utan avseende till riktning. Till exempel har en sfär med radien  $r_0$  Ricci-skalären  $R = 2/r_0^2$ . Se vidare i bilaga B.1 för beräkningen av denna samt Riemann- och Ricci-tensorerna i denna geometri.



**Figur 4.4:** Ricci-tensorn och Ricci-skalärens fysikaliska tolkning. Båda beskriver förändring av rumtidsvolymen mellan två initialt parallella geodeter. Ricci-tensorn innehåller information om förändringen i olika riktningar medan Ricci-skalären endast beskriver den totala förändringen.

Vidare kan Bianchi-identiteten för Riemann-tensorn uttryckas med Ricci-tensorn och Ricci-skalären. Multiplikation av ekvation (4.16) med  $g^{\rho\nu} g^{\sigma\mu}$  ger

$$g^{\rho\nu} g^{\sigma\mu} (\nabla_{\alpha} R_{\sigma\rho\mu\nu} + \nabla_{\nu} R_{\sigma\rho\alpha\mu} + \nabla_{\mu} R_{\sigma\rho\nu\alpha}) = 0.$$

Eftersom metriken kommuterar med den kovarianta derivatan följer att

$$\begin{aligned} & g^{\rho\nu} (\nabla_{\alpha} R_{\rho\nu} - \nabla_{\nu} R_{\rho\alpha} + \nabla_{\mu} R^{\mu}{}_{\rho\nu\alpha}) \\ &= g^{\rho\nu} (\nabla_{\alpha} R_{\rho\nu} - \nabla_{\nu} R_{\rho\alpha} - \nabla_{\mu} R_{\rho}{}^{\mu}{}_{\nu\alpha}) \\ &= \nabla_{\alpha} R - \nabla_{\nu} R^{\nu}{}_{\alpha} - \nabla_{\mu} R^{\mu}{}_{\alpha} = 0. \end{aligned}$$

Namnbyte av summeringsindex medför att  $\nabla_{\alpha} R = 2\nabla_{\nu} R^{\nu}{}_{\alpha}$ . Genom att återigen använda att metriken

och den kovarianta derivatan kommuterar erhålls följande alternativa sätt att skriva Bianchi-identiteten [27, kap. 3.4]:

$$\nabla^{\mu} R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_{\nu} R. \quad (4.19)$$

### 4.6.3 Einstein-tensorn

Slutligen är det ofta intressant att känna till storheter som är oförändrade, det vill säga att deras kovarianta derivata är noll. Ett exempel på en sådan tensor är *Einstein-tensorn*  $G_{\mu\nu}$  som alltså skall uppfylla [27, kap. 3.4.1]

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0. \quad (4.20)$$

Med utgångspunkt i Bianchi-identiteten enligt ekvation (4.19) gäller

$$\nabla^{\mu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla_{\nu} R = \nabla^{\mu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0.$$

Här hittas en tensor med den önskade egenskapen. Det är denna som definieras som Einstein-tensorn

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \quad (4.21)$$

## 4.7 Einsteins fältekvationer

Som sista steg i introduktionen till allmän relativitet införs dess verkan för att härleda rörelseekvationerna. Det görs med principen om stationär verkan, på ett liknande sätt som för elektromagnetisk fältteori i avsnitt 3.3. Verkan bör som vanligt vara så simpel som möjligt samt lorentzinvariant och nu även invariant under koordinatbyte. En elegant lösning som uppfyller detta består av Ricci-skalären  $R$  samt två konstanter [27, kap. 4.1]. Tillsammans med volymelementet enligt ekvation (4.8) ges *Einstein-Hilbert-verkan*

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int \sqrt{-g} d^D x [R - 2\Lambda]. \quad (4.22)$$

*Einsteins gravitationskonstant*  $\kappa$  relaterar till Newtons gravitationskonstant  $G$  enligt  $\kappa^2 = 8\pi G$ . Dess värde säkerställer att Einsteins gravitationsbeskrivning sammanfaller med Newtons vid små avvikelser från Minkowski-metriken [32]. Den *kosmologiska konstanten*  $\Lambda$  kan tolkas som ett mått på energitätheten i vakuum [30, kap. 4.5]. Denna energi påverkar universums expansion; en positiv kosmologisk konstant accelererar expansionen, medan  $\Lambda \leq 0$  tenderar att ge motsatt effekt. Konstantens värde för vårt universum är dock inte fastställt och dess existens har länge varit under diskussion [33].

Inverkan av materia representeras av en term  $S_m$  med lagrangiantätheten  $\mathcal{L}_m$ . Denna materieverkan adderas till  $S_{\text{EH}}$  och ger den totala verkan

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int \sqrt{-g} d^D x [R - 2\Lambda + 2\kappa^2 \mathcal{L}_m].$$

Nu kan verkan varieras med avseende på metriken:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \left( \delta(\sqrt{-g}) \left[ R - 2\Lambda + 2\kappa^2 \mathcal{L}_m \right] + \sqrt{-g} \left[ R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + 2\kappa^2 \delta \mathcal{L}_m \right] \right).$$

Termen innehållande  $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$  visar sig kunna skrivas om till

$$\begin{aligned} & \int_M d^D x \sqrt{-g} \nabla_\rho (g_{\mu\nu} \nabla^\rho \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta g^{\rho\nu}) \\ &= \int_{\partial M} d^{D-1} x \sqrt{-\gamma} n_\rho (g_{\mu\nu} \nabla^\rho \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta g^{\rho\nu}), \end{aligned}$$

där integralsatsen i ekvation (4.13) används för att konvertera integralen till en randterm. I enkla fall kan variationen och dess derivata antas gå mot noll i oändligheten, vilket medför att bidraget försvinner [30, kap. 4]. En mer fullständig bild kräver dock att verkan korrigeras med den så kallade Gibbons-Hawking-randtermen [27, kap. 4.1].

Därefter kan faktorn  $\delta(\sqrt{-g})$  betraktas. Från ekvation (4.4) är det känt att  $g^{\mu\rho} \partial_\nu g_{\mu\rho} = \partial_\nu \ln(-g) = \frac{1}{-g} \partial_\nu(-g)$ . Detta tillsammans med några omskrivningar ger

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta(-g) = \frac{1}{2} \frac{-g}{\sqrt{-g}} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Insättning i den varierade verkan ovan (som ska vara noll) ger därmed, tillsammans med faktumet att  $\delta \mathcal{L}_m = \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}$  att

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \left( -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \left[ R - 2\Lambda + 2\kappa^2 \mathcal{L}_m \right] + \sqrt{-g} \left[ R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + 2\kappa^2 \delta \mathcal{L}_m \right] \right) \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int \sqrt{-g} d^D x \left( -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} - \kappa^2 g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m + R_{\mu\nu} + 2\kappa^2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int \sqrt{-g} d^D x \left( G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + 2\kappa^2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \kappa^2 g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m \right) \delta g^{\mu\nu} = 0, \end{aligned}$$

där vi i sista steget använt oss av den tidigare introducerade definitionen av Einstein-tensorn  $G_{\mu\nu}$  (ekvation (4.21)). Om verkansskillnaden skall vara noll för alla  $\delta g^{\mu\nu}$  måste det alltså gälla att

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -2\kappa^2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} + \kappa^2 g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m.$$

Högerledet kan skrivas som en enda tensor. Den definieras som

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} = g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} \quad (4.24)$$

och kallas *stress-energitensorn* [30, kap. 4.3]. Den utgör den del av rörelseekvationerna som beskriver hur metriken påverkas av materia. Tensorn kan tolkas som en relativistisk generalisering av den klassiska stresstensorn, där dess komponenter är tätheter av 4-rörelsemängder i olika riktningar. Den klassiska stresstensorn med normal- och skjuvspänningar ges av rumskomponenterna  $T^{ij}$ , medan  $T^{00}$ ,  $T^{0i}$  och  $T^{i0}$  motsvarar energidensiteten, energiflödet respektive rörelsemängdstätheten [34]. De fullständiga rörelseekvationerna ser alltså ut som följande:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (4.25)$$

vilket är Einsteins berömda fältekvationer. Exempel på hur  $T_{\mu\nu}$  påverkar lösningarna kommer att ges i nästa kapitel. Om den kopplade verkan för materia inte hade inkluderats i härledningen skulle högerledet och stress-energitensorn vara noll.

# 5. Allmän relativitet: Svarta hål

Detta kapitel tillämpar teorin från tidigare avsnitt med syfte att förklara olika lösningar till Einsteins fältekvationer. Dessa kommer sedan att användas när den optiska konduktiviteten hos starkt kopplade material beräknas ur den holografiska principen i kapitel 7. Vidare beskrivs den fysikaliska innebörden av lösningarna, som förklarar existensen av så kallade *svarta hål*.

## 5.1 Bakgrund

Efter formuleringen av Einsteins fältekvationer (ekvation (4.25)) år 1915 söktes exakta lösningar till dem. I de enklaste fallen är stress-energitensorn  $T_{\mu\nu}$  noll, det vill säga att fältekvationerna behandlas i vakuum. En trivial lösning är platt rymd där Minkowski-metriken  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  gäller och  $\Lambda = 0$ . Den första icke-triviala lösningen som hittades kallas *Schwarzschild-metriken* och publicerades 1916 av Karl Schwarzschild [35]. Det är den enklaste (icke-triviala) lösningen till fältekvationerna, och trots att den endast beror på en enda parameter, massan  $M$ , har den enorma konsekvenser för vår förståelse av universum. Det uppkommer punkter i rumtiden som ger singulariteter i metriken, något som verkar fullständigt ofysikaliskt.

Om dessa punkter är fysiska singulariteter eller bara ett resultat av en inkomplett matematisk formulering debatteras än idag (se exempelvis artikeln av Roy Kerr 2023 [36]). Existensen av de svarta hålen *kring* dessa punkter är dock säkra; sir Roger Penrose tilldelades nobelpriset i fysik år 2020 för sitt arbete som visar att formländet av svarta hål är en robust förutsägelse av den allmänna relativitetsteorin [37].

Ett svart hål är regionen kring en sådan singularitet där gravitationen är stark nog att ingen information — inte ens elektromagnetisk strålning — kan lämna den. Mer allmänna fall av svarta hål än Schwarzschild-metriken visar att de utöver massan också karaktäriseras av den elektriska laddningen  $Q$  och rörelsemängdsmomentet  $J$ . Detta sammanfattas i *no hair theorem*-hypotesen som säger att alla stationära svarta hål i asymptotiskt platt rumtid *endast* karaktäriseras av dessa tre egenskaper [27, kap. 6.3].

Svarta hål verkar bryta mot termodynamikens andra lag, då de enligt *no hair theorem*-hypotesen har entropin  $S_{\text{sh}} = 0$ . Genom att betrakta ett system med ett svart hål och ett objekt med entropin  $S_o > 0$  framgår att systemets totala entropi *minskar* om det svarta hålet absorberar objektet. Förmodligen är hypotesen således ofullständig, men i nuläget finns ingen annan generaliserad modell som inkluderar entropi.

Det visar sig däremot att det ändå finns sätt att koda in information annat än  $M$ ,  $J$  och  $Q$  i svarta hål givet rätt omgivning. Efter att de relevanta lösningarna för svarta hål presenteras kommer den så kallade *anti-de Sitter-rumtiden* att introduceras. Den gör det möjligt att avläsa information på randen av en rumtid med ett svart hål via en dualitet med den konforma fältteorin [13][38].

Vad randen av en svart hål-modell är, vad CFT innefattar och vad dess dualitet med AdS betyder kommer dock inte täckas här, utan hänvisas till senare kapitel. I detta kapitel är vi bara intresserade av matematiken bakom svarta hål samt dess lösningar i AdS-rumtid.

## 5.2 Schwarzschild-lösningen

Den första lösningen som undersöks är den tidigare nämnda Schwarzschild-lösningen. Den beskriver metriken utanför sfäriskt symmetriska massor  $M$  som är stationära ( $J = 0$ ) och oladdade ( $Q = 0$ ) i en rumtid där  $\Lambda = 0$ . Metriken approximerar långsamt roterande objekt som planeter och stjärnor väl, men lämpar sig inte väl för snabbt roterande objekt som exempelvis neutronstjärnor.

### 5.2.1 Schwarzschild-metriken

Först studeras hur Einsteins fältekvationer (ekvation (4.25)) kan formuleras i frånvaro av materia. Högerledet,  $T_{\mu\nu}$ , som härstammar från närvaron av materia, är noll i vakuum. Multiplikation med  $g^{\mu\nu}$  ger

$$g^{\mu\nu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) = 0.$$

Med hjälp av Ricci-skalärens definition och identiteten  $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta^\mu_\mu = D$  visar sig ekvationerna kunna skrivas på formen

$$(2 - D)R + 2D\Lambda = 0. \quad (5.1)$$

Med tre rumsdimensioner och en tidsdimension är  $D = 4$  och Einsteins fria ekvationer skrivs

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (5.2)$$

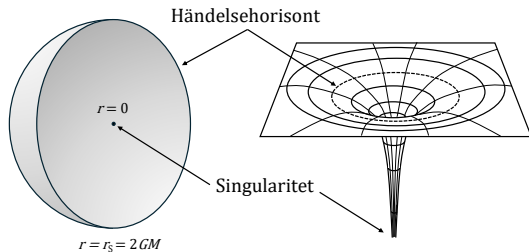
Detta är en vanlig lösningsgång och ger en elegant startpunkt för att härleda Schwarzschild-lösningen. Den bestäms genom att ansätta en sfäriskt symmetrisk metrik som närmar sig Minkowski-metriken och Newtons gravitationsbeskrivning i oändligheten, det vill säga är *asymptotiskt platt*. Schwarzschild-metriken beskrivs i fallet  $D = 4$  av

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega_2, \quad (5.3)$$

där det sfäriska vinkelberoendet utgörs av  $\mathbf{S}^2$ -metriken  $d\Omega_2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  och [30, kap. 5.1]

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r}. \quad (5.4)$$

Se figur 5.1 nedan för visualisering av lösningen.



**Figur 5.1:** Svart hål i Schwarzschild-metriken. Till vänster: tvärsnitt av det svarta hålet i tre rumdimensioner. Till höger: det svarta hålet i två rumdimensioner och rummets krökning kring det. Notera att geometrilinjerna inte är menade att vara geodeter.

En intressant observation är singulariteten som uppstår då  $r = r_S = 2GM$ . Radien benämns *Schwarzschild-radien*, där den så kallade *händelsehorisonten* ligger. Innanför den byter  $f(r)$  tecken: tiden blir rumslig och radien tidslig. Det betyder att tid och rum byter betydelse, och man har inget annat val än att röra sig radiellt mot centrum precis som vi normalt inte har något annat val än att röra oss framåt i tiden. Mer om den fysikaliska innebörden diskuteras i nästkommande avsnitt. Schwarzschild-metriken kan generaliseras till fall där  $\Lambda \neq 0$ . Metriken antar då samma form men funktionen  $f(r)$  får en ytterligare term;

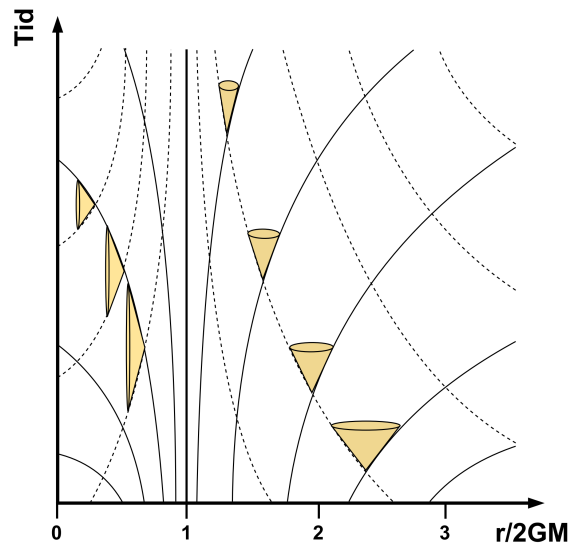
$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^3. \quad (5.5)$$

### 5.2.2 Händelsehorisonter och singulariteter

Fysikaliskt innebär händelsehorisonten den gräns innanför vilken information går förlorad ur en yttre observatörs perspektiv [39]. Ingen information, inte ens ljus, kan passera händelsehorisonten utåt. Objektet kan därför tolkas som ett svart hål med sin ‘rand’ vid Schwarzschild-radien. Det gäller förutsatt att massans utsträckning är mindre än  $r_S$ , så att fältekvationerna i vakuum gäller [24, kap. 18]. Observera att då  $M = 0$  existerar det längre inget svart hål och Schwarzschild-metriken återgår till Minkowski-metriken.

Ett intressant fenomen är att tidsdilatationen närmar sig oändligheten för ett objekt som närmar sig händelsehorisonten (då  $f(r)$  går mot noll). Det innebär att objektet ser ut att stanna i tiden för en yttre observatör. Det går alltså inte att observera att ett objekt passera horisonten (se figur 5.2). För en observatör

som närmar sig händelsehorisonten gäller dock det omvända: resten av universum ser ut att ‘snabba upp’ i tiden, medan horisonten passerar i vad som upplevs som ändlig tid. För små svarta hål kommer en medveten observatör dock inte kunna uppleva detta: de starka ‘tidvattenkrafterna’ från den snabba förändringen av gravitation nära det svarta hålet kan bli så stora att de sliter sönder materia redan innan den passerar horisonten. För stora svarta hål blir tidvattenkrafterna så starka först innanför horisonten [40, kap. 11.8][41].



**Figur 5.2:** Ljuskonens beteende nära händelsehorisonten i Schwarzschild-metrik. När den närmar sig horisonten från utsidan smalnar den av asymptotiskt mot noll, det vill säga tiden ‘stannar av’. Innanför horisonten, där tiden är rumslig och vice versa, beter sig således ljuskonen tvärtom. Streckade linjer är utgående ljusgeodeter, medan heldragna är ingående ljusgeodeter.

Schwarzschild-radiens singularitet är inte en fysisk singularitet, utan ett resultat av koordinatvalet. Med lämpligt koordinatbyte, exempelvis *Kruskal-Szekeres-koordinater*, kan den undvikas [30, kap. 5.7][40, kap. 11.9]. De uppfyller att

$$ds^2 = -\frac{32G^3M^3}{r}e^{-r/2GM} (dT^2 - dR^2) + r^2d\Omega_2,$$

$$T^2 - R^2 = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right) e^{r/2GM},$$

där koordinaten  $T$  är tidslig och  $R$  är rumslig. Med denna transformation av koordinaterna  $r$  och  $t$  elimineras alltså singulariteten i händelsehorisonten. Med andra ord ändrar vi vad som menas med rum och tid, utan att ändra något rent fysikaliskt.

Det finns däremot en singularitet i lösningen som inte är koordinatberoende:  $r = 0$ . Detta är vad som verkar vara det svarta hålets fysiska singularitet där det svarta hålets massa  $M$  befinner sig. Oavsett koordinatval resulterar denna punkt i en singularitet. Som

nämnt tidigare är det inte känt huruvida denna singularitet existerar eller ej i verkligheten, men effekterna av gravitation utanför det svarta hålet är desamma.

### 5.3 Reissner-Nordström-lösningen

Schwarzschilds lösning visade sig tidigt vara ett specialfall av en mer allmän lösning till Einsteins fältekvationer som behandlar elektriskt laddade massor. Den hittades 1916 av bland andra Hans Reissner [42] och är känd som *Reissner-Nordström-lösningen*.

#### 5.3.1 Reissner-Nordström-metriken

Om objektet har en elektrisk laddning  $Q$  alstras ett elektriskt fält i den kringliggande rumtiden. Eftersom elektromagnetiska fält bär på energi innebär det att stress-energitensorn  $T_{\mu\nu}$  blir nollskild. Den definieras för en viss materieverkan  $S_m$  enligt ekvation (4.24) av

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (5.6)$$

Om problemet löses i vakuum utanför ett sfäriskt symmetriskt svart hål med laddningen  $Q$  utgörs  $S_m$  lämpligtvis av Maxwell-verkan

$$S_{EM}[A_\mu] = \int d^D x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \quad (5.7)$$

utan ström [27, kap. 4.5]. Enligt beräkningar i bilaga A.3 blir stress-energitensorn

$$T_{\mu\nu} = F^\rho{}_\mu F_{\rho\nu} - \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} g_{\mu\nu}. \quad (5.8)$$

Fältekvationerna löses genom att använda en ansats som utgår från den sfäriska symmetrin [30, kap. 6.5]. För  $D = 4$  blir metriken vinkelberoende återigen  $d\Omega_2$ . En rimlig metrik är därmed

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-A, B, r^2, r^2 \sin^2 \theta), \quad (5.9)$$

där  $A$  och  $B$  är två radiella funktioner som ska bestämmas. Vidare bör det elektriska fältets riktning och beroende vara radiella, medan det magnetiska fältet är noll. Den elektromagnetiska fälttensorn har därför endast två nollskilda komponenter:  $F_{tr} = -F_{rt} = -E_r$ , där  $E_r$  är det elektriska fältet. Det bestäms av Maxwells ekvationer, som tack vare ekvation (4.11) och fälttensorns antisymmetri kan skrivas på formen

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = 0. \quad (5.10)$$

För den ansatta metriken är  $\sqrt{-g} = \sqrt{AB} r^2 \sin \theta$  och den kontravarianta fälttensorns nollskilda komponenter är  $F^{tr} = -F^{rt} = E_r/AB$ . På grund av symmetrin erhålls endast en icke-trivial ekvation:

$$\partial_r \left( r^2 \frac{E_r}{AB} \right) = 0.$$

Ur detta fås  $E_r = C_Q \sqrt{AB}/r^2$ , där  $C_Q$  är en integrationskonstant [42]. Den beror på laddningen och bestäms genom att betrakta gränsen  $r \rightarrow \infty$ . Då måste metriken gå mot Minkowski-metriken, vilket innebär att  $A, B \rightarrow 1$ . Eftersom den totala laddningen som innesluts är  $Q$  ger Gauss lag på integralform att  $C_Q = Q/4\pi$ . Det elektriska fältet blir därmed

$$E_r = \frac{Q\sqrt{AB}}{4\pi r^2}. \quad (5.11)$$

Med hjälp av metriken, ekvation (5.9), och det elektriska fältet, ekvation (5.11), kan Einsteins fältekvationer lösas. Fullständiga beräkningar utförs i bilaga B.4, där slutsatsen att  $B(r) = 1/A(r)$  dras. Reissner-Nordström-metriken kan därför skrivas

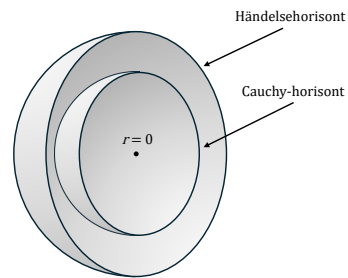
$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\Omega_2, \quad (5.12)$$

där funktionen  $f(r)$  bestäms till

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \frac{\kappa^2 Q^2}{32\pi^2 r^2}. \quad (5.13)$$

#### 5.3.2 Fysikalisk tolkning

Av Reissner-Nordström-metriken framgår att Schwarzschild-lösningen som förväntat fås av specialfallet  $Q = \Lambda = 0$  (jämför ekvation (5.4) med (5.13)). Notera att laddningen (Reissner-Nordström) kan ge upphov till förekomsten av två horisonter: en yttre händelsehorisont och en inre så kallad *Cauchy-horisont* [30, kap. 6.5]. Se figur 5.3 för visualisering av lösningen. Beroende av värdet på  $M$ ,  $\Lambda$  och  $Q$  kan de olika horisonterna ha olika betydelse för koordinaterna  $r$  och  $t$ . Är laddningen tillräckligt liten relativt  $M$  och  $\Lambda$  byter tid och rum betydelse innanför den yttre horisonten, men byter tillbaka innanför den inre. Man kan alltså röra sig fritt innanför den inre horisonten och undvika singulariteten. Är laddningen istället tillräckligt stor saknas reella radier för horisonterna. Då existerar det ingen händelsehorisont och singulariteten kan alltså undvikas även här. För vidare läsning, se Hobson m.fl. [40, kap. 12.6–12.8].

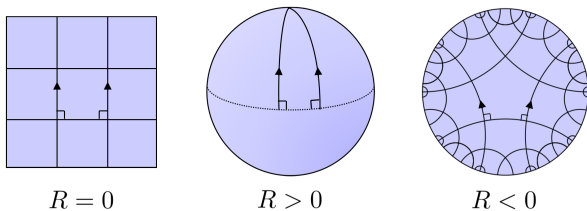


**Figur 5.3:** Svart hål i Reissner-Nordström-metriken i tre rumsdimensioner. Den yttre horisonten är som bekant händelsehorisonten, medan den inre är Cauchy-horisonten.

De för projektet relevanta svarta hål-lösningarna har nu presenterats. Den generaliserade lösningen för roterande ( $J \neq 0$ ) och laddade svarta hål i expanderande rymd ( $\Lambda \neq 0$ ) är den så kallade *Kerr-Newman-lösningen* [30, kap. 6.6]. Denna är dock inte nödvändig för projektet och lämnas som rekommenderad vidare läsning vid intresse. Istället görs i nästa avsnitt en omskrivning av den nyfunna Reissner-Nordström-lösningen i den så kallade *anti-de Sitter-metriken*; ett kritiskt steg i processen inför AdS/CFT-dualiteten.

## 5.4 Anti-de Sitter-rumtid

Som tidigare nämnts ger Ricci-skalären  $R$  information om rumtidens totala krökning. För att få en intuitiv förståelse för hur krökning fungerar kan något mer vardagligt, exempelvis en tvådimensionell yta, betraktas. Om det inte finns någon krökning ( $R = 0$ ), är ytan helt platt; likt ett pappersark, där parallella linjer förblir parallella. En positiv krökning ( $R > 0$ ) kan istället jämföras med ytan av en sfär, där parallella linjer saknas, medan en negativ krökning ( $R < 0$ ) är som en hyperbolisk yta, där parallella linjer istället divergerar (se figur 5.4 nedan).



**Figur 5.4:** Platt, sfärisk och hyperbolisk geometri med respektive tillhörande värde på Ricci-skalären  $R$ .

Denna analogi kan sträckas till fler dimensioner. Så kallad *platt*, *sfärisk* och *hyperbolisk* geometri gäller i allmänhet för ett godtyckligt antal dimensioner, och beskriver i grund och botten huruvida lägre dimensionella ytor som lokalt verkar ‘parallella’ konvergerar eller divergerar (eller förblir parallella). Exempelvis innebär ett  $D$ -dimensionellt rum med sfärisk geometri att alla tillsynes parallella  $d$ -dimensionella ‘ytor’, där  $d < D$ , så småningom konvergerar i en  $(d-1)$ -dimensionell ‘linje’.

I den allmänna relativitetsteorin resulterar fallet med  $R = 0$ , inte helt förvånande, i platt Minkowski-rumtid. Det positiva fallet,  $R > 0$ , kallas för *de Sitter-rumtid* medan det negativa,  $R < 0$ , benämns *anti-de Sitter-rumtid* (ofta förkortat till *AdS*) [43, kap. 5.2]. Fokuset läggs på den sistnämnda för att kunna studera AdS/CFT-dualiteten (som förklaras i kapitel 6).

Den  $D$ -dimensionella AdS-rumtiden kan beskrivas som en hyperboloid av dimension  $D = d + 2$  med radien  $L$ .

Den kan parametreras på formen [44]

$$-L^2 = -X_0^2 - X_{-1}^2 + \sum_{i=1}^{d+1} X_i^2.$$

Hyperboloiden är inbäddad i en  $(D + 1)$ -dimensionell platt rumtid med metriken

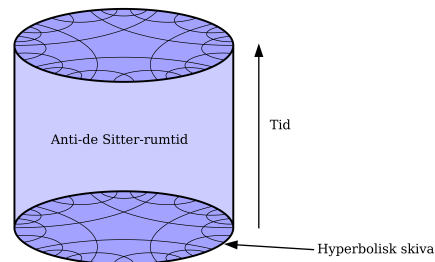
$$ds^2 = -dX_0^2 - dX_{-1}^2 + \sum_{i=1}^{d+1} dX_i^2.$$

De  $d + 3$  dimensionerna kan tolkas som  $d + 1$  rumsliga (positiva) dimensioner och två tidsliga (negativa) dimensioner. Anti-de Sitterrumtidens hyperboliska struktur illustreras i figur 5.5. En vanligare parametrering är dock *Poincaré-koordinaterna*  $(t, z, \vec{x})$  som resulterar i metriken

$$g_{\mu\nu} = \frac{L^2}{z^2} \text{diag}(-1, 1, \dots, 1). \quad (5.14)$$

Av den hyperboliska AdS-rumtidens  $D = d + 2$  dimensioner är en tidslig och resterande rumsliga.

Poincaré-koordinaterna täcker egentligen inte hela rumtiden (utan delar den i två halva hyperboloider, där det oftast är  $z > 0$  som väljs), men används flitigt då den har en mer lätthanterlig form som fortfarande stämmer i korrespondensen AdS/CFT. Med denna parametrering har AdS-rumtiden en singularitet i  $z = 0$ , som kan ses som dess ‘rand’. Denna rand ligger egentligen i oändligheten ty  $z$  har en invers relation till radiella koordinaten  $r$ , det vill säga  $z \rightarrow 0$  då  $r \rightarrow \infty$ .



**Figur 5.5:** Enkel bild av  $\text{AdS}_3$ . Det (oändliga) tvådimensionella rummet representeras av en hyperbolisk skiva, där randen motsvarar  $r = \infty$ , och tiden representeras av den vertikala axeln. Det cylindriska skalet som bildas av skivans rand och tidsaxeln kallas för den *konforma randen*.

## 5.5 Reissner-Nordström i AdS

Rumtiden kring ett elektriskt laddat svart hål, som asymptotiskt övergår till anti-de Sitter-rumtid då  $z \rightarrow 0$ , kan bestämmas genom att ansätta en sfäriskt symmetrisk metrik som liknar den i ekvation (5.14):

$$g_{\mu\nu} = \frac{L^2}{z^2} \text{diag} \left( -f(z), \frac{1}{f(z)}, 1, \dots, 1 \right). \quad (5.15)$$

Notera att de två första komponenterna avser tiden och  $z$ -koordinaten; en metrik som beskrivs av denna tensor är alltså ekvivalent med sambandet

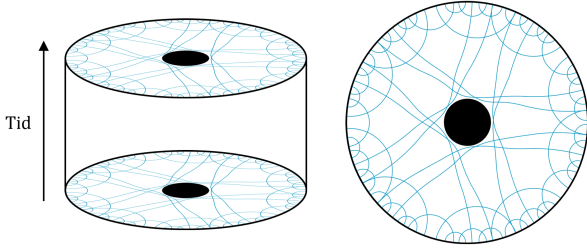
$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} \left( -f(z)dt^2 + \frac{1}{f(z)}dz^2 + dx_1^2 + \dots + dx_d^2 \right).$$

Fältekvationerna kan lösas på samma sätt som för Reissner-Nordström-lösningen i förra avsnittet. En fullständig beräkning finns att läsa i bilaga B.5. Lösningen som hittas är

$$f(z) = 1 - \left( 1 + \frac{d-1}{d} \frac{\kappa^2 \mu^2 z_H^2}{L^2} \right) \left( \frac{z}{z_H} \right)^{d+1} + \frac{d-1}{d} \frac{\kappa^2 \mu^2 z_H^2}{L^2} \left( \frac{z}{z_H} \right)^{2d}, \quad (5.16)$$

där  $z = z_H$  ger händelsehorisonten. Se figur 5.6 nedan för visualisering av lösningen. Konstanten  $\mu$  relateras till laddningen, och den elektromagnetiska potentialens nollskilda komponent är

$$A_t = \mu \left[ 1 - \left( \frac{z}{z_H} \right)^{d-1} \right]. \quad (5.17)$$



**Figur 5.6:** Visualisering av ett Reissner-Nordström-svart hål i  $\text{AdS}_3$  med tillhörande hyperbolisk skiva till höger. Rumtiden betes sig som AdS vid randen ( $z = 0$ ), men kröks kraftigt nära det svarta hålet. Notera att geometrilinejerna inte är matematiskt korrekta geodeter, utan endast en illustration av krökningen.

Det visar sig att kravet om asymptotisk anti-de Sitter-rumtid ger en relation mellan AdS-radien och den kosmologiska konstanten. De fullständiga beräkningarna visar nämligen, eftersom  $f(z) \rightarrow 1$  då  $z \rightarrow 0$ , att

$$\Lambda = -\frac{d(d+1)}{2L^2}. \quad (5.18)$$

Notera speciellt att  $\Lambda < 0$  för anti-de Sitter-rumtid med  $d \geq 1$ , vilket är konsekvent med en negativ krökning i ekvation (5.1), eftersom  $D \geq 3$ .

## 5.6 Hawking-temperaturen

År 1974 använde Stephen Hawking matematiken för svarta hål tillsammans med kvantfältteori för att visa att svarta hål avger en strålning [45]. Denna strålning

kallas numera *Hawking-strålning* och visar sig vara ekvivalent med värmestrålning, vilket betyder att svarta hål har en temperatur (*Hawking-temperatur*) [46]. För ett svart hål i en rumtid med metrik av samma slag som den i ekvation (5.15) definieras denna temperatur som [47, kap. 6]

$$T_H = \frac{1}{4\pi} |f'(z_H)|. \quad (5.19)$$

Att så är fallet kan bekräftas genom ett koordinatbyte då metriken utvecklas kring horisonten. Den exakta formen följer av fältteori samt att horisonten inte utgör en singularitet [17, kap. 4]. Hawking-temperaturen är en användbar parameter när  $f(z)$  behöver taylorutvecklas nära horisonten. Med funktionen  $f(z)$  enligt ekvation (5.16) evalueras  $T_H$  till

$$T_H = \frac{1}{4\pi z_H} \left( d+1 - \frac{(d-1)^2}{d} \frac{\kappa^2 \mu^2 z_H^2}{L^2} \right). \quad (5.20)$$

Med detta har all relevant teori inom allmän relativitet presenterats. I nästa kapitel lämnar vi tillfälligt relativitet, och börjar istället med att gå igenom nödvändig kunskap inom kvantfältteori innan AdS/CFT-dualiteten slutligen presenteras.

# 6. Kvantfältteori och holografisk dualitet

Holografisk dualitet bygger på att det finns en dualitet mellan en rymd och en annan rymd i en högre dimension [48]. Ett specifikt fall är AdS/CFT-dualiteten, där kvantgravitation i AdS-rymd relateras med konform fältteori i en lägre dimension. Vad som relateras i denna dualitet och hur den används förklaras i detta kapitel.

## 6.1 Brott mot konform symmetri

Vårt att poängtera är att ‘konform fältteori’ som sådan inte används i detta projekt; det är egentligen mer korrekt att använda benämningen *kvantfältteori (QFT)*. Anledningen till att *konform fältteori (CFT)* ändå nämnts är att AdS/CFT-dualiteten bygger på symmetrin mellan just en konform kvantfältteori och AdS-rymd. En konform kvantfältteori är en kvantfältteori inom vilken fysikens lagar är invarianta under konforma transformationer: transformationer som lokalt bevarar vinklar men inte nödvändigtvis längdskalor. En sådan teori bryr sig alltså inte om längder och avstånd (det vill säga storskalig fysik är densamma som småskalig fysik) [49, kap. 4]. AdS/CFT-dualiteten gäller således specifikt för *ren* AdS-rymd, det vill säga en rumtid utan skala; en sådan är konformt invariant överallt.

Så fort vi lägger till vårt Reissner-Nordström-svarta hål med ändlig temperatur bryts skalinvariansen (och därmed också CFT-symmetrin) i rumtiden nära det svarta hålet, vilket motsvarar lågenergifysik (även kallad *IR-fysik*) för materialet på randen [50]. Nära randen, vilken motsvarar högenergifysik (*UV-fysik*), är modellen däremot fortfarande konform då effekterna av det svarta hålet går mot noll. Därmed kan  $z$ -koordinaten tolkas som en energi-koordinat, där minskande  $z$  representerar ökande energi [51]. Det visar sig att AdS/CFT-korrespondensen gäller så länge randen är konform även om den inre rumtiden i sig inte är det, varför det fungerar att använda fysiken nära svarta hål i AdS/CFT-dualiteten trots att den konforma symmetrin bryts [52, kap. 3].

## 6.2 Vägintegraler och partitionsfunktioner

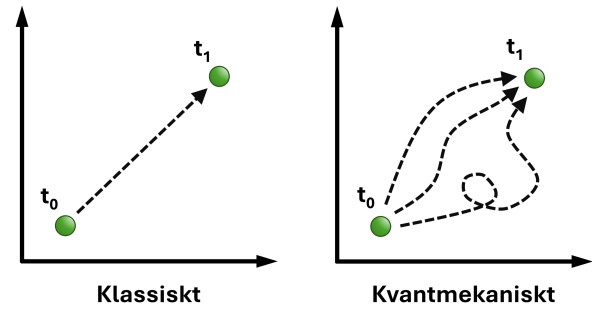
Det som kommer användas för att sammankoppla kvantfältteorin och gravitationsteorin är *partitionsfunktioner* och *genererande funktionaler*, vilka vi får fram ur *vägintegraler*.

*Feynmans vägintegral* används för att evaluera den kvantmekaniska propagationen mellan två punkter i

koordinatsystemet  $q$  med en given verkan  $S[q]$ . Detta är ett resultat av att partiklar propagerar som vågor när de inte interagerar med sin omgivning. Verkan beskriver sannolikheten att propagera en viss väg eller riktning, så för att bestämma sannolikheten att propagera mellan två punkter beräknas en integral över alla möjliga vägar viktad med sannolikheten för varje väg (se figur 6.1). Liksom i föregående kapitel används naturliga enheter för att förenkla uttrycken. Formellt beskrivs vägintegralen som

$$\langle q_f | e^{-i\hat{H}t} | q_i \rangle = \int \mathcal{D}q e^{iS[q]}, \quad (6.1)$$

där  $\int \mathcal{D}q$  är en funktionalintegral (se avsnitt 2.2) ty rummet vi integrerar i är ett funktionsrum [20, kap 3.2]. Härledningen av vägintegralen (som görs från Schrödingers ekvation) kan hittas i bilaga C.1 för den intresserade.



**Figur 6.1:** Skillnaden mellan klassisk och kvantmekanisk propagation. I klassisk mekanik finns det bara en möjlig väg för partikeln att ta (givet begynnelse- och slutvillkor). I kvantmekanik propagerar partikeln istället som en våg och kan då ta oändligt många olika vägar, med en sannolikhetsvikt för respektive väg.

Ekvation (6.1) visar hur propagationen definieras i kvantmekanik och beskriver alltså hur propagatorn för ett enpartikelsystem beter sig där partikeln tar alla vägar mellan start- och slutpunkt  $(q_i, q_f)$ , viktad med verkan för varje väg. I kvantfältteori kan detta generaliseras till [53, kap. 1]

$$\langle \phi_f, t_f | \phi_i, t_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^d x \mathcal{L}_{\text{fri}}(\phi, \partial\phi)}. \quad (6.2)$$

Här beskriver

$$\mathcal{D}\phi \propto \prod_{t_i < t < t_f} \prod_{\vec{x} \in \mathbb{R}^d} d\phi(\vec{x}, t)$$

integralmättet för funktionalintegralen,  $\mathcal{N}$  är en normaliseringskonstant och  $\mathcal{L}_{\text{fri}}(\phi, \partial\phi)$  är den fria lagrangiansdensiteten för det fria fältet  $\phi$ . Nu när vi övergått

till en kvantfältteori betraktas partiklar istället som excitationer i ett fält  $\phi$ , som fokuset därmed ligger på. Vägintegralen omtolkas som att vi betraktar alla fältkonfigurationer viktat med motsvarande verkan.

I termodynamik och statistisk mekanik används partitionsfunktioner för att erhålla termodynamiska variabler. För ett kvantsystem är det möjligt att analogt definiera en partitionsfunktion som

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \sum_n \langle n | e^{-\beta \hat{H}} | n \rangle = \text{tr } e^{-\beta \hat{H}}, \quad (6.3)$$

där  $\text{tr} \left( e^{-\beta \hat{H}} \right)$  beskriver partitionsfunktionen i Hilbertrummet av möjliga tillstånd och  $\beta$  är relaterat till systemets temperatur  $T$  som  $\beta = 1/k_B T$  [20, kap. 3] [54]. Med vårt enhetsval är  $k_B = 1$ . Denna partitionsfunktion kan skrivas med vägintegralformalism som [53, kap. 1.4]

$$Z = \int \mathcal{D}q e^{-S[q]}. \quad (6.4)$$

En längre utveckling om detta finns i bilaga C.2. Denna integral kan liknas med vägintegralen, ekvation (6.2), genom en så kallad *Wick-rotation*:  $t \rightarrow i\tau$  [20, kap. 3.2] [55, kap. 2]. På så sätt kan partitionsfunktionen för en fri fältteori skrivas som

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^d x \mathcal{L}_{\text{fri}}}. \quad (6.5)$$

Genom att introducera källor  $h(x)$  för en given kvantoperator  $\mathcal{O}(x)$  kan den *genererande funktionalen* skrivas som [11, kap. 12.1][53, kap. 1.3]

$$Z[h] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^d x [\mathcal{L}_{\text{fri}} + h(x)\mathcal{O}(x)]}. \quad (6.6)$$

Denna funktional kan på samma sätt som partitionsfunktionen ses som ett objekt som innehåller information om systemet i fråga. Den genererade funktionalen kan sedan användas för att definiera den allmänna *n-punktskorrelationsfunktionen* för kvantoperatorn  $\mathcal{O}(x_1), \mathcal{O}(x_2), \dots, \mathcal{O}(x_n)$  som [17, kap. 1][48, kap. 2]

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{O}(x_1) \dots \mathcal{O}(x_n) \rangle \\ &= (-i)^n \frac{1}{Z[h]} \frac{\delta^n Z[h]}{\delta h(x_1) \dots \delta h(x_n)} \Big|_{h=0}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

I (statistisk) kvantfältteori kan *n-punktsfunktionen* tolkas som den statistiska korrelationen mellan operatorn  $\mathcal{O}(x)$  för punkterna  $x_1, \dots, x_n$  [56, kap. 2.2]. Beroende av val av operator kan det handla om allt från sannolikhetsamplituden att hitta ett antal partiklar till att relatera magnetfältstyrkan i ett antal givna positioner.

Med ekvation (6.7) definieras tvåpunktsfunktionerna som [20, kap. 5]

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \mathcal{O}(x_2) \rangle = \frac{-1}{Z[h]} \frac{\delta^2 Z[h]}{\delta h(x_1) \delta h(x_2)} \Big|_{h=0} \quad (6.8)$$

Mer konkret kan tvåpunktsfunktionen, exempelvis  $\langle J(x_1) J(x_2) \rangle$  mellan strömtätheterna  $J(x_1)$  och  $J(x_2)$ , ses som den statistiska relationen mellan strömtätheterna vid två olika positioner i ett material. Faktumet är att denna tvåpunktsfunktion är relaterad till konduktiviteten och kommer därmed vara central i nästa kapitelns beräkning.

### 6.3 AdS/CFT-dualiteten

Nu, när både AdS-rumtiden och grundläggande kvantfältteori har introducerats, är det tillfälle att förklara vad som sammankopplar dem i AdS/CFT-dualiteten. Kopplingen har sin grund i att de genererande funktionalerna för kvantfältteori i en rumtidsdimension  $d+1$  är matematiskt samma som på randen av en AdS-rumtid med  $d+2$  dimensioner [57]. Denna observation beskrivs i Gubser-Klebanov-Polyakov-Witten-formeln

$$Z_{\text{QFT}}[h(x)] = Z_{\text{grav}}[h(x)], \quad (6.9)$$

som ligger till grund för AdS/CFT [13][48, kap. 2][57]. Notera att det i allmänhet handlar om en *kvantgravitation*, men en förenkling av detta till den icke-kvantiserade gravitationsteorin ger en bra approximation; hädanefter särskiljer vi inte dessa. Den gravitationella genererande funktionalen på randen av en AdS-rumtid med  $d+2$  dimensioner kan beskrivas som

$$Z_{\text{grav}}[h(x)] = \int^{\phi \rightarrow h} \mathcal{D}\phi e^{i S_{\text{grav}}[\phi]}, \quad (6.10)$$

där  $\phi \rightarrow h$  betyder att fältet  $\phi$  ska vara lika med källan  $h$  vid randen av AdS-rumtiden:  $h(x) = \lim_{z \rightarrow 0} \phi(x)$  [17, kap. 1.6]. Genom att betrakta  $Z_{\text{grav}}$  semiklassiskt kan följande approximation göras med hjälp av sadelpunktsmetoden:

$$Z_{\text{grav}}[h(x)] \approx e^{i S_{\text{grav}}[\phi^*]}. \quad (6.11)$$

Här är  $\phi^*$  fältet som fås när rörelseekvationerna löses för en given teori.

Den genererade funktionalen för kvantfältteori, å andra sidan, blir enligt ekvation (6.6) med  $d+1$  dimensioner (en lägre än gravitationsteorin) [17, kap. 1.6]

$$Z_{\text{QFT}}[h(x)] = \int \mathcal{D}\phi e^{i S_{\text{QFT}} + i \int d^{d+1} x \mathcal{O}(x) h(x)}. \quad (6.12)$$

Fördelen med AdS/CFT är att denna integral, som kan vara extremt komplicerad i bland annat starkt kopplade material, inte behöver beräknas. Exempelvis kan tvåpunktsfunktionen i ekvation (6.8) beräknas genom att gå över till gravitationsteorin med hjälp av ekvation (6.9):

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(x_1) \mathcal{O}(x_2) \rangle &= \frac{-1}{Z_{\text{QFT}}} \frac{\delta^2 Z_{\text{QFT}}}{\delta h(x_1) \delta h(x_2)} \Big|_{h=0} \\ &= \frac{-1}{Z_{\text{grav}}} \frac{\delta^2 Z_{\text{grav}}}{\delta h(x_1) \delta h(x_2)} \Big|_{h=0} \\ &\approx \frac{\delta^2 S_{\text{grav}}[\phi^*]}{\delta h(x_1) \delta h(x_2)} \Big|_{h=0}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

vilket innebär att det räcker med att beräkna  $S_{\text{grav}}$  på randen av rumtiden med gravitationsteorin och sedan utföra funktionalderivator. Det är precis på detta sätt som den optiska konduktiviteten i modellen av ett svart hål kommer att beräknas i nästa kapitel.

Några viktiga korrespondenser mellan den högre dimensionen (kallad *bulken*) och den lägre dimensionen (kallad *randen*) brukar listas i ett ‘holografiskt lexikon’ [17][47]. Några av dessa visas i tabell 6.1 nedan.

**Tabell 6.1:** Holografiskt lexikon som visar vad storheter på randen (i konform fältteori) motsvarar i bulken (kvantgravitation).

Rand (CFT)	Bulk (gravitation)
$Z_{\text{QFT}}$	$Z_{\text{grav}}$
Skalär operator $\mathcal{O}$	Skalärt fält $\phi$
Källa $h(x)$	Fältet på randen, $\lim_{z \rightarrow 0} \phi(x)$
Stress-energitensorn $T_{\mu\nu}$	Metrik $g_{\mu\nu}$
Bevarad ström $J^\mu$	Elektromagnetisk potential $A_\mu$
Temperatur $T$	Hawking-temperatur $T_{\text{H}}$
Kemisk potential $\mu$	Elektrisk potential $A_t$ vid randen
Källan av operatoren	Ledande term i fältets serieutveckling
Respons	Fältets andra serierterm

# 7. Beräkning av ett starkt kopplat materials konduktivitet

Låt oss nu angripa problemet med att beräkna konduktiviteten hos ett starkt kopplat material. Konduktiviteten kan beräknas från den genererande funktionalen enligt QFT. Som det anspelades på i inledningen är starkt kopplade material komplexa att modellera. Ett exempel på detta är dess verkan som är mycket svår att bestämma. Detta problem måste kringgås för att beräkna konduktiviteten från den genererande funktionalen som är beroende av verkan. En metod är att använda den holografiska dualiteten.

Beräkningen bygger på att verkan för ett svart hål modellerat i AdS är betydligt mindre komplicerad än för det starkt kopplade materialet. Om verkan på randen av det svarta hålets bulk är känd kan den, med hjälp av den holografiska dualiteten, relateras till den genererande funktionalen i QFT. Att hitta det starkt kopplade materialets konduktivitet reduceras därmed till en beräkning på en modell av ett svart hål i en högre dimension.

Beräkningen kommer att utföras på en starkt kopplat material i 2+1 dimensioner med ett elektriskt fält som antas vara konstant i rummet utan rörelsemängd (vågtalet är noll).

## 7.1 Konduktiviteten utan metriksvar

I och med att energi kröker rumtid medför en perturbation av ett fält att också rumtiden ändrar sig. Till en början utförs en räkning där rumtidens motreaktion på perturbationen av den elektromagnetiska potentialen, metriksvaret, bortses ifrån. Vi börjar alltså att beräkna konduktiviteten utan metriksvar.

### 7.1.1 Uttryck för konduktiviteten

Konduktivitet  $\sigma$  visar hur ett visst material inducerar ström  $\vec{J}$  som respons av ett elektriskt fält  $\vec{E}$ , och känns igen i det vedertagna sambandet

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (7.1)$$

I denna beräkning betraktar vi endast elektriska fält som är konstanta i rummet, det vill säga endast tidsberoende. Detta motiverar att göra beräkningar i fourierrummet, där de istället är vinkelfrekvensberoende. Om endast den fouriertransformerade storheten betraktas kan sambandet skrivas

$$\vec{J}(\omega) = \sigma(\omega) \vec{E}(\omega), \quad (7.2)$$

där  $\sigma(\omega)$  är den optiska konduktiviteten. Ekvationen visar att en störning i det elektriska fältet vid en given

frekvens  $\omega$  ger en respons i form av ström vid samma frekvens, det vill säga en linjär respons. I kvantfältteori bestäms konduktiviteten från tvåpunktsfunktionen enligt [17, kap. 3.4]

$$\sigma(\omega) = \frac{\langle J \rangle}{E} = \frac{1}{i\omega} \langle JJ \rangle. \quad (7.3)$$

Med hjälp av ekvation (6.8) kan ekvation (7.3) skrivas om som

$$\sigma(\omega) = \frac{1}{i\omega} \langle JJ \rangle = \frac{1}{i\omega} \frac{-1}{Z_{\text{QFT}}} \frac{\delta^2 Z_{\text{QFT}}}{\delta h \delta h}. \quad (7.4)$$

I upplysning av fältteori för AdS/CFT (se avsnitt 6.3) kan den genererande funktionalen för randen relateras till den för bulken enligt ekvation (6.13). Detta innebär att konduktiviteten kan beräknas från

$$\sigma(\omega) = \frac{1}{i\omega} \frac{-1}{Z_{\text{QFT}}} \frac{\delta^2 Z_{\text{QFT}}}{\delta h \delta h} \approx \frac{1}{i\omega} \frac{\delta^2 S^*}{\delta h \delta h}, \quad (7.5)$$

där  $S^*$  representerar verkan på randen av AdS (det vill säga verkan på randen av gravitationsteorin). Förutsatt att ett explicit uttryck för  $S^*$  är känt har problemet således reducerats till att utföra två funktionalderivator; inget uttryck för verkan i QFT behöver hittas.

### 7.1.2 Verkan i bulken

Låt oss nu försöka hitta verkan  $S^*$  på randen av AdS-rumtiden. Om det starkt kopplade materialet betraktas i 2 + 1 dimensioner utgörs bulken av en högre dimension  $D = 4$ , det vill säga AdS<sub>4</sub>. Som tidigare beräknat lyder metriken för ett Reissner-Nordström-svart hål i AdS-rumtid enligt ekvation (5.15) där  $f(z)$  ges av ekvation (5.16). För AdS<sub>4</sub>, där  $d = 2$ , blir metriken således

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} \left[ -f(z) dt^2 + \frac{1}{f(z)} dz^2 + dx^2 + dy^2 \right], \quad (7.6)$$

med  $f(z)$  enligt

$$f(z) = 1 - (1 + \alpha) \left( \frac{z}{z_H} \right)^3 + \alpha \left( \frac{z}{z_H} \right)^4, \quad (7.7)$$

där  $z_H$  som tidigare betecknar horisontens läge och

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 \mu^2 z_H^2}{L^2}. \quad (7.8)$$

Genom att beräkna determinanten av metriken erhålls ett uttryck för  $\sqrt{-g}$  enligt

$$\sqrt{-g} = \frac{L^4}{z^4}. \quad (7.9)$$

Eftersom beräkningarna till en början görs utan metriksvar är det tillräckligt att betrakta Maxwellverkan utan ström i krökt rum, vilket med omskrivning från ekvation (3.7) blir [17, kap. 3.4]

$$S = -\frac{1}{4} \int \sqrt{-g} d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g} d^4x \nabla_\mu A_\nu F^{\mu\nu}.$$

Partiell integration av verkan ger

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2} \oint d^3x \sqrt{-\gamma} n_\mu A_\nu F^{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} d^4x A_\nu \nabla_\mu F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \oint d^3x \sqrt{-\gamma} n_\mu A_\nu F^{\mu\nu} + 0 = S^*. \end{aligned}$$

Den andra termen blir noll enligt Maxwells ekvationer i avsaknad av ström (ty  $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$ ). Den första termen är verkan på randen av AdS, vilket är precis det som skulle uttryckas. Som introducerats i ekvation (4.12) fås  $\gamma_{ij}$  från  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(\gamma_{ij}, N^2)$  och normalen är en vektor så att  $n_\mu = (0, 0, 0, N)$  (där det för notationens skull antas att  $z$ -komponenten är satt som sista index). Därmed gäller det, eftersom  $f(z) = 1$  på randen, att

$$\begin{aligned} n_z = N &= -\frac{L}{z} \frac{1}{\sqrt{f}} = -\frac{L}{z}, \\ \sqrt{-\gamma} &= \frac{L^3}{z^3} \sqrt{f} = \frac{L^3}{z^3}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Alltså gäller att

$$S^* = \frac{1}{2} \oint d^3x \frac{L^4}{z^4} A_\nu F^{z\nu}. \quad (7.11)$$

Verkan är nu beskriven på randen av AdS. Nästa steg i beräkningen av konduktiviteten är egentligen att utföra deriveringarna med avseende på källan  $h$ . Detta kräver dock en tydligare bild av vad  $h$  är samt hur verkan beror på den. Därför behöver verkan uttryckas i den störning som läggs till den elektromagnetiska potentialen.

### 7.1.3 Bulkens verkan som funktion av potentialen

Systemets rörelseekvationer, som i vanlig ordning fås genom att variera verkan, är Maxwells ekvationer i krökt rum. De skrivs enligt ekvation (5.10) på formen

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = 0. \quad (7.12)$$

Som tidigare etablerat (se ekvation (5.17)) beskrivs potentialen i AdS<sub>4</sub> med den enda nollskilda komponenten

$$A_t = \mu \left( 1 - \frac{z}{z_H} \right), \quad (7.13)$$

där  $\mu$  enligt det holografiska lexikonet i tabell 6.1 ses som den kemiska potentialen. Om problemet betraktas som en linjäriserad respons störs potentialen och

metriken enligt

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow \tilde{A}_\mu + a_\mu, \\ g_{\mu\nu} &\rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (7.14)$$

där  $h_{\mu\nu} = 0$  för stunden, då metriksvar ignoreras. Perturbationen  $a_\mu$  väljs nollskild endast i  $x$ -riktningen, för att studera konduktiviteten när det pålagda elektriska fältet är homogent (och riktat i  $x$ -led). I och med att endast frekvensberoendet studeras är  $t$  den enda av randens koordinater som  $a_\mu$  beror av, men detta utesluter ej ett  $z$ -beroende. Det är således befogat att skriva potentialen som

$$a_x = \int d\omega \hat{a}_x(z) e^{-i\omega t}, \quad (7.15)$$

där  $\hat{a}_x(z)$  alltså är den fouriertransformerade potentialen. Då metriksvar ignoreras kommer endast denna perturbation spela roll.

Insättning av den fouriertransformerade perturbationen i rörelseekvationen (ekvation (7.12)) ger, efter användning av  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , en andra ordningens differentialekvation för  $\nu = z$  (övriga ekvationer ger det triviala sambandet  $0 = 0$ ):

$$\hat{a}_x'' + \frac{f'}{f} \hat{a}_x' + \frac{\omega^2}{f^2} \hat{a}_x = 0. \quad (7.16)$$

I och med att funktionen kommer att utvärderas på randen av AdS ( $z \rightarrow 0$ ) motiveras valet att ansätta randbeteendet  $\hat{a}_x = cz^\Delta + \text{h.o.t.}$  (högre ordningens termer). Derivering och insättning omvandlar differentialekvationen till följande form:

$$0 = \Delta(\Delta - 1)cz^{\Delta-2} + \dots \approx \Delta(\Delta - 1)cz^{\Delta-2},$$

där högre ordningens termer har försumrats. Det finns således två lösningar  $\Delta = 0$  och  $\Delta = 1$ , varvid lösningen av den ursprungliga differentialekvationen (ekvation (7.16)) blir

$$\hat{a}_x = c_0 z^0 + c_1 z^1 + \dots, \quad (7.17)$$

där termer av högre ordning, som härstammar från de försummade termerna, inte skrivs ut explicit. Första konstanten  $c_0$  identifieras som den ledande i bulken, vilket alltså korresponderar till källan av operaton på randen (se det holografiska lexikonet i tabell 6.1). Alltså gäller i det här fallet att källan identifieras som  $h = c_0$ . Andra konstanten,  $c_1$ , kommer från nästa term i taylorutvecklingen och är därmed responsen.

Nu gäller det att sätta in uttrycket för  $\hat{a}_x$  i verkan. Givet ekvationerna (7.11) och (7.17) erhålls uttrycket för verkan beroende av potentialen

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{1}{2} \int d^3x \frac{L^4}{z^4} \hat{a}_x \partial^z \hat{a}_x \\ &= \int d^3x \frac{1}{2} (c_0 + c_1 z) c_1 + \text{h.o.t.} \end{aligned} \quad (7.18)$$

Målet att finna källan och ett explicit uttryck för verkan på randen beroende av den är nu uppfyllt. Insättning i ekvation (7.5) och användning av det linjära sambandet mellan källa och respons ( $c_1 = \text{konst} \cdot c_0$ ) ger konduktiviteten

$$\begin{aligned}\sigma(\omega) &= \frac{1}{2i\omega} \frac{\delta^2}{\delta c_0 \delta c_0} (c_0 c_1 + c_1^2 z) \Big|_{z=0} \\ &= \frac{1}{i\omega} \frac{\delta}{\delta c_0} c_1 = \frac{c_1}{i\omega c_0}.\end{aligned}\quad (7.19)$$

Det återstår nu endast att bestämma konstanterna  $c_0$  och  $c_1$ . I och med det linjära sambandet mellan källan och responsen räcker det dock att avgöra förhållandet; gemensamma faktorer tar ut varandra i divisionen.

### 7.1.4 Konstanternas ömsesidiga beroende

Genom att hitta en exakt lösning till differentialekvationen (7.16) och sedan taylorutveckla denna kan de två konstanterna avläsas. Notera att differentialekvationen kan skrivas på formen

$$\left[ f \frac{d}{dz} \right]^2 \hat{a}_x = -\omega^2 \hat{a}_x.$$

Med variabelbytet

$$l(z) = \int_0^z \frac{ds}{f(s)}$$

tillsammans med kedjeregeln  $\frac{d}{dt} = \frac{dz}{dt} \frac{d}{dz} = f(z) \frac{d}{dz}$  blir nu detta

$$\frac{d^2}{dl^2} \hat{a}_x(l) = -\omega^2 \hat{a}_x(l).$$

Från denna välkända differentialekvation fås att lösningen är

$$\hat{a}_x(z) = a_+ e^{i\omega l(z)} + a_- e^{-i\omega l(z)}, \quad a_+, a_- \in \mathbb{C}.$$

Eftersom detta är perturbationens fouriertransform blir lösningen

$$a_x(z, t) = \int d\omega \left[ a_+ e^{i\omega l(z) - i\omega t} + a_- e^{-i\omega l(z) - i\omega t} \right].$$

Eftersom funktionen  $l(z)$  är växande rör sig den första termen åt ökande  $z$  medan den andra rör sig mot minskande  $z$ , det vill säga ut ur det svarta hålet. Jämför med höger- respektive vänstergående vågor  $e^{ikx - i\omega t}$  och  $e^{-ikx - i\omega t}$ . Vid  $z = z_H$  fås alltså randvillkoret att den andra, ofysikaliska (som diskuterat i avsnitt 5.2.2 kan ingen information kan passera händelsehorisonten utåt), termen är 0.

Vid randen  $z = 0$ , där  $f(z) = 1$ , taylorutvecklas lösningen som

$$\hat{a}_x(z) = a_+ + a_+ i\omega z + \mathcal{O}(z^2).$$

Jämförelse med ekvation (7.17) ger att  $c_0 = a_+$  och att  $c_1 = i\omega a_+$ .

### 7.1.5 Konduktivitetens frekvensberoende

Konduktiviteten blir således, genom insättning av konstanterna  $c_0 = a_+$  och  $c_1 = i\omega a_+$  i ekvation (7.19):

$$\sigma(\omega) = \frac{c_1}{i\omega c_0} = \frac{i\omega a_+}{i\omega a_+} = 1. \quad (7.20)$$

Detta är AC-konduktiviteten för ett starkt kopplat material beräknat genom modellen av ett svart hål utan metriksvar.

## 7.2 Konduktiviteten med metriksvar

Vi kan nu undersöka fallet med metriksvar, alltså att metriken nu påverkas då den elektromagnetiska potentialen perturberas. På samma sätt som i tidigare beräkning är bulken en AdS<sub>4</sub>-rumtid innehållande ett laddat Reissner-Nordström-svart hål. Problemet betraktas återigen som linjär störning, ekvation (7.14). Skillnaden när metriksvaret nu inkluderas är att  $h_{\mu\nu} \neq 0$ . Eftersom metriken varierar motiveras det att inkludera Einstein-verkan från ekvation (4.22). Alltså blir den totala verkan

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[ \frac{1}{2\kappa^2} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (7.21)$$

där, enligt ekvation (5.18),

$$\Lambda = -\frac{3}{L^2}. \quad (7.22)$$

Bakgrundsmetriken kommer precis som i föregående modell att utgöras av diagonalelementen i enlighet med ekvation (7.6). Eftersom bakgrundens elektromagnetiska potential, som har en nollskild  $t$ -komponent, perturberas med en  $x$ -komponent visar det sig att metriksvaret innehåller en blandterm mellan dessa koordinater [51]. Därmed förekommer även icke-diagonala termer i metriken enligt

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{L^2}{z^2} f & 0 & h_{tx} & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{z^2} \frac{1}{f} & 0 & 0 \\ h_{tx} & 0 & \frac{L^2}{z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{z^2} \end{bmatrix}. \quad (7.23)$$

Det visar sig att ett metriksvar på denna form inte påverkar lösningsgången i avsnitt 7.1, bortsett från att differentialekvationen skiljer sig åt. Därmed gäller precis som tidigare att

$$\sigma(\omega) = \frac{c_1}{i\omega c_0}. \quad (7.24)$$

Metrikstörningen  $h_{tx}$  utgör ytterligare en okänd funktion, vilket medför att fler ekvationer än Maxwells ekvationer behövs för att lösa problemet. Eftersom Einstein-Hilbert-verkan inkluderades utgörs rörelse-ekvationerna dessutom av Einsteins fältekvationer,

varför även dessa nu kommer att användas.

Med den ansatta metriken och potentialen tar den av Maxwells ekvationer (7.12) som är icke-trivial formen

$$-\frac{1}{f} \frac{d^2}{dt^2} a_x + (f a'_x)' = \frac{\mu}{z_H} \frac{z^2}{L^2} (h'_{tx} + \frac{2}{z} h_{tx}). \quad (7.25)$$

Einsteins fältekvationer,  $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}$ , medför att

$$h'_{tx} + \frac{2}{z} h_{tx} = 2\kappa^2 \frac{\mu}{z_H} a_x. \quad (7.26)$$

För den intresserade läsaren finns härledningarna av ekvationerna (7.25) och (7.26) i bilaga C.3. Med den senare ekvationen kan  $h_{tx}$  elimineras ur den första, som efter fouriertransform lämnar differentialekvationen

$$f \hat{a}''_x + f' \hat{a}'_x + \left( \frac{\omega^2}{f} - \frac{2\mu^2 \kappa^2}{L^2 z_H^2} z^2 \right) \hat{a}_x = 0, \quad (7.27)$$

där perturbationen av potentialen fouriertransformeras på samma sätt som i ekvation (7.15). Notera likheten med differentialekvationen (7.16) utan metriksvar. Skillnaden är  $z^2$ -termen som uppstår på grund av metriks perturbation.

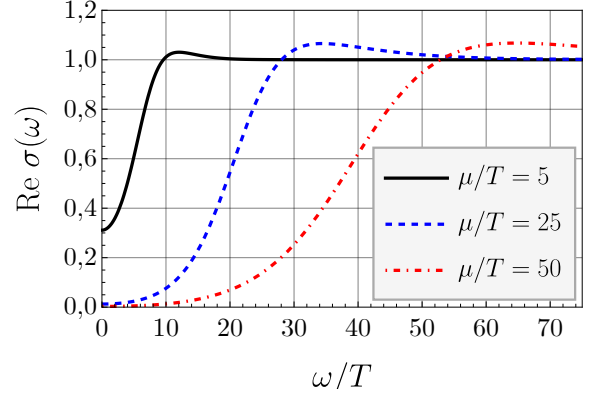
Målet är att bestämma  $\hat{a}_x$ , varvid en taylorutveckling kan avslöja konstanterna  $c_0$  och  $c_1$  som krävs för att bestämma konduktiviteten enligt ekvation (7.24). Till skillnad från fallet utan metriksvar saknas enkla lösningar och problemet löses istället numeriskt. De randvillkor som används är att information inte ska kunna passera horisonten utåt. Nära horisonten kan ekvation (7.27) taylorutvecklas för att hitta randvillkor som gäller för  $z \approx z_H$ . Eftersom  $f(z) \approx 4\pi T(z_H - z)$  uppfyller lösningen

$$\hat{a}_x \sim (z_H - z)^{\pm \frac{i\omega}{4\pi T}},$$

för  $z \approx z_H$ . Temperaturen ges enligt det holografiska lexikonet i tabell 6.1 av Hawking-temperaturen

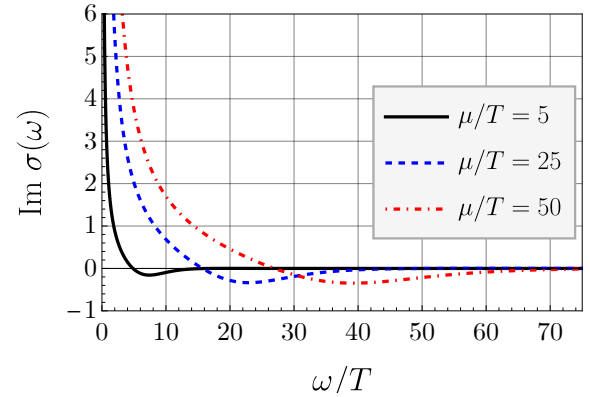
$$T_H = \frac{1}{4\pi z_H} \left( 3 - \frac{\kappa^2 \mu^2 z_H^2}{2L^2} \right). \quad (7.28)$$

De infallande randvillkoren uppfylls genom att bortse från lösningar som motsvarar utgående vågor. Med tidsberoendet  $e^{-i\omega t}$  blir det infallande randvillkoret därmed att  $\hat{a}_x \sim (z_H - z)^{-\frac{i\omega}{4\pi T}}$  vid horisonten. Den fullständiga numeriska lösningen beskrivs i bilaga C.4. Den erhållna konduktivitetens realdel illustreras för olika värden på den kemiska potentialen i figur 7.1. Vid låga frekvenser antar den ett ändligt DC-värde. Den växer till ett maximum och går sedan asymptotiskt mot 1 för höga frekvenser. Högre värden på den kemiska potentialen motsvarar lägre DC-värden samt ger större maximan och förskjuter dem till högre frekvenser.



**Figur 7.1:** Realdelen av konduktiviteten  $\sigma$  som funktion av frekvensen  $\omega$  för olika värden på den kemiska potentialen  $\mu$  vid en given temperatur  $T$ .

I figur 7.2 visas frekvensberoendet för konduktivitetens imaginärdel för olika värden på den kemiska potentialen. Den går mot oändligheten för låga frekvenser, avtar sedan till ett minimum och går asymptotiskt mot noll för höga frekvenser. Högre värden på den kemiska potentialen medför lägre miniman som ges vid högre frekvenser.



**Figur 7.2:** Imaginärdelen av konduktiviteten  $\sigma$  som funktion av frekvensen  $\omega$  för olika värden på den kemiska potentialen  $\mu$  vid en given temperatur  $T$ .

Den första beräknade konduktiviteten, som erhöles i ekvation (7.20), var konstant 1. När hänsyn tas till metriksvaret erhålls däremot en frekvensberoende konduktivitet. Observera att den frekvensberoende konduktiviteten vid höga frekvenser går mot det konstanta värde som ges utan metriksvar. Lösningarna verkar även sammanfalla för låga värden på den kemiska potentialen, bortsett från imaginärdelens pol vid  $\omega \rightarrow 0$ . Fysikaliska tolkningar av dessa resultat diskuteras i kommande kapitel.

## 8. Diskussion och slutsatser

Den optiska konduktiviteten för ett starkt kopplat material har nu beräknats med hjälp av den holografiska dualiteten med ett svart hål. Modellen tog initialt endast hänsyn till den elektromagnetiska potentialen utan metriksvar, men utvecklades sedan till att inkludera metriksvar. Detta avslutande kapitel har i syfte att diskutera båda resultaten samt ge en fysikalisk tolkning av frekvensberoendet i den senare. Vidare diskuteras modellens begränsningar och resultaten sätts i sammanhang med tidigare och framtida forskning.

### 8.1 Konduktiviteten utan metriksvar

Ett starkt kopplat materials optiska konduktivitet beräknat utan metriksvar blev enligt ekvation (7.20)

$$\sigma(\omega) = 1. \quad (8.1)$$

Det mest intressanta är konduktivitetens oberoende av  $\omega/T$ , medan faktumet att det blev just 1 snarare beror på valet av enheter (naturliga enheter ansattes och den elektromagnetiska kopplingskonstanten sattes till ett). Att konduktiviteten är konstant är ett resultat av den elektromagnetiska dualiteten: att elektriska och magnetiska fältet endast är lorentztransformationer av varandra [17, kap. 3]. Det visar sig nämligen att i specialfallet då  $D = 3 + 1$  (vilket våra beräkningar i bulken hade) är Maxwells rörelseekvationer invarianta under en viss transformation vilket tillsammans med elektromagnetiska dualiteten tvingar konduktiviteten till att vara konstant. I fallet  $D = 3 + 1$  krävs det således mer än bara Maxwell-verkan för att få ett varierande svar.

En konstant optiskt konduktivitet kan ses som ofysikaliskt: Det förväntas att konduktiviteten borde ändras med både frekvens och temperatur. Modellen är alltså för enkel. En utveckling av modellen, för att undvika effekterna från den elektromagnetiska dualiteten, kan till exempel göras genom att introducera ytterligare fält i bulken eller genom att betrakta metriksvar. Det förstnämnda gjordes inte i detta projekt, utan kan ses som en naturlig utveckling för vidare forskning. Där emot togs metriksvaret med i en följande uträkning, vilket diskuteras härnäst.

### 8.2 Konduktiviteten med metriksvar

Metriksvaret innebär att variationen av det elektromagnetiska fältet ger upphov till en krökning av  $\text{AdS}_4$ -rumtiden, vilket ger konduktiviteten ett frekvensberoende. Eftersom realdelen bidrar till dissipation av energi dras slutsatsen att mer energi absorberas i materialet för höga frekvenser. Att den kemiska potentialen

styr var övergången mellan realdelens lågfrekvens- och högfrekvensregioner kan kopplas till att den visar vilka energitillstånd som ockuperas.

Faktumet att imaginärdelen är betydligt större än realdelen för låga frekvenser indikerar att strömmen är fasvriden  $\pi/2$  relativt det elektriska fältet. Då  $\omega \rightarrow \infty$  är konduktiviteten reell och fasvridningen upphör, vilket innebär att partiklarnas starka koppling gör att strömmen kan följa ett högfrekvent elektriskt fält. Detta kan jämföras med en klassisk metall som följer Drude-modellen, enligt vilken materialet inte hinner svara på det pålagda fältet vid höga frekvenser och elektronerna inte hinner växelverka med jonerna. Notera dock att starkare strömmar kan uppnås vid lägre frekvenser eftersom konduktivitetens belopp är större.

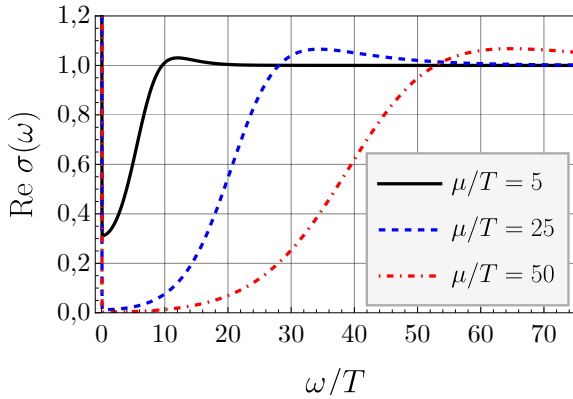
Även om lågfrekvensbeteendena skiljer sig åt sammanfaller konduktiviteten som erhålls då metriksvar inkluderas med det konstanta värdet  $\sigma = 1$ , som erhöles utan metriksvar, för höga frekvenser. En möjlig förklaring kan vara tolkningen av  $z$  som energi-koodinat, där låga värden på  $z$  motsvarar fältteorins högenergetiska del. Låga frekvenser, och därmed låga energier, representeras alltså av effekter nära det svarta hålet. Högfrekvensbeteendet korresponderar istället till regioner nära randen, där metriksvaret skäligen har mindre inverkan. De två resultaten verkar även stämma överens för en liten kemisk potential och skälet till detta förmodas vara att den kemiska potentialen  $\mu$  är dual till den elektriska potentialen som alstras av det svarta hålets laddningstäthet. Låga värden leder därför till att metriksvaret har mindre betydelse, vilket framgår av att dess inverkan i differentialekvationen (7.27) innehåller en faktor  $\mu^2$ .

En aspekt av frekvensberoendet som är av särskilt intresse är imaginärdelens pol vid låga frekvenser. Real- och imaginärdelarna av en responsfunktion i fourier-rummet är dock inte oberoende, utan relateras vid krav om kausalitet av Kramers-Kronig-relationerna

$$\begin{aligned} \text{Re}(\sigma(\omega)) &= \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty d\omega' \frac{\omega' \text{Im}(\sigma(\omega'))}{\omega'^2 - \omega^2} \\ \text{Im}(\sigma(\omega)) &= -\frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty d\omega' \frac{\text{Re}(\sigma(\omega'))}{\omega'^2 - \omega^2}, \end{aligned}$$

där  $\mathcal{P}$  betecknar Cauchys principalvärde för integraler [58]. Användning av Kramers-Kronig-relationerna är ett vanligt förfarande vid behandling av responsfunktioner inom fysik. Av sambandet följer, då strömmen ses som en respons på det elektriska fältet, att konduktivitetens realdel blir oändlig då imaginärdelen har en pol. Detta krav medför att Diracs deltafunktion  $\delta(\omega)$  behöver läggas till i realdelen. På så sätt säkerställs

systemets kausalitet, det vill säga att strömmen i materialet inte kan påverkas av det pålagda elektriska fältets framtida värden. Eftersom deltafunktionen endast verkar i en punkt kan den inte upplösas numeriskt, varpå den inte framträder i figur 7.1. När konduktiviteten justeras efter kausalitetskravet får realdelen ett frekvensberoende som visas nedan i figur 8.1.



**Figur 8.1:** Realdelen av konduktiviteten  $\sigma$  som funktion av frekvensen  $\omega$  för olika värden på den kemiska potentialen  $\mu$  vid en given temperatur  $T$ . Kausalitetskravet medför Diracs deltafunktion vid  $\omega/T = 0$ .

Deltafunktionen kan tolkas som en Drude-topp med oändlig relaxationstid. De två modellerna saknar dock andra gemensamma drag; Drude-konduktiviteten i figurerna 3.1 och 3.2 går mot noll för höga frekvenser och dess imaginärdel är alltid ändlig. De stora skillnaderna beror på Drude-modellens förenklande förhållanden, som att partikelväxelverkan utöver kollisioner mellan elektroner och joner försummas. Sådana antaganden är inte kompatibla med starkt kopplade material, vilket gör svart hål-modellen bättre lämpad.

Det bör dock nämnas att även modellen som inkluderade metriksväret har vissa förenklingar. Ekvationerna som togs fram linjäriserades, dels för att kunna lösa för perturbationerna, dels för att hitta infallande randvillkor. Dessutom betraktades bara en komponent av metriksstörningen. Detta gäller om den kemiska potentialen är konstant över randen, men inte i ett mer allmänt fall där den följer ett periodiskt gitter [51]. Då skulle fler variabler behöva införas, och Einsteins fältkvationer skulle inte uppfyllas direkt av bakgrundens konstruktion. Detsamma gäller om potentialstörningen även hade fouriertransformerats i rummet så att konduktiviteten med nollskild rörelsemängd beräknades. Detta ses som naturliga utvecklingar av projektet och intressanta aspekter för vidare forskning.

### 8.3 Praktisk tillämpbarhet

Då det teoretiska arbetet främst har utförts i en  $AdS_4$ -geometri, som är dual med en fältteori med två rumsdimensioner och en tidsdimension på ran-

den, gäller endast den beräknade konduktiviteten för tvådimensionella material. För att göra kopplingar till verkligheten och diskutera praktisk tillämpbarhet måste vi alltså leta efter tvådimensionella material av industriellt eller vetenskapligt intresse.

Ett exempel på ett 2D-material är grafen, som består av ett enda atomlager av grafit. Det var det första upptäckta 2D-materialet och producerades för första gången 2004 av bland andra Andre Geim och Konstantin Novoselov [59]. Innan dess troddes 2D-material vara termodynamiskt instabila och således inte kunna existera i verkligheten [60][61]. Forskningen på 2D-material är alltså en ung gren inom materialvetenskap och har visat sig erbjuda en mängd nya möjligheter. Grafen uppvisar hög mekanisk hållfasthet och elektrisk konduktivitet samt flera andra unika optiska, elektriska och mekaniska egenskaper som är lämpliga vid förbättring av komponenter som batterier, tryckskärmar och transistorer. Geim och Novoselov tilldelades nobelpriset i fysik år 2010 för upptäckten av grafen [37].

I och med det stora vetenskapliga intresset för grafen finns det både teoretiska modeller för, och experimentell data på, många av dess fysikaliska egenskaper, inklusive dess optiska konduktivitet. Dessa modeller och data, givet rätt förhållanden såsom temperatur och tryck, stämmer väl överens med frekvensberoendet som har erhållits med hjälp av den holografiska dualiteten i denna rapport (se exempelvis [62, fig. 1][63, fig. 3]). Det bör dock påpekas att likheterna endast är principiella, och att en kvantitativ jämförelse med specifika material som grafen kräver mer komplexa modeller som inkluderar materialparametrar. En oväntad skillnad är att realdelen i figur 7.1 inte växer då  $\omega \rightarrow 0$  (se experimentell data i artikeln av Li m.fl. 2008 [64, fig. 2]). En möjlig förklaring är den deltafunktion som enligt avsnitt 8.2 uppstår ur Kramers-Kronig-relationerna. Den förväntade lågfrekvenstoppen för det starkt kopplade materialet är alltså så smal att den inte kan upplösas av numeriska hanteringen av den holografiska modellen, men indirekt impliceras av imaginärdelens pol.

Utöver grafen har en mängd nya 2D-material föreslagits, upptäckts och producerats. Dessa kan ha betydande framtida roller inom industrin med användningsområden i allt från nanoelektronik till energilagring [65–68]. I allmänhet verkar 2D-material uppvisa optiska, elektroniska och mekaniska egenskaper som inte observeras i 3D-material. Då elektronerna blir begränsade till att röra sig på ett tvådimensionellt plan uppstår starka elektroninteraktioner som gör att de flesta 2D-materialen är starkt kopplade [69][70]. Den holografiska metodens framtida roll i modellering av 2D-material är i nuläget svår att förutsäga eftersom liknande resultat kan uppnås med andra metoder (se exempelvis Falkovsky 2007 [71]). Detta projekt har dock visat att

holografiska beräkningar kan ge samma principiella resultat som andra modeller samt experimentell data. AdS/CFT-dualiteten framstår därmed som en lämplig kandidat för att modellera 2D-material, vars tillämpbarhet bör studeras vidare (se artikeln av Phillips m.fl. 2022 som undersöker detta [72]).

## 8.4 Vidare forskning

Ett flertal olika områden för vidare forskning har redan påpekats. Vi sammanfattar dem här: Det handlar bland annat om att bemöta projektets avgränsningar såsom att utvidga till 3D-material, betrakta elektriska fält som är rumsberoende, inkludera fler fält än det elektromagnetiska i bulken eller studera det allmänna fallet där den kemiska potentialen följer ett periodiskt gitter anpassat efter ett visst material. Ytterligare områden för vidare forskning är att studera fler egenskaper än bara den optiska konduktiviteten och att försöka modellera mer komplexa material som exempelvis olika typer av staplade 2D-material (se bland annat [73, fig. 1]). Ett annat intressant område att studera vidare på är andra materialegenskaper då dessa går att räkna på så länge det finns en dual variabel i gravitationsteorin.

## 8.5 Sammanfattning och slutsatser

Vissa materialegenskaper såsom optisk konduktivitet kan vara mycket komplexa att modellera för starkt kopplade material, vilket härstammar från problemet att sätta upp materialets verkan och partitionsfunktion. I detta projekt har det visats att materialets partitionsfunktion, genom holografisk dualitet, kan relateras till partitionsfunktionen för en gravitationsteori av högre dimension innehållande ett svart hål: den så kallade AdS/CFT-korrespondensen. På så sätt kringgås problemet med att ta fram verkan för det starkt kopplade materialet och istället tas den enklare verkan för gravitationsmodellen med de önskade egenskaperna fram.

Användningen av den holografiska dualiteten kan på ett sätt jämföras med hur elektriska fält matematiskt beskrivs av komplexa vågor. Liksom de verkliga elektriska fälten inte är komplexa, utan beskrivs så för att underlätta den matematiska beskrivningen, kan det starkt kopplade materialet ses som randen av en högre dimensionell bulk. Denna högre dimension, som beskrivs av AdS, efterliknar inte i sig vårt verkliga universum (AdS har en negativ krökning, vilket vårt universum inte verkar ha) men fungerar som ett verktyg för att utföra beräkningar på verkliga material.

Beräkningen utan metriksvar gav ett ofysikaliskt resultat för konduktiviteten och ansågs således vara en för enkel modell. När metriksvaret inkluderades erhöles ett mer realistiskt svar. Då beräkningarna gjordes i två

rumsdimensioner jämfördes resultatet med det tvådimensionella materialet grafen, vilket visade principiella likheter. Beräkningen av konduktivitet med hjälp av den holografiska dualiteten kan därmed ses som en framgång och metoden som ett användbart verktyg för att lösa komplicerade fältteoretiska problem (med förutsättningen att det är känt vilka storheter i bulken som randegenskaperna motsvarar). I och med det växande forskningsintresset för olika 2D-material är det också av intresse att utforska möjligheten för modellering av dessa material via holografi, men huruvida metoden faktiskt kan få utbredd användning är däremot en öppen fråga.

# Referenser

---

- [1] H. Poincaré, "Sur la dynamique de l'électron," *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, nr 21, s. 129–175, 1906.
- [2] A. Einstein, "Zur Elektrodynamik bewegter Körper," *Annalen der Physik*, vol. 17, s. 891–921, 1905.
- [3] A. Einstein, "Grundgedanken der allgemeinen Relativitätstheorie und Anwendung dieser Theorie in der Astronomie," *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, nr 1, s. 315, 1915.
- [4] A. Einstein, "Zur allgemeinen Relativitätstheorie," *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, nr 2, s. 778–786, 1915.
- [5] A. Einstein, "Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie," *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, nr 3, s. 831–839, 1915.
- [6] A. Einstein, "Feldgleichungen der Gravitation," *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, nr 4, s. 844–847, 1915.
- [7] D. R. Bes, *Quantum Mechanics: A Concise and Modern Introductory Course*, 3. uppl. Berlin, Tyskland: Springer, 2012. DOI: 10.1007/978-3-642-20556-9.
- [8] D. J. Griffiths och D. F. Schroeter, *An Introduction to Quantum Mechanics*, 3. uppl. Cambridge, Storbritannien: Cambridge University Press, 2018.
- [9] J. Baggot, *The Quantum Story: A History in 40 Moments*. Oxford, Storbritannien: Oxford University Press, 2011.
- [10] R. D. Mattuck, *A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem*, 2. uppl. Mineola, NY, USA: Dover Publications, Inc., 1992.
- [11] M. E. Peskin och D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Reading, MA, USA: Perseus Books Publishing, L.L.C., 1995.
- [12] L. Susskind, "The World as a Hologram," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 36, nr 11, s. 6377–6396, 1995. DOI: 10.1063/1.531249.
- [13] J. Maldacena, "The Large-N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity," *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 38, nr 4, s. 1113–1133, 1999. DOI: 10.1023/A%3A1026654312961.
- [14] INSPIRE. "Literature." [Online; hämtad 16 april 2024]. (2024), URL: <https://inspirehep.net/literature?sort=mostcited>.
- [15] F. Wooten, *Optical Properties of Solids*. New York, NY, USA: Academic Press, Inc., 1972.
- [16] J. Quintanilla och C. Hooley, "The strong-correlations puzzle," *Physics World*, vol. 22, nr 06, s. 32–37, 2009. DOI: 10.1088/2058-7058/22/06/38.
- [17] S. A. Hartnoll, A. Lucas och S. Sachdev. "Holographic Quantum Matter." arXiv: 1612.07324. (2016).
- [18] NASA. "Will the Universe expand forever?" [Online; hämtad 23 april 2024]. (2024), URL: [https://map.gsfc.nasa.gov/universe/uni\\_shape.html](https://map.gsfc.nasa.gov/universe/uni_shape.html).
- [19] H. Goldstein, C. P. Poole och J. Saffo, *Classical Mechanics*, 3. uppl. Boston, MA, USA: Addison Wesley, 2001.
- [20] A. Altland och B. Simons, *Condensed Matter Field Theory*, 3. uppl. Cambridge, Storbritannien: Cambridge University Press, 2023. DOI: 10.1017/9781108781244.
- [21] C. DeWitt-Morette, "Functional Integration; Path Integrals," i *Compendium of Quantum Physics*, D. Greenberger, K. Hentschel och F. Weinert, utg. Berlin, Tyskland: Springer Berlin Heidelberg, 2009, s. 243–247. DOI: 10.1007/978-3-540-70626-7\_75.
- [22] A. Valtakoski, "Mathematical Aspects of Functional Integration," Masteruppsats, Institutionen för fysik, Helsingfors universitet, Helsingfors, Finland, 2000.
- [23] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2. uppl. New York, NY, USA: Springer, 2013.
- [24] P. A. M. Dirac, *General Theory of Relativity*. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1975.
- [25] F. Irgens, *Tensor Analysis*. Cham, Schweiz: Springer Cham, 2019. DOI: 10.1007/978-3-030-03412-2.
- [26] D. Tong, *Electromagnetism*, Föreläsningssanteckningar, [Online; hämtad 11 april 2024], Cambridge, Storbritannien, 2015. URL: <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/em.html>.

- [27] D. Tong, *General Relativity*, Föreläsningsanteckningar, [Online; hämtad 22 januari 2024], Cambridge, Storbritannien, 2019. URL: <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gr.html>.
- [28] P. Drude, "Zur Elektronentheorie der Metalle," *Annalen der Physik*, vol. 306, nr 3, s. 566–613, 1900. DOI: 10.1002/andp.19003060312.
- [29] P. Drude, "Zur Elektronentheorie der Metalle; II. Teil. Galvanomagnetische und thermomagnetische Effecte," *Annalen der Physik*, vol. 308, nr 11, s. 369–402, 1900. DOI: 10.1002/andp.19003081102.
- [30] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. San Francisco, CA, USA: Addison Wesley, 2004.
- [31] T. Rudelius, "A Geometric Understanding of Ricci Curvature in the Context of Pseudo-Riemannian Manifolds," Kandidatuppsats, Department of Mathematics, Cornell University, Ithaca, NY, USA, 2012.
- [32] A. Einstein, "The Foundation of the General Theory of Relativity," i *The collected papers of Albert Einstein*, A. J. Kox, M. Klein och R. Schulmann, utg., vol. 6, Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1996, s. 283–339.
- [33] S. M. Carroll, "The Cosmological Constant," *Living Reviews in Relativity*, vol. 4, nr 1, 2001. DOI: 10.12942/lrr-2001-1.
- [34] L. C. Markley och J. F. Lindner, "Artificial gravity field," *Results in Physics*, vol. 3, s. 24–29, 2013. DOI: 10.1016/j.rinp.2013.01.003.
- [35] K. Schwarzschild, "Golden Oldie: On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory," övers. av S. Antoci, A. Longier och A. Volta, *General relativity and Gravitation*, vol. 35, nr 5, s. 951–959, 2003. DOI: 10.1023/A:1022971926521.
- [36] R. P. Kerr. "Do Black Holes have Singularities?" arXiv: 2312.00841. (2023).
- [37] Nobel Prize Outreach AB. "All Nobel Prizes in Physics." [Online; hämtad 6 maj 2024]. (2024), URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/lists/all-nobel-prizes-in-physics/>.
- [38] S. S. Gubser, I. R. Klebanov och A. M. Polyakov, "Gauge Theory Correlators from Non-critical String Theory," *Physics Letters B*, vol. 408, nr 1–2, s. 105–114, 1998. DOI: 10.1016/S0370-2693(98)00377-3.
- [39] D. Finkelstein, "Past-Future Asymmetry of the Gravitational Field of a Point Particle," *Physical Review*, vol. 110, nr 4, s. 965–967, 1958. DOI: 10.1103/PhysRev.110.965.
- [40] M. Hobson, G. Efstathiou och A. Lasenby, *General Relativity: An introduction for physicists*. Cambridge, Storbritannien: Cambridge University Press, 2006, nytryckt upplaga.
- [41] J. Pinochet, "The little robot, black holes, and spaghettification," *Physics Education*, vol. 57, nr 4, s. 045 008, 2022. DOI: 10.1088/1361-6552/ac5727.
- [42] H. Reissner, "Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie," *Annalen der Physik*, vol. 355, nr 9, s. 106–120, 1916. DOI: 10.1002/andp.19163550905.
- [43] S. W. Hawking och G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*. Cambridge, Storbritannien: The Press Syndicate of the University of Cambridge, 1973, nytryckt upplaga.
- [44] C. Ballon Bayona och N. R. F. Braga, "Anti-de Sitter boundary in Poincaré coordinates," *General Relativity and Gravitation*, vol. 39, nr 9, s. 1367–1379, 2007. DOI: 10.1007/s10714-007-0446-y.
- [45] S. W. Hawking, "Black hole explosions?" *Nature*, vol. 248, s. 30–31, 1974. DOI: 10.1038/248030a0.
- [46] S. W. Hawking, "Particle Creation by Black Holes," *Communications in Mathematical Physics*, vol. 43, s. 199–220, 1975. DOI: 10.1007/BF02345020.
- [47] J. Zaanen, Y. Liu, Y.-W. Sun och K. Schalm, *Holographic Duality in Condensed Matter Physics*. Cambridge, Storbritannien: Cambridge University Press, 2015. DOI: 10.1017/CB09781139942492.
- [48] M. Baggioli, *Applied Holography: A Practical Mini-Course*. Cham, Schweiz: Springer, 2019. DOI: 10.1007/978-3-030-35184-7.
- [49] D. Tong, *Lectures on String Theory*, Föreläsningsanteckningar, [Online; hämtad 26 april 2024], Cambridge, Storbritannien, 2009. URL: <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/string.html>.
- [50] U. Gran, *Varför bryts CFT-symmetrin?* Privatföreläsning hållen av prof. Ulf Gran 24 april 2024 på Chalmers tekniska högskola, Göteborg. Institutionen för subatomär, högenergi- och plasmafysik, Chalmers tekniska högskola.
- [51] D. Tong, "Holographic Conductivity," *Acta Physica Polonica B*, vol. 44, nr 12, s. 2579–2602, 2013. DOI: 10.5506/APhysPolB.44.2579.

- [52] E. Nilsson, "Electron Transport and Collective Modes in Fermi and non-Fermi Liquids," Licentiatuppsats, Institutionen för fysik, Chalmers tekniska högskola, Göteborg, Sverige, 2024.
- [53] M. Ammon och J. Erdmenger, *Gauge/Gravity Duality: Foundations and Applications*. Cambridge, Storbritannien: Cambridge University Press, 2015. DOI: 10.1017/CB09780511846373.
- [54] R. Rattazzi, "The Path Integral approach to Quantum Mechanics Lecture Notes for Quantum Mechanics IV," [Online; hämtad 6 maj 2024], 2009. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:124465948>.
- [55] A. Wipf, *Statistical Approach to Quantum Field Theory: An Introduction*. Berlin, Tyskland: Springer, 2013. DOI: 10.1007/978-3-642-33105-3.
- [56] D. Tong, *Statistical Field Theory*, Föreläsninganteckningar, [Online; hämtad 8 maj 2024], Cambridge, Storbritannien, 2017. URL: <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/sft.html>.
- [57] E. Witten, "Anti de Sitter Space And Holography," *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, vol. 2, nr 2, s. 253–291, 1998. DOI: 10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a2.
- [58] H. Rathgen och M. I. Katsnelson, "Symmetry Assumptions, Kramers–Kronig Transformation and Analytical Continuation in Ab Initio Calculations of Optical Conductivities," *Physica Scripta*, vol. 2004, nr T109, s. 170–173, 2004. DOI: 10.1238/Physica.Topical.109a00170.
- [59] A. K. Geim, K. A. Novoselov m.fl., "Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films," *Science*, vol. 306, nr 5696, s. 666–669, 2004. DOI: 10.1126/science.1102896.
- [60] A. K. Geim och K. A. Novoselov, "The rise of graphene," *Nature Materials*, vol. 6, s. 183–191, 2007. DOI: 10.1038/nmat1849.
- [61] A. K. Geim, "Graphene prehistory," *Physica Scripta*, vol. 2012, nr T146, s. 014003, 2012. DOI: 10.1088/0031-8949/2012/T146/014003.
- [62] L. Falkovsky, "Optical properties of graphene," *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 129, 2008. DOI: 10.1088/1742-6596/129/1/012004.
- [63] H. Falomir m.fl., "Optical conductivity in an effective model for graphene: finite temperature corrections," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 53, nr 1, 2020. DOI: 10.1088/1751-8121/ab57cb.
- [64] Z. Li, E. Henriksen och Z. Jiang, m.fl., "Dirac charge dynamics in graphene by infrared spectroscopy," *Nature Physics*, nr 4, s. 532–535, 2008. DOI: 10.1038/nphys989.
- [65] M. Zeng m.fl., "Exploring Two-Dimensional Materials toward the Next-Generation Circuits: From Monomer Design to Assembly Control," *Chemical Reviews*, vol. 118, s. 6236–6296, 2018. DOI: 10.1021/acs.chemrev.7b00633.
- [66] W. Ruan och Y. Zhang, "Strong correlations in two-dimensional transition metal dichalcogenides," *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, vol. 66, nr 117506, 2023. DOI: 10.1007/s11433-023-2141-9.
- [67] N. R. Glavin, R. Rao och P. M. Ajayan, m.fl., "Emerging Applications of Elemental 2D Materials," *Advanced Materials*, vol. 32, nr 7, 2020. DOI: 10.1002/adma.201904302.
- [68] K. Khan m.fl., "Recent developments in emerging twodimensional materials and their applications," *Journal of Materials Chemistry C*, vol. 8, s. 387, 2020. DOI: 10.1039/c9tc04187g.
- [69] S. Kravchenko, *Strongly Correlated Electrons in Two Dimensions*. Singapore, Singapore: Pan Stanford Publishing Pte. Ltd., 2017.
- [70] O. R. Meitei och T. V. Voorhis. "Electron correlation in 2D periodic systems." arXiv: 2308.06185. (2023).
- [71] L. A. Falkovsky och A. A. Varlamov, "Space-time dispersion of graphene conductivity," *The European Physical Journal B*, vol. 56, s. 281–284, 2007. DOI: 10.1140/epjb/e2007-00142-3.
- [72] P. W. Phillips, N. E. Hussey och P. Abbamonte, "Stranger than Metals," *Science*, vol. 377, nr 6602, 2022. DOI: 10.1126/science.abh4273.
- [73] H.-W. Guo, Z. Hu, Z.-B. Liu och J.-G. Tian, "Stacking of 2D Materials," *Advanced Functional Materials*, vol. 31, nr 4, 2020. DOI: 10.1002/adfm.202007810.

# A. Härledningar och exempel inom elektromagnetisk fältteori

Detta appendix erbjuder en djupare inblick i tensorformuleringen av den elektromagnetiska fältteori som introduceras i kapitel 3. Det visar explicit att Maxwells ekvationer i tensornotation är ekvivalenta med den klassiska formuleringen och att den elektromagnetiska verkan är gauge-invariant. Vidare ges en härledning av stress-energitensorn samt ett exempel på hur dess komponenter är kopplade till systemets energi.

## A.1 Maxwells ekvationer på tensorform

I kapitel 3 härleddes två tensorekvationer som påstods vara ekvivalenta med Maxwells ekvationer. Att så är fallet visas nedan. Den elektromagnetiska verkan varierades för att ta fram ekvationerna

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu.$$

Vad som ser ut som en ekvation ovan är egentligen fyra olika ekvationer som korresponderar till de fyra värden som indexet  $\mu$  kan ha. Dessa fyra ekvationer ger de klassiska formuleringarna

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho, \quad \nabla \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{j}$$

av Maxwells inhomogena ekvationer. Det bekräftas genom att sätta in den kontravarianta fälttensorns och strömtäthetens komponenter

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}, \quad j^\mu = (\rho, \vec{j}).$$

Exempelvis ger  $\mu = 0$  ekvationen

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{0\nu} &= \partial_t F^{00} + \partial_x F^{01} + \partial_y F^{02} + \partial_z F^{03} \\ &= \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \nabla \cdot \vec{E} = \rho. \end{aligned}$$

Med  $\mu = 1$  erhålls istället

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{1\nu} &= \partial_t F^{10} + \partial_x F^{11} + \partial_y F^{12} + \partial_z F^{13} \\ &= -\partial_t E_x + \partial_y B_z - \partial_z B_y = (\nabla \times \vec{B} - \partial_t \vec{E})_x \\ &= j_x. \end{aligned}$$

Analogt fås  $y, z$ -komponenten av ekvationen  $\nabla \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{j}$  av  $\mu = 2, 3$ .

Vidare påstods Bianchi-identiteten  $\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$  vara ekvivalent med de homogena ekvationerna

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

Identitetens vänsterled har 64 komponenter, men antalet oberoende ekvationer reduceras av symmetriegenskaper. Vänsterledet är en fullständigt antisymmetrisk tensor, det vill säga att komponenten byter tecken då två av de tre indexen byter plats. Det innebär att om flera index är lika måste tensorerna vara noll och ekvationerna som erhålls är triviala. De oberoende ekvationerna som erhålls motsvarar de fyra kombinationerna av tre unika index som kan väljas bland de fyra dimensionerna. Exempelvis ger  $\mu = 1, \nu = 2, \rho = 3$  ekvationen

$$\partial_x F_{23} + \partial_y F_{31} + \partial_z F_{12} = \partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z = \nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

Med  $\mu = 0, \nu = 1, \rho = 2$  erhålls istället

$$\begin{aligned} \partial_t F_{12} + \partial_x F_{20} + \partial_y F_{01} &= \partial_t B_z + \partial_x E_y - \partial_y E_x \\ &= (\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B})_z = 0. \end{aligned}$$

Analogt fås  $x, y$ -komponenten av ekvationen  $\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$  av  $\mu = 0, \nu = 1, \rho = 3$  respektive  $\mu = 0, \nu = 2, \rho = 3$ . Andra permutationer av samma indexvärden resulterar i samma ekvationer på grund av antisymmetrin. Därmed är ekvationerna ekvivalenta.

## A.2 Gauge-invarians för den elektromagnetiska verkan

När den elektromagnetiska verkan

$$S_{\text{EM}}[A_\mu] = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu j^\mu \right] \quad (\text{A.1})$$

konstruerades i avsnitt 3.3 var ett av villkoren att den skulle vara gauge-invariant. Det är därför av intresse att bekräfta att den är invariant under gauge-transformationen

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \Lambda,$$

där  $\Lambda$  är någon skalär funktion. Först visas att den elektromagnetiska fälttensorn är gauge-invariant

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \mapsto \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \Lambda) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \Lambda) \\ &= F_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda = F_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Med denna information kan den transformerade verkan studeras

$$\begin{aligned} &\int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu j^\mu \right] \mapsto \\ &\int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (A_\mu + \partial_\mu \Lambda) j^\mu \right] \\ &= S_{\text{EM}}[A_\mu] + \int d^4x [(\partial_\mu \Lambda) j^\mu] \\ &= S_{\text{EM}}[A_\mu] + \oint d^3x \Lambda n_\mu j^\mu - \int d^4x [\Lambda (\partial_\mu j^\mu)], \end{aligned}$$

där  $n_\mu$  är en utåtriktad normalvektor på rumtidens rand.  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  ändrades inte eftersom  $F_{\mu\nu}$  enligt ovan är gauge-invariant. I sista steget utfördes partiell integration, där randtermen är noll eftersom ström-tätheten på randen av den oändliga rumtiden antas vara noll. Den återstående integralen är noll enligt kontinuitetsekvationen  $\partial_\mu j^\mu = 0$ . Därmed gäller alltså att den elektromagnetiska verkan är gauge-invariant;  $S_{\text{EM}}[A_\mu] \mapsto S_{\text{EM}}[A_\mu + \partial_\mu \Lambda] = S_{\text{EM}}[A_\mu]$ .

elektromagnetiska fälttensorns matrisrepresentation gör det tydligt att

$$F_{\rho 0} F_{\sigma 0} g^{\rho\sigma} = |\vec{E}|^2, \quad F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = -2|\vec{E}|^2 + 2|\vec{B}|^2.$$

Därmed blir  $T^{00} = \frac{1}{2}(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2)$ , vilket känns igen som energitätheten för ett elektromagnetiskt fält.

### A.3 Stress-energitensorn för Maxwell-verkan

För att lösa Einsteins fältekvationer behöver stress-energitensorn beräknas. I fallet med Reissner-Nordström-metriken i avsnitt 5.3 orsakas den av det elektriska fältet från laddningen och materieverkan är

$$S_{\text{EM}}[A_\mu] = \int d^D x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]. \quad (\text{A.2})$$

Utifrån denna verkan kan stress-energitensorn beräknas som

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{EM}}}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (\text{A.3})$$

Funktionalderivatan beräknas lämpligtvis genom att variera  $S_{\text{EM}}$  med avseende på metriken:

$$\delta S_{\text{EM}} = \int d^D x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \delta\sqrt{-g} - \frac{1}{4} \sqrt{-g} F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} \right].$$

Från ekvation (4.23) är det känt att  $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$ . Vidare gör fälttensorns antisymmetri att  $F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = F_{\nu\mu}F_{\sigma\rho}$ , så den andra termen kan skrivas

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} &= F_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma}) \\ &= \delta g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} \delta g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \\ &= 2g^{\mu\rho} \delta g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}. \end{aligned}$$

Variationen av verkan blir därmed

$$\delta S_{\text{EM}} = \int d^D x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{8} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} F_{\rho\mu} F_{\sigma\nu} g^{\rho\sigma} \right] \delta g^{\mu\nu}.$$

Nu återstår att beräkna funktionalderivatan

$$\frac{\delta S_{\text{EM}}}{\delta g^{\mu\nu}} = \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{8} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} F_{\rho\mu} F_{\sigma\nu} g^{\rho\sigma} \right],$$

och att sätta in den i definitionen (A.3). Sammanfattningsvis blir stressenergitensorn

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= F_{\rho\mu} F_{\sigma\nu} g^{\rho\sigma} - \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} g_{\mu\nu} \\ &= F^\rho{}_\mu F_{\rho\nu} - \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Som exempel kan komponenten  $T^{00}$ , som motsvarar energitätheten, betraktas i platt rumtid. Där är metriken  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , vilket medför att  $T^{00} = T_{00}$ . Den

## B. Härledningar och exempel inom allmän relativitet

Den här bilagan syftar till att demonstrera hur koncept inom den allmänna relativitetsteorin kan användas. Den innehåller exemplifierande beräkningar av storheterna som införs och härledningar av vissa matematiska samband som nämns i 4 och 5. Dessutom visas hur Einsteins fältekvationer löses för att hitta Reissner-Nordström-metriken i en asymptotisk platt rumtid samt i AdS-rumtiden.

### B.1 Allmän relativitet i sfäriska koordinater

Ett användbart exempel för att illustrera de koncept och tensorer som introduceras i kapitel 4 är att betrakta en sfärisk yta. Nedan illustreras framtagning av metriken på  $\mathbf{S}^2$ , det vill säga en tvådimensionell sfär. Dessutom beräknas Christoffelsymboler, Riemann-tensorn, Ricci-tensorn samt Ricci-skalären. I sfäriska koordinater  $(r, \theta, \phi)$  med fix radie  $r = r_0$  kan  $x$ ,  $y$  och  $z$  definieras som

$$\begin{aligned}x &= r_0 \sin \theta \cos \phi, \\y &= r_0 \sin \theta \sin \phi, \\z &= r_0 \cos \theta.\end{aligned}$$

Därför fås

$$\begin{aligned}dx &= r_0(\cos \theta \cos \phi d\theta - \sin \theta \sin \phi d\phi), \\dy &= r_0(\cos \theta \sin \phi d\theta + \sin \theta \cos \phi d\phi), \\dz &= -r_0 \sin \theta d\theta.\end{aligned}$$

och med tidigare nämnda tensornotation skrivs

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = r_0^2 d\theta^2 + r_0^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Med  $\mu, \nu = \theta, \phi$  erhålls slutligen metriken  $g_{\mu\nu}$  samt dess invers  $g^{\mu\nu}$  enligt

$$g_{\mu\nu} = r_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \frac{1}{r_0^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{bmatrix}.$$

Med hjälp av definitionen (4.1) och enkla beräkningar kan Christoffelsymbolerna bestämmas. Eftersom metriken endast har  $\theta$ -beroende och  $g_{\mu\nu} = 0$  om  $\mu \neq \nu$  blir de enda nollskilda Christoffelsymbolerna

$$\begin{aligned}\Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_\theta g_{\phi\phi} = -\frac{1}{2} \sin 2\theta \\ \Gamma^\phi_{\phi\theta} &= \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \partial_\theta g_{\phi\phi} = \cot \theta.\end{aligned}$$

Riemann-tensorn bestäms med hjälp av ekvation (4.14) tillsammans med symmetriegenskaperna att  $R^\sigma_{\rho\mu\nu} =$

$R^\sigma_{\rho\nu\mu}$  samt  $R^\sigma_{\rho\mu\nu} = 0$  då  $\mu = \nu$ . De nollskilda komponenterna blir

$$\begin{aligned}R^\phi_{\theta\phi\theta} &= -R^\phi_{\theta\phi\theta} = -\partial_\theta \Gamma^\phi_{\phi\theta} - \Gamma^\phi_{\phi\theta} \Gamma^\phi_{\phi\theta} \\ &= \partial_\theta \cot \theta - \cot^2 \theta = 1. \\ R^\theta_{\phi\theta\phi} &= -R^\theta_{\phi\theta\phi} = \partial_\theta \Gamma^\theta_{\phi\phi} - \Gamma^\phi_{\phi\theta} \Gamma^\theta_{\phi\phi} \\ &= \partial_\theta \left(-\frac{1}{2} \sin 2\theta\right) + \frac{1}{2} \cot \theta \sin 2\theta = \sin^2 \theta.\end{aligned}$$

Definitionen (4.17) av Ricci-tensorn ger följaktligen de nollskilda komponenterna

$$\begin{aligned}R_{\theta\theta} &= R^\phi_{\theta\phi\theta} = 1, \\ R_{\phi\phi} &= R^\theta_{\phi\theta\phi} = \sin^2 \theta.\end{aligned}$$

Slutligen kan Ricci-skalären beräknas till

$$R = g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi} R_{\phi\phi} = \frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_0^2 \sin^2 \theta} \sin^2 \theta = \frac{2}{r_0^2}.$$

### B.2 Härledning av Christoffel-symbolens transformation

När Christoffel-symbolen introducerades i avsnitt 4.3 nämndes att den inte är en tensor eftersom den inte följer tensorernas transformeringsregler. Istället ändras den vid koordinatbytet  $x^\mu$  till  $y^\mu$  enligt

$$\tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} = \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial y^\nu} \Gamma^{\alpha\beta\gamma} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\alpha}. \quad (\text{B.1})$$

Denna transformation härleds genom att först uttrycka  $\tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}$  i de nya koordinaterna:

$$\tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{\rho\sigma} \left( \frac{\partial \tilde{g}_{\nu\sigma}}{\partial y^\mu} + \frac{\partial \tilde{g}_{\mu\sigma}}{\partial y^\nu} - \frac{\partial \tilde{g}_{\mu\nu}}{\partial y^\sigma} \right), \quad (\text{B.2})$$

där den transformerade metriken ges av

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} g_{\alpha\beta}.$$

Med hjälp av deriveringsregler kan termerna i den andra faktorn i ekvation (B.2) utvecklas till

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{g}_{\nu\sigma}}{\partial y^\mu} &= \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\sigma} g_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\nu} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial y^\mu \partial y^\sigma} g_{\alpha\beta} \\ &\quad + \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\sigma} \frac{\partial x^\gamma}{\partial y^\mu} \partial_\gamma g_{\alpha\beta},\end{aligned}$$

och motsvarande för andra index. Dessa uttryck, metriken symmetri och ett antal namnbyten mellan olika summeringsindex gör att faktorn kan bearbetas till

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{g}_{\nu\sigma}}{\partial y^\mu} + \frac{\partial \tilde{g}_{\mu\sigma}}{\partial y^\nu} - \frac{\partial \tilde{g}_{\mu\nu}}{\partial y^\sigma} &= 2 \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\sigma} g_{\alpha\beta} \\ &+ \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial y^\sigma} (\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}). \end{aligned}$$

Därefter används identiteterna  $g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$  och  $\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\rho} = \delta^\mu_\nu$  för att beräkna produkten i ekvation (B.2). Efter ytterligare omskrivningar erhålls (B.1), som är transformeringsreglerna för Christoffel-symbolen.

### B.3 Volymelementets invarians

Volymelementet för en krökt yta ges, som nämnt i avsnitt 4.5, av  $\sqrt{-g} d^D x$ . Detta volymelement är invariant under koordinatbytet  $dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} dy^\nu$ . Det visas genom att först uttrycka den transformerade metriken

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial y^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^j}{\partial x^\nu} \tilde{g}_{ij}.$$

Därmed ändras metriken determinant enligt

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^j}{\partial x^\nu} \tilde{g}_{ij}\right) = J^2 \tilde{g},$$

där det i sista steget användes att Jacobianen  $J$  definieras av

$$J = \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^\mu}\right).$$

I allmänhet gäller dessutom att volymelementet vid koordinatbyte ändras enligt

$$d^D x = J^{-1} d^D y.$$

Det transformerade volymelementet blir alltså

$$\sqrt{-g} d^D x = \sqrt{-J^2 \tilde{g}} J^{-1} d^D y = \sqrt{-\tilde{g}} d^D y$$

Därmed är volymelementet invariant vid koordinatbyten.

### B.4 Asymptotiskt platt Reissner-Nordström-metrik

I avsnitt 5.3 gjordes en sfäriskt symmetrisk ansats för metriken och de elektromagnetiska fälten kring ett elektriskt laddat svart hål i asymptotiskt platt rumtid

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \text{diag}(-A, B, r^2, r^2 \sin^2 \theta), \\ g^{\mu\nu} &= \text{diag}\left(-\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right), \end{aligned}$$

Nedan följer lösningen av Einsteins fältekvationer för denna ansats. Den elektromagnetiska stress-energitensorn bestämdes i A.3 till

$$T_{\mu\nu} = F^\rho_\mu F_{\rho\nu} - \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} g_{\mu\nu}. \quad (\text{B.3})$$

Den elektromagnetiska fälttensorns nollskilda komponenter är enligt avsnitt 5.3  $F_{tr} = -F_{rt} = -E_r$ , där  $E_r$  är det elektriska fältet

$$E_r = \frac{Q\sqrt{AB}}{4\pi r^2}. \quad (\text{B.4})$$

Därmed är den elektromagnetiska fälttensorn helt känd och stress-energitensorn kan beräknas:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{E_r^2}{2} \text{diag}\left(\frac{1}{B}, -\frac{1}{A}, \frac{r^2}{AB}, \frac{r^2 \sin^2 \theta}{AB}\right) \\ &= \frac{Q^2}{32\pi^2} \text{diag}\left(\frac{A}{r^4}, -\frac{B}{r^4}, \frac{1}{r^2}, \frac{\sin^2 \theta}{r^2}\right). \end{aligned}$$

Härnäst används den ansatta metriken för att beräkna Christoffel-symbolerna  $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ . Komponenterna med  $\rho = t$  eller  $\rho = r$  beror på funktionerna  $A$  och  $B$

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{\mu\nu} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{A'}{2A} & 0 & 0 \\ \frac{A'}{2A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Gamma^r_{\mu\nu} &= \begin{bmatrix} \frac{A'}{2B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B'}{2B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r}{B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{r}{B} \sin^2 \theta f \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Christoffel-symbolerna med  $\rho = \theta$  eller  $\rho = \phi$  är dock oberoende av  $A$  och  $B$ . De kommer från det sfäriska vinkelberoendet och ges av

$$\begin{aligned} \Gamma^\theta_{\mu\nu} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \sin 2\theta \end{bmatrix}, \\ \Gamma^\phi_{\mu\nu} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \cot \theta \\ 0 & \frac{1}{r} & \cot \theta & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ricci-tensorn blir diagonal med komponenterna

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \frac{A''}{2B} - \frac{A'^2}{4AB} - \frac{A'B'}{4B^2} + \frac{A'}{rB}, \\ R_{rr} &= -\frac{A''}{2A} + \frac{A'^2}{4A^2} + \frac{A'B'}{4AB} + \frac{B'}{rA}, \\ R_{\theta\theta} &= 1 - \frac{rA'}{2AB} + \frac{rB'}{2B^2} - \frac{1}{B}, \\ R_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta \left[ 1 - \frac{rA'}{2AB} + \frac{rB'}{2B^2} - \frac{1}{B} \right]. \end{aligned}$$

Utifrån detta kan Ricci-skalären enkelt beräknas genom kontraktion med metriken (ekvation (5.9))

$$R = -\frac{A''}{AB} + \frac{A'^2}{2A^2B} + \frac{A'B'}{2AB^2} - \frac{2A'}{rAB} + \frac{2B'}{rB^2} + \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2B}.$$

Därmed är alla termer i Einstein-tensorn kända. Även den blir diagonal och har komponenterna

$$\begin{aligned} G_{tt} &= \frac{AB'}{rB^2} + \frac{A}{r^2} - \frac{A}{r^2B}, & G_{rr} &= \frac{A'}{rA} - \frac{B}{r^2} + \frac{1}{r^2}, \\ G_{\theta\theta} &= \frac{r^2A''}{2AB} - \frac{r^2A'^2}{4A^2B} - \frac{r^2A'B'}{4AB^2} + \frac{rA'}{2AB} - \frac{rB'}{2B^2}, \\ G_{\phi\phi} &= \sin^2\theta \left( \frac{r^2A''}{2AB} - \frac{r^2A'^2}{4A^2B} - \frac{r^2A'B'}{4AB^2} + \frac{rA'}{2AB} - \frac{rB'}{2B^2} \right). \end{aligned}$$

Lösningens återstående del är insättning av tensorerna i Einsteins fältekvationer. Einstein-tensorns, metriken och stress-energitensorns diagonala element ger fyra kopplade differentialekvationer. Komponenterna  $G_{\theta\theta}$  och  $G_{\varphi\varphi}$ ,  $g_{\theta\theta}$  och  $g_{\varphi\varphi}$  respektive  $T_{\theta\theta}$  och  $T_{\varphi\varphi}$  skiljer sig dock bara med en gemensam faktor  $\sin^2\theta$ , varpå endast följande ekvationer återstår

$$\begin{cases} \frac{AB'}{rB^2} + \frac{A}{r^2} - \frac{A}{r^2B} - \Lambda A = \frac{\kappa^2 Q^2}{32\pi^2} \frac{A}{r^4} \\ \frac{A'}{rA} - \frac{B}{r^2} + \frac{1}{r^2} + \Lambda B = -\frac{\kappa^2 Q^2}{32\pi^2} \frac{B}{r^4} \\ \frac{r^2A''}{2AB} - \frac{r^2A'^2}{4A^2B} - \frac{r^2A'B'}{4AB^2} + \frac{rA'}{2AB} - \frac{rB'}{2B^2} + \Lambda r^2 = \frac{\kappa^2 Q^2}{32\pi^2} \frac{1}{r^2}. \end{cases}$$

En kombination av de första två av dessa resulterar i att  $AB' + A'B = (AB)' = 0$ , det vill säga att produkten  $AB$  är konstant. Återigen används gränsen  $r \rightarrow \infty$  och övergången till Minkowski-metriken, som medför att konstanten måste vara 1 [42]. Alltså är  $B(r) = 1/A(r)$ , vilket reducerar de två återstående ekvationerna till

$$\begin{cases} r^3A' + r^2A - r^2 + \Lambda r^4 = -\frac{\kappa^2 Q^2}{32\pi^2} \\ r^4A'' + 2r^3A' + 2\Lambda r^4 = \frac{\kappa^2 Q^2}{16\pi^2}. \end{cases}$$

Den andra ekvationen visar sig dock vara en omskrivning av den första, vilket kan inses genom att först multiplicera den med  $r$  och sedan derivera den med avseende på  $r$ . Ekvationens lösning är  $A(r) = 1 + \frac{\kappa^2 Q^2}{32\pi^2 r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 + \frac{C_M}{r}$ , där  $C_M$  är en integrationskonstant kopplad till massan i den Newtonska gränsen på samma sätt som i Schwarzschild-lösningen. Den bestäms enklast genom jämförelse med Schwarzschilds lösning i gränsen  $Q \rightarrow 0$ , vilket ger  $C_M = -rs$ . Sammanfattningsvis kan alltså Reissner-Nordström-metriken skrivas

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega_2, \quad (\text{B.5})$$

med lösningen

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \frac{\kappa^2 Q^2}{32\pi^2 r^2}. \quad (\text{B.6})$$

## B.5 Reissner-Nordström-lösningen i anti-de Sitter-rumtid

I avsnitt 5.3 hittades den asymptotiskt platta Reissner-Nordström-lösningen. På samma sätt kan metriken för en asymptotisk anti-de Sitter-rumtid kring ett elektriskt laddat svart hål bestämmas. En sfärisk symmetrisk generalisering av AdS-metriken (5.14) analog

med formen av Schwarzschild- och Reissner-Nordström-lösningarna är

$$g_{\mu\nu} = \frac{L^2}{z^2} \text{diag} \left( -f(z), \frac{1}{f(z)}, 1, \dots, 1 \right). \quad (\text{B.7})$$

Med denna metrik blir  $\sqrt{-g} = (L/z)^{d+2}$ . Symmetrin medför även att potentialen endast har en radiellt beroende tidskomponent  $A_t$ . Den av Maxwells ekvationer som är icke-trivial blir därför

$$\partial_z \left( z^{2-d} \partial_z A_t \right) = 0.$$

Lösningen skrivs

$$A_t = \mu \left[ 1 - \left( \frac{z}{z_H} \right)^{d-1} \right], \quad (\text{B.8})$$

där  $\mu$  är en konstant som kan relateras till laddningen och den andra integrationskonstanten har valts så att  $A_t = 0$  vid händelsehorisonten  $z = z_H$ . Den elektromagnetiska fältens nollskilda komponenter blir  $F_{zt} = -F_{tz} = -\mu/z_H$ . Av detta följer att stressenergitemensorn, enligt (5.8), är

$$T_{\mu\nu} = \frac{\mu^2(d-1)^2}{2L^2} \left[ \frac{z}{z_H} \right]^{2d-2} \text{diag} \left( f, -\frac{1}{f}, 1, \dots, 1 \right).$$

I vanlig ordning bestäms Christoffelsymbolerna  $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ . För denna metrik erhålls

$$\Gamma^z_{\mu\nu} = \text{diag} \left( \frac{f'f}{2} - \frac{f^2}{z}, -\frac{f'}{2f} - \frac{1}{z}, \frac{f}{z}, \dots, \frac{f}{z} \right)$$

medan

$$\Gamma^t_{zt} = \Gamma^t_{tz} = \frac{f'}{2f} - \frac{1}{z}, \quad \Gamma^{x_i}_{zx_i} = \Gamma^{x_i}_{x_i z} = -\frac{1}{z}$$

och de komponenter som inte har skrivits ut är noll. Ytterligare beräkningar visar att Ricci-tensorn är diagonal och att dess nollskilda komponenter är

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -f^2 R_{zz} = \frac{f''f}{2} - \frac{(d+2)f'f}{2z} + \frac{(d+1)f^2}{z^2}, \\ R_{x_i x_i} &= \frac{f'}{z} - \frac{(d+1)f}{z^2}. \end{aligned}$$

Det medför att Ricci-skalären blir

$$R = \frac{z^2}{L^2} \left( -f'' + (2d+2)\frac{f'}{z} - (d+1)(d+2)\frac{f}{z^2} \right),$$

och att även Einsteintensorn blir diagonal och har komponenterna

$$\begin{aligned} G_{tt} &= -f^2 G_{zz} = \frac{d}{2} \frac{f'f}{z} - \frac{d(d+1)}{2} \frac{f}{z^2}, \\ G_{x_i x_i} &= \frac{f''}{2} - d \frac{f'}{z} + \frac{d(d+1)}{2} \frac{f}{z^2} \end{aligned}$$

Insättning av termerna i Einsteins fältekvationer (4.25) resulterar i  $d+2$  icke-triviala ekvationer. Dessa är dock inte oberoende; de första två skiljer sig åt med en

faktor  $-f^2$  och de övriga  $d$  är identiska. De två unika ekvationerna som erhålls är

$$\begin{cases} \frac{d}{2} \frac{f'}{z} - \frac{d(d+1)}{2} \frac{f}{z^2} - \Lambda \frac{L^2}{z^2} = \frac{\kappa^2 \mu^2 (d-1)^2}{2L^2} \left[ \frac{z}{z_H} \right]^{2d-2} \\ \frac{f''}{2} - d \frac{f'}{z} + \frac{d(d+1)}{2} \frac{f}{z^2} + \Lambda \frac{L^2}{z^2} = \frac{\kappa^2 \mu^2 (d-1)^2}{2L^2} \left[ \frac{z}{z_H} \right]^{2d-2}. \end{cases}$$

Genom att multiplikation med  $z$  och differentiering med avseende på  $z$  av den första ekvationen erhålls den andra. Det är därför ett tillräckligt villkor att den övre ekvationen uppfylls, vilket gäller för lösningen

$$f(z) = -\frac{2\Lambda L^2}{d(d+1)} + \frac{\kappa^2 \mu^2 (d-1) z_H^2}{dL^2} \left( \frac{z}{z_H} \right)^{2d} + C z^{d+1} \quad (\text{B.9})$$

med en integrationskonstant  $C$ . Långt ifrån det svarta hålet, då  $z \rightarrow 0$ , måste metriken sammanfalla med (5.14), vilket innebär att  $f(z) \rightarrow 1$ . Därmed hittas relationen  $\Lambda = -d(d+1)/2L^2$  mellan den kosmologiska konstanten och AdS-radien. Integrationskonstanten kan uttryckas i de övriga parametrarna genom att utnyttja att  $f(z_H) = 0$ . Den allmänna lösningen i  $d+2$  dimensioner formuleras därmed som

$$\begin{aligned} f(z) = 1 - \left( 1 + \frac{d-1}{d} \frac{\kappa^2 \mu^2 z_H^2}{L^2} \right) \left( \frac{z}{z_H} \right)^{d+1} \\ + \frac{d-1}{d} \frac{\kappa^2 \mu^2 z_H^2}{L^2} \left( \frac{z}{z_H} \right)^{2d}. \end{aligned}$$

Specialfallet med  $d=2$  kan ger alltså att  $\Lambda = -3/L^2$  med lösningen

$$f(z) = 1 - \left( 1 + \frac{\kappa^2 \mu^2 z_H^2}{2L^2} \right) \left( \frac{z}{z_H} \right)^3 + \frac{\kappa^2 \mu^2 z_H^2}{2L^2} \left( \frac{z}{z_H} \right)^4.$$

# C. Härledningar och exempel inom kvantfältteori

Detta appendix förklarar hur Feynmans vägintegral som presenteras i 6 uppstår och ger exempel på hur en partitionsfunktion kan uttryckas i en funktionalintegral. Det visar även hur differentialekvationerna ur vilka konduktiviteten med metriksvar beräknas i kapitel 7 tas fram ur systemets rörelseekvationer. Avslutningsvis bifogas Mathematica-koden som implementerar den numeriska beräkningen av konduktiviteten.

## C.1 Feynmans vägintegral från Schrödingers ekvation

Beräkningen nedan följer i stora drag källa [20, kap. 3.2].

Vägintegralen har sitt ursprung från den tidsberoende Schrödingerekvationen. Den integreras för att få fram tidsevolutionsoperatoren  $\hat{U}(t, t')$ :

$$i\hbar\partial_t|\Psi\rangle = \hat{H}|\Psi\rangle \rightarrow |\Psi(t')\rangle = \hat{U}(t, t')|\Psi(t)\rangle.$$

Operatoren  $\hat{U}(t, t')$  kan för någon senare tidpunkt  $t'$  skrivas som

$$\hat{U}(t, t') = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t)}\Theta(t' - t),$$

för en given hamiltonian

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V},$$

med rörelseenergi-operator  $\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$  och potential  $\hat{V}$ .

Därmed kan vi skriva ett kvantmekaniskt tillstånd med rumskoordinater  $q'$  vid tid  $t'$ , från en ursprungs-koordinat  $q$  vid en tidpunkt  $t$ , som

$$\langle q'|\Psi(t')\rangle = \langle q'|\hat{U}(t, t')\Psi(t)\rangle = \int dq U(q', t'; q, t)\Psi(q, t).$$

Här är

$$U(q', t'; q, t) = \langle q'|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)}|q\rangle\Theta(t' - t),$$

där  $U(q', t'; q, t)$  är  $(q', q)$ -komponenten av operatoren  $U(t', t)$  och kallas för *propagatorn*. Denna är sannolikhetsamplituden för att en partikel med hamiltonian  $\hat{H}$  tar sig mellan rumskomponenterna  $q$  och  $q'$  på tiden  $t' - t$ .

Tricket för att komma till vägintegralen är nu att, istället för att betrakta tidsevolutionen för längre tider, använda tidsevolutionsoperatoren för infinitesimalt små propagationstider. Alltså blir  $\Delta t = \frac{t}{N}$  för något (stort)  $N$  och någon (längre) tid  $t$ . Detta gör att tidsevolutionen kan skrivas som

$$e^{-i\hat{H}t/\hbar} = \left(e^{-i\hat{H}\Delta t/\hbar}\right)^N,$$

där sedan

$$e^{-i\hat{H}\Delta t/\hbar} = e^{-i\hat{T}/\hbar}e^{-i\hat{V}\Delta t/\hbar} + O(\Delta t^2). \quad (C.1)$$

Med hjälp av ekvation C.1 kan tidspropagationen av en partikel skrivas som

$$\langle q_f|e^{-i\hat{H}t/\hbar}|q_i\rangle \simeq \int_{q_N=q_f, q_0=q_i} \prod_{n=1}^{n=N-1} dq_n \prod_{n=0}^{n=N} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \cdot \exp\left(-i\frac{\Delta t}{\hbar} \sum_{n=0}^{n=N} \left(V(q_n) + T(p_{n+1}) - p_{n+1}\frac{q_{n+1} - q_n}{\Delta t}\right)\right),$$

där likhet fås när  $N \rightarrow \infty$ . Enligt denna ekvation går tidpropagationen för en partikel att beskriva som en  $(2N - 1)$ -dimensionell integral över koordinaterna  $(p, q)$ . När man sedan går i gräns blir integralen oändlig-dimensionell, vilket ger

$$\langle q_f|e^{\hat{H}t/\hbar}|q_i\rangle = \int \mathcal{D}x \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t'=0}^{t'=t} dt' (p\dot{q} - H(p, q))\right), \quad (C.2)$$

där

$$\int \mathcal{D}x = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{q_N=q_f, q_0=q_i} \prod_{n=1}^{n=N-1} dq_n \prod_{n=0}^{n=N} \frac{dp_n}{2\pi\hbar}.$$

I och med att den diskreta uppdelningen av  $q = [q_0, \dots, q_N] = [q(0), q(\Delta t), \dots, q(N\Delta t)]$  övergår till en kontinuerlig funktion  $q = q(t)$ , liksom  $p = p(t)$ , blir integralen en funktionalintegral (se avsnitt 2.2).

För att sedan få ekvation C.2 kan en *Legendre-transform* göras, det vill säga

$$H(p, q) = L(p, q) - p\dot{q}. \quad (C.3)$$

Detta ger i sin tur den resulterande integralen

$$\langle q_f|e^{-i\hat{H}t/\hbar}|q_i\rangle = \int \mathcal{D}q \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t'=0}^{t'=t} dt' L(q, \dot{q})\right) \quad (C.4)$$

genom att dela upp ekvation (C.2) i två bidrag, sedan använda definitionen för hamiltonianen i ekvation (C.1), och till sist lösa den gaussiska integralen för den kinetiska energioperatoren. Integralmåttet  $\mathcal{D}q$  i ekvation (C.4) kan definieras som

$$\mathcal{D}q = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{Nm}{2\pi i\hbar t}\right)^{N/2} \prod_{n=1}^{n=N-1} dq_n.$$

## C.2 Exempel på partitionsfunktion och vägintegral

En tillståndssumma, även kallad partitionsfunktion, ser ut som

$$Z(\beta) = \sum_q \langle q | e^{-\beta \hat{H}} | q \rangle$$

där  $\beta = 1/T$  och  $|q\rangle$  är tillstånd som diagonaliserar  $\hat{H}$ .

Om  $\hat{H} = \hat{V}(\hat{q}) + \hat{p}^2/2m$  kan termen  $K_q = \langle q | e^{-\beta \hat{H}} | q \rangle = \text{tr} \left\{ e^{-\beta \hat{H}} \right\}$ , med hjälp av identiteten

$\int |x\rangle \langle x| dx = 1$ , skrivs som

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \prod_{i=1}^N \langle q_{i+1} | e^{-\epsilon \hat{H}} | q_i \rangle \\ &= \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \prod_{i=1}^N \langle q_{i+1} | e^{-\epsilon \hat{p}^2/2m + \epsilon V(q_i)} | q_i \rangle, \end{aligned}$$

där  $N \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\epsilon = \beta/N$  och  $|q_N\rangle = |q_0\rangle = |q\rangle$  [55, kap. 2]. Vad vi gjort här är att skriva om  $\text{tr} \left\{ e^{-\beta \hat{H}} \right\}$  i termer av en produkt, sedan 'klämma in'  $\mathbb{1} = \int |q_i\rangle \langle q_i| dq_i$  mellan varje  $\{e^{-\beta \hat{H}}\}$ -term och till sist dela upp index på lämpligt sätt. Om samma identitet används igen, denna gång med avseende på  $p$ , visas att  $\langle q_{i+1} | e^{-\epsilon \hat{H}} | q_i \rangle$  är detsamma som [54]

$$\begin{aligned} & e^{-\epsilon V(q_i)} \langle q_{i+1} | \left( \int dp_{i+1} |p_{i+1}\rangle \langle p_{i+1}| e^{-\epsilon \hat{p}^2/2m} \int dp_i |p_i\rangle \langle p_i| \right) | q_i \rangle \\ &= e^{-\epsilon V(q_i)} \int dp_i dp_{i+1} \langle q_{i+1} | p_{i+1} \rangle \langle p_{i+1} | e^{-\epsilon \hat{p}^2/2m} | p_i \rangle \langle p_i | q_i \rangle \\ &= e^{-\epsilon V(q_i)} \int dp_i dp_{i+1} \frac{e^{iq_{i+1}p_{i+1}}}{\sqrt{2\pi}} \langle p_{i+1} | e^{-\epsilon p_i^2/2m} | p_i \rangle \frac{e^{-iq_i p_i}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= e^{-\epsilon V(q_i)} \int dp_i dp_{i+1} \frac{e^{iq_{i+1}p_{i+1}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\epsilon p_i^2/2m} \delta(p_{i+1} - p_i) \frac{e^{-iq_i p_i}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= e^{-\epsilon V(q_i)} \int dp_i \frac{\exp\{ip_i(q_{i+1} - q_i) - \epsilon p_i^2/2m\}}{2\pi} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi\epsilon}} \exp\left\{-\epsilon V(q_i) - (q_{i+1} - q_i)^2 \frac{m}{2\epsilon}\right\}, \end{aligned}$$

där vi för den gaussiska integralen använt den allmänna formeln

$$\int d\vec{v} e^{-\vec{v}^T A \vec{v} + \vec{b}^T \vec{v}} = \frac{1}{\sqrt{\det(A/\pi)}} e^{\vec{b}^T A^{-1} \vec{b}/4}.$$

Allting sammansatt resulterar således i att vi kan uttrycka termen  $K_q$  som

$$K_{q,N} = \left(\frac{m}{2\pi\epsilon}\right)^{\frac{N}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \exp\left\{\sum_{i=1}^N -\epsilon \left(V(q_i) + \frac{m}{2} \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{\epsilon}\right)^2\right)\right\}.$$

Om  $N \gg 1$  och  $q_i$  är med jämna mellanrum utspridda längs med en väg som börjar och slutar i  $q$ , kan vi genom att införa en parameter  $\tau \in [0, \beta]$  skriva [55, kap. 2]

$$\frac{q_{i+1} - q_i}{\epsilon} \approx \dot{q}_i := dq_i/d\tau, \quad \tau \in [0, \beta].$$

Om  $N \rightarrow \infty$  går summan i exponenten mot en integral

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} K_{q,N} &= \mathcal{N} \int_{q'(0)=q'(\beta)=q} \mathcal{D}q' \exp\{-S_E[q']\}, \\ S_E[q'] &= \int d\tau \mathcal{L}_E(q') = \int -d\tau \left[ \frac{m}{2} \dot{q}^2 + V(q) \right] \end{aligned}$$

där  $\mathcal{N}$  är en normaliseringskonstant och  $\mathcal{D}q' = \prod_{q'}^\infty dq'$  och  $q'$  ligger på en kurva med början och slut i  $q$ . Detta är en så kallad vägintegral och ska tolkas som en integral över alla möjliga vägar som börjar och slutar i  $q$ , viktade med en faktor  $\exp\{S_E[q']\}$ . Det framgår nu om vi jämför med i ekvation (C.4) ovan att vi här har propagerat genom *euklidisk tid*  $\tau$  som kan relateras till vanlig tid  $t$  genom en så kallad Wick-rotation:  $t = i\tau$ .

Om vi byter den diskreta tillståndssumman mot en kontinuerlig integral kan vi sålunda skriva om den som

en enda vägintegral [54][55, kap. 2]

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int dq \langle q | e^{-\beta \hat{H}} | q \rangle = \int dq \int_{q'(0)=q'(\beta)=q} \mathcal{N} \mathcal{D}q' e^{-S_E[q']} \\ &= \int_{q(0)=q(\beta)} \mathcal{D}q e^{-S_E[q]}, \end{aligned}$$

med måttet  $\mathcal{D}q = \mathcal{N} \mathcal{D}q' dq$ .

### C.3 Differentialekvationer vid störning av metriken

För att beräkna konduktiviteten i kapitel 7 lades en störning till den elektromagnetiska potentialen, vars nollskilda komponenter därmed tar formen

$$A_t = \left(1 - \frac{z}{z_H}\right), \quad a_x = \int d\omega \hat{a}_x(z) e^{-i\omega t}. \quad (\text{C.5})$$

Denna störning påverkar metriken med en störning  $h_{tx}$  som på grund av symmetrin antas bero på  $z$  och  $t$ .

Metriken är alltså given som

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{L^2}{z^2} f & 0 & h_{tx} & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{z^2} \frac{1}{f} & 0 & 0 \\ h_{tx} & 0 & \frac{L^2}{z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{z^2} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.6})$$

Då små variationer undersöks skrivs hädanefter endast termer upp till linjär ordning i störningarna ut. Exempelvis kan den kontravarianta metriken approximeras till

$$g^{\mu\nu} \approx \begin{bmatrix} -\frac{z^2}{L^2} \frac{1}{f} & 0 & h_{tx} \frac{z^4}{L^4} \frac{1}{f} & 0 \\ 0 & \frac{z^2}{L^2} f & 0 & 0 \\ h_{tx} \frac{z^4}{L^4} \frac{1}{f} & 0 & \frac{z^2}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{z^2}{L^2} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

Allmänt för den elektromagnetiska fälttensorn gäller att

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (\text{C.8})$$

vilket med potentialen i ekvation (C.5) och metriken i ekvation (C.7) resulterar i

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\mu}{z} & \frac{d}{dt} a_x & 0 \\ \frac{\mu}{z} & 0 & a'_x & 0 \\ -\frac{d}{dt} a_x & -a'_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\mu}{z} \frac{z^4}{L^4} & -\frac{1}{f} \frac{z^4}{L^4} \frac{d}{dt} a_x & 0 \\ \frac{\mu}{z} \frac{z^4}{L^4} & 0 & f \frac{z^4}{L^4} a'_x - \frac{\mu}{z_H} \frac{z^6}{L^6} h_{tx} & 0 \\ \frac{1}{f} \frac{z^4}{L^4} \frac{d}{dt} a_x & \frac{\mu}{z_H} \frac{z^6}{L^6} h_{tx} - f \frac{z^4}{L^4} a'_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.9})$$

Härifrån ska problemets rörelseekvationer uppfyllas. Detta innebär först att att Maxwells ekvationer i krökt rum,  $\partial_\mu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = 0$ , ska gälla. Den enda icke-triviala ekvationen ges av komponenten med  $\nu = x$ :

$$-\frac{1}{f} \frac{d^2}{dt^2} a_x + (f a'_x)' - \frac{\mu}{z_H} \frac{z^2}{L^2} (h'_{tx} + \frac{2}{z} h_{tx}) = 0. \quad (\text{C.10})$$

Utöver Maxwells ekvationer ska även Einsteins fältekvationer,  $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}$ , gälla. För att behandla dem krävs först att Christoffel-symbolerna beräknas. Detta görs i vanlig ordning enligt ekvation (4.1), vilket resulterar i

$$\Gamma^t{}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{f'}{2f} - \frac{1}{z} & 0 & 0 \\ \frac{f'}{2f} - \frac{1}{z} & 0 & -\frac{1}{2f} \frac{z^2}{L^2} h'_{tx} - \frac{1}{f} \frac{z}{L^2} h_{tx} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2f} \frac{z^2}{L^2} h'_{tx} - \frac{1}{f} \frac{z}{L^2} h_{tx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma^z{}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{f^2}{z} + \frac{f f'}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \frac{z^2}{L^2} f h'_{tx} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{z} - \frac{f'}{2f} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{z^2}{L^2} f h'_{tx} & 0 & \frac{f}{z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{f}{z} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma^x_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{z^2}{L^2} \partial_t h_{tx} & \frac{z}{L^2} h_{tx} - \frac{z^2}{L^2} \frac{f'}{2f} h_{tx} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{L^2} h'_{tx} & 0 & 0 \\ \frac{z}{L^2} h_{tx} - \frac{z^2}{L^2} \frac{f'}{2f} h_{tx} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{L^2} h'_{tx} & 0 & -\frac{1}{z} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma^y_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{z} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eftersom de i hög utsträckning liknar de ostörda Christoffel-symbolerna påverkas endast två av Ricci-tensorns komponenter. Den ges av

$$R_{tx} = -\frac{1}{2} \frac{z^2}{L^2} f h''_{tx} - \frac{z}{L^2} f h'_{tx} + \frac{z}{L^2} f' h_{tx} - \frac{2f}{L^2} h_{tx}$$

$$R_{zx} = -\frac{1}{2f} \frac{z^2}{L^2} \partial_t h'_{tx} - \frac{1}{f} \frac{z}{L^2} \partial_t h_{tx}$$

Ricci-skalären, som i linjär ordning är oförändrad, ges av  $R = -12/L^2$ . Stress-energitensorn för Maxwell-verkan ges enligt bilaga A.3 av

$$T_{\mu\nu} = F^\rho{}_\mu F_{\nu\rho} - \frac{1}{4} F_{\sigma\rho} F^{\sigma\rho} g_{\mu\nu}. \quad (\text{C.11})$$

Med ekvationerna (C.11) och (C.9) kan stress-energitensorns komponenter bestämmas. Det visar sig att samma komponenter som i Ricci-tensorn påverkas av störningen:

$$T_{tx} = \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{z_H^2} \frac{z^4}{L^4} h_{tx} - \frac{\mu}{z_H} f \frac{z^2}{L^2} a'_x$$

$$T_{zx} = -\frac{\mu}{z_H} \frac{z^2}{L^2} \frac{1}{f} \partial_t a_x.$$

Av Einsteins tio fältekvationer återstår alltså två som inte uppfylls som en direkt följd av bakgrundsfältets konstruktion. Tensorernas  $tx$ -komponenter ger ekvationen

$$-\frac{1}{2} \frac{z^2}{L^2} f h''_{tx} - \frac{z}{L^2} f h'_{tx} + h_{tx} \left( \frac{z}{L^2} f' - \frac{2f}{L^2} + \frac{3}{L^2} \right)$$

$$= \kappa^2 \left( \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{z_H^2} \frac{z^4}{L^4} h_{tx} - \frac{\mu}{z_H} f \frac{z^2}{L^2} a'_x \right). \quad (\text{C.12})$$

Formen på  $f$ , som kommer från fältekvationernas oförändrade komponenter, medför att

$$\frac{f'}{2} - \frac{3f}{z^2} + \frac{3}{z^2} = \kappa^2 \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{z_H^2} \frac{z^2}{L^2}.$$

Ekvation (C.12) kan således reduceras till

$$z^2 h''_{tx} + 2z h'_{tx} - 2h_{tx} = 2\kappa^2 \frac{\mu}{z_H} z^2 a'_x.$$

Genom division med  $z^2$  och partiell integration följer att

$$h'_{tx} + \frac{2}{z} h_{tx} = 2\kappa^2 \frac{\mu}{z_H} a_x + C, \quad (\text{C.13})$$

där konstanten  $C$  kan ha ett tidsberoende. Tensorernas  $zx$ -komponenter ger istället ekvationen

$$-\frac{1}{2f} \frac{z^2}{L^2} \partial_t h'_{tx} - \frac{1}{f} \frac{z}{L^2} \partial_t h_{tx} = -\kappa^2 \frac{\mu}{z_H} \frac{z^2}{L^2} \frac{1}{f} \partial_t a_x,$$

som kan skrivas på samma form som ekvation (C.13) med ett  $C$  som därmed varken beror på  $z$  eller  $t$ . Genom att betrakta situationen i fallet då fälten inte perturberas dras slutsatsen att denna konstant måste vara noll. Den ansatta metriken gäller alltså då den elektromagnetiska potentialen perturberas med villkoret att

$$h'_{tx} + \frac{2}{z} h_{tx} = 2\kappa^2 \frac{\mu}{z_H} a_x.$$

Tillsammans med ekvation (C.10) används den för att ta fram en frekvensberoende konduktivitet i kapitel 7.

## C.4 Numeriska beräkningar

Nedan bifogas Mathematica-koden som utför den numeriska beräkningen av konduktiviteten genom att lösa ekvation (7.27) med infallande randvillkor. Figurer som visar real- och imaginärdelens frekvensberoende skapas för olika värden på den kemiska potentialen.

```
Holografisk konduktivitet med metriksvar

De numeriska beräkningarna görs i enheter där koordinaten z skalas så att den mäts i enheter av  $z_H$ . Det
medför att derivator skalas med  $1/z_H$ . Vidare mäts frekvensen och den kemiska potentialen i enheter av T.
Faktorn  $\kappa^2/L^2$  motsvarar styrkan av bulkens gravitationella växelverkan relativt den elektromagnetiska.
För enkelhets skull sätts den till 1; andra kopplingskonstanter ger samma resultat efter en skalning
av den kemiska potentialen. De olika parametrarnas relationer definieras nedan.

 $z_H[\mu_-] = (\text{Sqrt}[6\mu^2 + 16\pi^2] - 4\pi)/(\mu^2 T)$ 
 $fs[z_-, \mu_-] = 1 - (1 + z_H[\mu]^2 T^2/2)z^3 + z_H[\mu]^2 T^2 z^4/2;$ 

Om potentialens differentialekvation skrivs på en form där högerledet är noll ges vänsterledet av
följande funktion.

 $\text{diff}[\omega_-, \mu_-] = f[z, \mu] \text{Ax}'[z] + D[f[z, \mu], z] \text{Ax}[z] + ((\omega T)^2 z_H[\mu]^2 / f[z, \mu] - 2z_H[\mu]^2 T^2 \mu^2 z^2) \text{Ax}[z] /. f \rightarrow fs$ 

Randvillkor vid horisonten ges genom att Taylorutveckla ekvationen. Av de möjliga lösningarna används
den som motsvarar en infallande våg.

 $\text{Axnh}[z_-, \omega_-, \mu_-] = (1 - z)^{-I\omega/(4\pi)}$ 
 $\text{Axnhp}[z_-, \omega_-, \mu_-] = D[\text{Axnh}[z, \omega, \mu], z];$ 

Med kända randvillkor kan differentialekvationen lösas. För att undvika koordinatsingulariteten vid
horisonten sätts randvillkoren vid  $z = (1 - \varepsilon)z_H$  för ett litet  $\varepsilon$ .

 $\varepsilon = 0.00001;$ 
 $\text{Asol}[\omega_-, \mu_-] := \text{NDSolve}[\{\text{diff}[\omega, \mu] == 0, \text{Ax}[1 - \varepsilon] == \text{Axnh}[1 - \varepsilon, \omega, \mu], \text{Ax}'[1 - \varepsilon] == \text{Axnhp}[1 - \varepsilon, \omega, \mu]\}, \text{Ax}, \{z, 0, 1 - \varepsilon\}][[1]];$ 

Givet denna lösning kan konduktiviteten beräknas.

 $\sigma\text{sol}[\omega_-, \mu_-] := 1/I/(z_H[\mu]\omega T) \text{Ax}'[0]/\text{Ax}[0] /. \text{Asol}[\omega, \mu];$ 

Konduktiviteten är nu given som en funktion av frekvens och kemisk potential. Nedan skapas figurer
där frekvensberoendet visas med  $\mu$  som parameter.

<< MaTeX`
figRe = Plot[{Re[σsol[ω, 5]], Re[σsol[ω, 25]], Re[σsol[ω, 50]]}, {ω, 0.001, 75},
  PlotRange → {{0, 75}, {0, 1.2}}, PlotStyle → {Black, {Blue, Dashed}, {Red, DotDashed}},
  PlotLegends → Placed[LineLegend[{MaTeX["\mu/T=5", FontSize → 16], MaTeX["\mu/T=25", FontSize → 16], MaTeX["\mu/T=50", FontSize → 16]}, LegendFunction → Panel], {Right, Bottom}],
  GridLines → Automatic, GridLinesStyle → Directive[Black, Thickness[0.0002], Opacity[0.5]],
  Frame → True, FrameTicks → {{Automatic, None}, {Automatic, None}},
  FrameLabel → {MaTeX["\omega/T", FontSize → 20], MaTeX["\text{Re } \sigma(\omega)", FontSize → 20]},
  FrameTicksStyle → Black,
  BaseStyle → {NumberPoint → ","}, FontFamily → "CMU Serif", FontSize → 16},
  ImagePadding → {{55, 10}, {50, 10}}]
figIm = Plot[{Im[σsol[ω, 5]], Im[σsol[ω, 25]], Im[σsol[ω, 50]]}, {ω, 0.001, 75},
  PlotRange → {{0, 75}, {-1, 6}}, PlotStyle → {Black, {Blue, Dashed}, {Red, DotDashed}},
  PlotLegends → Placed[LineLegend[{MaTeX["\mu/T=5", FontSize → 16], MaTeX["\mu/T=25", FontSize → 16], MaTeX["\mu/T=50", FontSize → 16]}, LegendFunction → Panel], {Right, Bottom}],
  GridLines → Automatic, GridLinesStyle → Directive[Black, Thickness[0.0002], Opacity[0.5]],
  Frame → True, FrameTicks → {{Automatic, None}, {Automatic, None}},
  FrameLabel → {MaTeX["\omega/T", FontSize → 20], MaTeX["\text{Im } \sigma(\omega)", FontSize → 20]},
  FrameTicksStyle → Black,
  BaseStyle → {NumberPoint → ","}, FontFamily → "CMU Serif", FontSize → 16},
  ImagePadding → {{55, 10}, {50, 10}}]
Export["Re_sigma.pdf", figRe] // SystemOpen
Export["Im_sigma.pdf", figIm] // SystemOpen
```







INSTITUTIONEN FÖR FYSIK  
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA  
Göteborg, Sverige  
[www.chalmers.se](http://www.chalmers.se)



**CHALMERS**