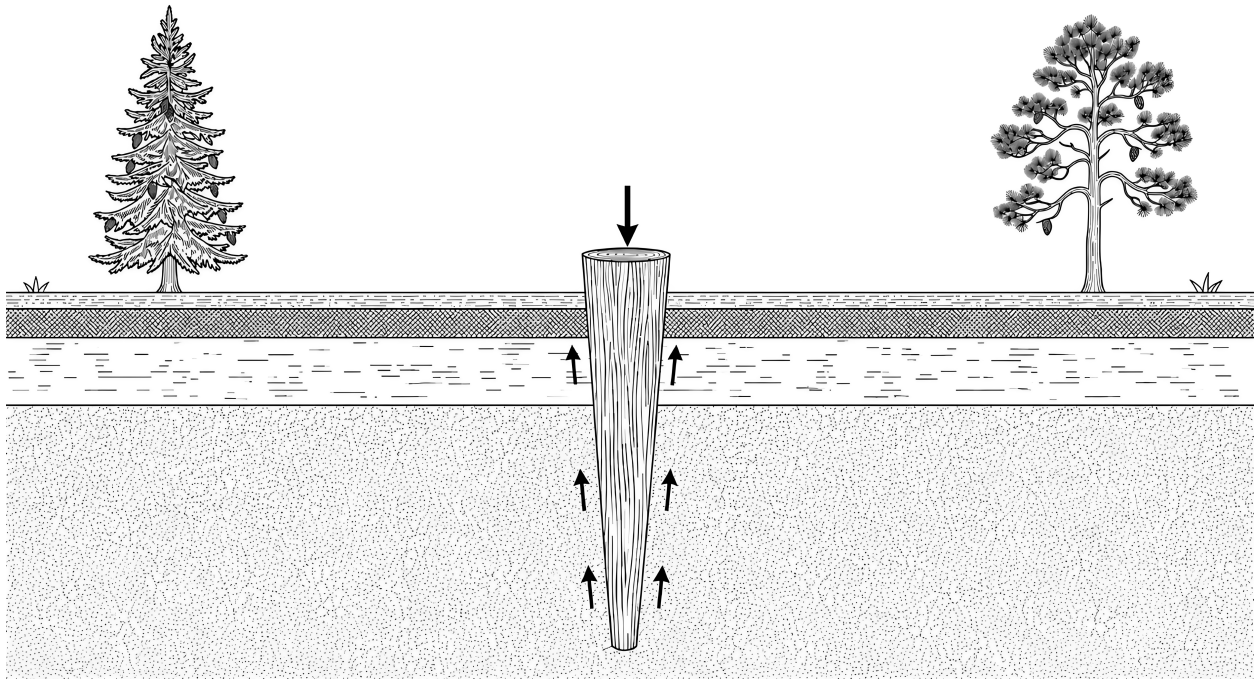




CHALMERS



Analys av tillväxtvärdens inverkan på träpålars geotekniska bärförmåga

En studie av gran och tall i Sverige

Examensarbete inom högskoleprogrammet TISAM

Daniel Abrahamsson & Johan Winberg

INSTITUTIONEN FÖR ARKITEKTUR OCH SAMHÄLLSBYGGNADSTEKNIK

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

Göteborg 2026

www.chalmers.se

EXAMENSARBETE 2026

Analys av tillväxtvärdens inverkan på träpålars geotekniska bärförmåga

En studie av gran och tall i Sverige

Daniel Abrahamsson & Johan Winberg



CHALMERS

Institutionen för Arkitektur och samhällsbyggnadsteknik
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg 2026

Analys av tillväxtvärdens inverkan på träpålars geotekniska bärförmåga
En studie av gran och tall i Sverige
Daniel Abrahamsson & Johan Winberg

© Daniel Abrahamsson & Johan Winberg, 2026.

Handledare: Peter Alheid & Emil Karlén, Hercules Grundläggning AB
Examinator: Mats Karlsson, Chalmers tekniska högskola AB

Examensarbete 2026
Arkitektur och samhällsbyggnadsteknik
Chalmers Tekniska Högskola
SE-412 96 Göteborg
Telefon +46 31 772 1000

Omslagsbild: Träpålens verkningssätt med gran till vänster och tall till höger. Skapad
via (ChatGPT (DALL-E 3), 2026).

Skriven i L^AT_EX
Göteborg 2026

Analys av tillväxtvärdens inverkan på träpålars geotekniska bärförmåga

En studie av gran och tall i Sverige

Daniel Abrahamsson & Johan Winberg

Arkitektur och samhällsbyggnadsteknik

Chalmers Tekniska Högskola

Sammanfattning

På grund av det ständigt ökande klimatkraven som ställs på dagens byggnationer har incitamentet att använda träpålar ökat. Grundlig information angående tillväxtvärden för gran och tall saknas däremot i dagsläget och vid beräkning av träpålars geotekniska bärförmåga används istället branschaccepterade normvärden.

I studien undersöktes således vilka tillväxtvärden som bör användas för gran och tall i Sverige baserat på längd och avverkningsplats, samt hur dessa värden påverkar träpålars geotekniska bärförmåga i relation till dagens normvärden. Dessutom undersöktes trädgruppernas formkvot och satte dessa i relation till tidigare studier inom området för att påvisa en trend i formkvotens förändring över tid.

Till grund för detta arbete låg data tillhandahållen via Skogforsk bestående av manuellt kontrollmätta stammar av gran och tall mellan 2016 och 2024. Datan specificerade även om träden avverkats i norra eller södra Sverige. Tidigare etablerade och bevisade modeller utnyttjades vid behandling av datan.

Resultatet indikerade att gran i regel hade större tillväxt än tall, men den största skillnaden återfanns mellan olika pållängder. De största skillnaderna i geoteknisk bärförmåga gentemot beräkningar utförda med branschaccepterade normvärden återfanns hos 7,5 m långa pålar av tall från södra Sverige och 21 m långa pålar av gran från södra Sverige. Här resulterade tallgruppen i en minskad geoteknisk bärförmåga på 3,6 % och grangruppen i en ökning på 6,8 %. Beräkningarna förutsatte att pålarna endast bestod av trä. I de fall kombinationspålar utnyttjas minskar tillväxtens påverkan på den geotekniska bärförmågan.

Formkvoterna för gran presenterade i denna studie stämde väl överens med den negativa formkvotsutvecklingen framförd av tidigare studier inom området. Formkvoterna för tall däremot skiljde sig markant från tidigare forskning och följde inte någon förväntad trend.

Slutsatsen är studiens rekommenderade tillväxtvärden bör tillämpas vid användning av pålar helt i trä, speciellt då pålar i gruppen tall söder om 7,5 m eller gran söder om 21 m används. I de fall kombinationspålar nyttjas kan det branschaccepterade normvärdet 8 mm/m användas och resultera i ett tillräckligt korrekt svar. Dessutom fastställs hur formkvotsutvecklingen för gran i denna studie är riktig men att utvecklingen för tall avviker från tidigare forskning och bör beaktas med stor varsamhet.

Nyckelord: tillväxt, avsmalning, formkvot, gran, tall, Sverige, pålgrundläggning, träpålar, grundläggning, geoteknik.

Analysis of the impact of taper values on the geotechnical bearing capacity of timber piles

A study of spruce and pine in Sweden

Daniel Abrahamsson & Johan Winberg

Architecture and Civil Engineering

Chalmers University of Technology

Abstract

Due to the ever-increasing climate demands placed on today's construction, the incentive to use timber piles has increased. However, thorough information regarding taper values for spruce and pine is currently lacking, thus, industry-accepted standard values are used when calculating the geotechnical bearing capacity of timber piles.

The study thus examined taper values for Swedish spruce and pine based on length and felling location, and how these affect the geotechnical bearing capacity compared to current standards. In addition, the form factor of the tree groups was examined and compared with previous studies to identify its progression over time.

The basis for this work was data provided by Skogforsk consisting of manually measured trunks of spruce and pine between 2016 and 2024. The data specified whether the trees were felled in northern or southern Sweden. Previously established and proven models were used when processing the data.

The results indicated that spruce generally had greater taper values than pine, but the largest difference occurred between different pile lengths. The largest differences in geotechnical bearing capacity compared to standard value calculations were found for 7,5 m long piles of pine from southern Sweden and 21 m long piles of spruce from southern Sweden. The pine group reduced the geotechnical bearing capacity by 3,8 % and the spruce group increased it by 6,4 %. The calculations assumed that the piles consisted only of timber. Using composite piles reduces the impact of tapering on the geotechnical bearing capacity.

The form factors for spruce corresponded well with the negative form factor development from previous studies. The form factors for pine, however, differed significantly from previous research and did not follow any expected trend.

The conclusion is that the study's recommended taper values should be applied when piles entirely made of timber are used, particularly for 7,5 m long piles of pine from southern Sweden or 21 m long piles of spruce from southern Sweden are used. For composite piles, the industry-accepted standard value 8 mm/m yields a sufficiently accurate answer. Furthermore, the form factor development for spruce is deemed accurate, while the pine development deviates from previous research and should be considered with great caution.

Keywords: Growth, Taper, Form factor, Spruce, Pine, Sweden, Pile foundation, Timber piles, Foundation engineering, Geotechnical engineering.

Förord

Följande rapport är framtagen efter samtal med Hercules Grundläggning AB som förklarat att det i dagsläget råder en kunskapsbrist kring träpålars koniska form.

Syftet med studien är således att via insamlad trädata och statistiska modeller beskriva tillväxtvärdet hos de två vanligaste träpåletyperna, nämligen gran och tall. Resultatet skiljer på såväl geografisk avverkningsplats som pållängd.

Vi vill rikta ett stort tack till Jon Söderberg på Skogforsk som tillhandahållit oss datan för studien och hjälpt oss tolka denna. Dessutom vill vi tacka våra handledare Peter Alheid och Emil Karlén hos Hercules Grundläggning AB samt Mats Karlsson på Chalmers Tekniska Högskola för löpande handledning och engagemang genom hela projektet.

Daniel Abrahamsson & Johan Winberg, Göteborg, Maj 2026

Akronymer

Nedan är listan av akronymer som har använts genom studien i alfabetisk ordning:

ASTM	Advancing standards transforming markets international
DBH	utsida barkdiameter vid brösthöjd (1,3 m)
FI	Fit index
MAD	mean absolute difference
RMSE	root mean square error

Innehåll

Akronymer	x
Figurer	xv
Tabeller	xvii
1 Inledning	1
1.1 Bakgrund	1
1.2 Syfte & Mål	2
1.3 Avgränsningar	2
1.4 Definitioner	2
2 Metod	3
2.1 Litteratursökning	3
2.2 Kvantitativ databearbetning & tillväxtfunktion	3
2.3 Analytisk härledning (α -metoden och förutsättningar)	4
3 Litteraturstudie	5
3.1 Sveriges pålningshistoria och framtid	5
3.2 Egenskaper hos barrträ	7
3.3 Begreppet tillväxt och formkvot	8
3.4 Formkvotsförändring genom tiderna	9
3.5 Internationella tillväxtvärden	9
3.6 Påltyper	10
3.6.1 Träpålar och kombinationspålar	11
4 Analytisk härledning	13
4.1 Förutsättningar	13
4.2 α -metoden	13
5 Kvantitativ studie	19
5.1 Data	19
5.1.1 Krav & behandling av data	21
5.2 Val av tillväxtfunktion	23
5.2.1 Olika tillväxtfunktioner	24
5.2.2 Kozak 02 tillväxtfunktion	24

6	Resultat	29
6.1	Rekommenderade tillväxtvärden	29
6.1.1	Gran Norr	31
6.1.2	Gran Söder	33
6.1.3	Tall Norr	35
6.1.4	Tall Söder	37
6.1.5	Rekommendationer	39
6.2	Tillväxtvärdens påverkan på träpålars geotekniska bärförmåga	39
6.3	Formkvot	41
7	Diskussion	43
7.1	Tillväxtvärdens rimlighet	43
7.2	Praktisk betydelse för dimensionering av träpålar	44
7.3	Formkvotsutveckling	44
8	Slutsats	47
8.1	Tillväxtvärden för gran och tall i norra och södra Sverige	47
8.2	Tillväxtvärdens påverkan på geoteknisk bärförmåga	48
8.3	Formkvotsutveckling	49
	Referenser	51
A	Funktioner för beräkning av barktjocklek	I
A.1	Avbarkningsfunktion för tall:	I
A.2	Avbarkningsfunktion för gran:	II
B	Statistiska modeller	III
B.1	Kozak 02 modell i R	III
B.2	Icke-linjärt minska kvadratproblems lösning:	IV
B.3	Tillväxtfunktion:	V
B.4	Beräkning av längdkategorier:	VI
B.5	Tillväxt beräkning:	VII

Figurer

3.1	Mängd installerade pålar i Sverige fördelade på olika material och år. Hämtat från: (Gullberg, 2025).	6
3.2	Ingående delar och transportvägar för vatten och naringsämnen i en trädstam. Hämtad från: (Svenskt Trä, 2026).	7
3.3	Verkningssätt för spets- och mantelburna pålar. Skapad via (Gemini 3, 2026)	10
3.4	Kohesionspålars vidhäftningstid till kringliggande jord efter nedslagning baserat på pålmaterial. $\kappa_T = 1$ medför full vidhäftning. Hämtad från: (Eriksson m. fl., 2004)	10
4.1	Mobilisering av mantel- respektive spetsbärförmåga. Hämtad från: (Eriksson m. fl., 2004)	15
5.1	Limes norrlandicus, den naturliga norrlandsgränsen markerad som rött streck i karta över Sverige. Bild av Koyos, licensierad under CC BY-SA 3.0. Hämtad från: https://sv.wikipedia.org/wiki/Norrlands_inland	20
5.2	Exempel på likvärdiga diameterprofiler på träd med olika form. Skapad via (Gemini 3, 2026)	22
5.3	Diagrammet visar tillväxtvärdet för varje punkt på trädet (mm/m) i relation till den relativa höjden (h_i/H). Ett högt värde på y-axeln innebär att trädet smalnar av snabbt vid just den punkten. Relativa höjden $z_i = 1$ innebär toppen av trädet.	26
5.4	Trädstammens olika former	27
5.5	Tillväxtvärdet per trädzon	27
5.6	Exempel figur för hur gruppens tillväxtvärden fördelas med histogram för längdgruppen 10 – 15m.	28
6.1	Tillväxtvärden för granar i norra Sverige inom längdgruppen 5–10m	31
6.2	Fördelning av tillväxtvärden för granar i norra Sverige inom längdgrupp 5 – 10m	31
6.3	Tillväxtvärden för granar i norra Sverige inom längdgruppen 10 – 15m	31
6.4	Fördelning av tillväxtvärden för granar i norra Sverige inom längdgrupp 10 – 15m	31
6.5	Tillväxtvärden för granar i norra Sverige inom längdgruppen 15 – 20m	32
6.6	Fördelning av tillväxtvärden för granar i norra Sverige inom längdgrupp 15 – 20m	32

6.7	Tillväxtvärden för granar i norra Sverige inom längdgruppen $> 20m$.	32
6.8	Fördelning av tillväxtvärden för granar i norra Sverige inom längdgrupp $> 20m$	32
6.9	Tillväxtvärden för granar i södra Sverige inom längdgrupp $5 - 10m$.	33
6.10	Fördelning av tillväxtvärden för granar i södra Sverige inom längdgrupp $5 - 10m$	33
6.11	Tillväxtvärden för granar i södra Sverige inom längdgrupp $10 - 15m$.	33
6.12	Fördelning av tillväxtvärden för granar i södra Sverige inom längdgrupp $10 - 15m$	33
6.13	Tillväxtvärden för granar i södra Sverige inom längdgrupp $15 - 20m$.	34
6.14	Fördelning av tillväxtvärden för granar i södra Sverige inom längdgrupp $15 - 20m$	34
6.15	Tillväxtvärden för granar i södra Sverige inom längdgrupp $> 20m$. .	34
6.16	Fördelning av tillväxtvärden för granar i södra Sverige inom längdgrupp $> 20m$	34
6.17	Tillväxtvärden för tallar i norra Sverige inom längdgrupp $5 - 10m$. .	35
6.18	Fördelning av tillväxtvärden för tallar i norra Sverige inom längdgrupp $5 - 10m$	35
6.19	Tillväxtvärden för tallar i norra Sverige inom längdgrupp $10 - 15m$.	35
6.20	Fördelning av tillväxtvärden för tallar i norra Sverige inom längdgrupp $10 - 15m$	35
6.21	Tillväxtvärden för tallar i norra Sverige inom längdgrupp $15 - 20m$.	36
6.22	Fördelning av tillväxtvärden för tallar i norra Sverige inom längdgrupp $15 - 20m$	36
6.23	Tillväxtvärden för tallar i norra Sverige inom längdgrupp $> 20m$. . .	36
6.24	Fördelning av tillväxtvärden för tallar i norra Sverige inom längdgrupp $> 20m$	36
6.25	Tillväxtvärden för tallar i södra Sverige inom längdgrupp $5 - 10m$. .	37
6.26	Fördelning av tillväxtvärden för tallar i södra Sverige inom längdgrupp $5 - 10m$	37
6.27	Tillväxtvärden för tallar i södra Sverige inom längdgrupp $10 - 15m$.	37
6.28	Fördelning av tillväxtvärden för tallar i södra Sverige inom längdgrupp $10 - 15m$	37
6.29	Tillväxtvärden för tallar i södra Sverige inom längdgrupp $15 - 20m$.	38
6.30	Fördelning av tillväxtvärden för tallar i södra Sverige inom längdgrupp $15 - 20m$	38
6.31	Tillväxtvärden för tallar i södra Sverige inom längdgrupp $> 20m$. . .	38
6.32	Fördelning av tillväxtvärden för tallar i södra Sverige inom längdgrupp $> 20m$	38

Tabeller

3.1	Jämförelse av medelformkvot för tall och gran i olika regioner mellan Edgren & Nylinder samt Ågren m.fl. Hämtat från: (Ågren m.fl., 2021).	9
6.1	Sammanställning av resultat för gran och tall i norr och söder.	30
6.2	Sammanställning av tillväxtvärden för olika pållängder för gruppen gran norr.	32
6.3	Sammanställning av tillväxtvärden för olika pållängder för gruppen gran söder.	34
6.4	Sammanställning av tillväxtvärden för olika pållängder för gruppen tall söder.	36
6.5	Sammanställning av tillväxtvärden för olika pållängder för gruppen tall söder.	38
6.6	Rekommenderade tillväxtvärden för Gran och Tall uppdelat på region och pållängd.	39
6.7	Beräknad Faktor baserat på trädslag, region och pållängd. Referensgruppen syftar till beräkningar gjorda med tillväxtvärdet 8 mm/m. Färger anger hur resultatet skiljer sig från referensvärdet.	40
6.8	Beräknad geoteknisk bärförmåga baserat på trädslag, region och pållängd. Referensgruppen syftar till beräkningar gjorda med tillväxtvärdet 8 mm/m. Färger anger hur resultatet skiljer sig från referensvärdet.	40
6.9	Sammanställning av medianvärden för diametern vid 20 % respektive 60 % av trädslängden för olika trädslag och regioner.	41
6.10	Jämförelse av medelformkvot för tall och gran i olika regioner mellan Edgren & Nylinder (1949), Ågren m.fl. (2021) samt denna studie. Kolumnen "Utveckling" baseras på resultatet i denna studie och resultatet från Ågren m.fl. Bearbetad efter: (Ågren m.fl., 2021).	41
8.1	Justerat resultat efter exkludering av osäkra resultat. Tillväxtvärdet för över 20 m långa granar från norra Sverige och över 20 m långa tallar från norra Sverige har exkluderats.	47
8.2	Beräknad Faktor baserat på trädslag, region och pållängd. Referensgruppen syftar till beräkningar gjorda med tillväxtvärdet 8 mm/m. Färger anger hur resultatet skiljer sig från referensvärdet. Faktorn för 21 m långa pålar av gran från norra Sverige och 21 m långa pålar av tall från norra Sverige har exkluderats.	48

- 8.3 Beräknad geoteknisk bärförmåga baserat på trädslag, region och pållängd. Referensgruppen syftar till beräkningar gjorda med tillväxtvärdet 8 mm/m. Färger anger hur resultatet skiljer sig från referensvärdet. Geoteknisk bärförmåga för 21 m långa pålar av gran från norra Sverige och 21 m långa pålar av tall från norra Sverige har exkluderats. . 49

1

Inledning

Detta inledande kapitel ger en bakgrund till ämnet och beskriver den problematiken som ligger till grunden för studien. Vidare presenteras undersökningens syfte samt de specifika frågeställningarna som ska behandlas.

1.1 Bakgrund

Pålning är en grundläggningsmetod som används vid byggnation för att överföra eller sprida laster till kringliggande jord eller berg då omgivande jord- och bergarter inte kan ta upp närvarande lasteffekter för att utan tvivel motverka skadliga sättningar (Olsson & Holm, 1993). Det finns två typer av pålar, kohesionspålar och spetsburna pålar. Kohesionspålar beskrivs som pålar nedförda i kohesionsjord där majoriteten av lastfördelningen sker via pålens mantelyta via vidhäftning mellan påle och jord. Spetsburna pålar är pålar nedförda till fastare jordlager eller berg där den huvudsakliga lastspridningen sker via pålspetsen.

De vanligaste pålmaterialen är trä, stål och betong. Enligt Pålkommisionens statistik har användningen av träpålar minskat drastiskt de senaste 50 åren (Gullberg, 2025). Träpålar används vanligtvis som tillfälliga konstruktioner eller under grundvattenytan för att säkerställa en syrefattig omgivning vilket i sin tur skyddar pålen från rötangrepp (Kayhan & Viitberg, 2024). Trots detta menar källan att det kan finnas ett större framtida behov av träpålar bland annat på grund av att byggnationers klimatpåverkan idag uppmärksammas mer än någonsin.

Vid beräkning av kohesionspålars geotekniska bärförmåga används α -metoden som beror på pålens mantelarea (Eriksson m. fl., 2004). Mantelarean beror i sin tur på hur koniskt formad pålen är alltså hur snabbt diameterprofilen förändras längs pålens längd, härafter benämnt pålens tillväxt. Detta är speciellt avgörande för träpålar tack vare trädets naturligt koniska form. Idag används branschaccepterade normvärden för att beskriva en pålens tillväxt men det saknas nutida statistik inom området.

1.2 Syfte & Mål

Syftet med studien är att undersöka tillväxten hos avverkade träd som möter de geometriska kraven för att utnyttjas som träpålar.

Målet med studien är att undersöka vilka tillväxtvärden som gran och tall har i norra respektive södra Sverige. Resultaten jämförs med branschaccepterade normvärden som används idag och om större skillnader påvisas ämnar studien att fastslå nya rekommenderade tillväxtvärden.

Följande frågeställningar behandlas:

- Vilka tillväxtvärden kan nyttjas beträffande gran och tall från norra respektive södra Sverige?
- Hur stor påverkan har tillväxtvärden på träpålars geotekniska bärförmåga?
- Hur har formkvoter ändrats över tid?

1.3 Avgränsningar

Rapporten avser enbart att undersöka tillväxtvärden hos gran och tall som avverkats i Sverige med avseende på geografisk avverkningsplats.

Den analytiska härledningen är förenklad för att behandlas inom tidsramen för detta arbete och avser enbart mantelburna träpålar. Studien förhåller sig dessutom till ett djupt lågpermeabelt lager lera likt de som återfinns i västra Sverige och odränerade förhållanden förutsätts.

För den kvantitativa studien används manuellt kontrollmätta gran- och tallstammar tillhandahållna via Skogforsk. Datan skiljer på trädslag och geografisk avverkningsplats och samlades in mellan 2016 och 2024. Denna rapport avser ej ett djupdyk i hur använda statistiska modeller och respektive funktionerna fungerar eller hur de skiljer sig åt. Det kommer att diskuteras vilken funktion som passar ändamålet bäst och varför.

1.4 Definitioner

I följande arbete används begreppet *tillväxt* genomgående istället för *avsmalning* vid beskrivning av ett träds diameterförändring över stammens längd. Inom skogsnäringen används ofta begreppet *avsmalning*, men inom geoteknik och vid dimensionering av träpålar är begreppet *tillväxt* mer etablerat. Eftersom studien behandlar träpålar har begreppet *tillväxt* använts uteslutande.

2

Metod

I detta kapitel redogörs för studiens metodval. Här beskrivs vilka metoder som använts, hur information och data är insamlat samt vilka verktyg som använts.

2.1 Litteratursökning

Litteraturstudien innebär en informationssamling av relevant befintlig information och forskning för att ge en teoretisk bakgrund till studien. Informationen berör pålningshistoria, pålars funktion, relevanta begrepp, materialet trä, beräkningsmodeller och statistiska modeller.

Information angående pålning och beräkningsmodeller hämtas generellt från Pålkommissionens rapporter. För materialet trä förser Skogforsk och Svenskt Trä studien med större delen av informationen. Uppgifter kring statistiska modeller hämtas från vetenskapliga rapporter utförda av skogsforskare.

2.2 Kvantitativ databearbetning & tillväxtfunktion

För att undersöka vilket tillväxtvärde träd har och visa fördelning av tillväxtvärdena samlades data in från Skogforsk. Datan samlades in från Biometrias personal med digitalklave vid avverkningstillfället, mätningarna utfördes mellan 2016 och 2024.

För att undersöka tillväxtvärden för träd som är lämpade att bli träpålar filtrerades datan från tydliga fel samt kontrollerades för att avgöra om träden kan användas vid pålning. Denna kontroll innebar att det minst måste finnas en kontinuerlig 5 m sträcka mellan diameterbrösthöjd (DBH) och den del av trädet då diametern når 125 mm. Resultatet presenteras sedan med avseende på trädens höjd och delas in i följande höjdgrupper: 5-10 m, 10-15 m, 15-20 m och >20 m

För att få fram tillväxtvärden användes Kozak 02 avsmalningsfunktion. Funktionen lokaliseras enligt 9 parametrar och användes för att få fram alla träds tillväxtvärden. Detta för att validera metoden gentemot bekräftad form på träd samt ta fram tillväxtvärden för alla träd.

Utförandet av filtrering av datan gjordes genom att skapa en csv-fil från existerande Excel-fil från Skogforsk som sedan filtrerades i PyCharm. Utförandet av tillväxtfunktionen gjordes i programspråket R och under framtagning av kod användes Opus 4.6 Extended (2026) som stödverktyg, kod kontrollerades manuellt. Opus 4.6 Extended (2026) användes för att underlätta studiens framtagning av tillväxtvärden så att fortsatt analys kring pålars geotekniska bärförmåga kunde utföras.

Vid framtagning av formkvoters skillnader över tid jämförs denna studie endast med Ågren m.fl. (2021) som i sin tur jämför sina resultat med Edgren & Nylinder (1949). Följaktligen har datan i denna studie bearbetats i enlighet med Ågren m.fl. (2021) vad gäller exempelvis avbarkningsfunktioner. Även definitionen av formkvot i denna studie följer det beskrivet av både Ågren m.fl. (2021) och Edgren & Nylinder (1949). Detta för att kunna utföra en relevant jämförelse av resultaten.

2.3 Analytisk härledning (α -metoden och förutsättningar)

Då rekommenderade tillväxtvärden för respektive trädgrupp framställts via den kvantitativa studien utförs en analytisk härledning. Denna innebär en analytisk härledning av ekvationen för en träpåles geotekniska bärförmåga för att skildra hur tillväxtvärdens förändring påverkar bärförmågan. Detta arbete antar enligt 1.3 ett djupt lågpermeabelt lager lera och odränerade geotekniska förhållanden. På grund av detta baseras den analytiska härledningen på α -metoden (Eriksson m. fl., 2004).

3

Litteraturstudie

I detta kapitel presenteras befintlig teori som ligger till grund för studiens analys. Fokus ligger på träets form och egenskaper samt påltyper.

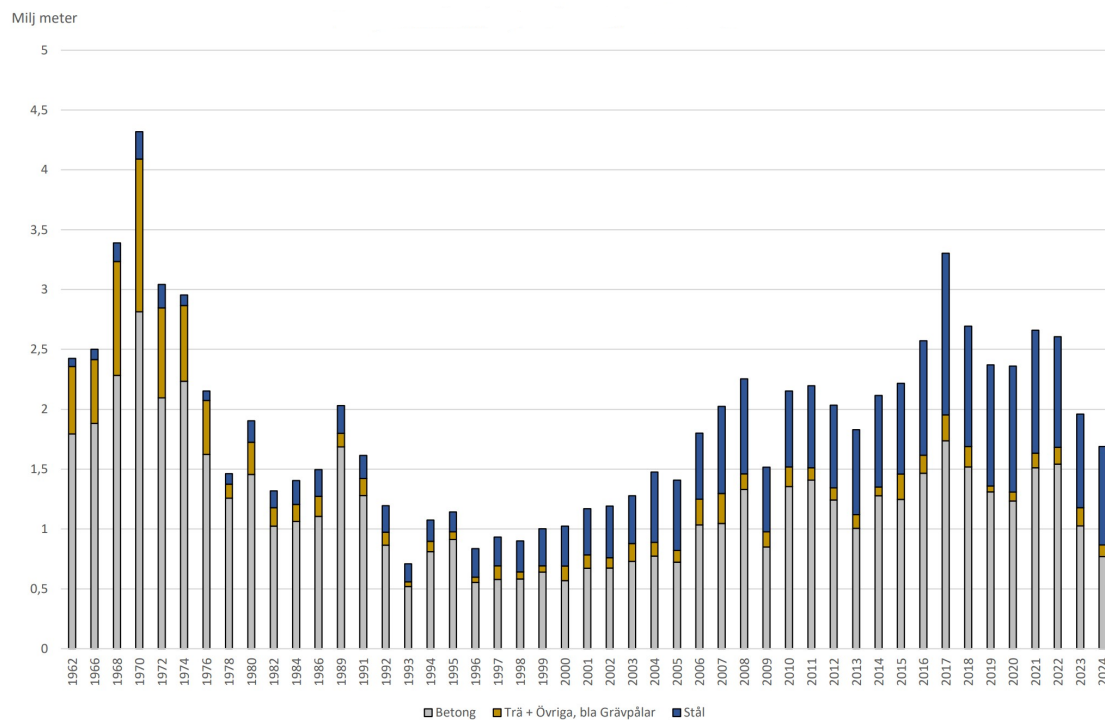
3.1 Sveriges pålningshistoria och framtid

I Sverige har pålar sedan länge använts som grundläggningsteknik där de första exemplen bestod av slagna träpålar och så kallade grävpålar, med andra ord handschaktade brunnar som fylldes av sten eller sand (Olsson & Holm, 1993). Träpålar slogs ned av hejare som antingen lyftes för hand eller med hjälp av linor. Ovanpå dessa tidiga pålar anlades sedan rustbäddar av trä och stenmurar som till följd av dagens sänkta grundvattenyta ofta kräver åtgärder.

Ett exempel då en grundvattensänkning stod i centrum för en riskbedömning i Göteborg beskrivs i Göteborgs Stads detaljplan angående Västlänken (Ramböll Sverige AB, 2016). Här beskrivs hur området Korsvägen är speciellt känsligt mot grundvattensänkningar då en stor del av kringliggande byggnation står på gamla pålar och rustbäddar av trä. Om grundvattennivån sjunker kan trägrundläggningen syresättas och därmed brytas ned vilket medför sättningsskador på byggnader.

Under sent 1800-tal påbörjades användningen av slagna stålplålar och under samma tidsperiod kom de första betongpålarna (Olsson & Holm, 1993). Under denna tid växte städerna snabbt och husen byggdes allt större och högre. Till följd av detta krävdes kraftigare och längre pålar för att fördela aktuella laster. Dessa pålar var fortfarande massundanträngande och först på 1930-talet påbörjades användningen av borrarade pålar (CFA). Tekniken innebär att ett hål borraras och som sedan fylls med betong och armering vilket härdar och bildar pålen. Pålen sägs då vara icke-massundanträngande och tekniken möjliggjorde tillverkningen av längre pålar med större diameter.

1944 förbjöds byggnation med träpålar i Stockholms innerstad till följd av deras beständighetsproblem på grund av grundvattensänkningar. Denna distansering mot träpålar har visat sig kontinuerlig från mitten av 1900-talet fram till idag enligt Pålkommisionen statistik nedan (Gullberg, 2025).



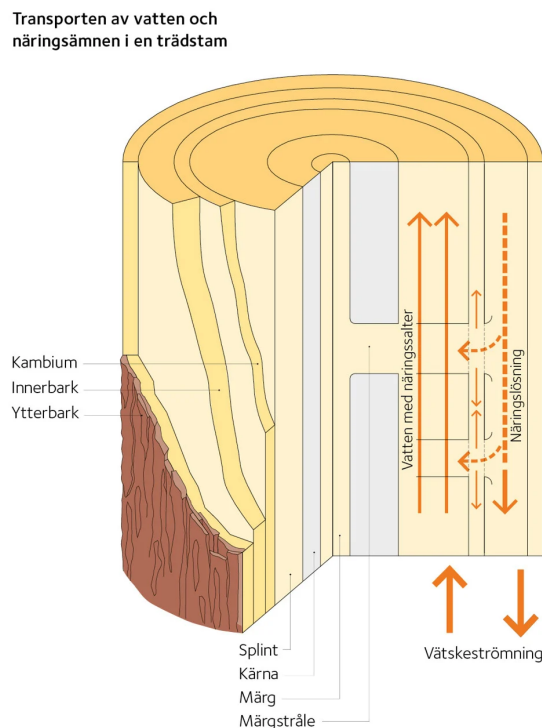
Figur 3.1: Mängd installerade pålar i Sverige fördelade på olika material och år. Hämtat från: (Gullberg, 2025).

I figur 3.1 ovan beskrivs att andelen träpålar år 1962 var 24 procent vilket är betydligt mer än år 2022 då träpålar endast utgjorde 4 procent av alla pålar. Trots detta har träpålars användning inte minskat avsevärt de senaste 40 åren utan varierar från år till år. Trots att träpålars användning har minskat markant från tidigt 60-tal finns det idag nya motiv för användningen av träpålar (Kayhan & Viitberg, 2024). Idag ställs vi inför nya svårigheter och krav med avseende på klimatpåverkan. Då träpålar i regel innebär en mindre klimatpåverkan gentemot betong- och stålupålar är det ett intressant framtida material förutsatt att dess beständighet kan säkerställas via goda grundvattenförhållanden.

Det är däremot inte endast grundvattenförhållanden som påverkar träpålars lämplighet under byggnation. Träpålar kan inte strukturellt bära lika höga laster som betong- och stålupålar (Kayhan & Viitberg, 2024). För dagens tyngre byggnadsverk innebär trämaterialiet därför strukturella begränsningar. På grund av detta lämpar sig träpålar oftast till tillfälliga projekt eller för lättare konstruktioner.

3.2 Egenskaper hos barrträ

De vanligaste barrträden i Sverige är tall och gran och de är uppbyggda på liknande sätt vilket beskrivs av figur 3.2 nedan (Svenskt Trä, 2026). Centrerat i trädet finns märgen som sträcker sig längsmed hela trädets längd. Utanpå märgen träder veden fram och delas upp i kärnved och splintved. Kambiet täcker sedan veden och agerar som stammens tillväxtlager vilket skapar vedceller mot stammens centrum och barkceller utåt. Ytterst är barken belägen och denna delas in i innerbark och ytterbark. Innerbarken fördelar näring till de levande cellerna i trädet och ytterbarken agerar skydd för stammen mot uttorkning och parasiter.



Figur 3.2: Ingående delar och transportvägar för vatten och näringsämnen i en trädstam. Hämtad från: (Svenskt Trä, 2026).

Cellerna som skapas av kambiet under växtsäsongen varierar markant beroende på årstiden (Svenskt Trä, 2026). På våren och försommaren bildas korta och breda celler med tunna väggar. Detta medför att torr-rådensiteten blir låg. Vedcellerna som bildas under sommaren har däremot längre celler med tjockare väggar vilket gör att denna ved har cirka tre gånger högre torr-rådensitet jämfört med vårveden.

Det aktuella klimatet under växtsäsongen påverkar årsringarnas växande (Svenskt Trä, 2026). Generellt är årsringarna smalare och har tunnare sommarvedsband då trädet växt i kallare klimat. Dessutom påverkar närliggande växtlighet hur väl träden växer. I tätare förband får träden sämre tillgång till solljus och näring och växer således sämre. I glesare förband är effekten motsatt och träden får god tillgång till solljus och näring. På grund av detta kan gallring utföras för att se till att träden

inte växer för nära varandra och på så vis säkerställa goda växtförhållanden.

Trädens ålder påverkar hur mycket de växer på både höjden och bredden (Svenskt Trä, 2021). Vid mycket goda växtförhållanden kan ett ungt träd växa mer än en halv meter på höjden och upp mot en centimeter i diameter under en växtsäsong. Ett moget träd växer däremot som mest några decimeter på höjden och mellan 2-3 mm i diameter under en växtsäsong.

3.3 Begreppet tillväxt och formkvot

Tillväxt beskrivs som måttet på trädets naturliga koniska form och anges i millimeter per meter (mm/m) (Agestam m. fl., 2022). Från trädets bas upp till brösthöjd är tillväxten i regel hög och kan uppnå värden över 30 mm/m. Liknande förhållanden gäller i trädets krona där en normal tillväxt ligger mellan 15 mm/m och 30 mm/m. Mellan cirka 1,5 m höjd upp till den levande trädkronan är tillväxten betydligt mindre och antar generellt värden mellan 5 mm/m och 15 mm/m.

På grund av de höga och därmed icke-representativa tillväxtvärdena längs trädets nedre och övre del används inte diametervärden från dessa delar vid beräkning av tillväxt (Edgren & Nylinder, 1949). Källan utnyttjar parametrar vilka motsvarar trädets diameter vid 20% respektive 60% av trädets höjd för att beskriva dess formkvot på ett lämpligt sätt. På grund av detta är det även dessa diametrar som ligger till grund för formkvotsvärdena beräknade i denna studie. Gränser för beräkning av tillväxtvärden i denna studie återfinns under 5.1.1.

Formkvoten betecknas F och beräknas i enlighet med dessa parametrar med hjälp av följande ekvation:

$$F = \frac{d_{60}}{d_{20}} \quad (3.1)$$

Där:

d_{20} = Diametern vid 20% av trädets höjd

d_{60} = Diametern vid 60% av trädets höjd

3.4 Formkvotsförändring genom tiderna

År 2021 publicerade Skogforsk en arbetsrapport med syfte att kartlägga stamformen hos träd med avseende på träslag, geografiskt läge och stamstorlek genom användningen av ny skördardata (Ågren m.fl., 2021). Resultatet presenterades bland annat genom en jämförelse av de formkvoter som presenterats av Edgren & Nylinder (1949). Till grund för Edgren & Nylinder (1949) låg data insamlad under den Stora produktionsundersökningen med start ca 1940. Exakt årtal på datan i Skogforsks arbetsrapport framgår inte men det preciseras att undersökningen utfördes 2018. Då Edgren & Nylinder (1949) beräknat formkvoter med diametervärden under bark transformerades diametervärden på bark till diametervärden under bark med hjälp av Skogforsks avbarkningsfunktioner (som även används i denna studie). Genom att skildra träslagen gran och tall och dela upp dem baserat på geografisk avverkningsplats togs tabell 3.1 nedan fram för att beskriva trädens formkvoter.

Tabell 3.1: Jämförelse av medelformkvot för tall och gran i olika regioner mellan Edgren & Nylinder samt Ågren m.fl. Hämtat från: (Ågren m.fl., 2021).

Trädslag och region	Medelformkvot		Differens
	Edgren och Nylinder	Ågren m.fl.	
Gran norr	0,659	0,631	0,028
Gran söder	0,683	0,643	0,040
Tall norr	0,719	0,667	0,052
Tall söder	0,723	0,670	0,053

Resultatet visar att formkvoten i regel minskat över tid för samtliga träd oberoende av träslag och geografiskt läge (Ågren m.fl., 2021). Källan beskriver hur detta kan bero på ett flertal faktorer. Exempelvis nämns hur bakgrundsmaterialet för Edgren och Nylinder (1949) bestod av homogena ogallrade äldre bestånd som växt tätare och längre innan avverkning. På grund av detta skulle träden forma högre upphissade trädkronor vilket i sin tur skulle resultera i en högre formkvot än de träd som ingick i den senare studien.

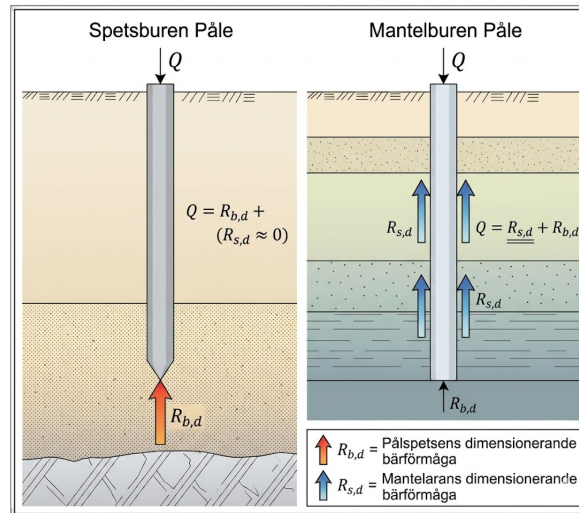
3.5 Internationella tillväxtvärden

Information och standarder för internationella tillväxtvärden är väldigt begränsat. Advancing standards transforming markets international (ASTM International, 2022) har producerat standarder för pålning av rundträ. ASTM säger att *Southern Pine* har tillväxtvärden på ungefär 0,1 tum per fot, ungefär 8,33 mm/m. Douglasgranen hade liknande tillväxtvärden till *Southern Pine* men mindre tillväxt de första 6 metrarna av trädet.

Ytterligare presenteras tabeller över krav på diametrar strax över rotändan och korresponderande diameter vid toppen. Tillväxtvärdena för *Southern Pine* varierar från 5,02 mm/m till 13 mm/m med större delen av populationen liggandes runt 8-9 mm/m.

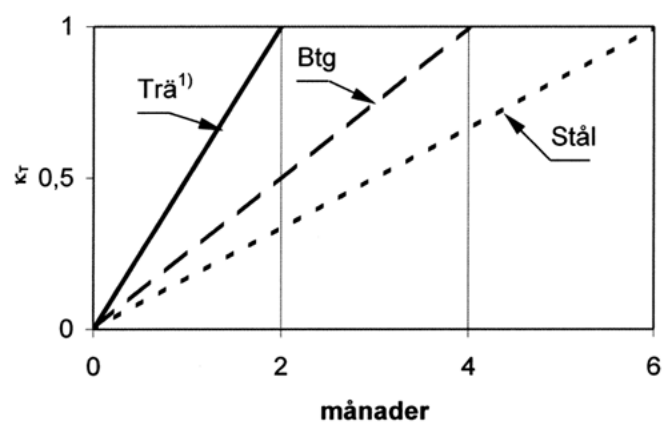
3.6 Påltyper

Lastspridningen för spetsburna pålar respektive kohesionspålar beskrivs av figur 3.3 nedan.



Figur 3.3: Verkningsätt för spets- och mantelburna pålar. Skapad via (Gemini 3, 2026)

Kohesionspålar installeras ofta i lös och djup lera. Dessa geotekniska förhållanden återfinns till exempel frekvent längs Sveriges västkust. Nedslagningen av pålarna stör kringliggande lera vilket tappar sin ursprungliga hållfasthet samtidigt som porvattentrycket ökar (Olsson & Holm, 1993). Efter installation påbörjas en rekonsolidering av jorden vilket resulterar i att den ursprungliga hållfastheten återhämtas och att jorden skapar en stark vidhäftning till pålens mantelyta. Tiden det tar för denna vidhäftning att uppnå full effekt beror bland annat på pålens material och beskrivs nedan i figur 3.4 tillsammans med korrektionsfaktorn κ_T (Eriksson m. fl., 2004).



Figur 3.4: Kohesionspålars vidhäftningstid till kringliggande jord efter nedslagning baserat på pålmaterial. $\kappa_T = 1$ medför full vidhäftning. Hämtad från: (Eriksson m. fl., 2004)

3.6.1 Träpålar och kombinationspålar

Träpålar används vanligtvis som kohesionspålar och om de är spetsburna slås de aldrig mot berg för att undvika skador på pålspetsen (Olsson & Holm, 1993). I lera eller lös friktionsjord ansätts vanligtvis träpålars spetsdiameter till 125 mm (Eriksson m. fl., 2004). Dessutom skall träet vara friskt och utan djupgående blåträ eller insektsangrepp.

Då träpålar skall utgöra en permanent grundläggningslösning skall de placeras under grundvattenytan för att säkerställa en syrefattig miljö vilket medför att träet inte drabbas av rötangrepp (Olsson & Holm, 1993). Vid användning av träpålar måste det beaktas att grundvattenytan varierar över tid och att framtida grundvattensänkningar i det berörda området kan uppkomma. För att säkerställa att trä inte förekommer ovan grundvattenytan kan en kombinationspåle av betong och trä användas. Pålen är då bestående av en övre del betong placerad ovan grundvattenytan och en nedre del av trä på en nivå där grundvattenytan med säkerhet inte kommer understiga. För att möjliggöra infästning mellan betong och trä används en skarvhylsa. Knäckningsrisken vid skarvning av träpålar är stor då vinkelavvikelsen i skarven förstärks av träets naturliga imperfektion. Följaktligen bör träpålar som skarvas vara raka.

4

Analytisk härledning

Följande kapitel beskriver beräkningsmodellen som ligger till grund för att studera tillväxtvärdens påverkan på träpålars geotekniska bärförmåga.

4.1 Förutsättningar

Vanligt förfaringssätt i Sverige är att beräkna bärförmågan hos kohesionspålar på jordens odränerade skjuvhållfasthet och kan främst tillämpas då jorden är normal eller svagt överkonsoliderad.

Vid användning av mantelburna träpålar och speciellt vid skarvade kombinationspålar i lös lera där pålens övre del står fritt löper risken att lastkapaciteten och därmed den strukturella bärförmågan blir dimensionerande gentemot den geotekniska bärförmågan (Eriksson m.fl., 2004). Detta tas inte hänsyn till i denna studie och pålarna antas endast vara axiellt belastade med den geotekniska bärförmågan som dimensionerande bärförmåga.

4.2 α -metoden

Namnet för metoden kommer ifrån förhållandet över den skjuvkraft som uppstår mellan pålens mantelyta och jord, samt omkringliggande jords odränerade skjuvhållfasthet brukar betecknas med α . α -metoden använder den odränerade skjuvhållfastheten för jorden vilket gör den lämplig för beräkningar av kortsiktiga egenskaper hos lösa leror. Ett supplement till Eriksson m.fl. (2004) skapades av Alheid & Holmberg (2010) i enlighet med Eurokoden. De uppdaterade ekvationerna i supplementet har använts nedan.

Den geotekniska bärförmågan enligt α -metoden (Alheid & Holmberg, 2010):

$$R_{cal} = R_s + R_{b,d} = \int_{L_p}^z \alpha \cdot \theta \cdot c_u dz + N_{cp} \cdot A_{sk} \cdot c_u \quad (4.1)$$

Där:

R_{cal}	=	Pålens bärförmåga
R_s	=	Mantelareans bärförmåga
L_p	=	Pålens längd
α	=	Vidhäftningsfaktor
θ	=	Pålens omkrets
c_u	=	Jordens skjuvhållfasthet
R_b	=	Pålspetsens bärförmåga
N_{cp}	=	Bärighetsfaktor för pålspets
A_{sk}	=	Pålspetsens karakteristiska tvärsnittsarea

Vidhäftningsfaktorn α beräknas enligt följande:

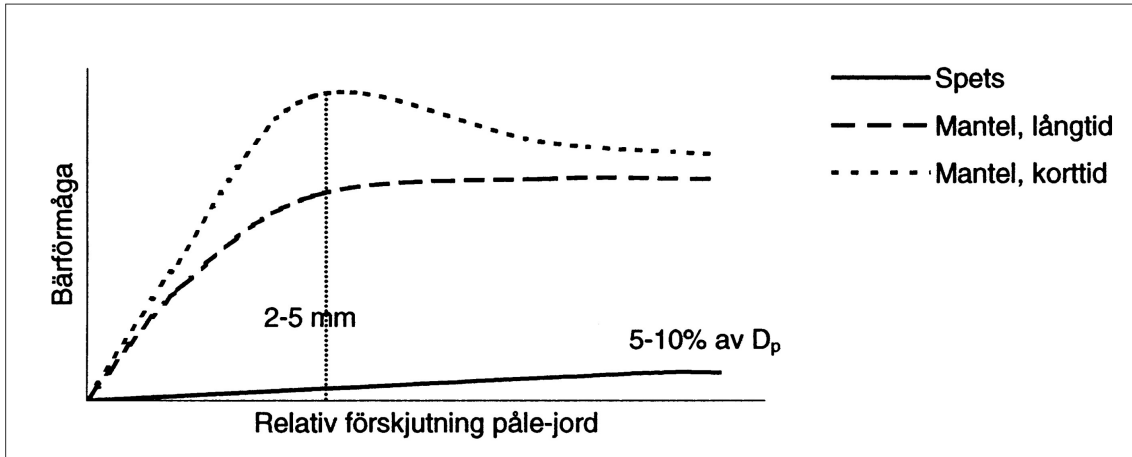
$$\alpha = \alpha_{okorrigerad} \cdot \kappa_\phi \cdot \kappa_f \cdot \kappa_{OCR} \cdot \kappa_T \quad (4.2)$$

Där:

$\alpha_{okorrigerad}$	=	Okorrigerad vidhäftningsfaktor, normalt 1,0
κ_ϕ	=	Multiplikator m.a.p. pålens diameter
κ_f	=	Multiplikator m.a.p. pålens form
κ_{OCR}	=	Multiplikator m.a.p. jordens överkonsolideringsgrad
κ_T	=	Multiplikator m.a.p. tiden efter installationen av pålen

κ_f beror på pålens form. Pålar med konstant tvärsnitt medför att κ_f sätts till 1,0 medan ett nedåt avtagande tvärsnitt innebär att κ_f sätts till 1,2.

Det krävs en betydligt större deformation för att utnyttja spetsbärförmågan gentemot mantelbärförmågan i enlighet med figur 4.1 (Eriksson m. fl., 2004). För att mantelbärförmågan skall uppnås krävs en deformation på ca 2–5 mm och för spetsbärförmågan ca 5–10% av spetsdiameter. Ytterligare utgör spetsbärförmågan en obetydlig del av den totala bärförmågan då pålen befinner sig i lös lera liksom de jordlager som finns längs Sveriges västkust. På grund av detta bortses ofta spetsens påverkan på den totala bärförmågan helt (Olsson & Holm, 1993).



Figur 4.1: Mobilisering av mantel- respektive spetsbärförmåga. Hämtad från: (Eriksson m. fl., 2004)

Uttrycket för pålens bärförmåga förenklas således med fördel till följande uttryck:

$$R_{cal} = R_s = \int_{L_p}^z \alpha \cdot \theta \cdot c_u dz \quad (4.3)$$

I detta uttryck påverkar en träpåles koniska form endast pålens omkrets och parametern κ_f som ingår i vidhäftningsfaktorn. Den odränerade skjuvhållfastheten antas linjärt ökande med djupet och beskrivs därav som en rätlinjig funktion. På grund av att uträkningen utgår ifrån pålspetsens djup och z definieras som positiv uppåt ansätts skjuvhållfasthetens förändring längs z till negativ. De andra parametrarna antas konstanta och på grund av detta kan ett uttryck för tillväxtens påverkan på den slutgiltiga bärförmågan härledas enligt följande:

$$\theta = \pi \cdot (d_{spets} + T \cdot z) \quad (4.4)$$

Där:

- d_{spets} = Pålens spetsdiameter
- T = Pålens tillväxt
- z = Negativt djup, 0 vid pålspetsen och ökar uppåt

$$c_u = c_{u,spets} - i \cdot z \quad (4.5)$$

Där:

- $c_{u,spets}$ = Den odränerade skjuvhållfastheten vid z
- i = skjuvhållfasthetens förändring längs djupet
- z = Negativt djup, 0 vid pålspetsen och ökar uppåt

$$\begin{aligned}
 R_{cal}(T) &= R_s(T) = \int_{L_p}^z \alpha \cdot \pi (d_{spets} + T \cdot z) \cdot (c_{u,spets} - i \cdot z) dz \\
 &= \alpha \cdot \pi \cdot \left[d_{spets} \cdot c_{u,spets} \cdot z + (T \cdot c_{u,spets} - d_{spets} \cdot i) \cdot \frac{z^2}{2} - \frac{T \cdot i \cdot z^3}{3} \right]_0^{L_p} \\
 &= \alpha \cdot \pi \cdot \left(d_{spets} \cdot c_{u,spets} \cdot L_p + (T \cdot c_{u,spets} - d_{spets} \cdot i) \cdot \frac{L_p^2}{2} - \frac{T \cdot i \cdot L_p^3}{3} \right) \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Genom att dividera detta uttryck med uttrycket för en rak påle utan tillväxt ($T = 0$), erhålls ett uttryck som beskriver tillväxtens procentuella påverkan på pålens bärförmåga jämfört med en totalt rak påle med samma spetsdiameter. Täljaren multipliceras med 1,2 på grund av den ingående parametern κ_f i vidhäftningsfaktorn. I de fall då jämförelse mellan två koniskt formade pålar efterfrågas bör även nämnaren multipliceras med 1,2.

$$R_{cal}(0) = R_s(0) = \alpha \cdot \pi \cdot \left(d_{spets} \cdot c_{u,spets} \cdot L_p - (d_{spets} \cdot i) \cdot \frac{L_p^2}{2} \right) \quad (4.7)$$

$$Faktor = \frac{1,2 \cdot R_{cal}(T)}{R_{cal}(0)}$$

$$Faktor = \frac{1,2 \cdot \alpha \cdot \pi \cdot \left(d_{spets} \cdot c_{u,spets} \cdot L_p + (T \cdot c_{u,spets} - d_{spets} \cdot i) \cdot \frac{L_p^2}{2} - \frac{T \cdot i \cdot L_p^3}{3} \right)}{\alpha \cdot \pi \cdot \left(d_{spets} \cdot c_{u,spets} \cdot L_p - (d_{spets} \cdot i) \cdot \frac{L_p^2}{2} \right)}$$

$$Faktor = 1,2 \cdot \left(1 + T \cdot \frac{\frac{c_{u,spets} \cdot L_p^2}{2} - \frac{i \cdot L_p^3}{3}}{d_{spets} \cdot c_{u,spets} \cdot L_p - \frac{d_{spets} \cdot i \cdot L_p^2}{2}} \right) \quad (4.8)$$

Härledningen förutsätter att vidhäftningsfaktorns multiplikator med avseende på pålens diameter, κ_ϕ är samma för en rak påle och en koniskt formad påle. För "normala pålar" med en diameter mellan 0,2 m och 0,35 m sätts denna multiplikator till 0,9 (Eriksson m. fl., 2004). I de fall då den koniskt formade pålens genomsnittliga diameter överstiger de för "normala pålar" blir multiplikatorn med avseende på pålens diameter för denne lägre än för en rak påle med samma spetsdiameter. I dessa fall bör Faktorn beräknas på nytt och multiplikatorn κ_ϕ för den koniskt formade pålen respektive den raka pålen bör beaktas.

Då två koniskt formade träpålar med samma längd, spetsdiameter och markförhållanden skall jämföras med avseende på geoteknisk bärförmåga ser härledningen ut på följande sätt:

$$Faktor = \frac{1, 2 \cdot R_{cal}(T_1)}{1, 2 \cdot R_{cal}(T_2)}$$

$$Faktor = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot \left(d_{spets} \cdot c_{u,spets} \cdot L_p + (T_1 \cdot c_{u,spets} - d_{spets} \cdot i) \cdot \frac{L_p^2}{2} - \frac{T_1 \cdot i \cdot L_p^3}{3} \right)}{\alpha \cdot \pi \cdot \left(d_{spets} \cdot c_{u,spets} \cdot L_p + (T_2 \cdot c_{u,spets} - d_{spets} \cdot i) \cdot \frac{L_p^2}{2} - \frac{T_2 \cdot i \cdot L_p^3}{3} \right)}$$

$$Faktor = \frac{d_{spets} \cdot c_{u,spets} \cdot L_p - \frac{d_{spets} \cdot i \cdot L_p^2}{2} + T_1 \cdot \left(\frac{c_{u,spets} \cdot L_p^2}{2} - \frac{i \cdot L_p^3}{3} \right)}{d_{spets} \cdot c_{u,spets} \cdot L_p - \frac{d_{spets} \cdot i \cdot L_p^2}{2} + T_2 \cdot \left(\frac{c_{u,spets} \cdot L_p^2}{2} - \frac{i \cdot L_p^3}{3} \right)} \quad (4.9)$$

Det är denna härledda Faktor-ekvation 4.9 som används under 6.2 för att beskriva den geotekniska bärförmågans känslighet av tillväxtförändringar.

5

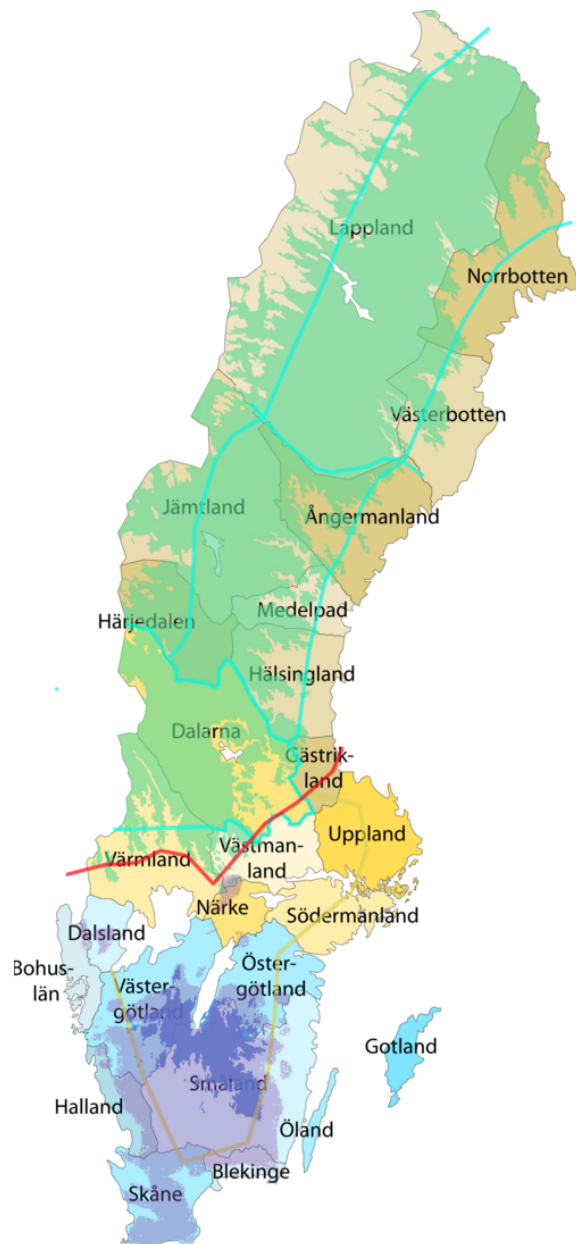
Kvantitativ studie

I detta kapitel behandlas hur insamlad data bearbetas samt vilka modeller och funktioner som används för att skildra data. Ytterligare presenteras vad vald metod utför och tillämpning.

5.1 Data

Datan som används under studien är utgivet av Skogforsks och har anonymiserats. Kontrollmätningar är utförda av Biometrias personal med digitalklave vid avverkningsstillfället och mätningarna utfördes mellan 2016 och 2024. Information på hur träd har valts för mätning finns ej eller om det finns bias för att välja väl definierade raka träd.

Att datan anonymiserats innebär att exakta avverkningsplatsen är okänd, däremot finns en generell beskrivning som utgår ifrån Limes Norrlandicus. Limes Norrlandicus kallas den naturliga biologiska norrlandsgränsen i Sverige och skildrar bland annat gränsen mellan taigan och barrskogsbältet i norr gentemot blandskogsområdet i söder (Länsstyrelsen Värmland, 2013). Gränsen sträcker sig från Gästrikland i öster ner mot Värmland i väster, se rödmarkerad linje i figur 5.1.



Figur 5.1: Limes norrlandicus, den naturliga norrlandsgränsen markerad som rött streck i karta över Sverige. Bild av Koyos, licensierad under CC BY-SA 3.0. Hämtad från: https://sv.wikipedia.org/wiki/Norrlands_inland

[H]

I datan ingår följande parametrar:

Trädslag	- Trädslag, Gran eller Tall
Område	- Norr/Söder om Limes Norrlandicus
Ålder	- Ålder för respektive träd
TotalStocklängd_cm	- Summan av det apterade stockarnas längd, motsvarar höjden från fällkap till toppkap
Topplängd_cm	- Längd från skördarens sista kap till trädtopp
Stubbhöjd_cm	- Höjd från mark till fällkap
Trädhöjd_cm	- Trädhöjd från mark till topp
DBH_mm	- Diameter vid brösthöjd, 130cm från mark
Dtopp_mm	- Diameter vid toppkap
Diametervektor	- Avstånd från fällkap där diameter har mäts

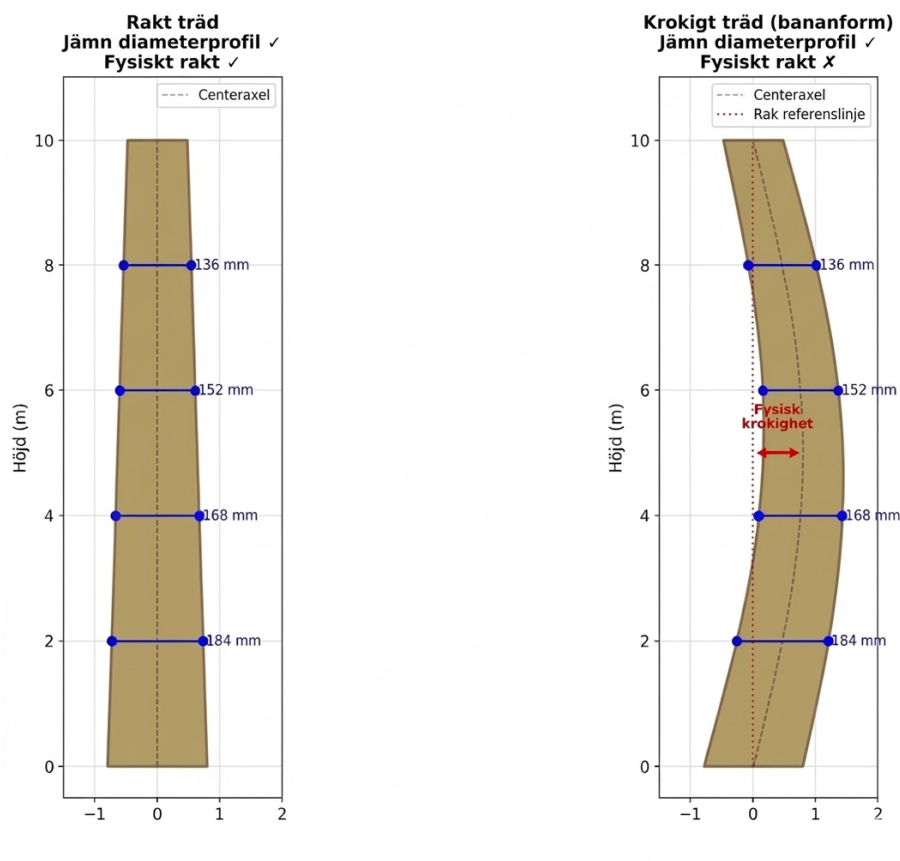
I datan ingår 22 851 träd uppdelat för trädslag samt hur det är beläget kring Limes Norrlandicus. Data för ålder finns endast för vissa träd och har bortsetts från i studien då det anses finnas data för få träd. Diametervektorn består av en lista där höjden från fällkap samt respektive diameter presenteras. Intervallen mellan diametervärdena varierar från 0,5m till 1 m mellan mätpunkter. En mätning för diametern vid en viss höjd kallas en observation vilket innebär att ett träd har flertalet observationer. Datasetet gicks igenom utförligt för att upptäcka och avskilja tydliga fel såsom träd med samma diameter längs hela stammen.

5.1.1 Krav & behandling av data

Studiens syfte är endast att undersöka tillväxtvärdet för träd som kan användas som pålar. På grund av detta måste en del av träden i datan filtreras bort för att datan skall representera de träd som kan bli träpålar.

Kraven som ställs på datan är att det måste finnas en kontinuerlig 5 m sträcka mellan diameterbrösthöjd (DBH), alltså vid 1,3 m höjd, och den punkt längs stammen då diametern är 125 mm. Längden 5 m som gränslängd och toppdiameter på minst 125 mm på en påle kommer från branschpraxis.

Det skall noteras att de flesta undersökningarna av träd och specifikt trädprofilsundersökningar ej väljer träd helt slumpmässigt utan i stället väljs träd som har en väl definierad rak form som undviker stora fysiska avvikelser (McTague & Weiskittel, 2021).



Figur 5.2: Exempel på likvärdiga diameterprofiler på träd med olika form. Skapad via (Gemini 3, 2026)

Datan för träden berör endast trädens höjder och diameterprofiler. Som ses i Figur 5.2 är detta inte tillräckligt för att kontrollera trädens rakhet. På grund av detta har någon rakhetskontroll ej genomförts i denna studie.

Inga krav ställs på att träpålar skall avbarkas innan installation dock för att uppfylla krav för tillväxtfunktion måste avbarkning ske. Dessutom undersöks formkvoterna för gran och tall i studien och jämförs med Skogforsks arbetsrapport Ågren m.fl. (2021) där formkvoter beräknas utifrån diametervärden under bark. Den berörda datan i denna rapport använder diametermätvärden från manuella kontrollmätningar där mätningarna utförs innan avbarkning skett på träden. För att säkerställa att tillväxtfunktionen predikterar trädformer väl och att en relevant jämförelse av formkvoters förändring över tid framställs har diametervärdena i studien minskats med hjälp av Skogforsks avbarkningsfunktion (Hannrup, 2004). Funktionen beskriver diameter under bark för tall och gran ovan och under brytpunkten (timmergränsen) det vill säga där diametern är minst 14 cm enligt A i appendix.

Jämförelse mellan beräknade barktjocklekar enligt funktionerna under A i appendix och manuellt uppmätta barktjocklekar framställer de beräknade barktjocklekarna som något underskattade gentemot de manuella mätningarna (Hannrup & Lundgren, 2012). Då uppmätta barktjocklekar i trädets undre del var betydligt större än

resterande tjocklekar längs trädet skiljer källan på barktjocklekens avvikelse mellan samtliga mätpunkter längs trädet och mätpunkter längs enbart toppände. För samtliga mätpunkter underskattade funktionen i genomsnitt barktjockleken med 2,7 mm för tall och 3,7 mm för gran. Standardavvikelsen var då 5,0 mm respektive 2,7 mm. För mätningar på enbart toppände underskattade funktionen i genomsnitt barktjockleken med 1,8 mm för tall och 3,1 mm för gran. Standardavvikelsen var då 2,5 mm respektive 2,7 mm.

Att barktjockleken alltför underskattas beror sannolikt på att de manuellt uppmätta barktjocklekarna är något överskattade (Hannrup & Lundgren, 2012). För att manuellt mäta barktjockleken har en barkmätare använts och tillämpas genom att instrumentet pressats förbi barken. Detta innebär en risk då dess trubbiga spets kan tränga in i det yttersta vedlagret vilket leder till en överskattning av barktjockleken. Liknande mätinstrument som används i studien har visats överskatta barktjockleken uppemot två till tre millimeter. Funktionens underskattning för tall ligger således i detta intervall och kan sannolikt antas bero på en överskattad manuell mätning. Funktionens avvikelse för gran är större vilket pekar på att funktionen verkligen underskattar den faktiska barktjockleken och hade behövt kalibreras ytterligare.

5.2 Val av tillväxtfunktion

För att analysera avsmalningen av ett träd för att sedan översätta detta till ett tillväxtvärde för en påle måste någon form av tillväxtfunktion användas. En tillväxtfunktion eller tillväxtmodell används för att prediktera trädets profil och analysera tillväxtvärdet för trädet (McTague & Weiskittel, 2021). Det finns flertalet funktioner att välja mellan som predikterar trädets profil olika tillförlitligt och på olika sätt försöker anpassa trädets skiftande form till en funktion. Många funktioner är anpassade geografiskt för att ta hänsyn till profilen som förväntas av en viss art, medan andra funktioner anpassar sig till lokala förhållanden via parameterskattning. Enligt källan är det dock oftast viktigare att välja en robust tillväxtfunktion kontra hur den lokaliseras eller passas in.

De flesta funktionerna idag behöver tre värden för att förutspå profilen:

Den absoluta höjden för stammen h , där h börjar från marken och varierar längs stammen. Relativ höjd, h/H där H är totala höjden av trädet. DBH som är trädets diameter vid brösthöjd vid 1,3 m. H som är totala höjden av trädet (McTague & Weiskittel, 2021).

Att skapa funktioner som endast beror på dessa tre värden är enklare då de oftast ingår som rutinmätningar då skogsinventering utförs. Flertalet försök har gjorts för att öka tillförlitligheten hos funktionerna genom att inkludera ytterligare värden såsom diametermätningar längs trädet, storlek på trädkrona samt lokala förhållanden, med varierande resultat (McTague & Weiskittel, 2021).

5.2.1 Olika tillväxtfunktioner

Det finns flertalet funktioner att välja mellan, för att uppfylla ändamålet krävs en funktion som passar bra till svenska träd mer specifikt, *Picea abies* och *Pinus sylvestris* (McTague & Weiskittel, 2021). McTague och Weiskittel (2021) säger att användningen av mixade modeller möjliggör lokal kalibrering av tillväxtfunktionen med hjälp av några mätpunkter på övre delen av trädstammen.

Metoder som finns att välja inkluderar (men är ej begränsade till): Bi (2000), Goodwin (2009), Max och Burkhardt (1976), Kozak (2004) samt Zakrzewski (1999) (McTague & Weiskittel, 2021). Alla dessa metoder undersöktes av McTague och Weiskittel (2021) som med hjälp av kvantitativa undersökning gjorda av Goodwin (2009) samt Zakrzewski (2009), tog fram vad respektive funktion kan åstadkomma och deras begränsningar. Metoden som snabbt blir av intresse för studien är Kozak (2004), en väldigt flexibel tillväxtfunktion som samtidigt har väldigt hög precision (McTague & Weiskittel, 2021).

5.2.2 Kozak 02 tillväxtfunktion

Tillväxtfunktionen Kozak 02 presenterades i artikeln ”*My last words on taper equation*” (2004) och utgör Antal Kozaks sista och största bidrag till utvecklingen av tillväxtfunktioner. Funktionen har visats passa in för många trädarter på ett bra sätt och enligt Kozak (2004) anses tillväxtfunktion 02 prediktera bäst (Hansen m. fl., 2023). Kozak (2004) har under lång tid utvecklat tillväxtfunktioner där den första publicerades 1969 och den sista publicerades 2004. Den sistnämnda funktionen används i denna studie. Största fördelen med att använda Kozaks 02 tillväxtfunktion är att den kan hantera trädets form på ett rimligt sätt och att funktionen är väl anpassad för att koppla ihop den varierande formen på ett träd (McTague & Weiskittel, 2021).

Modell 02 som Kozak benämner funktionen ser ut som följande:

$$\hat{d}_i = a_0(DBH)^{a_1} H^{a_2} X_i^{b_1 z_i^4 + b_2 [1/e^{(DBH)/H}] + b_3 X_i^{0,1} + b_4 [1/(DBH)] + b_5 H^{Q_i} + b_6 X_i} \quad (5.1)$$

där:

$$\begin{aligned} X_i &= [1, 0 - (h_i/H)^{1/3}] / [1, 0 - p^{1/3}] \\ Q_i &= [1, 0 - (h_i/H)^{1/3}] \\ p &= 1, 3/H \end{aligned}$$

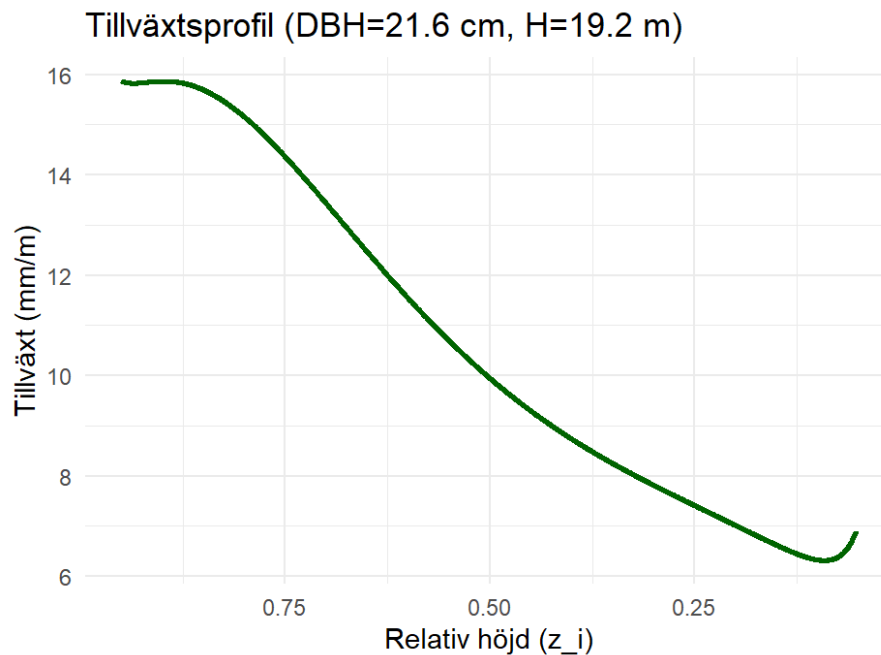
där:

$$\begin{aligned} (DBH) &= \text{utsida barkdiameter vid bröst höjd [cm]} \\ H &= \text{totala höjd för trädet [m]} \\ h_i &= \text{höjd från marken [m]} \\ z_i &= h_i/H, \text{ proportionerlig höjd från marken [-]} \\ d_i &= \text{predikterad diameter under bark vid höjd } h_i \text{ från marken [cm]} \\ a_0, a_1, a_2, b_1 \dots b_6 &= \text{regressionskoefficienter [-]} \end{aligned}$$

Metoden är väldigt komplex med många parametrar som behövs skattas och passas in till modellen. Hur Kozak 02 tillväxtfunktion anpassades till R syns i kodavsnitt B.1. I programspråket R användes nlsLM-kommandot från R-paketet minpack.lm för att lösa ett icke-linjärt minsta kvadratproblem (Elzhov m. fl., 2016). Parametrarna skattas utifrån existerande data för diameter, höjd och mätpunkter. Denna skattning innebär att modellen lokaliseras och att parametrarna anpassas till de specifika trädarterna och regioner som analyseras utan att modellens matematiska struktur behöver förändras.

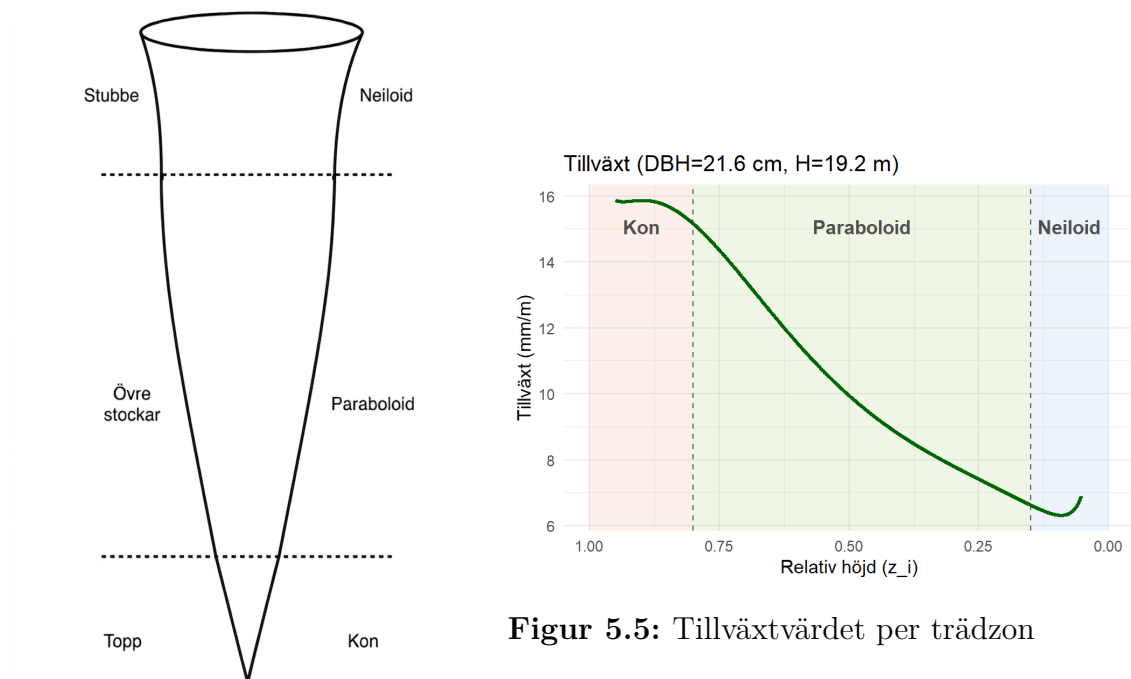
Funktionen i kodavsnitt B.2 i Appendix löser ett icke-linjärt minsta kvadratproblem som söker den kombinationen av parametervärdena, $a_0, a_1, a_2, b_1 \dots b_6$ som minimerar avvikelserna mellan uppmätt och predikterad diameter över samtliga mätpunkter i datan. Det är en iterativ process som börjar från startvärden och avslutar när avvikelserna är försumbara. Parameterskattningen blir därför olika för varje grupp av träd (Gran norr, Gran söder, Tall norr, Tall söder). Startvärden är framtagna från redan utförda studier för att undvika felskattade parametrar (Li m. fl., 2012).

Då utdatan från Kozak 02 funktionen är en diameter vid varje höjd kan ett tillväxtvärde för ett träd skapas. Kodavsnitt B.3 i Appendix innehåller kod som skapar en lång lista med diametrar och deras respektive höjder, samt räknar ut skillnad mellan två intilliggande punkter som tillväxt beräkningen baseras på. En lista med alla träds respektive tillväxtvärden kan därmed skapas och i figur 5.3 visas ett exempel på hur ett träds tillväxtprofil kan se ut.

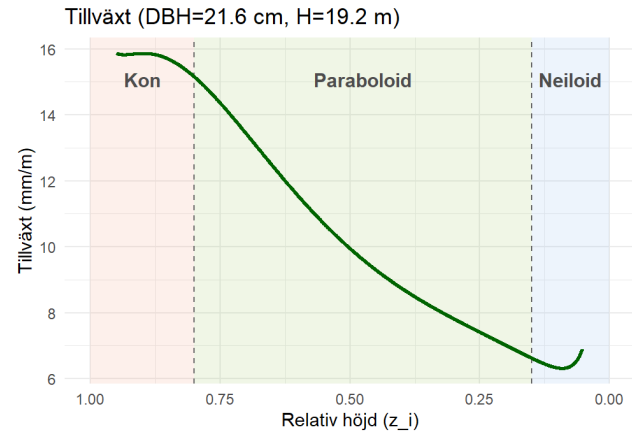


Figur 5.3: Diagrammet visar tillväxtvärdet för varje punkt på trädet (mm/m) i relation till den relativa höjden (h_i/H). Ett högt värde på y-axeln innebär att trädet smalnar av snabbt vid just den punkten. Relativa höjden $z_i = 1$ innebär toppen av trädet.

Figur 5.3 är en central del i denna studien och det blir nu möjligt att tolka hur stammen förändrar sig. Mellan 0 – 0.2 av z_i så syns en stark avtagning av tillväxtvärden, mellan 0.2 – 0.75 av z_i så ökar tillväxten stabilt för att avta resterande del av trädstammen. Detta stämmer överens med antagandet att ett trädets stam består av tre olika delar, en neiloidisk formad botten, en parabolisk formad mitt del samt en konisk formad topp (Burkhart & Tomé, 2012). Detta syns i figur 5.4 där det blir tydligt att trädets stam snabbt avtar i diameter vid stubben alltså att tillväxtvärdet förändras snabbt. I mitten av trädstammen ökar tillväxtvärdet gradvis på grund av dess paraboliska form samt avtar för att bli mer konstant vid toppen. Detta blir tydligare i figur 5.5 som visar på hur tillväxtvärden skiljer sig mellan trädets olika zoner.

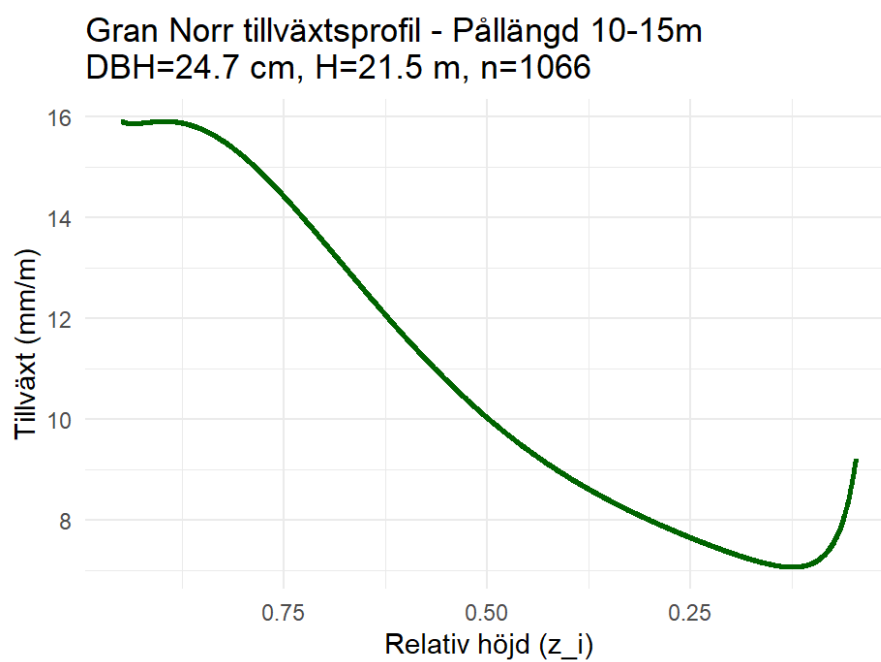


Figur 5.4: Trädstammens olika former



Figur 5.5: Tillväxtvärdet per trädzon

För pålningssyfte är det endast relevant att analysera den längden av trädet som ej blir påverkad av rotansvällning samt har en toppdiameter på minst 125 mm. Användbara längden hos ett träd tas därför fram genom kodavsnitt B.4 som stegvis beräknar fram vid vilken höjd trädets diameter = 125 mm. Användbara längden blir slutgiltigt differensen mellan höjd vid $d = 125$ mm och $DBH = 1,3$ m. Då tillväxtvärden enligt figur 5.3 förändras med längden av trädet delades längderna in i fyra kategorier: 5-10 m, 10-15 m, 15-20 m och >20 m för att kunna visa på skillnader i tillväxtvärden. Träd understigande 5 m exkluderades. tillväxtvärdet för varje träd beräknas därför enligt kodavsnitt B.5. tillväxtvärdet beräknas som en ändrings kvot och enligt analysens medelvärdessats så tar det hänsyn till alla momentana förändringar inom intervallet (Wikipedia contributors, 2026). Framtagning av alla analyserade träds tillväxtvärde möjliggör en visualisering av fördelning för varje längdgrupp, en exempelgrupp syns i figur 5.6.



Figur 5.6: Exempel figur för hur gruppens tillväxtvärden fördelas med histogram för längdgruppen 10 – 15m.

6

Resultat

Följande kapitel presenterar tillväxtvärden för respektive trädgrupp indelat i olika längdgrupper. Dessa värden påverkan på träpålars geotekniska bärförmåga beräknas även med hänsyn till branschaccepterade normvärden. Vidare presenteras formkvoter för respektive trädgrupp och jämförs med tidigare studier inom området.

6.1 Rekommenderade tillväxtvärden

Modellens anpassning utvärderades enligt *root mean square error* (RMSE), (6.1) samt *mean absolute difference* (MAD), (6.2) i enlighet med (Hansen m. fl., 2023). Ytterligare används *Fit Index* (FI) vilket utgör andelen av den totala variationen i diameter som modellen förklarar. Ett $FI = 1$ innebär att modellen förklarar all variation i datan. Bias, beräknat som medelvärdet av residualerna anger om modellen systematiskt överskattar eller underskattar diametrarna och $bias = 0$ innebär att modellen ej överskattar eller underskattar. Resultatet i tabell 6.1 visar ett rimligt RMSE då det är jämförbart med både Hansen m.fl. (2023) och Pukkala m.fl. (2019) vilket tyder på att modellen är väl anpassad. Skillnad i datamaterial för denna studie jämfört med Hansen m.fl. (2023) samt deras val att använda *Cross-validation* kan förklara skillnad i RMSE samt MAD.

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2}{n}} \quad (6.1)$$

$$MAD = \sum_{i=1}^n \left(\frac{|\hat{y}_i - y_i|}{n} \right) \quad (6.2)$$

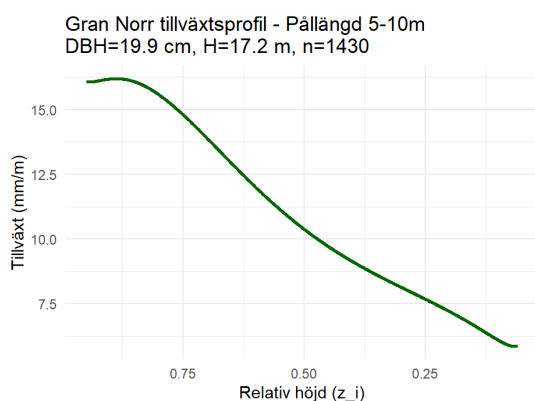
Tabell 6.1: Sammanställning av resultat för gran och tall i norr och söder.

Grupp	Antal träd	Observationer	Statistiska mått			
			FI	RMSE [cm]	Bias [cm]	MAD [cm]
Gran Norr	4 273	57 080	0,9898	0,554	0,0014	0,400
Gran Söder	8 989	148 437	0,9894	0,631	0,0017	0,463
Tall Norr	6 163	76 504	0,9848	0,608	-0,00018	0,444
Tall Söder	3 426	53 502	0,9834	0,744	-0,0032	0,561

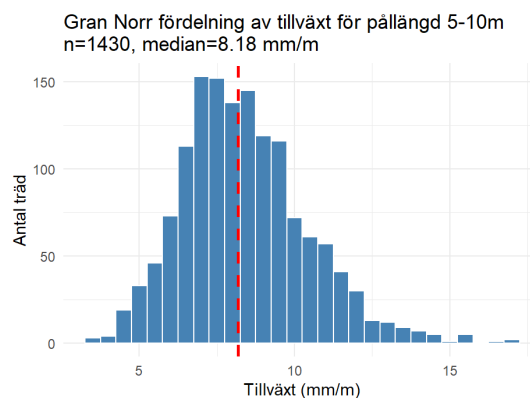
MAD för Gran Norr blev 0,400 cm, det innebär att modellens prediktioner i genomsnitt avviker 4,0 mm från den observerad diameter. De flesta diametrarna varierar mellan 5 cm – 35 cm över hela trädstammen vilket innebär att MAD blir ett litet relativt fel på ungefär 2%. Ytterligare är MAD en avvikelse från observerad diameter och innebär att vid fortsatta beräkningar av tillväxten som är en differens mellan två predikterade diametrar så tenderar skillnaden i MAD att delvis ta ut sig. Detta stärks av att bias är väldigt lågt vilket innebär att MAD ej är systematiska och mer slumpmässiga, de är alltså inte mer sannolika att vara positiva eller negativa. Kozak modellen anpassas för alla träd innan filtrering och resultat för tillväxtvärden tas fram efter filtrering.

6.1.1 Gran Norr

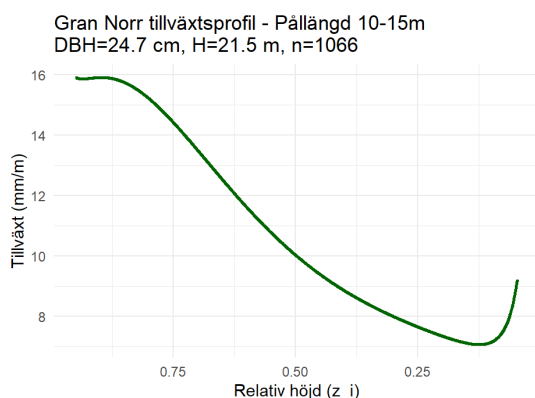
Figur 6.1 visar ett representativt träd för längdgruppens medianvärden som följer förklaringen i 5.2.2. Figur 6.2 visar hur längdgruppens fördelning ser ut. Antal träd som bortfaller var 1356. Bortfall berodde på att pålen understeg 5 m vid diameter 125 mm eller att det ej fanns en beräknad diameter som översteg 125 mm. Slutgiltigt antal godkända träd var 2917. För gruppen gran norr innehöll längdkategorin >20 m endast 67 träd och resultatet är därför inte representativa.



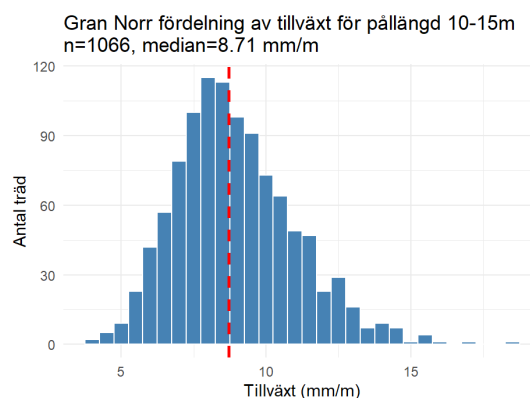
Figur 6.1: Tillväxtvärden för granar i norra Sverige inom längdgruppen 5–10m



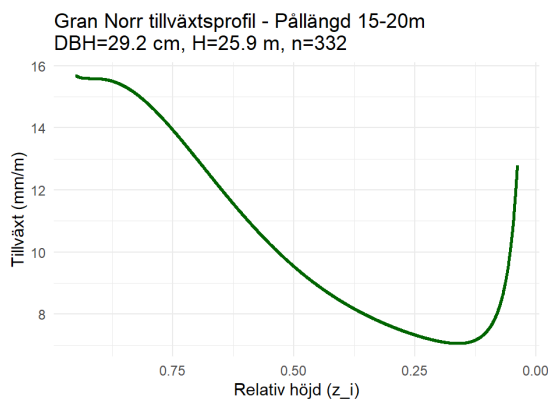
Figur 6.2: Fördelning av tillväxtvärden för granar i norra Sverige inom längdgrupp 5 – 10m



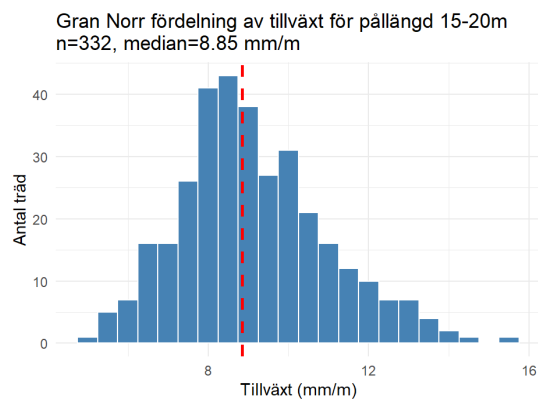
Figur 6.3: Tillväxtvärden för granar i norra Sverige inom längdgruppen 10 – 15m



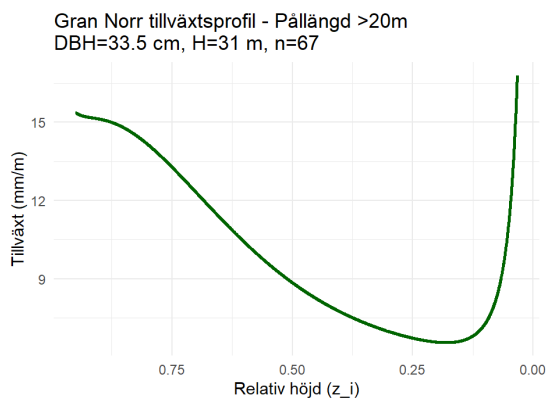
Figur 6.4: Fördelning av tillväxtvärden för granar i norra Sverige inom längdgrupp 10 – 15m



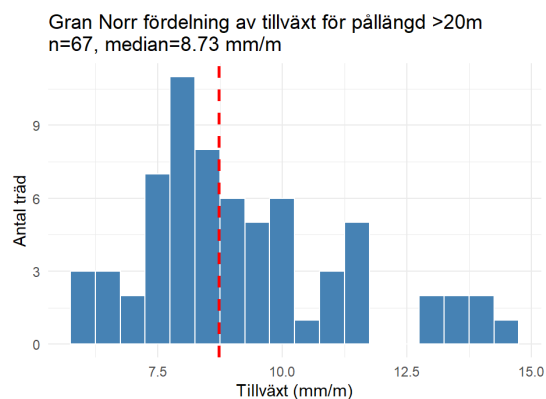
Figur 6.5: Tillväxtvärden för granar i norra Sverige inom längdgruppen 15 – 20m



Figur 6.6: Fördelning av tillväxtvärden för granar i norra Sverige inom längd-grupp 15 – 20m



Figur 6.7: Tillväxtvärden för granar i norra Sverige inom längdgruppen > 20m



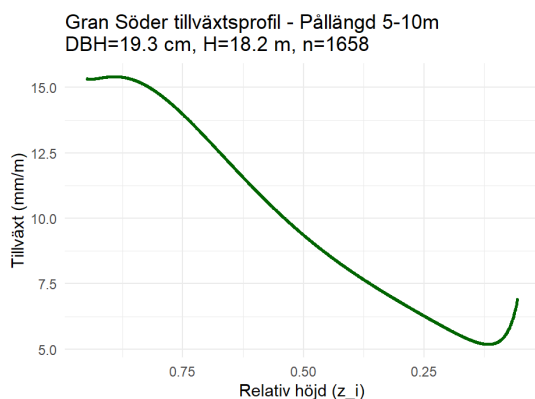
Figur 6.8: Fördelning av tillväxtvärden för granar i norra Sverige inom längd-grupp > 20m

Tabell 6.2: Sammanställning av tillväxtvärden för olika pällängder för gruppen gran norr.

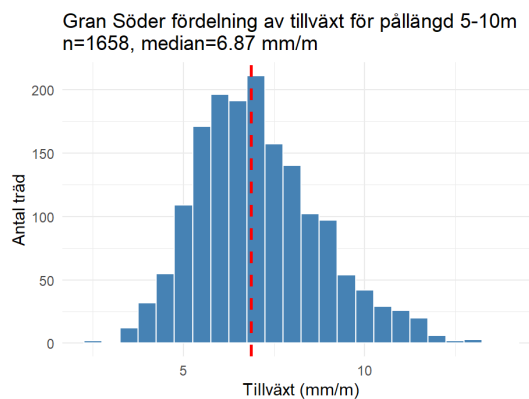
Pällängds grupp	Median tillväxtvärde (mm/m)	Antal träd	Median längdpåle (m)
5 – 10m	8,18	1430	7,5
10 – 15m	8,71	1066	12,2
15 – 20m	8,85	332	16,8
> 20m	8,73	67	21,9

6.1.2 Gran Söder

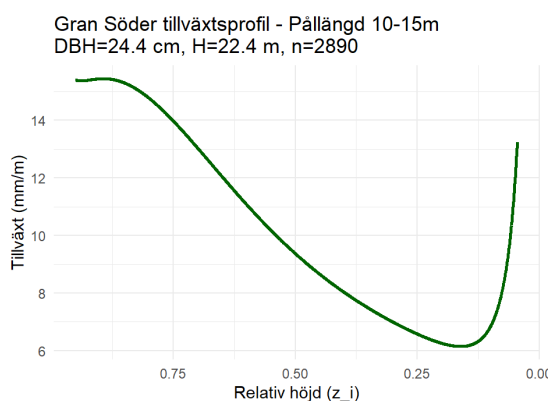
Figur 6.9 visar ett representativt träd för längdgruppens medianvärden som följer förklaringen i 5.2.2. Figur 6.10 visar hur längdgruppens fördelning ser ut. Antal träd som bortfaller var 1440. Slutgiltigt antal godkända träd var 7549.



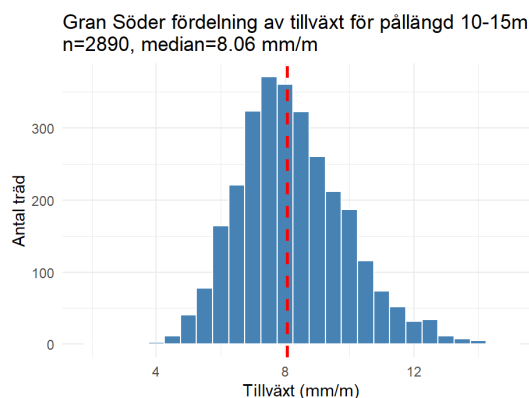
Figur 6.9: Tillväxtvärden för granar i södra Sverige inom längdgrupp 5 – 10m



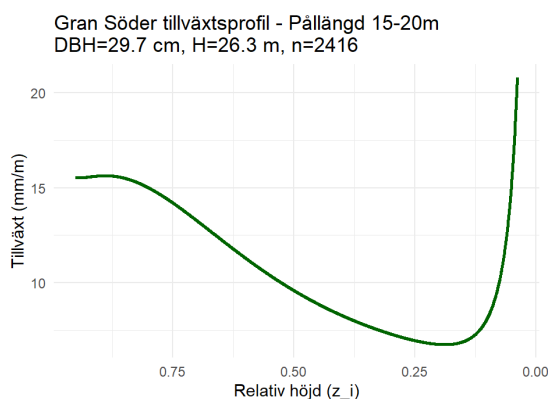
Figur 6.10: Fördelning av tillväxtvärden för granar i södra Sverige inom längdgrupp 5 – 10m



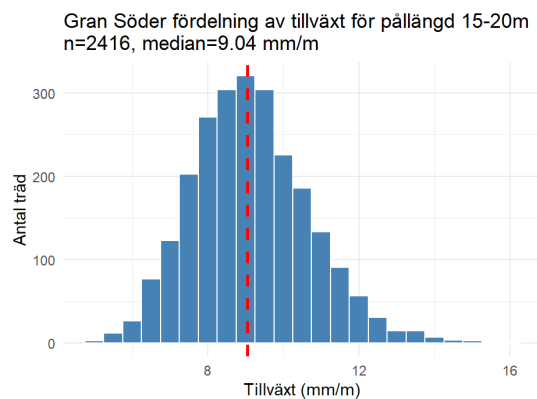
Figur 6.11: Tillväxtvärden för granar i södra Sverige inom längdgrupp 10 – 15m



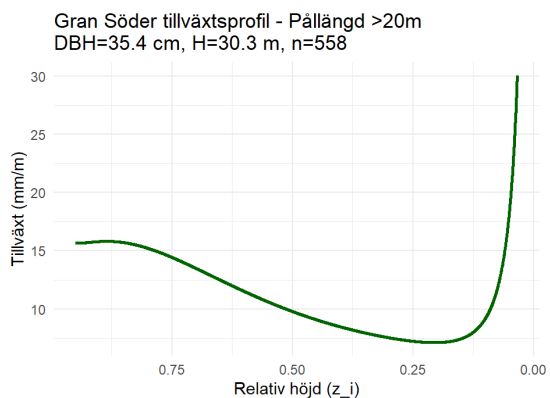
Figur 6.12: Fördelning av tillväxtvärden för granar i södra Sverige inom längdgrupp 10 – 15m



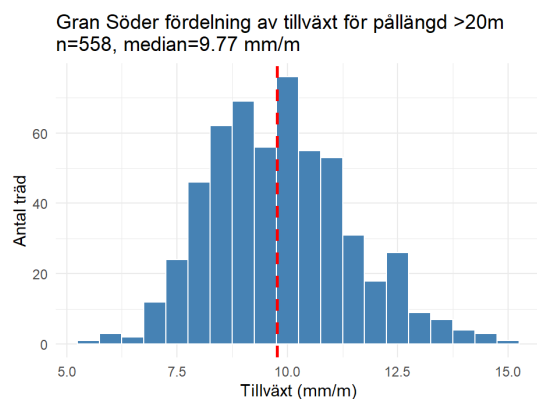
Figur 6.13: Tillväxtvärden för granar i södra Sverige inom längdgrupp 15 – 20m



Figur 6.14: Fördelning av tillväxtvärden för granar i södra Sverige inom längdgrupp 15 – 20m



Figur 6.15: Tillväxtvärden för granar i södra Sverige inom längdgrupp > 20m



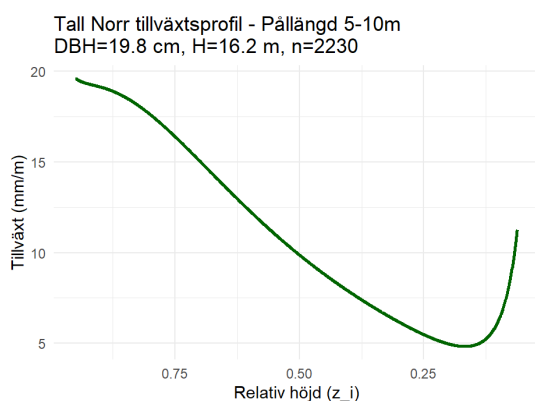
Figur 6.16: Fördelning av tillväxtvärden för granar i södra Sverige inom längdgrupp > 20m

Tabell 6.3: Sammanställning av tillväxtvärden för olika pällängder för gruppen gran söder.

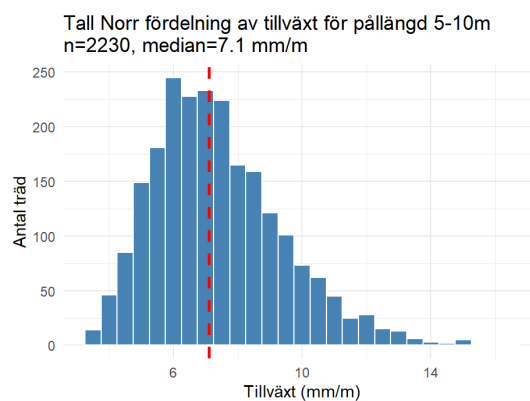
Pällängds grupp	Median tillväxtvärde (mm/m)	Antal träd	Median längdpåle (m)
5 – 10m	6,87	1658	7,9
10 – 15m	8,06	2890	12,9
15 – 20m	9,04	2416	17,2
> 20m	9,77	558	21,3

6.1.3 Tall Norr

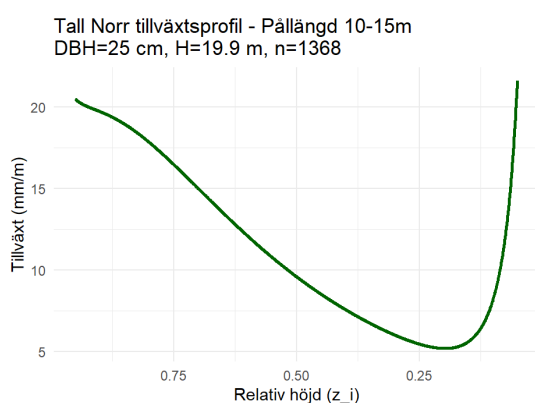
Figur 6.17 visar ett representativt träd för längdgruppens medianvärden som följer förklaringen i 5.2.2. Figur 6.18 visar hur längdgruppens fördelning ser ut. Slutgiltigt antal godkända träd var 3942.



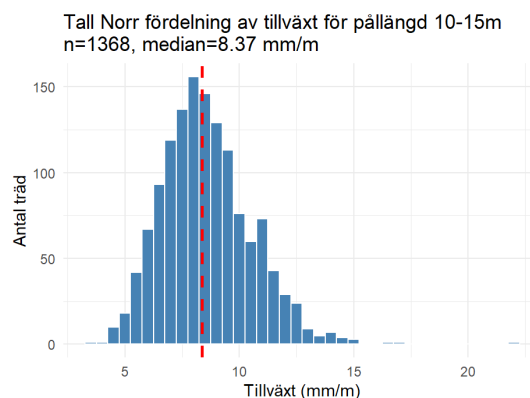
Figur 6.17: Tillväxtvärden för tallar i norra Sverige inom längdgrupp 5 – 10m



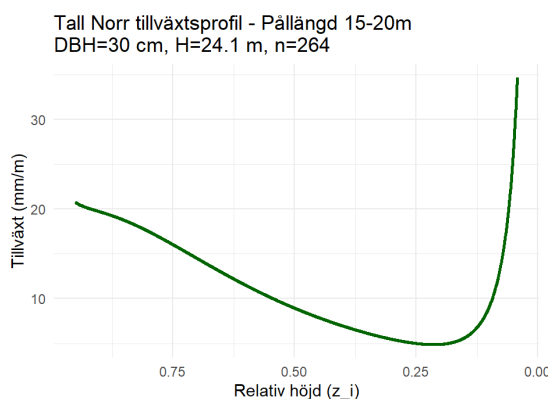
Figur 6.18: Fördelning av tillväxtvärden för tallar i norra Sverige inom längdgrupp 5 – 10m



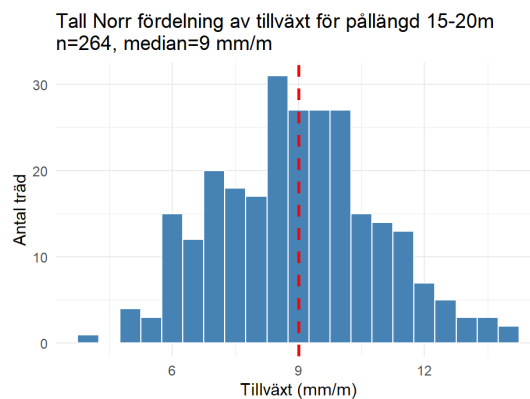
Figur 6.19: Tillväxtvärden för tallar i norra Sverige inom längdgrupp 10 – 15m



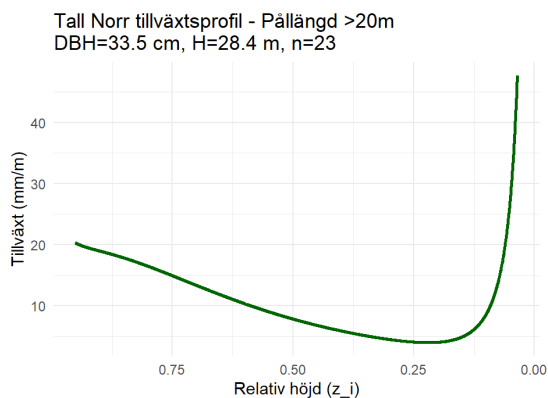
Figur 6.20: Fördelning av tillväxtvärden för tallar i norra Sverige inom längdgrupp 10 – 15m



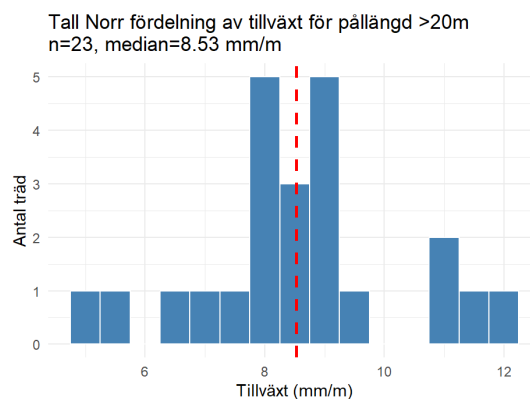
Figur 6.21: Tillväxtvärden för tallar i norra Sverige inom längdgrupp 15–20m



Figur 6.22: Fördelning av tillväxtvärden för tallar i norra Sverige inom längdgrupp 15 – 20m



Figur 6.23: Tillväxtvärden för tallar i norra Sverige inom längdgrupp > 20m



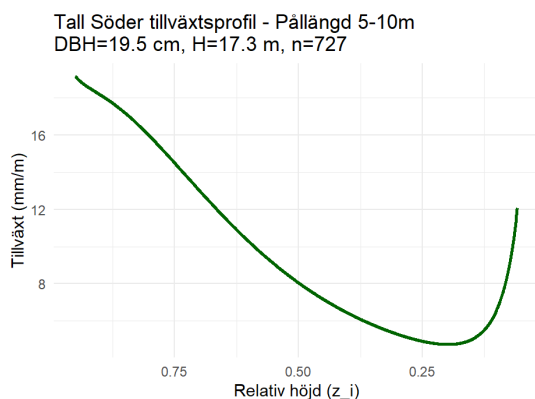
Figur 6.24: Fördelning av tillväxtvärden för tallar i norra Sverige inom längdgrupp > 20m

Tabell 6.4: Sammanställning av tillväxtvärden för olika pällängder för gruppen tall söder.

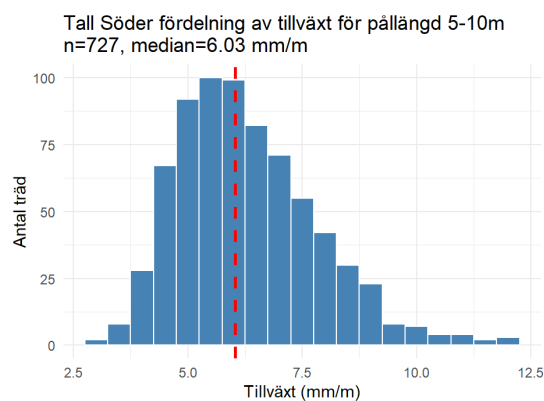
Pällängds grupp	Median tillväxtvärde (mm/m)	Antal träd	Median längdpåle (m)
5 – 10m	7,1	2230	7,6
10 – 15m	8,37	1368	12,0
15 – 20m	9,00	264	16,3
> 20m	8,53	23	20,8

6.1.4 Tall Söder

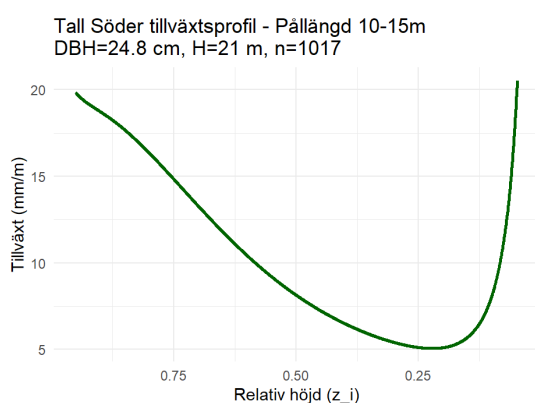
Figur 6.25 visar ett representativt träd för längdgruppens medianvärden som följer förklaringen i 5.2.2. Figur 6.26 visar hur längdgruppens fördelning ser ut. Slutgiltigt antal godkända träd var 2758.



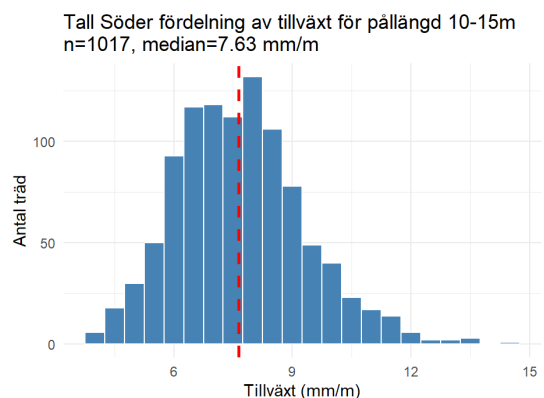
Figur 6.25: Tillväxtvärden för tallar i södra Sverige inom längdgrupp 5 – 10m



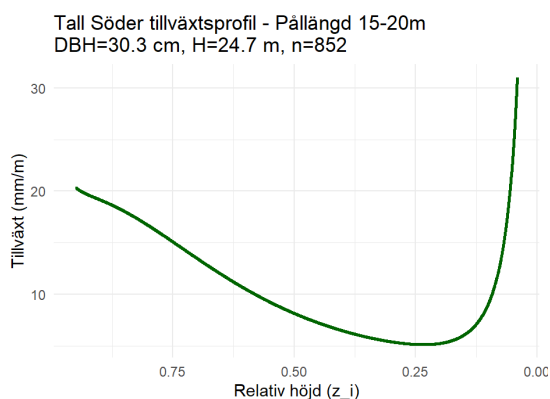
Figur 6.26: Fördelning av tillväxtvärden för tallar i södra Sverige inom längdgrupp 5 – 10m



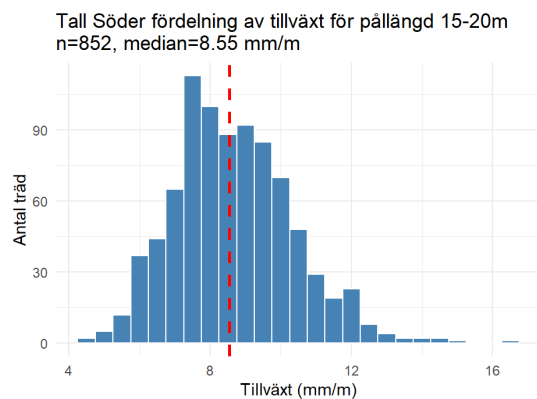
Figur 6.27: Tillväxtvärden för tallar i södra Sverige inom längdgrupp 10 – 15m



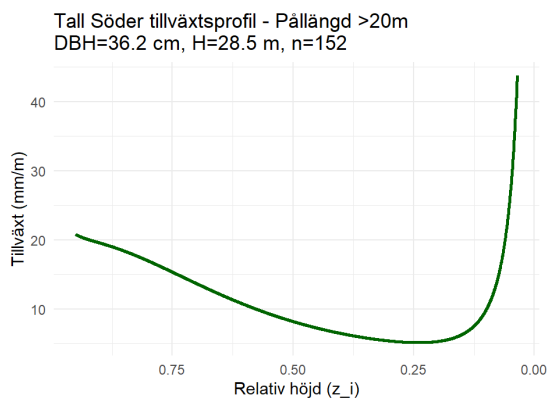
Figur 6.28: Fördelning av tillväxtvärden för tallar i södra Sverige inom längdgrupp 10 – 15m



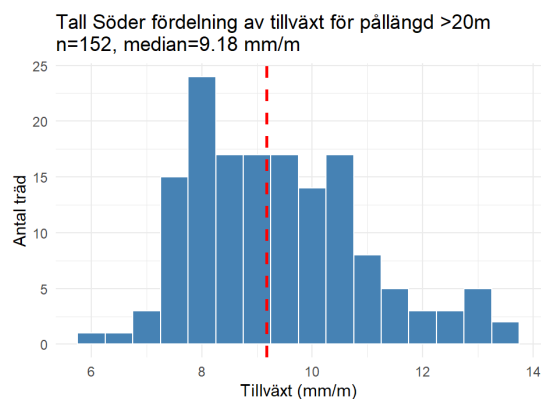
Figur 6.29: Tillväxtvärden för tallar i södra Sverige inom längdgrupp 15–20m



Figur 6.30: Fördelning av tillväxtvärden för tallar i södra Sverige inom längdgrupp 15 – 20m



Figur 6.31: Tillväxtvärden för tallar i södra Sverige inom längdgrupp > 20m



Figur 6.32: Fördelning av tillväxtvärden för tallar i södra Sverige inom längdgrupp > 20m

Tabell 6.5: Sammanställning av tillväxtvärden för olika pällängder för gruppen tall söder.

Pällängds grupp	Median tillväxtvärde (mm/m)	Antal träd	Median längdpåle (m)
5 – 10m	6,03	727	7,8
10 – 15m	7,63	1017	12,7
15 – 20m	8,55	852	16,9
> 20m	9,18	152	21,3

6.1.5 Rekommendationer

De rekommenderade tillväxtvärdena för respektive trädslag och avverkningsplats bygger på de tidigare presenterade medianvärdena i tabell: 6.2, 6.3, 6.4 och 6.5 och presenteras i tabell 6.6 nedan.

Tabell 6.6: Rekommenderade tillväxtvärden för Gran och Tall uppdelat på region och pällängd.

Trädslag och region	Rekommenderade tillväxtvärden [mm/m]			
	5–10 m	10–15 m	15–20 m	>20 m
Gran norr	8,18	8,71	8,85	8,73
Gran söder	6,87	8,06	9,04	9,77
Tall norr	7,10	8,37	9,00	8,53
Tall söder	6,03	7,63	8,55	9,18

6.2 Tillväxtvärdens påverkan på träpålars geotekniska bärförmåga

Vid träpålars geotekniska bärförmåga är det branschaccepterat att tillämpa ett tillväxtvärde på 8 mm/m för både tall och gran oberoende avverkningsplats. Detta värde kan jämföras med de rekommenderade tillväxtvärdena i tabell 6.6 via Faktorekvationen 4.9. Detta för att skildra α -metodens känslighet mot tillväxtvärdesförändringar. För att utföra beräkningarna enligt 4.9 krävs värden för de ingående parametrarna. Dessa har antagits enligt följande:

$$\begin{aligned}
 d_{spets} &= 150 \text{ [mm]} \\
 c_{u,spets} &= \text{odränerad skjuvhållfasthet vid pålspets [kPa]} \\
 L_p &= \text{Medelvärde av längdintervallet för undersökt grupp [m]} \\
 i &= 1,5 \text{ [kPa/m]} \\
 T_1 &= \text{rekommenderat tillväxtvärde för undersökt grupp [mm/m]} \\
 T_2 &= 8 \text{ [mm/m]}
 \end{aligned}$$

Vid beräkning av Faktor och geoteknisk bärförmåga krävs ett värde för pelarens längd. Denna studie har dock kategoriserat olika intervall av pällängder för rekommendation av tillväxtvärden. För att ange ett värde L_p har medellängden för respektive längdgrupp angetts. Exempelvis ansätts L_p värdet 7,5 m för längdgruppen 5-10 m. För längdgruppen >20 m har L_p ansatts värdet 21 m.

Ytterligare varierar $c_{u,spets}$ mellan de olika längdgrupperna. Den odränerad skjuvhållfastheten har ansatts värdet 10 kPa vid markyta och antas öka linjärt med djupet enligt i . $c_{u,spets}$ för de olika längdgrupperna bestäms således med hjälp av i och L_p enligt ekvation 6.3 nedan.

$$c_{u,spets} = 10 + i \cdot L_p \quad (6.3)$$

Tabell 6.7 och 6.8 nedan beskriver Faktorn respektive geoteknisk bärförmåga för respektive trädgrupp då ovanstående parametervärden gäller och T_1 ersätts med trädgruppens rekommenderade tillväxtvärde.

Tabell 6.7: Beräknad Faktor baserat på trädslag, region och pällängd. Referensgruppen syftar till beräkningar gjorda med tillväxtvärdet 8 mm/m. Färger anger hur resultatet skiljer sig från referensvärdet.

Trädslag och region	Faktor			
	7,5 m	12,5 m	17,5 m	21 m
Referensvärde	1,000	1,000	1,000	1,000
Gran norr	1,003	1,019	1,029	1,028
Gran söder	0,979	1,002	1,036	1,068
Tall norr	0,983	1,010	1,034	1,020
Tall söder	0,963	0,990	1,019	1,045

Tabell 6.8: Beräknad geoteknisk bärförmåga baserat på trädslag, region och pällängd. Referensgruppen syftar till beräkningar gjorda med tillväxtvärdet 8 mm/m. Färger anger hur resultatet skiljer sig från referensvärdet.

Trädslag och region	Geoteknisk bärförmåga [kN]			
	7,5 m	12,5 m	17,5 m	21 m
Referensvärde	77,9	175,2	315,4	442,1
Gran norr	78,2	178,6	324,6	454,6
Gran söder	76,3	175,5	326,7	472,3
Tall norr	76,6	177,0	326,3	451,1
Tall söder	75,1	173,5	321,4	462,2

Tabell 6.7 och 6.8 gäller endast för just de antagna parametervärden ovan. I de fall d_{spets} och $c_{u,spets}$ ökar, ökar även Faktorn och den geotekniska bärförmågan.

6.3 Formkvot

För att illustrera medelformkvoten för datan i denna studie togs diametervärden längs träden fram enligt tabell 6.9 nedan.

Tabell 6.9: Sammanställning av medianvärden för diametern vid 20 % respektive 60 % av träd längden för olika trädslag och regioner.

Trädslag och region	Medel diameter [cm]	
	vid 20 %	vid 60 %
Gran norr	17,69	11,14
Gran söder	20,36	13,06
Tall norr	16,65	11,47
Tall söder	19,1	13,57

Dessa värden utnyttjas vid beräkning av trädgruppernas formkvot och skildras i tabell 6.10 nedan tillsammans med medelformkvoterna från Edgren och Nylinder (1949) samt Ågren m.fl. (2021).

Tabell 6.10: Jämförelse av medelformkvot för tall och gran i olika regioner mellan Edgren & Nylinder (1949), Ågren m.fl. (2021) samt denna studie. Kolumnen "Utveckling" baseras på resultatet i denna studie och resultatet från Ågren m.fl. Bearbetad efter: (Ågren m. fl., 2021).

Trädslag och region	Medelformkvot			Utveckling
	Edgren och Nylander	Ågren m.fl.	Denna Studie	
Gran norr	0,659	0,631	0,630	−0,001
Gran söder	0,683	0,643	0,641	−0,002
Tall norr	0,719	0,667	0,689	+0,022
Tall söder	0,723	0,670	0,710	+0,04

7

Diskussion

Diskussionen som följer syftar till att granska de erhållna resultaten och sätta dem i relation till tidigare forskning inom området.

7.1 Tillväxtvärdens rimlighet

Resultaten i tabell 6.6 visar att samtliga grupper har tillväxtvärdena inom intervallet 6-10 mm/m och sammanfaller med tidigare framtagna krav från ASTM. ASTM använder 5 tum som minsta toppdiameter vilket ligger nära denna studies toppdiameter på 125 mm. ASTM har inte utfört en studie på vilka tillväxtvärden som kan förväntas av träd men det är fortfarande av betydelse att hamna inom samma intervall.

Att tillväxtvärdena ökar med pällängden kan förklaras med figurerna 6.1 till 6.32. Tillväxtprofilerna visar att diameterförändringen per meter ökar uppåt i stammen. Längre pålar sträcker sig högre upp och inkluderar därmed en större andel av zonen med högre tillväxt, vilket höjer medelvärdet för pålen som helhet. I de fall resultaten avviker från mönstret förklaras detta av ett lågt antal träd i kategorin. Detta syns tydligt i tabell 6.4 där tall norr endast har 23 träd över 20m. I kombination med figur 6.24 så blir det tydligt att presenterat tillväxtvärde ej är pålitligt utifrån analyserad data och förväntade värden. En formell nedre gräns för antal träd per kategori har inte fastställts. Istället bedöms tillförlitligheten för varje kategori utifrån fördelningens form. En kategori som uppvisar en tydlig, sammanhållen fördelning bedöms som tillförlitlig, medan en kategori med oregelbunden form eller stor spridning bör tolkas med försiktighet. Exempelvis uppvisas i figur 6.8 att gran norr har en oregelbunden fördelning med få antal och stor spridning vilket medför att det inte går att göra en tillförlitlig tolkning av medianen.

Enligt 5.1.1 kan de applicerade avbarkningsfunktionerna i studien påverka tillväxtvärdena. Däremot är barktjockleken förhållandevis liten jämfört med stamdiameter vilket begränsar dess påverkan på tillväxtvärdena.

Studien baserades på ett dataset med över 22 000 träd och efter filtrering kvarstår ett tillräckligt stort antal träd för de flesta längdgrupper för att ge stabila resultat. Storleken på datasetet bidrar till att resultatet blir representativa för de analyserade längderna, arterna och regionerna. Påföljande finns därför ett stort antal observationer som ger en stabil parameterskattning vilket innebär att modellen lokaliseras väl

till dem svenska förhållandena. Kozak 02 modellen är väl etablerad inom forskning och har tillämpats på ett stort antal trädarter under varierande förhållanden.

7.2 Praktisk betydelse för dimensionering av träpålar

Resultaten i denna studie tyder på att gran oberoende avverkningsplats i regel innebär ett högre tillväxtvärde gentemot tall. Den största skillnaden uppstår däremot mellan de olika längdgrupperna. Kortare träd har betydligt lägre tillväxt än högre träd.

De största skillnaderna från referensvärden uppstod hos tall söder 7,5 m och gran söder 21 m. Den geotekniska bärförmågan för tallgruppen minskade med 3,6 % gentemot referensvärdet. För grangruppen ökade däremot den geotekniska bärförmågan med 6,8 % gentemot referensvärdet. Resultatet pekar också på att träd avverkade i norra Sverige i regel har högre tillväxt gentemot träd avverkade i södra Sverige. På grund av detta är det sannolikt att gruppen gran norr >20 m hade påvisat den största ökningen i geoteknisk bärförmåga.

Viktigt att nämna är att beräkningen av den geotekniska bärförmågan är gjord utifrån förutsättningen att ett ensamt träd används som en påle. I verkligheten är det utmanande att använda träpålar på grund av bland annat de höga kraven som ställs på grundvattenytan. Som tidigare beskrivits under 3.6.1 är det vanligt att utnyttja kombinationspålar med en övre del betong och en nedre trädel för att säkerställa att trädelen konstant befinner sig under grundvattenytan. Detta innebär att trädelens koniska form medför en betydligt mindre påverkan på pålens totala geotekniska bärförmåga.

7.3 Formkvotsutveckling

Skillnaderna i formkvot i denna studie jämfördes med Skogforsks arbetsrapport Ågren m.fl. (2021) som baserades på en undersökning utförd 2018. Undersökningen byggde på en stor mängd skördardata (ca 4,1 miljoner träd) men exakt när datan i Skogforsk undersökningen samlades in framgår inte. Vår studie baseras på manuellt inmätta skördardata i betydligt mindre utsträckning (ca 23 000 träd) insamlad mellan 2016 och 2024.

Resultatet i Skogforsks arbetsrapport jämförs med Edgren & Nylinder (1949) och utvecklingen mellan dessa rapporter visade hur alla träslag oberoende avverkningsplats påvisade en minskad formkvot i Ågren m.fl. (2021). Jämfört med Edgren & Nylinder (1949) och Ågren m.fl. (2021). I jämförelse med Edgren & Nylinder (1949) är datamängden i denna studie relativt samtida med Skogforsks arbetsrapport.

Utvecklingen av gran oberoende avverkningsplats i tabell 6.10 påvisar en minimal negativ trend av formkvoten gentemot Ågren m.fl. (2021). Detta är förväntat då trenden är fortsatt negativ, men minimal på grund av att de jämförda dataseten är relativt samtida. För tall oberoende avverkningsplats ser resultatet annorlunda ut. Formkvoten indikerar en markant ökning vilket bryter den negativa formkvotstrend fastställd av Ågren m.fl. (2021). Mellan Ågren m.fl. (2021) och Edgren & Nylinder (1949) minskade formkvoten för gruppen tall norr med 0,052 och tall söder med 0,053. Mellan denna studie och Ågren m.fl. (2021) har formkvoten för gruppen tall norr ökat med 0,022 och tall söder med 0,04.

Att denna studie skulle påvisa en så stor skillnad som den gör gentemot Ågren m.fl. (2021) och dessutom öka istället för att minska påvisar att något skiljer mellan rapporterna. Det handlar med största sannolikhet om att datasetet denna studie utgått ifrån är betydligt mindre än det i Ågren m.fl. (2021) eftersom behandlingen av datan och uträkning av formkvot i övrigt är samma. Däremot förklarar detta inte varför gran oberoende avverkningsplats indikerar den förväntade utvecklingen.

8

Slutsats

I detta kapitel presenteras studiens slutsatser med direkt koppling till arbetets övergripande syfte och frågeställningar. För att säkerställa en hög statistisk tillförlitlighet har undergrupper med ett otillräckligt dataunderlag exkluderats från de slutgiltiga rekommendationerna.

8.1 Tillväxtvärden för gran och tall i norra och södra Sverige

Framtagna tillväxtvärden ligger nära existerande värden från ASTM. Tillväxtvärden kommer inte skilja sig avsevärt utifrån att avbarkning har skett. Liknande studier har fått goda resultat då det användes avbarkade diametrar och därmed är framtagna tillväxtvärden trovärdiga. Vissa längdgrupper saknar tillräcklig mängd träd för att vara tillförlitliga och därmed ska endast fördelningar som uppnår en god fördelningsform användas. Slutligen uppvisar modellen en god prediktionsförmåga i tidigare studier vilket ger tillit till att de tillväxtvärden som framtas i denna studie inte är ett resultat av modellval utan reflekterar de analyserade stammarnas faktiska form och tillväxt.

Slutligen presenteras därför en omarbetad version av tabell 6.6 där tillväxtvärden från osäkra längdgrupper har exkluderats.

Tabell 8.1: Justerat resultat efter exkludering av osäkra resultat. Tillväxtvärdet för över 20 m långa granar från norra Sverige och över 20 m långa tallar från norra Sverige har exkluderats.

Trädslag och region	Slutgiltiga tillväxtvärden [mm/m]			
	5–10 m	10–15 m	15–20 m	>20 m
Gran norr	8,18	8,71	8,85	[-]
Gran söder	6,87	8,06	9,04	9,77
Tall norr	7,10	8,37	9,00	[-]
Tall söder	6,03	7,63	8,55	9,18

8.2 Tillväxtvärdens påverkan på geoteknisk bärförmåga

Faktorberäkningarna i denna studie belyser hur den geotekniska bärförmågan påverkas av tillväxtvärden. I de fall enbart träpålar används bör tillväxtvärdena från följande träd- och längdgrupper beaktas:

- **7,5m långa pålar av tall från södra Sverige:** Medför en minskning av den geotekniska bärförmågan med 3,6 % i förhållande till beräkningar gjorda med det branschaccepterade tillväxtvärdet 8 mm/m.
- **21m långa pålar av gran från södra Sverige:** Medför en ökning av den geotekniska bärförmågan med 6,8 % i förhållande till beräkningar gjorda med det branschaccepterade tillväxtvärdet 8 mm/m.

På grund av den minskade påverkan från tillväxtvärden vid användning av kombinationerpålar av betong och trä kan ett tillväxtvärde på 8 mm/m i dessa fall användas och medföra ett tillräckligt korrekt svar.

Det konstateras under 8.1 att två längdgrupper saknar en tillräcklig mängd träd för att medföra tillförlitliga resultat. Nedanstående tabeller är uppdaterade versioner av tabell 6.7 och 6.8 där osäkra längdgrupper har exkluderats.

Tabell 8.2: Beräknad Faktor baserat på trädslag, region och pållängd. Referensgruppen syftar till beräkningar gjorda med tillväxtvärdet 8 mm/m. Färger anger hur resultatet skiljer sig från referensvärdet. Faktorn för 21 m långa pålar av gran från norra Sverige och 21 m långa pålar av tall från norra Sverige har exkluderats.

Trädslag och region	Faktor			
	7,5 m	12,5 m	17,5 m	21 m
Referensvärde	1,000	1,000	1,000	1,000
Gran norr	1,003	1,019	1,029	[-]
Gran söder	0,979	1,002	1,036	1,068
Tall norr	0,983	1,010	1,034	[-]
Tall söder	0,963	0,990	1,019	1,045

Tabell 8.3: Beräknad geoteknisk bärförmåga baserat på trädslag, region och pållängd. Referensgruppen syftar till beräkningar gjorda med tillväxtvärdet 8 mm/m. Färger anger hur resultatet skiljer sig från referensvärdet. Geoteknisk bärförmåga för 21 m långa pålar av gran från norra Sverige och 21 m långa pålar av tall från norra Sverige har exkluderats.

Trädslag och region	Geoteknisk bärförmåga [kN]			
	7,5 m	12,5 m	17,5 m	21 m
Referensvärde	77,9	175,2	315,4	442,1
Gran norr	78,2	178,6	324,6	[-]
Gran söder	76,3	175,5	326,7	472,3
Tall norr	76,6	177,0	326,3	[-]
Tall söder	75,1	173,5	321,4	462,2

8.3 Formkvotsutveckling

I Skogforsks arbetsrapport Ågren m.fl. (2021) presenterades en negativ formkvotstrend för gran och tall jämfört med de formkvoter framförda av Edgren & Nylinder (1949).

Studien resulterade i följande utveckling av formkvoter gentemot Ågren m.fl. (2021).

- **Gran oberoende avverkningsplats:** En minimal fortsatt negativ trend.
- **Tall:** Formkvoten för tallar i norra Sverige ökade med 0,022 och tallar från södra Sverige med 0,040.

Eftersom formkvotsutvecklingen för gran är fortsatt negativ samt liten fastställs att dessa värden är tillförlitliga. Den avvikande trenden från tall oberoende avverkningsplats innebär att dessa värden bör beaktas varsamt.

Litteratur

- Agestam, E., Säll, H., & Wilhelmsson, L. (2022). *SKOGSBRUK, VIRKE OCH SKOGS-INDUSTRIPRODUKTER* (Nr 22). Skogsstyrelsen. Skogsstyrelsens förlag. <https://www.skogsstyrelsen.se/globalassets/mer-om-skog/skogsskotselserien/skogsskotselserien-22-skogsbruk-virke-och-skogsindustriprodukter.pdf>
- Alheid, P., & Holmberg, G. (2010). *Kohedionspålar* (Nr 1). Pålkommisionen. Pålkommisionen. <https://www.palkommissionen.org/uploads/3196/100%20-%20supplement.pdf>
- ASTM International. (2022). *Standard Specification for Round Timber Piles* (Standard Nr ASTM D25-12(2022)). ASTM International. West Conshohocken, PA. <https://doi.org/10.1520/D0025-12R22>
- Bi, H. (2000). Trigonometric Variable-Form Taper Equations for Australian Eucalypts. *Forest Science*, 46(3), 397–409. <https://doi.org/10.1093/forestscience/46.3.397>
- Burkhart, H. E., & Tomé, M. (2012). Tree Form and Stem Taper. I *Modeling Forest Trees and Stands* (s. 9–41). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-90-481-3170-9_2
- ChatGPT (DALL-E 3). (2026). OpenAI. <https://chatgpt.com/>
- Edgren, V., & Nylinder, P. (1949). *Funktioner och tabeller för bestämning av avsmalning och formkvot under bark för tall och gran i norra och södra Sverige* (Nr 7). Statens Skogsforskningsinstitut. Stockholm, Statens Skogsforskningsinstitut. https://pub.epsilon.slu.se/9924/1/medd_statens_skogsforskningsinst_038_07.pdf
- Elzhov, T. V., Mullen, K. M., Spiess, A.-N., Bolker, B., Mullen, M. K. M., & Suggests, M. (2016). Package ‘minpack.lm’. *Title R Interface Levenberg-Marquardt Nonlinear Least-Sq. Algorithm Found MINPACK Plus Support Bounds*.
- Eriksson, P., Jendeby, L., Olsson, T., & Svensson, T. (2004). *Kohesionspålar* (Nr 100). Pålkommisionen. Linköping, Pålkommisionen. <https://www.palkommissionen.org/uploads/3195/100%20-%20Kohesionsp%C3%A5lar.pdf>
- Gemini 3. (2026). Google. <https://gemini.google.com/>
- Goodwin, A. N. (2009). A cubic tree taper model. *Australian Forestry*, 72(2), 87–98. <https://doi.org/10.1080/00049158.2009.10676294>
- Gullberg, T. (2025). *Pålstatistik för Sverige 2024*. Pålkommisionen. Stockholm, Pålkommisionen. https://www.palkommissionen.org/uploads/userfiles/files/2024_1.pdf
- Hannrup, B. (2004). *Funktioner för skattning av barkens tjocklek hos tall och gran vid avverkning med skördare* (Nr 575). Skogforsk. Uppsala, Skogforsk. <https://www.skogforsk.se/publications/575>

- // www.skogforsk.se/contentassets/960ad964391d489785f97f9eaeaf174/arbetsrapport-575-2004.pdf
- Hannrup, B., & Lundgren, C. (2012). *Utvärdering av Skogforsks nya barkfunktioner för tall och gran – En uppföljande studiereport* (Nr 762). Skogforsk. Uppsala, Skogforsk. <https://www.skogforsk.se/contentassets/a4b424a6fabb490eaa14bfe7d6f8592c/arbetsrapport-762-2012.pdf>
- Hansen, E., Rahlf, J., Astrup, R., & Gobakken, T. (2023). Taper, volume, and bark thickness models for spruce, pine, and birch in Norway. *Scandinavian Journal of Forest Research*, 38(6), 413–428. <https://doi.org/10.1080/02827581.2023.2243821>
- Kayhan, E., & Viitberg, E. (2024). *Grundläggning med träpålar Hur kan träpålar användas i större utsträckning?* KTH. Stockholm, KTH. <https://kth.diva-portal.org/smash/get/diva2:1879707/FULLTEXT01.pdf>
- Kozak, A. (2004). My last words on taper equations. *The Forestry Chronicle*, 80(4), 507–515. <https://doi.org/10.5558/tfc80507-4>
- Li, R., Weiskittel, A., Dick, A. R., Kershaw Jr, J. A., & Seymour, R. S. (2012). Regional stem taper equations for eleven conifer species in the Acadian region of North America: development and assessment. *Northern Journal of Applied Forestry*, 29(1).
- Länsstyrelsen Värmland. (2013). Växter på gränsen. <https://www.lansstyrelsen.se/download/18.151739f161e6faa206151fd/1526068544659/Vaxter-pa-gransen.pdf>
- Max, T. A., & Burkhart, H. E. (1976). Segmented Polynomial Regression Applied to Taper Equations. *Forest Science*, 22(3), 283–289. <https://doi.org/10.1093/forestscience/22.3.283>
- McTague, J. P., & Weiskittel, A. (2021). Evolution, history, and use of stem taper equations: a review of their development, application, and implementation. *Canadian Journal of Forest Research*, 51(2), 210–235. <https://doi.org/10.1139/cjfr-2020-0326>
- Olsson, C., & Holm, G. (1993). *Pålgrundläggning*. Statens geotekniska institut. Linköping, AB Svensk Byggtjänst. <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1542015/FULLTEXT01.pdf>
- Opus 4.6 Extended. (2026). Antropic. <https://claude.ai/>
- Ramböll Sverige AB. (2016). *MILJÖKONSEKVENSBESKRIVNING STATION KORSVÄGEN*. Ramböll Sverige AB. Göteborg, Göteborgs Stad. [https://www5.goteborg.se/prod/fastighetskontoret/etjanst/planbygg.nsf/vyFiler/V%C3%A4stl%C3%A4nken%20-%20V%C3%Astra%20uppg%C3%A5ngen%20vid%20Johannebergs-%20och%20Olof%20Wijksgatan-Plan%20ut%C3%B6kat%20f%C3%B6rfarande%20-%20granskning-Milj%C3%B6konsekvensbeskrivning%20station%20Korsv%C3%A4gen/\\$File/MKB_station_Korsvagen.pdf?OpenElement](https://www5.goteborg.se/prod/fastighetskontoret/etjanst/planbygg.nsf/vyFiler/V%C3%A4stl%C3%A4nken%20-%20V%C3%Astra%20uppg%C3%A5ngen%20vid%20Johannebergs-%20och%20Olof%20Wijksgatan-Plan%20ut%C3%B6kat%20f%C3%B6rfarande%20-%20granskning-Milj%C3%B6konsekvensbeskrivning%20station%20Korsv%C3%A4gen/$File/MKB_station_Korsvagen.pdf?OpenElement)
- Svenskt Trä. (2021). Trädets tillväxt och virkeskvalitet [Hämtad: 2026-04-15]. <https://www.traguiden.se/om-tra/materialet-tra/traets-uppbyggnad/traets-uppbyggnad/tradets-tillvaxt-och-virkeskvalitet/>

- Svenskt Trä. (2026). Egenskaper hos barrträ [Hämtad: 2026-04-15]. <https://www.svenskttra.se/trafakta/allmant-om-tra/fran-timmer-till-planka/egenskaper-hos-barrtra/>
- Wikipedia contributors. (2026). Mean value theorem — Wikipedia, The Free Encyclopedia [[Online; accessed 23-April-2026]]. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mean_value_theorem&oldid=1350325198
- Zakrzewski, W. T. (1999). A Mathematically Tractable Stem Profile Model for Jack Pine in Ontario. *Northern Journal of Applied Forestry*, 16(3), 138–143. <https://doi.org/10.1093/njaf/16.3.138>
- Zakrzewski, W. (2009). Defining tree taper: A challenge for growth and yield modelling in Ontario. *The Forestry Chronicle*, 85(6), 897–899. <https://doi.org/10.5558/tfc85897-6>
- Ågren, K., Arlinger, J., Bhuiyan, N., Hannrup, B., Möller, J. J., & Wilhelmsson, L. (2021). *Formkvot för tall och gran - En kartläggning med skördar-data* (1100–2021). Skogforsk. Uppsala, Skogforsk. <https://www.skogforsk.se/contentassets/fa0f6345dcbb4928abc79d83283336d7/arbetsrapport-1100-2021.pdf>

A

Funktioner för beräkning av barktjocklek

A.1 Avbarkningsfunktion för tall:

Då: $h < h_{tg}$:

$$db = 3,5808 + 0,0109 \cdot dbh_b + (72,1814 + 0,0789 \cdot dbh_b - 0,9868 \cdot lat) \cdot \exp(-(0,0078557 - 0,0000132 \cdot dbh_b) \cdot h)$$

$$dbh_b = \min(dbh, 590)$$

$$h_{tg} = -\frac{\ln\left(\frac{0.12}{72.1814+0.0789 \cdot dbh_b - 0.9868 \cdot lat}\right)}{0.0078557 - 0.0000132 \cdot dbh_b}$$

Då: $h > h_{tg}$:

$$db = 3.5808 + 0.0109 \cdot dbh_b + 0.12 - 0.005 \cdot (h - h_{tg})$$

Där:

- db = Dubbla barktjockleken, där: $db = \max(db, 2)$ [mm]
- dbh_b = Brösthöjdsdiameter mindre än 590 mm [mm]
- dbh = Brösthöjdsdiameter (uppmätt 1,3 m ovan mark) [mm]
- lat = Latitud för trädets avverkningssplats [decimalgrader]
- h_{tg} = Höjd för timmergränsen [cm]
- h = Undersökta höjden [cm]

A.2 Avbarkningsfunktion för gran:

$$db = 0.46146 + 0.01386 \cdot dbh + 0.03571 \cdot dbh \cdot reldia$$

$$reldia = \frac{dia}{dbh}$$

Där:

- db = Dubbla barktjockleken, där: $db = \max(db, 2)$ [mm]
- $reldia$ = relativ diameter [-]
- dia = Aktuell diameter [mm]
- dbh = Brösthöjdsdiameter [mm]

B

Statistiska modeller

B.1 Kozak 02 modell i R

```
1 kozak_k02 <- function(D, H, h, a0, a1, a2, b1, b2, b3, b4, b5
  , b6) {
2   z <- h / H
3   p <- 1.3 / H
4   X <- (1 - z^(1/3)) / (1 - p^(1/3))
5   Q <- 1 - z^(1/3)
6
7   exponent <- b1 * z^4 +
8               b2 * (1 / exp(D / H)) +
9               b3 * X^0.1 +
10              b4 * (1 / D) +
11              b5 * H^Q +
12              b6 * X
13
14   d_pred <- a0 * D^a1 * H^a2 * X^exponent
15   return(d_pred)
16 }
17 )
```

Listing B.1: Kozak 02-modellen definerade i R

B.2 Icke-linjärt minska kvadratproblems lösning:

```
1 start_values <- list(  
2   a0 = 1.0, a1 = 0.97, a2 = 0.01,  
3   b1 = 0.4, b2 = -0.8, b3 = 0.3,  
4   b4 = -0.3, b5 = 0.0, b6 = 0.4  
5 )  
6  
7  
8 fit <- nlsLM(  
9   d ~ a0 * D^a1 * H^a2 * X^(b1*z^4 + b2*(1/exp(D/H)) + b3*X  
10      ^0.1 +  
11   b4*(1/D) + b5*H^Q + b6*X),  
12   data = data,  
13   start = start_values,  
14   control = nls.lm.control(maxiter = 500, ftol = 1e-8, ptol =  
    1e-8)
```

Listing B.2: R-kod för anpassning av avsmalningsfunktion med nlsLM.

B.3 Tillväxtfunktion:

```
1  berakna_tillvaxt <- function(D, H, params, h_start, h_end,
2    delta = 0.01) {
3
4    h_seq <- seq(h_start, h_end, by = delta)
5
6    d_values <- kozak_k02(D = D, H = H, h = h_seq,
7      a0 = params["a0"], a1 = params["a1"],
8      a2 = params["a2"],
9      b1 = params["b1"], b2 = params["b2"],
10     b3 = params["b3"],
11     b4 = params["b4"], b5 = params["b5"],
12     b6 = params["b6"])
13
14    dd_dh <- diff(d_values) / diff(h_seq) * 10 # mm/m
15
16    return(list(
17      mean_tillvaxt_mm_per_m = mean(dd_dh, na.rm = TRUE),
18      h = h_seq[-1],
19      tillvaxt = dd_dh
20    ))
21 }
```

Listing B.3: Kod som med Kozak 02 modell tar fram predikterade diameter samt deras respektive höjder och sparar i en lista. Ytterligare räknas tillväxtvärden ut för träd genom att ta skillnad i höjd och diameter mellan två intilliggande punkter.

B.4 Beräkning av längdkategorier:

```
1 tree_pal <- data %>%
2   select(tree_id, D, H) %>%
3   distinct() %>%
4   mutate(
5     max_h = sapply(1:n(), function(i) {
6       h_seq <- seq(0.5, H[i] * 0.95, by = 0.1)
7       d_seq <- kozak_k02(D[i], H[i], h_seq,
8                           params["a0"], params["a1"], params["a2"],
9                           params["b1"], params["b2"], params["b3"],
10                          params["b4"], params["b5"], params["b6"])
11       giltig <- h_seq[d_seq >= 12.5]
12       if (length(giltig) > 0) max(giltig) else NA
13     }),
14   pal_langd = max_h - 1.3,
15   kategori = cut(pal_langd,
16                  breaks = c(0, 5, 10, 15, 20, Inf),
17                  labels = c("0-5m", "5-10m", "10-15m", "15-20m", ">20m"))
18 ) %>%
19 filter(!is.na(pal_langd), pal_langd >= 5)
```

Listing B.4: Beräkning av längdkategorier

B.5 Tillväxt beräkning:

```
1  tillvaxt_kat <- grupp %>%
2    mutate(
3      d_botten = kozak_k02(D, H, 1.3, params["a0"], params["
4        a1"], params["a2"],
5          params["b1"], params["b2"], params
6            ["b3"],
7            params["b4"], params["b5"], params
8              ["b6"]),
9      d_topp = kozak_k02(D, H, max_h, params["a0"], params["
10        a1"], params["a2"],
11          params["b1"], params["b2"], params["
12            b3"],
13            params["b4"], params["b5"], params["
14              b6"])),
15      tillvaxt = (d_botten - d_topp) / pal_langd * 10
16    )
```

Listing B.5: Beräkning av tillväxtvärden för varje längdkategori.

INSTITUTIONEN FÖR något ämne
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg, Sverige
www.chalmers.se



CHALMERS