



Numeriska simuleringar av stokastiska differentialekvationer

Numerical simulations of stochastic differential equations

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet

Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers

Adam Ivehag

Joakim Quach

Ludvig Jakobsson

Tom Doran

Numeriska simuleringar av stokastiska differentialekvationer

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet

Adam Ivehag Joakim Quach

*Examensarbete för kandidatexamen i matematik inom Matematikprogrammet, in-
riktning Tillämpad matematik, vid Göteborgs universitet*

Tom Doran

*Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik vid
Chalmers*

Ludvig Jakobsson

Handledare:
David Cohen
Annika Lang

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2021

Förord

Denna kandidatuppsats har skrivits av gruppmedlemmar Adam Ivehag, Joakim Quach och Tom Doran som är studenter på Göteborgs universitet, och Ludvig Jakobsson som är student på Chalmers tekniska högskola. Våra handledare var David Cohen och Annika Lang från Institutionen för Matematiska vetenskaper.

Adam har skrivit kapitel 7 som handlar om linjär stabilitet hos stokastiska differentialekvationer.

Joakim har skrivit kapitel 6 om Milstein-metoden och kapitel 9 om Monte Carlo-metoden, tillsammans med respektive Python-kod som finns i bilaga G och bilaga I. Dessutom ger han mer detalj om variansreduktion för Monte Carlo-metoden i bilaga B.

Tom har skrivit kapitel 3 om stokastiska integraler, kapitel 4 om Euler-Maruyama-metoden och kapitel 8 om stokastiska kedjeregeln, tillsammans med Python-kod i bilaga D, E och H. Dessutom har han skrivit populärvetenskapliga artikeln och bilaga A som behandlar teorin bakom Itô-integralen i mer detalj.

Ludvig har skrivit kapitel 2 om Brownsk rörelse, kapitel 5 om konvergens av Euler-Maruyama-metoden och kapitel 10 om Cox-Ingersoll-Ross-modellen, med tillhörande Python-kod i bilaga C, F och J. Dessutom har han skrivit sammanfattningen både på svenska och engelska.

Alla har bidragit till skrivningen av inledningen och avslutningen, samt diskussioner om projektets presentation, och har gett varandra förbättringsförslag. Mer detalj angående individuella prestationer har dokumenterats under projektets gång i gruppens dagbok samt individuella loggböcker.

Vi tackar hjärtligt alla våra lärare på Institutionen för Matematiska vetenskaper som har lyckats lära oss så mycket under en relativ kort period. Speciellt vill vi tacka David och Annika, våra handledare, för all tid de har lagt ner för att hjälpa oss förstå ämnet och undvika alltför många pinsamma fel!

Göteborg, maj 2021,

Adam Ivehag, Joakim Quach, Tom Doran och Ludvig Jakobsson.

Populärvetenskaplig presentation

To this may be added, that some of the problems about chance having a great appearance of simplicity, the mind is easily drawn into a belief, that their solution may be attained by the mere strength of natural good sense; which generally proving otherwise, and the mistakes occasioned thereby being not infrequent, it is presumed that a book of this kind, which teaches to distinguish truth from what seems so nearly to resemble it, will be looked on as a help to good reasoning.

– Abraham de Moivre, *The Doctrine of Chances*, 1717

Matematiken som behandlar sannolikheter kallas sannolikhetsteori och har sitt ursprung i hasardspel. Det var först på 1600-talet som matematiker såsom Pierre Fermat och Blaise Pascal började tillämpa matematik på slumpen för att se om mönster bakom slumpmässiga händelser kunde kvantifieras. Det accepterades dock inte som en riktig del av matematiken förrän på 1900-talet.

Varför tog det så lång tid? Sedan de gamla grekerna hade matematiken betraktats som vetenskapen av det som var sant, säkert och bestämt. Slumpen var kopplat till tron på saker såsom ödet och religion. Efter att Isaac Newton troddes ha visat att universum var deterministiskt, var idén att slumpen skulle spela någon betydelsefull roll i världen mycket främmande. Att citera en viss tysk fysiker: *God does not play dice*.

Så vad har förändrats? Varför skriva en matematisk uppsats om slumpen? Ok, låt oss anta att världen är deterministisk, och att vi med perfekt information kan räkna ut det som kommer att ske i framtiden. Låt oss nu betrakta en gas. I endast ett milligram av en typisk gas finns det 100.000.000.000.000 partiklar. Ni förstår problemet! För att förstå något så vardaglig som gas behöver vi statistiska metoder, och statistik är starkt kopplat till sannolikhet. Disciplinen för statistisk mekanik, som utvecklades av James Maxwell, Ludwig Boltzmann m.m. under 1800-talet applicerades med mycket framgång. Med det kunde vi äntligen förstå saker som gaser, värmeöverföring och även termodynamikens andra huvudsats¹.

Under 1900-talet började sannolikhetsteori formaliseras, med bidrag från matematiker som Andrei Kolmogorov. Han använde något som kallas för mätteori för att hantera sannolikheter av händelser då antalet möjliga utfall är oändligt. Till exempel, om jag väljer en boll slumpmässigt från en påse som innehåller 10 svarta bollar och 9 vita, känns det rimligt att chansen att plocka ut en svart boll är 10/19. Inga konstigheter! Men vad är chansen att slå en bullseye i dart? Pilen kan slå en av oändligt många punkter på darttavlan, och det finns oändligt många punkter i bullseyen. Klart att dividera oändlighet med oändlighet inte kommer att hjälpa oss här! Efter en stund kommer vi kanske på idén att dividera arean av bullseyen med arean av darttavlan. Det låter ju klokt! Det är det som mätteori låter oss göra, med all noggrannhet man förväntar sig av matematiken. Kolmogorov använde sedan teorin för att presentera sina axiom; vilka är grundläggande 'uppenbara' antaganden som görs (men inte kan bevisas), och på vilka resten av sannolikhetsteorin bygger.

Under 1940-talet gjordes mycket arbete med stokastiska processer, huvudtemat för projektet. Stokastisk betyder slumpmässig, och målet med studien av stokastiska processer är att kategorisera beteenden hos olika system som förändras slumpmässigt genom tiden. Detta gör att vi kan se mönster och förutsäga sannolikheten av vissa händelser, och det låter oss modellera saker som populationodynamik, förändringar i aktiepriser, och till och med hur rök och vätskor kommer att bete sig.

Men även 'enkla' sannolikheter kan vara kontraintuitivt. Till exempel, visste ni att på vilken fotbollsmatch som helst är chansen mer än 50 procent att två personer på plan (det finns 11 spelare i varje lag plus domaren, så 23 personer totalt) kommer att dela samma födelsedag? Häpnadsväckande, va?

Så med tanke på detta, tillsammans med mångfalden av och komplexiteten i stokastiska processer som finns i så många olika former och har så många olika tillämpningar, blir det inte så

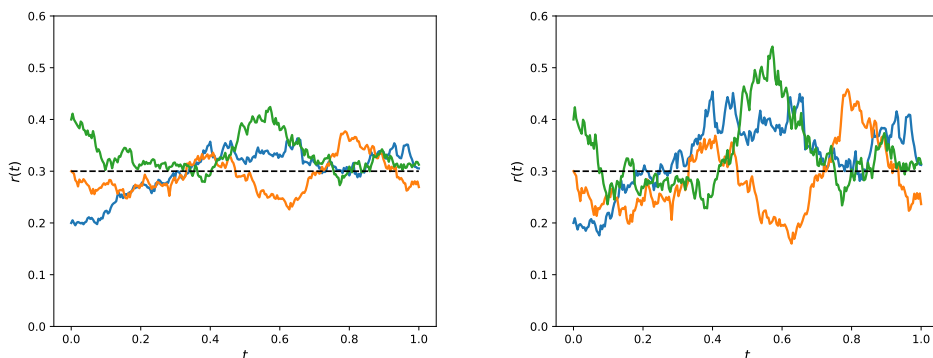
¹Termodynamikens andra huvudsats är regeln att ordnade system tenderar att bli mer kaotiska som tiden går. Applicerat på universum förklarar den varför knäckta ägg inte reformeras, bland annat. Dessutom motiverar den varför vi upplever att tiden går från dåtiden till framtiden; något Newtons ekvationer inte kan göra då de fungerar lika väl i båda tidsriktningar.

förvånande att ämnet kan vara överväldigande, även för matematikstudenter. Det är också ett fält som kräver ett brett spektrum av andra matematiska kunskaper, inklusive kalkyl, linjär algebra och topologi.

Vårt mål med detta projekt är att introducera studenter till simuleringar av stokastiska processer. I synnerhet tittar vi på stokastiska differentialekvationer. En deterministisk differentialekvation är en beskrivning av hur en viss kvantitet av något förändras beroende på själva kvantiteten. Till exempel, om det finns 1000 bakterier som reproducerar sig med en hastighet av 2 per bakterie varje timme, så är detta en differentialekvation. Första timmen kommer antalet bakterier att växa med 2000; andra timmen, kommer det växa med $2 \cdot (1000 + 2000) = 6000$, och så vidare; och mängden med vilken populationen växer under en viss timme beskrivs $2 \cdot p$, där p står för population.

Men naturligtvis skulle vi aldrig se en konstant ökningstakt för en population, och det skulle inte heller vara förutsägbart. Det är här stokastiska differentialekvationer kommer in: vi kan ta den deterministiska ekvationen ovan och ge förändringshastigheten en slumpmässig 'kick'. Och då en stokastisk differentialekvation beskriver något som förändras slumpmässigt genom tiden, är lösningen till den även en typ av stokastisk process. Slumpmässiga effekter kan simuleras med hjälp av datorer, för att sedan skapa modeller som tar hänsyn till slumpmässighet. I projektet använder vi dessa verktyg för att introducera stokastiska differentialekvationer och de grundläggande idéerna bakom ämnet. Vi ger också ett exempel på en tillämpning av stokastiska differentialekvationer inom finansvärlden: CIR-processen.

CIR-processen är ett finansiellt verktyg baserat på en stokastisk differentialekvation, som används för att prognostisera hur räntorna kan variera i framtiden. Man anger genomsnittsräntan, marknadsvolatiliteten (hur kraftigt räntorna tenderar att stiga eller sjunka) och spreadar (skillnaden mellan de lägsta och högsta tillgängliga räntorna). Låt oss ta en titt på ett exempel som ges i rapporten i kapitel 10.



(a) CIR-processen med $a = 3$, $b = 0.3$, $\sigma = 0.2$. (b) CIR-processen med $a = 3$, $b = 0.3$, $\sigma = 0.4$.

I varje graf finns tre färgade linjer som motsvarar tre möjliga utfall för räntorna. Grafens höjd i en viss punkt motsvarar räntesatserna, betecknade $r(t)$ på vänster sida av diagrammet, för tidpunkten t , som visas längst ner i diagrammet. Vänstra grafen är tydligt mindre flyktig än högra. Detta beror på att volatilitetsparametern (eller varians), σ , är dubbelt så hög som i vänstra grafen. Vi ser också att alla sex linjer i båda graferna tenderar att ligga runt medelvärdet 0.3. Varje linje ritas slumpmässigt, så vi får olika resultat varje gång. Men en intressant sak med dessa modeller är att vi fortfarande kommer att se samma mönster då linjerna ungefärligt kommer att följa den underliggande deterministiska delen av ekvationen (t.ex. behålla sig kring $b = 0.3$ i det här fallet); och variansen mellan olika linjer i en viss graf är ungefär lika, med en styrka som styrs av σ -värdet. Linjernas taggighet beror på stokastiska processen som används i många sådana modeller: Brownsk rörelse. Brownsk rörelse beskriver matematiskt många små oförutsedda förändringar, såsom rörelse av gaspartiklar eller 'brus', som det statistiska man kan höra på radion. Detta är också något vi kollar närmare på i projektet, och det är ett fascinerande objekt i sig själv!

Teorin om stokastiska processer är djup, intressant och ofta överraskande. Det är ett aktuellt ämne inom matematik och mycket forskning bedrivs. Så varför inte damma av dina matteböcker och ge det en chans? Vilket bättre sätt att tillbringa en kväll?

Sammanfattning

I detta projekt presenteras grundläggande teori inom studien av stokastiska differential ekvationer (SDE:er) samt ett urval av viktiga metoder för numerisk approximation av lösningar. Detta görs på ett praktiskt vis genom kapitel som ett efter ett presenterar grundläggande begrepp samt underbygger dessa med numeriska exempel. Till varje exempel ges en beskrivning i texten och Python-kod återfinns i bilagorna. Rapporten behandlar främst Euler–Maruyama-metoden för simulering av lösningar till SDE:er och resultat kopplade till denna. Till resultaten hör stark och svag konvergensordning samt linjär stabilitet. Konvergensordning studeras även för Milstein-metoden och därefter ges en presentation av den stokastiska kedjeregeln. För en djupare förståelse av bakomliggande teori i de numeriska exemplen ges även en beskrivning av Monte Carlo-metoder. Resultaten tillämpas inom finansiell matematik genom en studie av Cox–Ingersoll–Ross-processen för beskrivning räntors rörelser. I den första bilagan ges ytterligare en djupdykning i teorin genom en guide för intuitionen bakom den viktiga Itô-integralen.

Abstract

This project presents the basic theory behind stochastic differential equations (SDE's), along with a selection of important numerical methods for the approximation of solutions to stochastic differential equations. This is done in a practical way using chapters that build upon each other by introducing basic concepts that build upon one another, supported by numerical examples. Each example is described in the text and the accompanying Python code is found in the appendices. The report mainly concerns the Euler–Maruyama method, which is used to simulate solutions of SDE's, and topics connected to this. These topics include the strong and weak orders of convergence, as well as linear stability. The order of convergence is also studied for the Milstein method and a presentation of the stochastic chain rule is given. For a deeper understanding of the underlying theory in the numerical examples, Monte Carlo methods are described. The results are applied to an example taken from financial mathematics: the Cox–Ingersoll–Ross process, which is used for describing the changes of interest rates. In the first appendix, more details are given regarding intuition and theory behind the important Itô integral.

Innehåll

1	Inledning	1
2	Brownsk rörelse	1
3	Stokastiska integraler	2
4	Euler–Maruyama–metoden	4
5	Konvergens av Euler–Maruyama–metoden	5
6	Milstein–metoden	8
7	Linjär stabilitet	9
7.1	Linjär stabilitet för ODE	9
7.2	Linjär stabilitet för SDE	10
7.3	Linjär stabilitet för Euler–Maruyama–metoden	11
7.4	Stabilitet av Θ –metoden	12
7.4.1	Kvadratisk medelvärdesstabilitet för Θ –metoden	13
7.4.2	Asymptotisk stabilitet för Θ –metoden	13
8	Stokastiska kedjeregeln	14
9	Monte Carlo–metoden	15
10	Tillämpning inom finans: CIR–processen	17
11	Sammanfattning och vidare läsning	20
A	Intuition och teori bakom Itô–integraler	23
A.1	Introduktion	23
A.2	Bakgrund	23
A.3	Definition av Itô–integralen	24
A.3.1	Förberedelser	24
A.3.2	Hilbertrum av slumpvariabler	25
A.3.3	Mer om konvergens	27
A.3.4	Hilbertrum av stokastiska processer	28
A.3.5	Itô–integralen	29
A.3.6	Några viktiga egenskaper hos Itô–integralen	31
A.4	Avslutning och vidare läsning	32
B	Varsiansreduktion för Monte Carlo–metoden	33
C	Kod för kapitel 2	35
D	Kod för kapitel 3	36
E	Kod för kapitel 4	37
F	Kod för kapitel 5	39
G	Kod för kapitel 6	41
H	Kod för kapitel 8	43
I	Kod för kapitel 9	44
J	Kod för kapitel 10	47

1 Inledning

En differentialekvation där en eller flera av termerna är en stokastisk process kallas för en stokastisk differentialekvation (SDE). Dessa ekvationer härstammar från arbeten av bland annat Albert Einstein och Louis Bachelier och under 1940-talet utvecklade Kiyosi Itô ett sätt att integrera med avseende på stokastiska variabler, känt som Itô-integralen [21]. Under 1950-talet utvecklade Ruslan Stratonovich ett alternativ till Itô-integralen, känt som Stratonovich-integralen [40]. Till skillnad från Itô-integralen kan kedjeregeln från matematiskt analys appliceras på Stratonovich-integralen, däremot är Itô-integralen en martingal medan Stratonovich-integralen inte är det [43]. De båda integralerna har varit väsentliga för SDE:er och sedan dess har SDE:er integrerats allt mer inom områden som exempelvis kemi, biologi och finans [18].

Syftet med detta kandidatsarbete är att introducera läsaren till teorin bakom SDE:er, och att presentera några metoder som används för att lösa sådana problem numeriskt. Vi kommer även att ge mer detalj om specifika områden såsom konvergens av algoritmer och Monte Carlo-metoder. Under arbetet kommer vi att använda algoritmer för att illustrera vissa begrepp och för att stödja våra påståenden. Till slut kommer vi att visa, i detalj, en process som används inom finans för att modellera räntor.

Detta material riktar sig till studenter inom matematik eller liknande och förutsätter förkunskaper i sannolikhetsteori, analys och ett programmeringsspråk som Python eller Matlab. Huvudinspirationen för detta arbete är artikeln [18]. Alla algoritmer skrivs i Python-kod.

Rapporten är strukturerad på följande sätt. I kapitel 2 introduceras slumpvariabler, stokastiska processer och Brownsk rörelse. Kapitel 3 behandlar stokastiska integraler och framförallt Itô- och Stratonovich-integralen. I kapitel 4 presenteras Euler-Maruyama-metoden (EM-metoden) för simulering av lösningar till SDE:er. Därefter diskuteras två olika typer av konvergens av EM-metoden i kapitel 5. I kapitel 6 presenteras ytterligare en numerisk metod för simulering av lösningar till SDE:er: Milstein-metoden. Linjär stabilitet för EM-metoden diskuteras i kapitel 7. Kapitel 8 handlar om stokastiska kedjeregeln. Grunderna i Monte Carlo-metoderna presenteras i kapitel 9. Kapitel 10 behandlar Cox-Ingersoll-Ross-modellen (CIR), en modell för beskrivning av räntor. Till den som är intresserad ges i bilaga A mer bakgrund och teori bakom Itô-integraler. I bilaga B presenteras variansreduktion för Monte Carlo-metoden. Till den intresserade läsaren finns det Python-kod till några av de experiment som utförs i de återstående bilagorna.

2 Brownsk rörelse

Vi inleder med en kort introduktion till *stokastiska variabler* och *stokastiska processer*. En reell stokastisk variabel, eller slumpvariabel, är en mätbar funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, där Ω är ett utfallsrum och värdemängden är de reella talen. Vi har alltså en variabel vars värde beror av något slumpvist fenomen. Låt nu $Y(t)$ vara en slumpvariabel som beror kontinuerligt på $t \in \mathcal{T}$, parametermängden för den stokastiska variabeln. Vi kan då definiera en stokastisk process $Y = \{Y(t), t \in \mathcal{T}\}$, som en sekvens av slumpvariabler över någon parametermängd. För ett visst utfall $\omega \in \Omega$ samt $t \in \mathcal{T}$ kallar vi $Y(t, \omega)$ för en realisation av den stokastiska processen. Vi utesluter ofta ω ur notationen och låter därmed $Y(t)$ beteckna en slumpvariabel av Y i punkten t .

En viktig stokastisk process är den standardiserade Brownska rörelsen, även kallat standardiserad Wienerprocess. Vi låter $W = \{W(t), t \in [0, T]\}$ beteckna *Browsk rörelse* på intervallet $[0, T]$, för något $T > 0$. W är då en tidskontinuerlig stokastisk process över intervallet $\mathcal{T} = [0, T]$ som uppfyller följande krav:

1. Sannolikheten att $W(0) = 0$ är 1.
2. Slumpvariabeln $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$, för $0 \leq s < t \leq T$, det vill säga att varje inkrement följer en normalfördelning med väntevärde 0 och varians $t - s$.
3. $W(t) - W(s)$ och $W(v) - W(u)$ är oberoende slumpvariabler för $0 \leq s < t \leq u < v \leq T$.

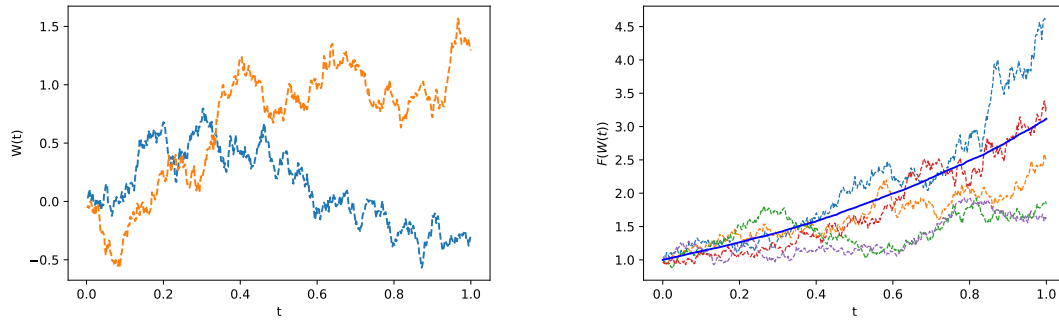
I praktiska sammanhang, och synnerligen i den här rapporten, är det ofta givande att betrakta en diskretiserad Brownsk rörelse. Vi låter därmed $W(t)$ vara definierad enligt ovan, men endast

i diskreta värden på $[0, T]$. Låt $\Delta t = T/N$ för något positivt heltal N , samt låt $t_j = j\Delta t$, där $j = 0, 1, \dots, N$. Enligt 2. ovan har vi att $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t-s}\mathcal{N}(0, 1)$, där $\mathcal{N}(0, 1)$ är den standardiserade normalfördelningen. Vi kan då skriva $W(t_j)$ som

$$W(t_j) = W(t_{j-1}) + dW_j, \quad (1)$$

där alla $dW_j \sim \sqrt{\Delta t}\mathcal{N}(0, 1)$ är oberoende stokastiska variabler enligt 3.

Ekvation (1) ger upphov till en iterativ metod för att simulera Brownsk rörelse genom att låta en pseudoslumptalsgenerator generera tal ur den standardiserade normalfördelningen. Dessa tal multipliceras med $\sqrt{\Delta t}$ och summeras sedan iterativt för att ge en serie som simulerar Brownsk rörelse. Figur 2a visar två realisationer av standardiserad Brownsk rörelse, simulerade enligt den iterativa metoden ovan, med $t \in [0, 1]$ samt $\Delta t = 1/500$. Vi kallar en sådan realisation för en diskret Brownsk väg. Koden för simuleringen återfinns i bilaga C.



(a) Två realisationer av standardiserad Brownsk rörelse simulerade enligt (1) på intervallet $[0, 1]$ med antalet tidssteg $N = 500$.

(b) Funktionen $F(W(t))$ för 5 individuella diskreta Brownska vägar (streckade), samt medelvärde över 1000 sådana vägar (heldragen, blå).

Figur 2: Simulation av Brownsk rörelse.

Brownsk rörelse kan även förekomma som variabel i en funktion. I figur 2b har vi använt (1) för att utvärdera funktionen $F(W(t)) = \exp(t + W(t)/2)$ längs 1000 diskreta Brownska vägar, i $N = 500$ tidssteg, för $t \in [0, 1]$. Figuren visar 5 sådana vägar samt medelvärdet av alla 1000². Koden för detta exempel finns i bilaga C.

3 Stokastiska integraler

Stokastiska integraler är fundamentet i stokastisk kalkyl och SDE:er. Sådana integraler används för att skapa modeller som tar hänsyn till osäkerhet. Då det i verkligheten kan finnas oräkneligt många slumpmässiga faktorer som påverkar ett visst resultat, ser vi varför Brownsk rörelse spelar en så viktig roll i kommande beräkningar. Som i kapitel 2 fixerar vi ett intervall $\mathcal{T} = [0, T]$. Vi påminner oss själva om att Riemannintegraler av typen $\int_0^T f(t) dt$, där f är en funktion som är kontinuerlig nästan överallt; kan definieras som gränsvärdet av Riemannsummorna

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)(t_{j+1} - t_j), \quad t_j = j \frac{T}{N}. \quad (2)$$

Ekvivalent kan vi även definiera Riemannsummorna på följande sätt, där funktionen f beräknas i mittpunkten av intervallet $[t_j, t_{j+1}]$ istället för vänstra ändpunkten:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{t_j + t_{j+1}}{2}\right)(t_{j+1} - t_j), \quad t_j = j \frac{T}{N}. \quad (3)$$

²Det är inte en slump att medelvärdet inte är 'taggigt', som de individuella vägarna är. Det går nämligen att visa analytiskt att medelvärdet av funktionen $F(W(t))$ är $\exp(9t/8)$.

Dessa definitioner tyder på en enkel och kraftfull metod för att lösa integraler numeriskt: välj något lämpligt heltal N och räkna ut summan i (2) eller (3) med motsvarande diskreta tidpunkter $(t_j)_{j=0}^N$.

På ett liknande sätt kan vi även definiera och approximerar stokastiska integraler. Här integrerar vi med avseende på Brownsk rörelse. De stokastiska motsvarigheterna till (2) och (3) i detta fall blir då

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)), \quad t_j = j\Delta t, \quad N \in \mathbb{Z}^+ : N\Delta t = T, \quad (4)$$

respektive

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{t_j + t_{j+1}}{2}\right)(W(t_{j+1}) - W(t_j)), \quad t_j = j\Delta t, \quad N \in \mathbb{Z}^+ : N\Delta t = T. \quad (5)$$

Notera att dessa gränsvärde är slumpvariabler. Definitionen av konvergens som används här är konvergens i *kvadratisk medelvärde*, där en följd av slumpvariabler $(X_N)_{N=1}^\infty$ i M , M ett metriskt rum; är konvergent om det finns X i M sådant att $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}((X_N - X)^2) = 0$. Förutom konvergens är en annan stor skillnad att (4) och (5) inte är ekvivalenta. Definition (4) kallas för en *Itô-integral*, som skrivs $\int_0^T f(t) dW(t)$, och definition (5) kallas för en *Stratonovich-integral*, som skrivs $\int_0^T f(t) \circ dW(t)$. Dessa två typer av integral antar olika värde och ger upphov till olika typer av stokastisk kalkyl. För att se ett exempel av detta: låt nu $f \equiv W$, där W är Brownsk rörelse som definieras i kapitel 2. Det kan visas att

$$\int_0^T W(t) dW(t) = \frac{W(T)^2 - T}{2}, \quad (6)$$

$$\int_0^T W(t) \circ dW(t) = \frac{W(T)^2}{2}. \quad (7)$$

För mer detaljer om hur likheterna ovan härleds, se [18, sida 531].

I bilaga D presenterar vi en algoritm som numeriskt löser dessa två integraler, där vi använder sluttiden $T = 1$, $N = 500$ tidsteg och steglängden $\Delta t = T/N = 1/500$. Vi börjar med att simulera den så kallade *integratorn*: $dW(t)$ och integratorn $W(t)$ med hjälp av en diskret Brownsk väg på samma sätt som vi gjorde i kapitel 2.

Till lösningen av Itô-integralen använder vi direkt summan i (4). För Stratonovich-integralen noterar vi först att

$$W\left(\frac{t_j + t_{j+1}}{2}\right) = \frac{W(t_j) + W(t_{j+1})}{2} + Z_j, \quad (8)$$

där varje Z_j är oberoende $\mathcal{N}(0, \Delta t/4)$. En sådan likhet är en typ av *Brownsk bro* [7]. Notera att både vänstra och högra sidan av (8) har väntevärdet 0 och varians $\Delta t(j + 1/2)$. Dessutom då summan av oberoende normalfördelade slumpvariabler också är en normalfördelad slumpvariabel ser vi att likheten håller. Genom att använda högra sidan av (8) slipper vi att generera och lagra så många slumpstal och vi får en enklare algoritm.

Då vi har tillgång till integralernas analytiska lösningar kan vi även ta reda på hur stort felet är i approximationerna. Vi beräknar absolutbeloppet av skillnaden mellan våra approximationer ovan och de riktiga värdena på integralerna.

För att kunna reproducera följande resultat har vi använt ett så kallat slumpstalsfrö³ i Python. Den gör att pseudoslumpstalsgeneratoren alltid använder samma vektor av tal från den simulerade $\mathcal{N}(0, 1)$ -fördelningen. Med godtyckligt valt slumpstalsfrö nummer 30, blir resultaten av approximationen ungefär -0.1262 för Itô-integralen, med ett fel av storleken 0.0200. Felet är ca 16% så stort relativt till approximationen. För Stratonovich-integralen får vi ca 0.4206, med ett fel av storleken 0.0268 som är ca 6% av approximationen⁴. Som förväntat ser vi att integralerna antar olika värde.

Itô- och Stratonovich-integralerna är mer eller mindre användbara än varandra beroende på sammanhanget. I resten av rapporten kommer vi att hålla oss till Itô-definitionen. Att fokusera

³'Random seed' på engelska.

⁴Notera att felet vi presenterar är också slumpvariabler, och vi kan inte göra någon bedömning om vilken approximation är mest precis baserat på endast ett resultat.

oss på detta sätt tillåter oss att ge mer detalj på de allmänna idéerna bakom SDE:er, och man kan alltid växla mellan Itô- och Stratonovich-integraler med hjälp av relationen

$$\int_0^T f(X(s)) \circ dW(s) = \int_0^T f(X(s)) dW(s) + \frac{1}{2} \int_0^T f'(X(s)) f(X(s)) ds.$$

Mer detaljer om vad menas med konvergens av slumpvariabler och stokastiska processer, tillsammans med en mer detaljerad definition av Itô-integralen och villkor på dess integrand som garanterar existens, ges i bilaga A.

4 Euler–Maruyama-metoden

Eulers metod minns vi är en iterativ procedur för att numeriskt lösa ordinära differentiellekvationer (ODE:er) [17, kapitel 9.3]. Den går ut på att approximera en given deriverbar funktion med hjälp av funktionens Taylorutveckling av första ordningen, kring en viss tidspunkt. En förlängning av denna metod är *Euler–Maruyama-metoden*, som används i det stokastiska fallet för att simulera approximativa lösningar till SDE:er.

Vi börjar med att definiera en SDE. Låt $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, och X_0 vara ett deterministiskt (icke-slumpmässigt) begynnelsevärde. Vi säger att stokastiska processen X på intervallet $[0, T]$ är en *lösning* till den skalära autonoma⁵ Itô-SDE:n

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(X(s)) ds + \int_0^t g(X(s)) dW(s), \quad (9)$$

om

1. Låt $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(t), t \in [0, t])$ vara en växande familj av mängder sådan att $\mathcal{F}(t_1) \subset \mathcal{F}(t_2)$ om $t_1 < t_2$, och där varje $\mathcal{F}(t)$ är en mängd av delmängder⁶ av alla möjliga utfall upp till tidpunkten t . Då är $X(t)$ $\mathcal{F}(t)$ -mätbar [19, sida 219]; det vill säga, värdet av $X(t)$ på tidpunkten t bestäms helt av all information som gäller processens historia från tidpunkten 0 till och med tidpunkten t .
2. $f \circ X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ och $g \circ X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ är element i H_{SP} (se bilaga A). Det vill säga, de är element i Hilbertrummet av reellvärda $\mathcal{F}(t)$ -mätbara stokastiska processer för vilka det gäller $\mathbb{E}(\int_0^T f(X(s))^2 ds) < \infty$. (Det kan visas att detta villkor implicerar att X är kontinuerlig. Se, till exempel, [1, sida 75] eller [12, sida 84]).

Analogt med ODE:er är det vanligt att skriva (9) i differentialform:

$$dX(t) = f(X(t)) dt + g(X(t)) dW(t), \quad X(0) = X_0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (10)$$

Observera att vi inte kan skriva $\dot{X}(t) = f(X(t)) + g(X(t)) dW(t)/dt$ som vi skulle med en ODE, då Brownsk rörelse inte är deriverbar. För att se detta betrakta figur 2a. Det taggiga mönstret vi ser delas av alla realisationer av Brownsk rörelse, och beteende fortsätter om vi ökar antalet steg i den diskreta approximationen och förstorar bilden av kurvan. Det vill säga funktionskurvorna av Brownsk rörelse är fraktala, där varje punkt kan ses som en spets där den vänster- och högerderivatan inte är lika⁷. Att W inte är deriverbar medför att $dW(t)/dt$ inte kan definieras. Dessutom, med $g \equiv 0$ och X_0 någon fixerad deterministisk konstant blir (10) en vanlig ODE av formen $dX(t)/dt = f(X(t))$.

För att applicera EM-metoden på (10) väljer vi först i hur många steg⁸, $L \in \mathbb{Z}^+$, vi vill att intervallet $[0, T]$ ska delas. Fler steg leder till en bättre approximation, men även högre kostnader i termer av beräkningstid och minne. Med $\Delta t = T/L$ och $t_j = j\Delta t$, låter vi X_j stå för vår approximation till slumpvariabeln $X(t_j)$. Då är EM-metoden

$$X_j = X_{j-1} + f(X_{j-1})\Delta t + g(X_{j-1})dW_j, \quad j = 1, \dots, L. \quad (11)$$

⁵Det vill säga; en endimensionell SDE som inte beror explicit på tidsvariabeln t .

⁶Familjen $\mathcal{F}$ kallas för en *filtrering*, och varje $\mathcal{F}(t)$ är en så kallad σ -algebra. Se definition A.1.

⁷Ett ordentligt bevis ges i [12, kapitel 3.4.2].

⁸Vi använder nu L då N används för antalet steg till vår fixerade simulering av Brownsk rörelse. Se koden, bilaga E.

Vi ser att följden $(X_j)_{j=1}^L$ definierad av (11) är en diskret stokastisk process som approximerar den kontinuerliga (10), på ett liknande sätt som Eulers metod approximerar en lösning till en ODE.

Vi tittar nu på ett exempel av en linjär SDE vars lösning kallas för geometrisk Brownsk rörelse:

$$dX(t) = \lambda X(t) dt + \mu X(t) dW(t), \quad X(0) = X_0. \quad (12)$$

En sådan ekvation är en del av Black–Scholes modellen som förekommer inom finans, där $X(t)$ beskriver en aktiekurs vid tiden t , och λ och μ är konstanter som beskriver den lokala genomsnittliga avkastningen, respektive volatiliteten av aktien. Vi återkommer till detta i kapitel 10.

Se bilaga E där vi approximerar en lösning till (12) med EM-metoden och parametrar $\lambda = 2$, $\mu = X_0 = 1$ och tidsintervallet $[0, 1]$. Vi simulerar först tio olika stickprov med hjälp av en implementation av EM-metoden, där vi använder $L = 256$ tidssteg och det faktum att alla slumpvariabler av formen dW_j är $\mathcal{N}(0, \Delta t)$ -fördelade. Sedan fixerar vi en simulering av Brownsk rörelse, och med denna och en ny algoritm approximerar vi ett stickprov tre gånger med varierande antal tidssteg $L_1 = 64$, $L_2 = 128$ och $L_3 = 256$. Här låter vi $R_i = 256/L_i$, $i = 1, 2, 3$ och

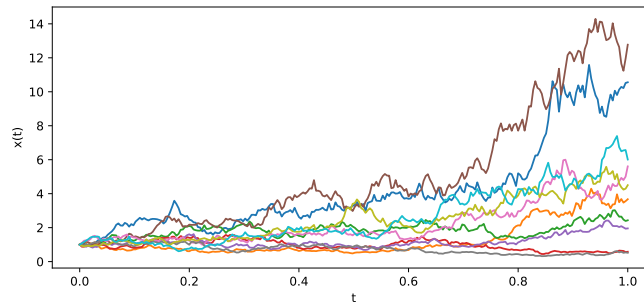
$$dW_{\text{inc}_i} = \sum_{k=jR_i+1}^{(j+1)R_i+1} dW_k, \quad j = 0, \dots, L_i - 1,$$

där dW_k är element från vår diskreta Brownska väg, dW_j . På detta sätt kan vi approximera samma SDE med samma fixerade Brownsk rörelse simulering, fast med olika antal steg.

Det kan visas [28, sida 105] att (12) har den exakta lösningen:

$$X(t) = X_0 \exp((\lambda - \mu^2/2)t + \mu W(t)), \quad (13)$$

som tillåter oss att beräkna felet hos approximationerna. Vi gör detta i andra algoritmen där vi fixerar en simulerad Brownsk rörelse och beräknar $|X_{L_i} - X(T)|$, $i = 1, 2, 3$. Vi får att felet vid $L_1 = 64$ steg är 0.1220, vid $L_2 = 128$ steg är 0.0514 och vid $L_3 = 256$ steg är 0.0092. Som vi hade förväntat oss ser vi att ett större antal steg leder till en bättre approximation.

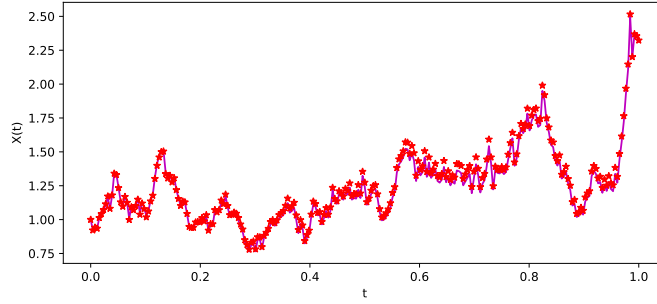


Figur 3: En implementation av EM-metoden: tio simuleringar av linjära SDE:n $dX(t) = 2X(t) dt + X(t) dW(t)$, $X(0) = 1$, med $L = 256$ tidssteg.

Till slut plottar vi våra tio olika stickprov som visar att man får olika resultat vid simulerade lösningar till (12), då varje lösning är en realisation av en stokastisk process. Se figur 3 nedan som illustrerar slumpmässigheten hos realisationerna. Vi har även plottat vår approximation med $L = 256$ steg mot den analytiska lösningen. I figur 4 noterar vi att EM-metoden ger en bra approximativlösning i detta fall.

5 Konvergens av Euler–Maruyama-metoden

Vi såg ovan att ett större antal tidssteg leder till en bättre approximation av lösningarna till en SDE. Då storleken på felet avgör hur användbar den numeriska metoden är i praktiken så är detta intressant att studera djupare. I synnerhet är frågan om hur felet beror på tidsstegets storlek av intresse; man talar då om metodens *konvergensordning*.



Figur 4: Approximation av en realisation av linjära SDE:n $dX(t) = 2X(t)dt + X(t)dW(t)$, $X(0) = 1$ med $L = 256$ tidsteg (röda stjärnor), plottat mot den analytiska lösningen (lila, heldragen). Approximationen ges av en implementation av EM-metoden baserad på (11), och analytiska lösningen ges av (13).

Vi vill mäta felet mellan X_j och $X(t_j)$ för något $t_j = j\Delta t \in [0, T]$ och $j = 0, 1, \dots, L$, då vi approximerar lösningen av (10) med EM-metoden. I det deterministiska fallet, då $g \equiv 0$ och X_0 är konstant, hade vi studerat skillnaden, $|X_j - X(t_j)|$, för att få en uppfattning om felet. I vårt fall är dock båda termerna, och därmed också skillnaden, slumpvariabler. Skillnaden $|X_j - X(t_j)|$ ger därför inte en konkret uppfattning för hur felet konvergerar och vi måste således bestämma hur felet i fråga ska mätas. Ett sätt att göra detta är att mäta medelvärdet av felet, $\mathbb{E}(|X_j - X(t_j)|)$, vilket ger upphov till konceptet *stark konvergens*. En metod sägs ha stark konvergensordning γ om det finns en konstant $C > 0$ sådan att

$$\mathbb{E}(|X_j - X(t_j)|) \leq C\Delta t^\gamma, \quad (14)$$

för godtyckligt $j = 0, 1, \dots, L$ sådant att $t_j = j\Delta t \in [0, T]$ och Δt tillräckligt litet. Det kan visas att EM-metoden har stark konvergensordning $\gamma = 1/2$ för passande funktioner f och g , [18]. Detta resultat för en SDE kan liknas vid det deterministiska fallet då $\gamma = 1$. Notera att en högre konvergensordning leder till snabbare konvergens då höger sida av (14) minskar då γ växer, eftersom Δt är litet. Resultatet ovan säger därför att den starka konvergens för EM-metoden är långsammare än för den deterministiska Euler-metoden.

I följande numeriska approximationer betraktar vi felet ovan i slutpunkten $t_L = T$. Låt detta fel, i stark mening, betecknas

$$e_{\Delta t}^{\text{strong}} := \mathbb{E}(|X_L - X(T)|), \quad (15)$$

och notera att om olikheten (14) gäller, med $\gamma = 1/2$, för godtyckligt $t_j \in [0, T]$ så gäller det speciellt i slutpunkten. För EM-metoden, har vi därmed

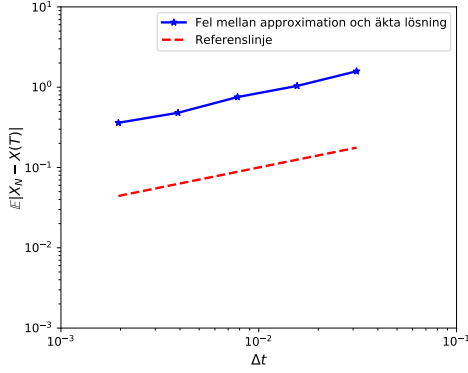
$$e_{\Delta t}^{\text{strong}} \leq C\Delta t^{1/2}, \quad (16)$$

för tillräckligt litet Δt .

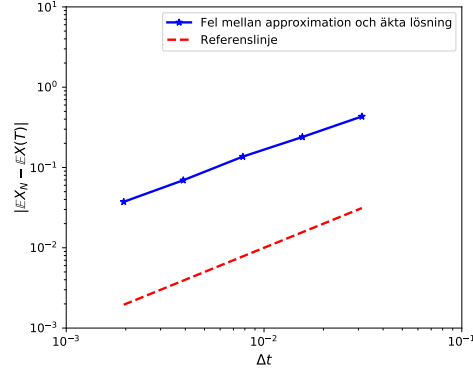
Vidare ska vi försäkra oss om att $\gamma = 1/2$ är den korrekta konvergensordningen genom en numerisk analys som presenteras i [18]. Vi studerar konvergens genom att simulera 1000 diskreta Brownska vägar och applicera EM-metoden på (12), med $\lambda = 2$, $\mu = 1$, samt $X_0 = 1$, för 5 olika steglängder Δt . Felet i slutpunkten för varje Brownsk väg och steglängd beräknas med hjälp av den exakta lösningen (13) och sparas i en matris `X_err`, som då har formen 1000×5 . Vi tar ett medelvärde över varje kolumn och sparar detta i `X_err_mean`, nu på formen 1×5 . Observera att om (16) gäller med ungefärlig likhet så kan vi ta logaritmen av vardera sida. Vi får då

$$\log e_{\Delta t}^{\text{strong}} \approx \log C + \frac{1}{2} \log \Delta t, \quad (17)$$

vilket innebär att om vi ritar upp `X_err_mean` mot Δt i ett diagram med logaritmisk skala längs x - och y -axeln, så ger lutningen av den resulterande grafen ett approximativt värde på konvergensordningen $\gamma = 1/2$. Se koden i bilaga F. I figur 5a visas resultatet av testet ovan, bredvid en



(a) Felet i stark mening och referenslinje med lutning 1/2.



(b) Felet i svag mening och referenslinje med lutning 1.

Figur 5: Felet för EM-metoden vid approximation av lösningar till (12), i slutpunkten $T = 1$, för olika värden på steglängden Δt .

streckad linje med lutning 1/2. Vi observerar att lutningen av de två graferna stämmer överens väl och tar därmed olikheten (16) som faktum hädanefter.

Den starka konvergensordningen i (14) är ett mått på hur snabbt ”medelvärdet av felet” i en tidspunkt minskar, då $\Delta t \rightarrow 0$. Ett alternativt sätt att se på felet är att mäta ”felet av medelvärdena”, vilket leder till konceptet *svag konvergens*. En metod sägs ha svag konvergensordning γ om det finns en konstant $C > 0$ så att, för alla funktioner p i någon klass,

$$|\mathbb{E}(p(X_j)) - \mathbb{E}(p(X(t_j)))| \leq C\Delta t^\gamma, \quad (18)$$

för godtyckligt $j = 0, 1, \dots, L$ sådant att $t_j = j\Delta t \in [0, T]$ samt Δt litet. Utan att gå in på detaljer låter vi $p(X) \equiv X$, alltså identitetsfunktionen. I enlighet med fallet stark konvergens så definierar vi nu felet, i svag mening, av EM-metoden i slutpunkten som

$$e_{\Delta t}^{\text{weak}} := |\mathbb{E}(X_L) - \mathbb{E}(X(T))|. \quad (19)$$

Det kan visas att EM-metoden har svag konvergensordning $\gamma = 1$, [18], vilket med hjälp av (18) ger

$$e_{\Delta t}^{\text{weak}} \leq C\Delta t, \quad (20)$$

för tillräckligt litet Δt .

Vi testar (20), se bilaga F, genom ett liknande numerisk exempel som för den starka konvergensordningen, med ett fåtal skillnader. Vi simulerar 500000 diskreta Brownska vägar och utför EM-metoden på (12), med samma parametervärden och startpunkt som tidigare, nu på alla vägar samtidigt för att förbättra beräkningstiden. Värdet av $\mathbb{E}(X_L)$ för varje steglängd sparas i vektorn $\mathbf{X_em}$ och det exakta värdet $\mathbb{E}(X(T))$ sparas i $\mathbf{X_true}$; vi får $\mathbf{X_err} = |\mathbf{X_em} - \mathbf{X_true}|$. Väntevärdet $\mathbb{E}(X(T))$ beräknas i sin tur från (13) genom att inse att

$$\mathbb{E}(e^{\mu W(t)}) = \mathbb{E}(e^{\mu \sqrt{t}Z}) = e^{\mu^2 t/2},$$

där $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Den första likheten gäller då $W(t) \sim \sqrt{t}\mathcal{N}(0, 1)$; den andra finner vi genom en enkel beräkning:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\mu \sqrt{t}Z}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu \sqrt{t}z} e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\mu \sqrt{t})^2/2 - (z - \mu \sqrt{t})^2/2} dz = \\ &= e^{\mu^2 t/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z - \mu \sqrt{t})^2/2} dz = e^{\mu^2 t/2}. \end{aligned}$$

Här har vi, i första steget, utnyttjat lagen om den omedvetna statistikern [9, Sida 213], och, i sista steget, det faktum att integranden är en täthetsfunktion $\varphi(Z)$ och $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) dz = 1$. Därmed har vi väntevärdet

$$\mathbb{E}(X(T)) = \mathbb{E}(e^{\lambda T} e^{-\mu^2 T/2} e^{\mu W(T)}) = e^{\lambda T} e^{-\mu^2 T/2} \mathbb{E}(e^{\mu W(T)}) = e^{\lambda T} e^{-\mu^2 T/2} e^{\mu^2 T/2} = e^{\lambda T}.$$

Resultatet av simuleringen ovan visas i figur 5b tillsammans med en referenslinje med lutning 1. Vi noterar att lutningen av simuleringen stämmer väl överens med referenslinjen.

Vi har nu sett två olika tolkningar av att mäta felet som fås när vi löser (12) med EM-metoden. Dessa var $\mathbb{E}(|X_j - X(t_j)|)$, som gav oss den starka konvergensordningen $\gamma = 1/2$, och $|\mathbb{E}(X_j) - \mathbb{E}(X(t_j))|$, som gav oss den svaga konvergensordningen $\gamma = 1$. I den senare tolkningen tar vi ett medelvärde av den numeriska lösningen X_j över alla diskreta Brownska vägar, vilket innebär att vi förlorar all information om individuella vägars fel. I den första tolkningen tar vi också ett medelvärde men här finns fortfarande implikationer för individuella vägar. Betrakta Markovs olikhet, se lemma A.1, som säger att för en given slumpvariabel Y med ändligt väntevärde samt $a > 0$, så gäller det för sannolikheten P att

$$P(|Y| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|Y|)}{a}.$$

Vi låter $Y = X_j - X(t_j)$, för godtyckligt $j = 0, 1, \dots, L$, samt $a = \Delta t^{1/4}$. Detta ger

$$P(|X_j - X(t_j)| \geq \Delta t^{1/4}) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_j - X(t_j)|)}{\Delta t^{1/4}} \leq C \Delta t^{1/4},$$

där vi använt (14) med $\gamma = 1/2$. Vi skriver om detta som

$$P(|X_j - X(t_j)| < \Delta t^{1/4}) \geq 1 - C \Delta t^{1/4},$$

och noterar då att felet i en given tidpunkt, för varje simulerad väg, är litet med sannolikhet nära 1. Det ska nämnas att konstanten C ovan kan variera stort mellan olika ekvationer vilket leder till olika krav på steglängden. Detta diskuteras vidare i kapitel 7.

6 Milstein-metoden

Genom att använda *Milstein-metoden* vid simulering av approximativa lösningar till SDE:er fås en högre stark konvergensordning än om vi hade använt EM-metoden [27]. För att erhålla Milstein-metoden används *Itô's lemma* och Taylorutveckling [13, Kapitel 6] för att få Itô-Taylorutveckling. Mer detaljer angående Itô's lemma finns i kapitel 8. Därefter trunkeas Itô-Taylorutvecklingen och då erhålls Milstein-metoden

$$\begin{aligned} X_j &= X_{j-1} + f(X_{j-1})\Delta t + g(X_{j-1})(W(t_j) - W(t_{j-1})) \\ &+ \frac{1}{2} g(X_{j-1})g'(X_{j-1})((W(t_j) - W(t_{j-1}))^2 - \Delta t), \quad j = 1, 2, \dots, L \end{aligned} \quad (21)$$

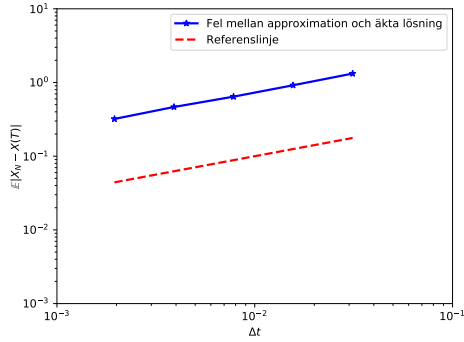
för SDE av typen (10). För mer detaljer angående härledningen av Milstein-metoden hänvisas läsaren till kapitel 6 av [14].

Jämför vi EM-metoden (11) med (21) ser vi att Milstein-metoden innehåller en extra term som syftar till att rätta till felet hos EM-metoden. Från kapitel 5 har vi att EM-metoden har stark konvergensordning $\gamma = 1/2$. Om vi istället använder Milstein-metoden kan vi öka den starka konvergensordningen till $\gamma = 1$, vilket vi kan se i figur 6. Milstein-metoden har samma svaga konvergensordning som EM-metoden, $\gamma = 1$, men är mer komplext och är därför inte lämplig att använda för svaga approximationer [27].

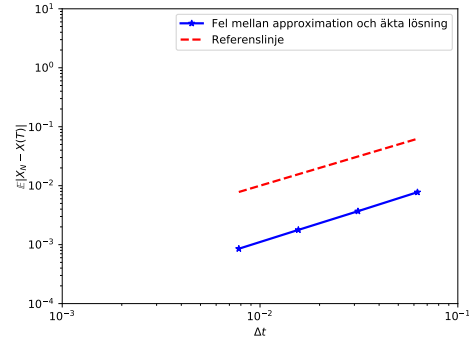
Låt oss nu studera SDE av typen

$$dX(t) = rX(t)(K - X(t))dt + \beta X(t)dW(t), \quad X(0) = X_0, \quad (22)$$

där K , r och β är konstanter. Denna SDE används inom populationsdynamik där X är populationsstorleken, K är ekosystemets bärförmåga, r är kvalitén på ekosystemet och β är storleken på



(a) Felet i stark mening för EM-metoden och referenslinje med lutning 1/2.



(b) Felet i stark mening för Milstein-metoden och referenslinje med lutning 1.

Figur 6: Felet för EM-metoden och Milstein-metoden vid approximation av lösningar till (22), i slutpunkten $T = 1$ för olika värden på Δt .

bullret i ekosystemet [43]. För en mer djupgående diskussion angående tillämpningen av SDE inom populationsdynamik rekommenderas [33]. I bilaga G finns koden för att använda Milstein-metoden till (22). I koden har vi låtit konstanterna få värdena $r = 2$, $K = 1$, $\beta = 1/4$ och $X_0 = 1/2$. Vi simulerar 500 diskreta Brownska vägar över $[0, 1]$ med $dt = 2^{-11}$. Steglängderna är $\Delta t = 16 dt$, $\Delta t = 32 dt$, $\Delta t = 64 dt$ och $\Delta t = 128 dt$. Vi använder $\Delta t = dt$ som en tillräckligt bra approximation på den exakta lösningen. Figur 6 visar felet för Milstein-metoden och som jämförelse visas även felet för EM-metoden.

7 Linjär stabilitet

Vi ska i detta avsnitt undersöka beteende för en SDE när $t \rightarrow \infty$. Vi inser att stark konvergens samt svag konvergens inte är relevant i dessa situationer eftersom konstanten C i (14) respektive (18), generellt, divergerar då $T \rightarrow \infty$. Istället går vi först in på lösningsmetoder för deterministiska ODE:er, där stabilitetsteori har utvecklats genom åren för att ge en insyn i hur numeriska metoder beter sig för fix steglängd när $t \rightarrow \infty$.

7.1 Linjär stabilitet för ODE

Vi sätter $g \equiv 0$ i (10) och betraktar den deterministiska ODE:n på formen

$$dX(t) = f(X(t)) dt, \quad X(0) = X_0.$$

För enkelhetens skull sätter vi $f(x) = \lambda x$ och betraktar den exakta lösningen för den linjära ODE:n

$$X(t) = X(0)e^{\lambda t}, \quad t \in [0, T], \quad (23)$$

där $X(0) = X_0$ är en konstant som ej är en slumpvariabel och $\lambda \in \mathbb{C}$ är en given parameter. Detta ger upphov till tre olika fall för den exakta lösningen till den linjära testekvationen (23). Vi ser att för fallet $\lambda < 0$ så är (23) stabil eftersom ekvationen går mot noll då t blir stort. För $\lambda = 0$ är (23) konstant, det vill säga lika med X_0 för alla t . För det tredje fallet då $\lambda > 0$ så är (23) inte stabil eftersom termen $e^{\lambda t} \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$.

Fortsättningsvis applicerar vi Eulers metod på (23) och får

$$X_{n+1} = (1 + \Delta t \lambda) X_n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (24)$$

vilken är stabil om $|1 + \Delta t \lambda| \leq 1$.

Fortsättningsvis har vi även implicita, eller baklänges, Eulers metod för den linjära testekvationen (23)

$$X_{n+1} = X_n + \lambda \Delta t X_{n+1} \iff X_{n+1} = \frac{1}{1 - \Delta t \lambda} X_n \quad (25)$$

för $1 - \Delta t \lambda \neq 0$. Vi ser att baklänges Eulers metod är stabil för $|1 - \Delta t \lambda| \geq 1$.

7.2 Linjär stabilitet för SDE

Att för den generella SDE:n (10) diskutera beteendet efter en lång tid är ingen enkel uppgift. Vi ska därför fokusera på testekvationen till den linjära SDE:n

$$dX(t) = \lambda X(t) + \mu X(t) dW(t), \quad X(0) = X_0, \quad 0 \leq t, \quad (26)$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ är givna parametrar och X_0 är ett givet startvärde som inte är en slumpvariabel.

Vi börjar med att definiera några begrepp som vi kommer att behöva. Låt $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vara ett fullständigt sannolikhetsrum⁹. Vi säger att en händelse A i $\mathcal{A}$ inträffar *nästan säkert* (n.s.) om $P(A) = 1$. Vidare definierar vi för (26) *kvadratisk medelvärdesstabilitet* som

$$\exists \delta > 0 : \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X(t)^2) = 0, \quad (27)$$

för alla $|X_0| < \delta$, samt *asymptotisk stabilitet* som

$$\exists \delta > 0 : \lim_{t \rightarrow \infty} |X(t)| = 0, \quad n.s. \quad (28)$$

för alla $|X_0| < \delta$, vilka enbart gäller för den exakta lösningen till linjära testekvationen. Vidare blir nödvändiga och tillräckliga villkor för kvadratisk medelvärdesstabilitet

$$\Re\{\lambda\} + \frac{1}{2}|\mu|^2 < 0, \quad (29)$$

och tillräckliga och nödvändiga villkor för asymptotisk medelvärdesstabilitet

$$\Re\{\lambda - \frac{1}{2}\mu^2\} < 0. \quad (30)$$

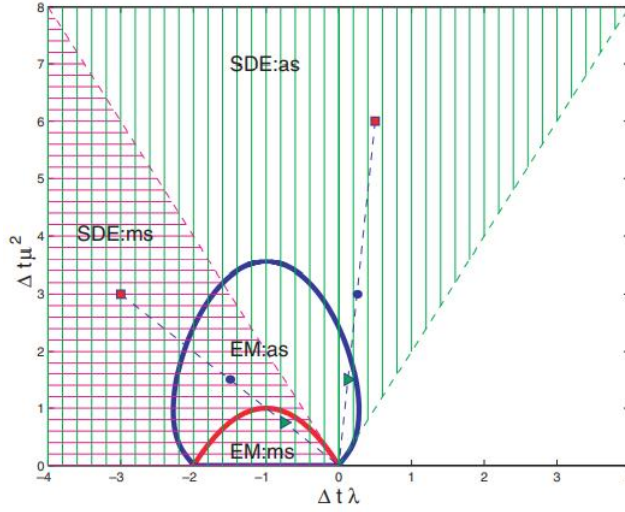
Vi ser också att om (29) gäller så gäller även (30) eftersom

$$\Re\{\lambda - \frac{1}{2}\mu^2\} = \Re\{\lambda\} - \frac{1}{2}(\Re\{\mu\}^2 - \Im\{\mu\}^2) \leq \Re\{\lambda\} + \frac{1}{2}(\Re\{\mu\}^2 + \Im\{\mu\}^2) = \Re\{\lambda\} + \frac{1}{2}|\mu|^2 < 0, \quad (31)$$

vilket gäller eftersom $\Re\{\mu\}^2$ och $\Im\{\mu\}^2$ är positiva konstanter.

För att visualisera kvadratisk medelvärdesstabilitet och asymptotisk stabilitet för lösning av linjär testekvation av SDE så observerar vi figur 7. Vidare betonar vi att för denna sektion är vi enbart intresserade av det grönstreckade området samt området med rutnät, resterande former och prickar i figur 7 kommer vi att diskutera i nästa sektion. Vi sätter $x = \Delta t \lambda$ och $y = \Delta t \mu^2$. Vi ser i figur 7 att asymptotisk stabilitet (28) för exakt lösning av den linjära testekvationen uppfylls då $y > 2x$, vilket illustreras av det vertikalt grönstreckade området och betecknas SDE:as. Vidare ser vi att definitionen kvadratisk medelvärdesstabilitet för exakt lösning av linjär SDE (27) uppfylls då $y < -2x$. Vi ser att området $y < -2x$ representeras i figur 7 av rutnätet med beteckning SDE:ms. Vi observerar även att området SDE:as i figur 7 inkluderar området SDE:ms, vilket överensstämmer med (31).

⁹Se definition A.3 samt avsnitt A.3.2 för mer information om sannolikhetsrum respektive fullständighet.



Figur 7: Regioner för kvadratisk medelvärdesstabilitet samt asymptotisk stabilitet. Bild tagen från [18, figure 6]

7.3 Linjär stabilitet för Euler–Maruyama–metoden

Fortsättningsvis är vi intresserade av stabilitet för numeriska lösningar av EM-metoden applicerat på linjära SDE:er (26), det vill säga vilken storlek steglängden Δt behöver ha för att vara stabil på liknande sätt som (27) och (28).

Vi börjar med ett exempel då EM-metoden är stabil i meningen av kvadratisk medelvärde. Egenskaper för väntevärde och (27) ger kvadratisk medelvärdesstabilitet för lösning av EM

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_j^2) = 0 \iff |1 - \Delta t \lambda|^2 + \Delta t |\mu|^2 < 1. \quad (32)$$

Vidare använder vi egenskaper för väntevärde och (28) vilket ger asymptotisk stabilitet för numerisk lösning av EM

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |X_j| = 0, \text{ n.s.} \iff \mathbb{E}(\ln |1 + \Delta t \lambda + \sqrt{\Delta t} \mu \mathcal{N}(0, 1)|) < 0. \quad (33)$$

Vi undersöker ett exempel för att kunna illustrera hur de olika måtten på stabilitet kan se ut. Vi börjar med att undersöka kvadratisk medelvärdesstabilitet för linjär SDE med EM-metoden, se (32). Vi löser (12) med $X_0 = 1$ över intervallet $[0, 20]$ och vi väljer parametrarna $\lambda = -3$ och $\mu = \sqrt{3}$. Vi ser att parametrarna λ och μ är valda så att de uppfyller (27)

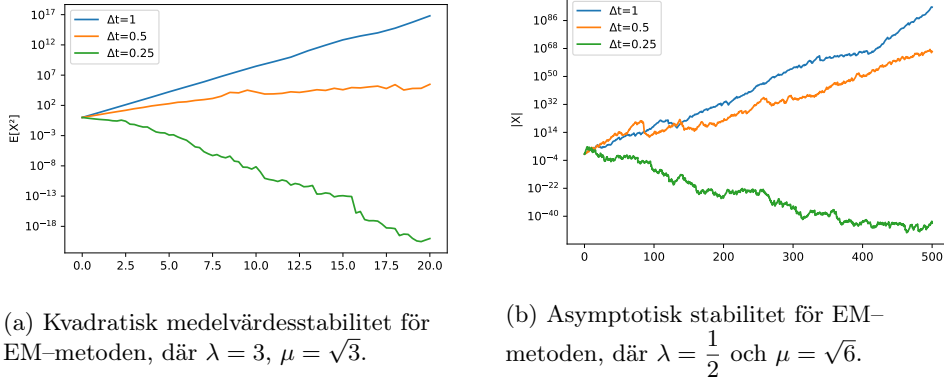
$$\Re\{\lambda\} + \frac{1}{2}|\mu|^2 = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} < 0,$$

vilket innebär att för ”rätt” steglängd så följer (32) eller (33). Vidare använder vi EM-metoden för att simulera 50000 diskreta Brownska vägar med steglängd $\Delta t = 1, 1/2, 1/4$. Vi noterar att enbart $\Delta t = 1/4$ kommer att uppfylla (32).

Figur 8a illustrerar kvadratisk medelvärde plottat mot t . Vi ser i figuren hur kurvorna med steglängd $\Delta t = 1, 1/2$ ökar med t , medan kurvan med $\Delta t = 1/4$ går mot noll. De tre kurvornas beteenden överensstämmer med teorin. Vi ser också i figur 8a att antalet Brownska vägar inte är tillräckliga eftersom de inte är rätta linjer.

Vi fortsätter exemplet genom att undersöka asymptotisk stabilitet för EM. Denna gång väljer vi att parametrisera med $\lambda = 1/2$ och $\mu = \sqrt{6}$. Vi ser att denna SDE inte uppfyller kvadratisk medelvärdesstabilitet enligt (27), men att den uppfyller asymptotisk stabilitet enligt (28). Eftersom asymptotisk stabilitet berör händelser med sannolikhet 1 så använder vi EM-metoden på enbart

en Brownsk rörelse för vardera steglängd $\Delta t = 1, 1/2, 1/4$ på intervallet $[0, 500]$. Vi ser i figur 8b att för enbart steglängden $\Delta t = 1/4$ så verkar EM-metoden bli litet när t närmar sig 500, vilket överensstämmer med teorin. Vi ser för steglängderna $\Delta t = 1, 1/2$ verkar växa sig stora när t närmar sig 500, vilket också överensstämmer med teorin.



Figur 8: I bilden till vänster simulerar vi 50000 Brownska vägar för att undersöka kvadratisk medelvärdesstabilitet för tre olika steglängder. I bilden till höger simulerar vi en Brownsk väg för att undersöka asymptotisk stabilitet för tre olika steglängder.

Vi avslutar exemplet genom att återigen betrakta figur 7, vilken illustrerar regioner av stabilitet för $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Figur 7 illustrerar kombinationer av värden på $\Delta t\lambda$, x -axeln, och $\Delta t\mu^2$, y -axeln. Vi har tidigare diskuterat de båda områdena som betecknas med SDE:as respektive SDE:ms. Nu ägnar vi även vår uppmärksamhet åt området inom den blå äggliknande kurvan som betecknas EM:as. Området som betecknas EM:as innehåller alla lösningar till EM-metoden som också är asymptotiskt stabila. Vidare har vi parabolen $-x(2+x)$, vilken representeras av den röda kurvan och området innanför betecknas EM:ms. EM:ms representerar, analogt till EM:as, lösningar till EM-metoden som är kvadratisk medelvärdesstabila.

Vi observerar att för givet värde på λ och μ så motsvarar beskrivningen punkten $(x, y) = (\lambda, \mu^2)$ steglängden $\Delta t = 1$. Vidare så rör man sig via den stråle som ansluter (λ, μ) med origo. Vi ser att för steglängd $\Delta t = 1$ så är våra tidigare parametreringar $p := (\lambda, \mu^2) = (-3, 3)$ och $q := (\lambda, \mu^2) = (1/2, 6)$ representerade som röda kvadrater i figur 7 och att de ligger i området SDE:ms respektive SDE:as. Vidare ser vi att för $\Delta t = 1/2$, som representeras av två blå prickar, så uppfyller p asymptotisk stabilitet för EM metoden, medan q inte uppfyller någon stabilitet för EM metoden. Slutligen ser vi att för $\Delta t = 1/4$ uppfyller p kvadratisk medelvärdesstabilitet (såväl som asymptotisk stabilitet) för EM-metoden, medan q uppfyller asymptotisk stabilitet för $\Delta t = 1/4$.

7.4 Stabilitet av Θ -metoden

Vi inleder denna sektion med en implicit version av EM-metoden som kallas baklänges EM-metoden

$$X_{n+1} = X_n + \lambda\Delta t X_{n+1} + \mu\Delta W_n X_n,$$

vilken här är applicerad på den linjära testekvationen (26). Vi ska nu diskutera Θ -metoden, som kan ses som ett mellanting av EM-metoden och baklänges EM-metoden

$$X_{n+1} = X_n + (1 - \Theta)\lambda\Delta t X_n + \Theta\lambda\Delta t X_{n+1} + \mu\Delta W_n X_n, \quad \Theta \in [0, 1], \quad (34)$$

där vi för enkelhetens skull i den här artikeln låter $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Vi inser att för $\Theta = 0$ så har vi EM-metoden och att för $\Theta = 1$ har vi baklänges EM-metoden.

Vi måste också tänka på när Θ -metoden är väldefinierad. Vi säger att värdet X_{n+1} kan beräknas under standardantaganden för koefficienterna till SDE:n.

7.4.1 Kvadratisk medelvärdesstabilitet för Θ -metoden

Vi fortsätter med att flytta över alla termer i (34) så att X_{n+1} hamnar i vänsterled och alla termer med X_n hamnar i högerled

$$(1 - \Theta\lambda\Delta t)X_{n+1} = (1 + (1 - \Theta)\lambda\Delta t)X_n + \mu X_n \Delta W_n. \quad (35)$$

Om vi dividerar båda led i (35) med $(1 - \Theta\lambda\Delta t)$, kvadrerar och tar väntevärdet så får vi

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \frac{(1 + (1 - \Theta)\Delta t\lambda)^2 + \Delta t\mu^2}{(1 - \Theta\Delta t\lambda)^2} \mathbb{E}(X_n^2),$$

för $1 - \Theta\Delta t\lambda \neq 0$. Vidare ser vi att Θ -metoden är kvadratisk medelvärdesstabil då

$$\frac{(1 + (1 - \Theta)\Delta t\lambda)^2 + \Delta t\mu^2}{(1 - \Theta\Delta t\lambda)^2} < 1 \iff \Delta t(1 - 2\Theta)\lambda^2 < -2(\lambda + \mu^2/2),$$

där $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Vidare undersöker vi tre fall. Vi kommer enbart att presentera resultat, detaljer som går bortom innehållet för den här artikeln kan ni finna i [41].

1. Givet $0 \leq \Theta < \frac{1}{2}$ så är den linjära SDE:n kvadratisk medelvärdesstabil om och endast om $\lambda + \mu^2/2 < 0$, och Θ -metoden är kvadratisk medelvärdesstabil om

$$\Theta < \frac{2|\lambda + \mu^2/2|}{(1 - 2\Theta)\lambda^2}.$$

Denna olikhet ger en restriktion på steglängd om man vill att Θ -metoden ska bli kvadratisk medelvärdesstabil.

2. Givet $\Theta = 1/2$ så är den linjära test-SDE:n kvadratisk medelvärdesstabil om och endast om Θ -metoden är kvadratisk medelvärdesstabil. Detta är den perfekta situationen.
3. Givet $1/2 < \Theta \leq 1$, om SDE:n är kvadratisk medelvärdesstabil så är Θ -metoden också det. Om ekvationen inte är kvadratisk medelvärdesstabil, så är Θ -metoden det för

$$\Delta t < \frac{2|\lambda + \mu^2/2|}{(2\Theta - 1)\lambda^2},$$

och därmed är Θ -metoden överstabil i det här fallet.

Att visualisera områden för kvadratisk medelvärdesstabilitet och asymptotisk stabilitet för Θ -metoden är ingen enkel uppgift och vi refererar till [41] för diskussion.

7.4.2 Asymptotisk stabilitet för Θ -metoden

För att undersöka asymptotisk stabilitet för Θ -metoden så skriver vi om så att $X_{n+1} = (a + b\xi_n)X_n$, där $\xi_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ är en slumpvariabel och

$$a := \frac{1 + (1 - \Theta)\Delta t\lambda}{1 - \Theta\Delta t\lambda}, \quad b := \frac{\sqrt{\Delta t}\mu}{1 - \Theta\Delta t\lambda},$$

för $1 - \Delta t\lambda \neq 0$. Vidare ser vi att

$$X_n = \prod_{j=0}^{n-1} (a + b\xi_j)X_0 \iff \log |X_n| = \log |X_0| + \sum_{j=0}^{n-1} \log |a + b\xi_j|. \quad (36)$$

Vi låter $m := \mathbb{E}(\sum_{j=0}^{n-1} \log |a + b\xi_j|)$ och använder de stora talens lag i stark form

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{j=0}^{n-1} \log |a + b\xi_j|}{n} - m \right) = 0, \quad n.s. \quad (37)$$

Vi får återigen tre fall där

1. Om $m < 0$, så $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum |a + b\xi_j| = -\infty$. Vi ser att $\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n| = 0$, *n.s.*
2. Om $m > 0$, så $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum |a + b\xi_j| = \infty$. Vi ser att $\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n| = \infty$, *n.s.*
3. Om $m = 0$ så kan man visa att $\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n| \neq 0$, *a.s.* enligt lagen om itererade logaritmer

Vi summerar och ser att Θ -metoden är asymptotiskt stabil om och endast om

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |X_n| > 0, \quad n.s. &\iff m < 0 \iff \mathbb{E}(\log |a + b\xi_j|) < 0 \\ &\iff \log |a| + \gamma(c) < 0, \end{aligned} \quad (38)$$

där $c := b/a$ är en given konstant och $\gamma(c) := \mathbb{E}(\log |1 + c\xi_j|)$ är en integral $\int_{-\infty}^{\infty} \dots dx$ som vi behöver approximera med kvadraturformel för att kunna visualisera. Att visualisera detta är ingen enkel uppgift och för en diskussion om detta, se [41].

8 Stokastiska kedjeregeln

I kapitel 3 såg vi att stokastisk kalkyl skiljer sig åt deterministisk kalkyl i att det finns två olika definitioner på integraler som ger olika resultat. En annan viktig skillnad gäller kedjeregeln.

Vi minns att i det deterministiska fallet, för deriverbara funktioner, säg V och X ; ger kedjeregeln oss

$$\frac{dV(X(t))}{dt} = \frac{dV(X(t))}{dX} \frac{dX(t)}{dt}. \quad (39)$$

Om $X(t)$ är en stokastisk process som löser Itô-SDE:n (10), vet vi från kapitel 4 att $dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t)$. Om vi nu sätter in detta uttryck i (39) och multiplicerar båda sidor med dt så får vi ut

$$dV(X(t)) = \frac{dV(X(t))}{dX} (f(X(t))dt + g(X(t))dW(t)). \quad (40)$$

Formel (40) verkar som en rimlig kandidat för den stokastiska kedjeregeln¹⁰, men tyvärr är det inte så. Den stokastiska kedjeregeln som vi är intresserade av är huvudresultatet av Itô-kalkylen: Itôs lemma¹¹, som ger oss att

$$dV(X(t)) = \left(f(X(t)) \frac{dV(X(t))}{dX} + \frac{1}{2} g(X(t))^2 \frac{d^2 V(X(t))}{dX^2} \right) dt + g(X(t)) \frac{dV(X(t))}{dX} dW(t). \quad (41)$$

Ett ordentligt bevis av detta är tekniskt och ligger utanför ramen för projektet ([1, kapitel 3.5] rekommenderas för den som är intresserad). Istället ger vi en heuristisk motivering som baseras på den icke-autonoma versionen av formeln i [5, kapitel 4].

Vi vet att en lokal approximation av $dV(X(t))/dX$ kring en viss punkt ges av dess trunkerade Taylorutveckling av andra ordningen. Detta leder oss till

$$dV(X(t)) \approx \frac{dV(X(t))}{dX} dX(t) + \frac{1}{2} \frac{d^2 V(X(t))}{dX^2} (dX(t))^2, \quad (42)$$

där vi vet enligt definition (10) att $dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t)$, som i sin tur implicerar att

$$(dX(t))^2 = f(X(t))^2 (dt)^2 + 2f(X(t))g(X(t))(dt)(dW(t)) + g(X(t))^2 (dW(t))^2.$$

¹⁰Formeln (40) ger faktiskt den stokastiska kedjeregeln för Stratonovich-kalkyl.

¹¹Kallas även för Itôs formel.

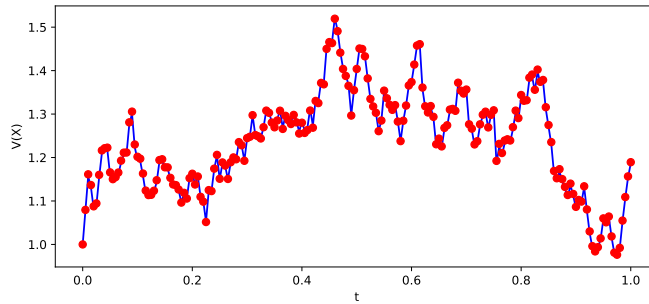
Enligt [5, kapitel 4] är det så att $(dt)^2$ och $(dt)(dW(t))$ är försumbara jämfört med dt , så att första två termerna ovan försvinner. Eftersom $\mathbb{E}((dW(t))^2) = dt$, $\text{Var}((dW(t))^2) = 2(dt)^2$, ser vi att variansen av slumpvariabeln $(dW(t))^2$ går mot noll snabbare än sitt väntevärde om $dt \rightarrow 0$. Ett sätt att tolka detta är att slumpvariabeln beter sig mer deterministiskt då tidsintervallet minskas, vilket motiverar likheten $(dW(t))^2 = dt$. Detta ger oss approximationen $(dX(t))^2 \approx g(X(t))^2 dt$. Vi substituerar in denna i sista termen av (42), och vi byter ut $dX(t)$ med $f(X(t))dt + g(X(t))dW(t)$. Efter lite algebraisk manipulation får vi ut Itôs formel (41).

Vi ska nu stödja (41) vidare med hjälp av ett numeriskt experiment. Betrakta SDE:n

$$dX(t) = (\alpha - X(t))dt + \beta\sqrt{X(t)}dW(t), \quad X(0) = X_0, \quad (43)$$

där $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ är konstanter. Den är en variant av Cox–Ingersoll–Ross-processen som tas upp i mer detalj i kapitel 10. Låt $V(X(t)) = \sqrt{X(t)}$. En applicering av (41) ger oss nu att

$$dV(X(t)) = \left(\frac{4\alpha - \beta^2}{8V(X(t))} \right) dt + \frac{1}{2}\beta dW(t). \quad (44)$$



Figur 9: EM-metod approximationer av $V(X(t)) = \sqrt{X(t)}$, där $dX(t) = (2 - X(t))dt + \sqrt{X(t)}dW(t)$, $X(0) = 1$ med givet Brownsk rörelse. Approximationen plottat med en blå hel-dragen linje är baserad på (43), och approximationen baserad på stokastiska kedjeregeln (se (44)) har plottats med röda prickar.

Se bilaga H där vi använder EM-metoden på SDE:n (43) med $\alpha = 2$, $\beta = 1$ och $X_0 = 1$. Först fixerar vi en simulering av Brownsk rörelse. Sedan tar vi kvadratroten av approximationen till SDE:n, som vi plottar mot en approximation av (44) med samma givna simulerade Brownsk rörelse. Kvadratroten ur $X(t)$ är väldefinierad i detta fall då $X_0 > 0$ och det kan visas att $P(X_0 > 0) = 1$ n.s. implicerar att $X(t) > 0$ för alla $t > 0$ [28, Kapitel 9.2]. Vi ser i figur 9 att det finns en bra överensstämmelse mellan dessa två metoder, som bekräftas när vi tar maxnormen av skillnaden mellan vektorerna som lagrar våra diskreta approximationer¹², och får 0.0161.

9 Monte Carlo-metoden

De numeriska exempel som har presenterats i tidigare kapitel har samma tillvägagångssätt som en Monte Carlo-metod då slumpvariabler har simulerats med en slumpgenerator och väntevärden har approximerats av beräknade medelvärden. Det är därför användbart att förstå grunderna i Monte Carlo-metoden [1]. I detta kapitel presenterar vi två olika grundläggande Monte Carlo-metoder. För att illustrera dessa metoder använder vi oss av ett återkommande exempel där vi implementerar Monte Carlo-metoderna för att erhålla en numeriskt approximation av $\pi/4$, vars värde är ungefär 0.78539816. Koden som används finns i bilaga I.

För att presentera Monte Carlo-metoderna på ett intuitivt sätt antar vi att vi vill approximera integralen

¹²Det vill säga, när vi mäter det största vertikala avståndet mellan en rödpunkt och den blåa linjen i grafen.

$$I = \int_0^1 f(x) dx, \quad (45)$$

där f är en reellvärd och kontinuerlig funktion som är definierad i $[0,1]$ med värden i intervallet $[0,1]$.

Den första Monte Carlo-metoden vi ska presentera kallas för *träff-miss-metoden*. Vi tar en sluten kvadrat med längden 1 som innesluter f . Sedan genererar vi slumpmässiga punkter i kvadraten och räknar antal punkter som ligger under grafen av f . För att åstadkomma detta låter vi X och Y vara oberoende slumpvariabler med en likformig sannolikhetsfördelning i intervallet $[0,1]$. Då är (X, Y) en tvådimensionell slumpvariabel och vi definierar Z som

$$Z = \begin{cases} 1, & Y \leq f(X), \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Alltså uppfyller Z villkoren för en Bernoullifördelning [30, Kapitel 2.2] och då är p , sannolikheten för $Z = 1$, ekvivalent med väntevärdet av Z . Parametern p är således

$$p = P(Z = 1) = P(Y \leq f(X)) = \int_{y \leq f(x)} dx dy = \int_0^1 \int_0^{f(x)} dy dx = \int_0^1 f(x) dx = \mathbb{E}(Z).$$

Detta innebär också att $p = \mathbb{E}(Z) = I$. Låt $(Z_k)_{k=1}^n$ vara oberoende och likafördelade slumpvariabler som uppför sig på samma sätt som Z . Genom att använda de stora talens lag [10, Kapitel 13] får vi följande konvergens nästan säkert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k = \int_0^1 f(x) dx, \quad (46)$$

vilket innebär att för fixt heltal n kan $1/n \sum_{k=1}^n Z_k$ användas för att få en approximation av (45).

Låt oss nu kolla på vårt exempel där vi approximerar $\pi/4$ med träff-miss-metoden. Vi låter antalet slumpvariabler vara $n = 10000$ och sedan genererar vi X och Y . Därefter räknar vi antalet variabler som uppfyller $X^2 + Y^2 \leq 1$ och medelvärdet av detta ger oss approximationen 0.7818. Vi får alltså ett fel på cirka $3.6 \cdot 10^{-3}$ och variansen är cirka $17 \cdot 10^{-2}$.

Den andra Monte Carlo-metoden vi ska presentera kallas för *medelvärdesmetoden* och går ut på att vi genererar n nummer likformigt från $[0,1]$ och tar genomsnittet. Först noterar vi att $\mathbb{E}(f(U)) = \int_0^1 f(x) dx$, där $U \sim \mathcal{U}(0,1)$. Låt $(U_k)_{k=1}^n$ vara en oberoende följd av slumpvariabler med likformig sannolikhetsfördelning. Genom att återigen använda de stora talens lag får vi att följderna av slumpvariabler konvergerar nästan säkert enligt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(U_k) = \int_0^1 f(x) dx. \quad (47)$$

Alltså kan vi, för fixt heltal n , använda $1/n \sum_{k=1}^n f(U_k)$ för att få en approximation av (45).

Nu återgår vi till vårt exempel där vi nu approximerar $\pi/4$ med medelvärdesmetoden. Först noterar vi att $\pi/4$ är arean av en fjärdedel av enhetscirkeln och då kan vi använda $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [0,1]$. Vi använder även här $n = 10000$ och genererar $(U_k)_{k=1}^n$, vilket ger oss approximationen 0.78508821 och felet $3 \cdot 10^{-4}$. Variansen är ungefär $5 \cdot 10^{-2}$.

Frågan som uppstår är då vilken av dessa två Monte Carlo-metoder som är bäst. Ett sätt att se vilken av dessa Monte Carlo-metoder som är bäst är att jämföra variansen för de båda metoderna. För träff-miss-metoden approximerar vi $\mathbb{E}(Z)$ med $1/n \sum_{k=1}^n Z_k$ och för medelvärdesmetoden approximerar vi $\mathbb{E}(f(U))$ med $1/n \sum_{k=1}^n f(U_k)$. Genom att använda Bienaymés sats [26, Kapitel 2] får vi

$$\text{Var} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k \right) = \frac{1}{n} \text{Var}(Z), \quad \text{Var} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(U_k) \right) = \frac{1}{n} \text{Var}(f(U)).$$

Detta innebär att vi endast behöver jämföra varianserna av Z och $f(U)$. För att beräkna variansen av Z använder vi att Z är en Bernoullifördelning där $p = \int_0^1 f(x) dx$. Detta ger oss

$$\text{Var}(Z) = p(1-p) = \int_0^1 f(x) dx - \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \geq \int_0^1 f(x)^2 dx - \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2,$$

där vi får den sista olikheten av att f har värden i intervallet $[0,1]$. Variansen av $f(U)$ är

$$\text{Var}(f(U)) = \mathbb{E}(f(U)^2) - \mathbb{E}(f(U))^2 = \int_0^1 f(x)^2 dx - \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2.$$

Vi har alltså $\text{Var}(f(U)) \leq \text{Var}(Z)$. Detta innebär att medelvärdesmetoden alltid har lägre eller samma varians jämfört med träff-miss-metoden och därmed är träff-miss-metoden aldrig bättre än medelvärdesmetoden.

I bilaga B presenteras några olika tekniker för att förbättra Monte Carlo-metoderna genom variansreduktion. För ännu mer detaljer gällande simulering med Monte Carlo-metoder, se [37] och [42].

10 Tillämpning inom finans: CIR-processen

Ett viktigt tillämpningsområde för de resultat vi hittills presenterat är finansiell matematik. I synnerhet används stokastiska differentialekvationer vid modellering av finansiella fenomen såsom rörelsen av aktie- och optionspris samt räntor. Se [35] för fler tillämpningar i mer detalj.

Vi upprepar ekvation (12) från kapitel 4,

$$dX(t) = \lambda X(t) dt + \mu X(t) dW(t), \quad X(0) = X_0,$$

där $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, W är en Brownsk rörelse, och X_0 är en slumpvariabel. Ekvationen används som beskrivits i Black-Scholes-modellen för att studera aktiepris över tid [6]. Den stokastiska process X som löser ekvationen kallas för *geometrisk Brownsk rörelse (GBR)* och besitter flera av de egenskaper vi förväntar oss från en modell över aktiepris, såsom endast positiva värden. Vi kallar hädanefter faktorn $\lambda X(t)$ för driftkoefficient och $\mu X(t)$ för diffusionskoefficient.

En annan modell som används flitigt inom finans är *Cox-Ingersoll-Ross-modellen (CIR)*, för beskrivning av räntors rörelse [8]. Modellen säger att räntan $r = \{r(t), t \in [0, T]\}$, är en stokastisk process som följer SDE:n

$$dr(t) = a(b - r(t)) dt + \sigma \sqrt{r(t)} dW(t), \quad r(0) = r_0, \quad (48)$$

där $a, b, \sigma \in \mathbb{R}$, $r_0 \geq 0$ är en slumpvariabel, och W igen avser Brownsk rörelse. Parametrarna a , b , och σ bestämmer beteendet hos processen. I driftkoefficienten $a(b - r(t))$ är b det värde som processen går mot över tid, medan a är relaterat till hur fort detta sker. I diffusionskoefficienten $\sigma \sqrt{r(t)}$ är σ relaterat till volatiliteten hos processen.

En kvalitativ skillnad mellan GBR och CIR-processen är kvadratroten i diffusionskoefficienten. Antag att vi vill simulera en CIR-process $r(t)$ för $t \in [0, T]$ med EM-metoden från kapitel 4, vi får

$$r_{j+1} = r_j + a(b - r_j) \Delta t + \sigma \sqrt{r_j} dW_{j+1}, \quad j = 0, \dots, L-1, \quad (49)$$

där $L \in \mathbb{N}$, $dW_{j+1} = W(t_{j+1}) - W(t_j)$ och r_j approximerar $r(t_j)$, med $t_j = j\Delta t$ och $\Delta t = T/L$. Kvadratroten i tredje termen medför att vi måste kunna garantera att $r_j \geq 0$, för $j = 0, \dots, L$, om varje steg ska vara väldefinierat. Det kan visas att

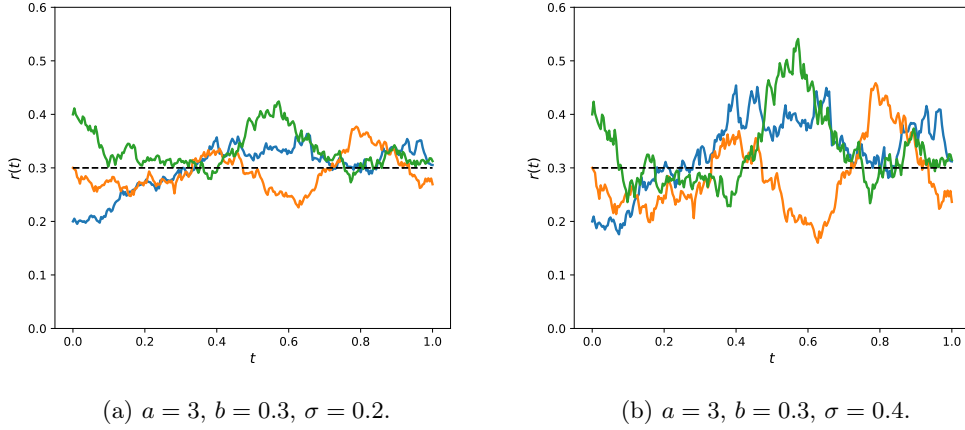
$$P(r(t) > 0, t \geq 0) = 1, \quad (50)$$

nästan säkert gäller om och endast om $2ab \geq \sigma^2$ [22, Kapitel 5]. Notera att (50) gäller den exakta processen $r(t)$ och kan ge en känsla för vilka parametrar som är användbara för modellering. Resultatet utesluter dock inte möjligheten att EM-metoden ger negativa värden och således odefinierade steg. Genom att simulera $M = 1000$ diskreta vägar över $t \in [0, 1]$ med (49) kan vi avbryta

när r_j blir negativt och räkna antalet gånger detta sker. För parametrarna $a = b = \sigma = 1$, samt $r_0 = 0.5$ blir värdet endast negativt för enstaka vägar. Med $\sigma = 2$ och resten oförändrat ger samma simulering däremot över 600 fall av negativa värden, alltså över 60% av vägar. För att undvika detta problemet kan vi uttrycka en *modifierad EM-metod* som

$$r_{j+1} = |r_j + a(b - r_j) \Delta t + \sigma \sqrt{r_j} dW_{j+1}|, \quad j = 0, \dots, L-1, \quad (51)$$

vilket garanterar $r_j \geq 0$ för alla $j = 0, \dots, L$ så länge $r_0 \geq 0$. Figur 10 visar realisationer av CIR-processen simulerade över $t \in [0, 1]$ enligt (51), för olika startvärden r_0 samt olika värden på σ . Se bilaga J för kod. Notera den ökade volatiliteten i 10b samt att varje väg i båda fallen svänger



Figur 10: CIR-processen simulerad med den modifierade EM-metoden för olika värden på σ samt olika startvärden r_0 .

kring värdet av parametern b . Det är här viktigt att vägar med samma startvärde r_0 simuleras med samma realisation av Brownsk rörelse, för att jämförelsen ovan ska kunna göras. Detta uppnås genom att välja samma slumpvalsfrö i båda simuleringarna.

För att se om den modifierade EM-metoden (51) approximerar (48) väl krävs det att vi kan jämföra med den verkliga lösningen, som vi gjorde för den geometriska Brownska rörelsen i figur 4. Detta visar sig vara problematiskt då det inte finns någon känd explicit lösning av (48). En exakt simulerad väg kan istället uppnås i ett ändligt antal punkter genom provtagning av en *icke-centrerad* χ^2 -fördelning. En algoritm för detta ges i [14, Kapitel 3.4] och återges som Pythonkod i bilaga J. Det ska nämnas att provtagningen och approximationen använder samma slumpvalsfrö för simulering av sina respektive psuedoslumptal. Detta är återigen en grundförutsättning för att vi kan kunna jämföra resultatet av denna typen av exempel. Figur 11 visar resultatet av en sådan provtagning i 512 tidssteg över $t \in [0, 1]$, samt en diskret väg simulerad enligt (51) i 256 tidssteg för $t \in [0, 1]$. Vi noterar att den modifierade EM-metoden verkar approximera den verkliga lösningen väl.

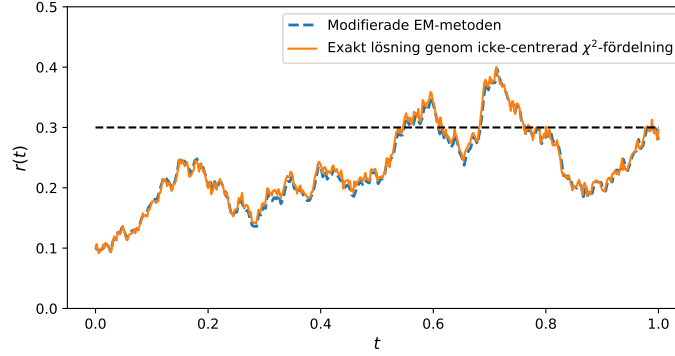
Ytterligare ett problem med EM-metoden för approximation av (48) är att det saknas starka stöd för att garantera att metoden konvergerar. I [4] studeras den starka konvergensen av den modifierade EM-metoden ovan på SDE:er med diffusionskoefficient på formen $|x|^\alpha$. Med $\alpha = 1/2$, som i (51), finner författarna att

$$\mathbb{E} \left(\max_{j=0, \dots, L} |r(t_j) - r_j|^{2p} \right) \leq C_p \Delta t^p,$$

där $\Delta t \leq 1/2$, $p \geq 1$, $C_p > 0$, och r_j som i (51) approximerar $r(t_j)$, $t_j = j\Delta t$, gäller om

$$\frac{2ab}{\sigma^2} > 1 + \sqrt{8} \max \left\{ \frac{\sqrt{a}}{\sigma} \sqrt{16p-1}, 16p-2 \right\}. \quad (52)$$

Det är uppenbart att (52) ställer hårda krav på parametrarna i (48) för att konvergens ska ske.



Figur 11: CIR-processen simulerad dels med den modifierade EM-metoden, dels genom provtagning av en icke-centrerad χ^2 -fördelning, med $a = 3$, $b = 0.3$, $\sigma = 0.4$, samt $r_0 = 0.1$.

Resultatet kan relateras till den starka konvergensen från kapitel 5 genom att inse att

$$\mathbb{E}(|r(t_i) - r_i|^{2p}) \leq \mathbb{E} \left(\max_{j=0, \dots, L} |r(t_j) - r_j|^{2p} \right) \leq C_p \Delta t^p, \quad (53)$$

för godtyckligt $i = 0, 1, \dots, L$ sådant att $t_i = i\Delta t$. Vi låter $p = 1$ och tar en kvadratrots för att erhålla

$$(\mathbb{E}(|r(t_i) - r_i|^2))^{1/2} \leq C \Delta t^{1/2},$$

där $C > 0$ är en konstant. Härnäst använder vi lemma A.2 som säger att $\mathbb{E}(|X|) \leq (\mathbb{E}(|X|^2))^{1/2}$ för godtycklig kvadratisk integrerbar slumpvariabel X . Detta ger att

$$\mathbb{E}(|r(t_i) - r_i|) \leq C \Delta t^{1/2},$$

vilket vi känner igen från (14) som definitionen av stark konvergensordning. Den modifierade EM-metoden applicerad på CIR-processen resulterar alltså i samma starka konvergensordning $\gamma = 1/2$ som vi erhöi i kapitel 5, givet att (52) är uppfylld.

En alternativ metod som syftar till att lösa problemen med EM-metoden presenteras i [11]. Metoden bygger på transformationen $Y(t) = \sqrt{r(t)}$ vilken genom Itô's formel (41) kan visas uppfylla SDE:n

$$dY(t) = \frac{\alpha}{Y(t)} dt + \beta Y(t) dt + \gamma dW(t), \quad Y(0) = Y_0,$$

där $\alpha = (4ab - \sigma^2)/8$, $\beta = -b/2$, $\gamma = \sigma/2$, och $Y_0 = \sqrt{r_0}$. Transformationen låter oss skriva en drift-implicit Euler-metod till SDE:n (48) för $t \in [0, T]$ som

$$Y_{j+1} = Y_j + \left(\frac{\alpha}{Y_{j+1}} + \beta Y_{j+1} \right) \Delta t + \gamma dW_{j+1}, \quad j = 0, \dots, L-1, \quad (54)$$

där $L \in \mathbb{N}$ och tidssteget $\Delta t = T/L$. Ekvation (54) har den unika lösningen

$$Y_{j+1} = \frac{Y_j + \gamma dW_{j+1}}{2(1 - \beta \Delta t)} + \sqrt{\frac{(Y_j + \gamma dW_{j+1})^2}{4(1 - \beta \Delta t)} + \frac{\alpha \Delta t}{1 - \beta \Delta t}}, \quad (55)$$

vilket, med transformationen $r_j = Y_j^2$, ger en positiv approximation av $r(t_j)$ för varje $j = 0, 1, \dots, L$.

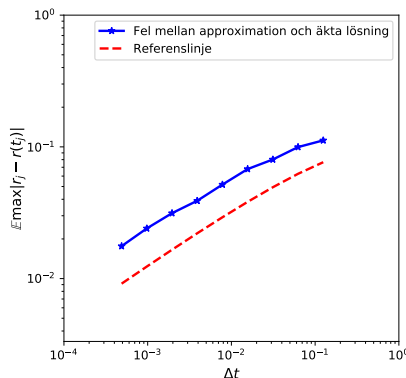
Vidare bevisar författarna satsen [11, Sats 1.1] som säger att då $2ab > \sigma^2$, $r_0 > 0$, och $T = L\Delta t > 0$ så gäller det för varje $1 \leq p < 2ab/\sigma^2$ att

$$\left(\mathbb{E} \left(\max_{j=0, \dots, L} |r(t_j) - r_j|^p \right) \right)^{1/p} \leq K_p \sqrt{|\log(\Delta t)|} \sqrt{\Delta t}, \quad (56)$$

där K_p är en konstant. Satsen ger resultat för konvergensen, då vi approximerar lösningar till (48) med metoden i (55), utan de hårda kraven som (52) ställde på parametrarna. Låter vi $p = 1$ kan

vi, genom samma resonemang som i (53), relatera detta till den starka konvergensordningen från kapitel 5, nu med en extra faktor i högerledet.

Genom ett liknande numeriskt exempel som i kapitel 5 kan vi försäkra oss om att detta gäller utan vidare bevis. Vi låter $p = 1$, $a = 3$, $b = 0.3$, $\sigma = 0.4$, $T = 1$, samt $r_0 = 0.1$ och utför $M = 1000$ simuleringar av (48), dels som exakt lösning $r(t)$, $t \in [0, T]$ genom en provtagning av en icke-centrerad χ^2 -fördelning, dels som approximativ lösning r_j , $j = 0, 1, \dots, L$ enligt metoden i (55). För varje simulering beräknas det största felet, $\max_{j=0, \dots, L} |r(t_j) - r_j|$. Detta görs för olika steglängder Δt och ett medelvärde tas över alla $M = 1000$ vägar för varje steglängd. Se koden för detta exemplet i bilaga J. Resultatet visas i en loglog-graf i figur 12. Figuren visar även en referenslinje med lutning enligt högerledet av (56); återigen ser vi att lutningen av graferna verkar stämma överens.



Figur 12: Konvergensgraf för den numeriska metoden (55) för CIR-processen. Figuren visar medelvärden av det största felet per väg mellan verklig lösning och approximation för olika steglängder (blå), samt en referenslinje med lutning enligt högerledet av (56) (röd, streckad). Approximationen är simulerad enligt (55) och den verkliga lösningen enligt en icke-centrerad χ^2 -fördelning.

11 Sammanfattning och vidare läsning

För en fullkomlig förståelse av stokastiska differentialekvationer och resultat relaterade till dessa krävs en gedigen grund inom sannolikhetsteori och stokastisk analys. Däremot har vi nu sett att man kan förstå de viktigaste resultaten och uppskatta värdet av dessa utan mer än Eulers metod och en intuition för slumpvariabler i ryggen.

Vi har introducerat SDE:er och EM-metoden som används för att approximera deras lösningar, och presenterat implementationer av metoden i Python. Med hjälp av numeriska experiment har vi visat att EM-metoden har stark och svag konvergensordning av $\gamma = 1/2$ respektive $\gamma = 1$. Vi har även kollat på Milstein-metoden, som använder en Itô-Taylorutveckling av andra ordningen för att förbättra starka konvergens jämfört med EM-metoden, vilket vi har bekräftat via ett numeriskt experiment. Vidare har vi tittat på enklare fall av stabilitet för exakt lösning av den linjära SDE:n, samt stabilitet när EM-metoden och Θ -metoden appliceras på testekvationen till den linjära SDE:n. Vi har härlett heuristiskt den stokastiska kedjeregeln och även motiverat den numeriskt. För att öka förståelsen bakom våra numeriska experiment har vi presenterat två grundläggande Monte Carlo-metoder. Slutligen har vi studerat simulering av Cox-Ingersoll-Ross-processen genom att identifiera problem med EM-metoden och därigenom motivera en ny metod för effektiv approximation av lösningar till just denna SDE.

Det finns naturligtvis mer att säga om numeriska simuleringar av SDE:er. Den intresserade läsaren hänvisas till [23], [29] och [20]. För den som är intresserad av stokastisk kalkyl och andra relaterade teoretiska aspekter finns det en genomgång av teorin bakom Itô-integralen och konvergens av slumpvariabler och stokastiska processer i bilaga A.

Referenser

- [1] E. ALLEN, *Modeling with Itô Stochastic Differential Equations*, Springer, 2007.
- [2] E. S. ALM AND T. BRITTON, *Stokastik: Sannolikhetsteori och statistikteori med tillämpningar*, Liber AB, Stockholm, 2008.
- [3] D. BENKO, *The Basel problem as a telescoping series*, The College Mathematics Journal, 43 (2012), pp. 244–250.
- [4] A. BERKAoui, M. BOSSy, AND A. DIOP, *Euler scheme for SDEs with non-Lipschitz diffusion coefficient: Strong convergence*, <http://dx.doi.org/10.1051/ps:2007030>, 12 (2008).
- [5] T. BJÖRK, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, 2019.
- [6] F. BLACK AND M. SCHOLES, *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, 81 (1973), pp. 637–654.
- [7] W. C. CHOW, *Brownian bridge*, Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics, 1 (2009), pp. 325–332.
- [8] J. C. COX, J. E. INGERSOLL, AND S. A. ROSS, *A theory of the term structure of interest rates*, Econometrica, 53 (1985), pp. 385–407.
- [9] M. H. DEGROOT AND M. J. SCHERVISH, *Probability and Statistics*, 4 ed., 2014.
- [10] F. M. DEKKING, C. KRAAIKAMP, H. P. LOPUHAÄ, AND L. E. MEESTER, *A Modern Introduction to Probability and Statistics: Understanding Why and How*, Springer, 2005.
- [11] S. DEREICH, A. NEUENKIRCH, AND L. SZPRUCH, *An Euler-type method for the strong approximation of the Cox–Ingersoll–Ross process*, Proceedings A, 468 (2011).
- [12] L. C. EVANS, *An Introduction to Stochastic Differential Equations*, American Mathematical Society, 2013.
- [13] G. FERRARO, *The Rise and Development of the Theory of Series up to the Early 1820s*, Springer, 2008.
- [14] P. GLASSERMAN, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, 2003.
- [15] G. GRIMMETT AND D. STIRZAKER, *Probability and Random Processes*, Oxford University Press, 2001.
- [16] GÖTEBORG: CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA, *Utformning av rapporter och kandidatarbetens skriftliga presentation för Civilingenjörsprogrammen vid Chalmers tekniska högskola*, 2008.
- [17] M. T. HEATH, *Scientific Computing: An Introductory Survey*, Mc Graw-Hill, 2002.
- [18] D. J. HIGHAM., *An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations*, SIAM Rev., 43 (2001), p. 525–546.
- [19] P. H. HWEI, *Schaum’s Outlines: Probability, Random Variables, and Random Processes*, McGraw-Hill Education, 2014.
- [20] S. M. IACUS, *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations*, Springer, 2008.
- [21] R. JARROW AND P. PROTTER, *A short history of stochastic integration and mathematical finance: The early years, 1880-1970*, Lecture Notes-Monograph Series, 45 (2004), pp. 75–91.
- [22] I. KARATZAS AND S. SHREVE, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, 1991.
- [23] P. E. KLOEDEN AND E. PLATEN, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer, 1999.

- [24] H. KUO, *Introduction to Stochastic Integration*, Springer, 2000.
- [25] A. LANG AND J. POTTHOFF, *Stochastic Simulation - An Introduction With Scilab*, 2012.
- [26] M. LOEVE, *Probability Theory I*, Springer, 1977.
- [27] V. MACKEVICIUS, *Introduction to Stochastic Analysis: Integrals and Differential Equations*, Wiley, 2011.
- [28] X. MAO, *Stochastic Differential Equations and Applications*, Horwood, Chichester, UK, 1997.
- [29] G. N. MILSTEIN, *Numerical Integration of Stochastic Differential Equations*, Springer, 1995.
- [30] K. NAJIM, E. IKONEN, AND A. DAOUD, *Stochastic Processes: Estimation, Optimisation and Analysis*, Butterworth-Heinemann, 2004.
- [31] K. NAKASHO, K. NARITA, AND Y. SHIDAMA, *The basic existence theorem of Riemann-Stieltjes integral*, Formalized Mathematics, 24 (2016), pp. 253–259.
- [32] S. OVCHINNIKOV, *Functional Analysis: An Introductory Course*, Springer International Publishing, Cham, 2018.
- [33] M. J. PANIK, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications in Population Dynamics Modeling*, John Wiley & Sons, 2017.
- [34] V. PAPADOPOULOS AND D. G. GIOVANIS, *Stochastic Finite Element Methods*, Springer International Publishing AG, 2018.
- [35] A. PAPANICOLAOU, *Introduction to stochastic differential equations (SDEs) for finance*, (2015).
- [36] W. RUDIN, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Education, 1976.
- [37] R. W. SHONKWILER AND F. MENDIVIL, *Explorations in Monte Carlo Methods*, Springer, 2009.
- [38] V. P. SINGH, S. K. JAIN, AND A. TYAGI, *Risk and Reliability Analysis - A Handbook for Civil and Environmental Engineers*, American Society of Civil Engineers (ASCE), 2012.
- [39] R. R. STOLL, *Set Theory and Logic*, Courier Corporation, 1979.
- [40] R. L. STRATONOVICH, *Theory Of Information And Its Value*, Springer, 2020.
- [41] T. LEVAJKOVIC AND D. COHEN, *Lecture Notes on Numerical Methods for Stochastic Differential Equations*, 2015.
- [42] N. T. THOMOPOULOS, *Essentials of Monte Carlo Simulation: Statistical Methods for Building Simulation Models*, Springer, 2013.
- [43] B. ØKSENDAL, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Springer, 2003.

A Intuition och teori bakom Itô-integraler

A.1 Introduktion

Vi ger en bakgrund till Itô-integraler genom att först introducera Riemann–Stieltjes integraler och begreppet total variation. Sedan motiverar vi Itô-integralen som en generalisering av Riemann–Stieltjes integralen, då den tillåter integration med avseende på Brownsk rörelse som är icke-deriverbar i alla punkter och som har obegränsad variation.

Till slut skisser vi en definition av Itô-integralen. Vi börjar med att definiera två olika Hilbertrum: ett som innehåller slumpvariabler, och ett som innehåller stokastiska processer. Vi ger tillräckliga villkor på integranden f för att f 's Itô-integral med avseende på Brownsk rörelse skall finnas. Vi definierar stokastiska stegfunktioner och deras stokastiska integraler, som sedan används tillsammans med villkoren på f för att definiera Itô-integralen. För en mer rigorös, men kanske mindre tillgänglig version av denna skiss, hänvisas läsaren till kapitel 1, 2 och 3 av [1], som A.3 baseras mest på.

A.2 Bakgrund

Fixera f och g som reellvärda begränsade funktioner definierade på ett begränsat och slutet intervall $[0, T]$, $T > 0$. Vi definierar en familj av partitioner av $[0, T]$ som $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = T$, där $t_i^{(n)} = i\Delta t^{(n)}$ och $\Delta t^{(n)} = T/n$.

En *Riemann–Stieltjes integral* är en generaliserad Riemannintegral som låter oss betrakta integraler av formen

$$\int_0^T f(t) g'(t) dt \quad (57)$$

då $g(t)$ inte är deriverbar. I så fall saknar differentialformen $g'(t) dt$ mening, och så vi istället skriver

$$\int_0^T f(t) dg(t). \quad (58)$$

Heuristiskt sett kan operatoren d nu tolkas som en generaliserad differentialoperator. Närmare sagt kan den ses som gränsfallet av *differensoperatoren* $\Delta(g)_i^{(n)} = g(t_i^{(n)}) - g(t_{i-1}^{(n)})$, där $n \rightarrow \infty$.

På ett liknande sätt som man talar om existensen av en Riemannintegral med hjälp av Riemannsummor, säger vi att en Riemann–Stieltjes integral existerar om och endast om det finns till varje $\varepsilon > 0$ en partition av $[0, T]$ som gör att

$$\left| \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta(g)_i \right| < \varepsilon, \quad (59)$$

där m_i , M_i är det minsta respektive det största värdet som f antar i intervallet $[t_{i-1}, t_i]$. Sådana värde finns då f är en begränsad funktion på en kompakt mängd.

Notera att med $g(t) = t$ ser vi att en Riemannintegral är ett specialfall av en Riemann–Stieltjes integral, och om g är deriverbar så tar (58) formen (57). Se [36, kapitel 6] för bevis av detta, och några satser som ger mer precisa villkor på f och g som garanterar existensen av (58). Ett vanligt krav på integratoren g är att den ska ha *begränsad variation* [31]. *Total variation* hos en funktion är en mått på hur mycket funktionens värde ändras under ett intervall. För funktionen g definieras det som

$$\sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})|,$$

där $\mathcal{P}$ är mängden av alla möjliga partitioner av $[0, T]$. Att g har begränsad variation betyder att värdet ovan är ändligt.

Antag att funktionen f är icke-negativ. Då kan man betrakta en endimensionell Riemannintegral av f som arean mellan f 's funktionkurva och t -axeln på en graf. Låt g vara en funktion av begränsad variation. Vi kan se det som att integranden skalas upp eller ner i varje punkt t med ett värde som bestäms av integratoren g . Ett annat och ekvivalent sätt att tänka på en Riemann–Stieltjes integral

är att integratorn g verkar på $[0, T]$. Till exempel, om $g(t) = 2t$ får vi att $d(2t) = 2 dt$, som vi kan tolka som att intervallet $[0, T]$ på grafen av f sträcks av g i varje punkt så att arean under f :s kurva fördubblas.

Vi tar ett exempel. Tänk att vi vill köpa aktier i ett företag. Vi bestämmer oss i förväg hur många vi vill köpa eller sälja vid alla tidpunkter $t \in [0, T]$. Låt $f(t)$ stå för antalet aktier vi äger, och låt $g(t)$ stå för värdet av en aktie vid tidpunkten t . Skulle funktionen g vara deriverbar kan vi beräkna vår total vinst/förlust över perioden genom integralen (57). Skulle g vara ickederiverbar men av begränsad variation kan vi istället använda integralen (58).

I verkligheten fluktuerar ett aktiepris på ett sätt som inte är helt förutsägbart. Sådant beteende kallas för *brus* som kan modelleras med hjälp av Brownsk rörelse, som introducerades i kapitel 2. För att ta hänsyn till bruset hos aktiepriset vill vi då integrera med avseende på Brownsk rörelse; det vill säga, i (58) vill vi kunna sätta $g(t) = W(t)$. För att göra detta måste vi först specificera vad menas med att integrera med avseende på en stokastisk process, och sedan måste vi också hantera konvergens då varje given realisation av en Brownsk rörelse är en ickederiverbar funktion med obegränsad variation¹³. Itô-integralen svarar på dessa frågor. Den är en generalisering av Riemann–Stieltjes integralen som låter båda f och g vara stokastiska processor, och som ger förutsättningar för att kunna garantera existensen av integralen då integratorn har obegränsad variation.

A.3 Definition av Itô-integralen

A.3.1 Förberedelser

Det finns olika sätt att tolka, definiera och räkna med slumpmässighet. Detta illustreras väl av den så kallad *Bertrands paradoxen* som presenteras på början av [12, kapitel 2.1]. Här betraktas problemet att bestämma sannolikheten att ett slumpmässigt valt linjesegment som går genom en cirkel av två tum radie, skulle träffa en mindre cirkel av en tum radie som har samma centrum. Det visar sig att det finns tre logiska sätt att hantera problemet och skatta sannolikheten, men dessa tre metoder ger olika resultat. Det är därför viktigt att definiera precist det man menar när man räknar med sannolikhet. Vi presenterar här de viktigaste begreppen som används för att beskriva så kallade sannolikhetsrum, och som gäller slumpvariabler definierade på dessa rum, som vi kommer att behöva i resten av kapitlet.

Låt ω vara ett utfall av ett slumpförsök, och Ω vara mängden av alla möjliga utfall. En delmängd av utfall, $A \subset \Omega$, kallas för en *händelse*.

Definition A.1 (σ -algebra). En σ -algebra av en mängd Ω är en familj, (som vi betecknar här med $\mathcal{A}$), av delmängder av Ω som har egenskaperna

1. $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$, där $\emptyset$ är den tomma mängden.
2. Om en mängd $A \in \mathcal{A}$ så är $A^C \in \mathcal{A}$, där A^C betecknar komplementet av A ; det vill säga $A^C = \Omega \setminus A$.
3. Om $(A_k)_{k=1}^\infty \in \mathcal{A}$ så är $\cup_{k=1}^\infty A_k \in \mathcal{A}$.

Definition A.2 (Sannolikhetsmått). En *sannolikhetsmått* är en funktion $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ som uppfyller

1. $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$.
2. För $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ gäller det att $P(\cup_{k=1}^\infty A_k) \leq \sum_{k=1}^\infty P(A_k)$.

Dessutom om mängderna $A_1, A_2, \dots$ är disjunkta, det vill säga $A_i \cap A_j = \emptyset$, för alla i, j där $i \neq j$; är det likhet som gäller i olikheten.

Definition A.3 (Sannolikhetsrum). Tripletten $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, där Ω är icke-tom, $\mathcal{A}$ är en σ -algebra av delmängder av Ω och P är ett sannolikhetsmått på $\mathcal{A}$ kallas för ett *sannolikhetsrum*.

Definition A.4 (Borelmängder). *Borelmängder* är element i den minsta σ -algebran av $\mathbb{R}$ som innehåller alla öppna mängder av $\mathbb{R}$. Denna σ -algebra betecknas $\mathcal{B}$.

¹³Se [12, kapitel 3.4.2] för bevis på att Brownsk rörelse är ickederiverbar och har obegränsad variation.

Definition A.5 (Slumpvariabel, $\mathcal{A}$ -mätbar och fördelningsfunktion). Låt $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vara ett sannolikhetsrum. Funktionen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kallas för en *slumpvariabel* om för varje $B \in \mathcal{B}$ gäller det att $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Ekvivalent kan man säga att X är $\mathcal{A}$ -mätbar. Att slumpvariabler är mätbara innebär speciellt att mängden $A_x = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Egenskapen låter oss definierar slumpvariabelns *fördelningsfunktion*: $F_x(x) = P(X \leq x)$.

Definition A.6 (Täthetsfunktion). En *täthetsfunktion* till en kontinuerlig slumpvariabel är en funktion f_X som för alla $A \in \mathcal{A}$ det gäller

$$P(A) = \int_{X(A)} f_X(t) dt.$$

Definition A.7 (Väntevärde). För en kontinuerlig slumpvariabel X med täthetsfunktion f_X definierar vi dess *väntevärde* som

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx.$$

Vi kommer även att behöva ett par av indikatorfunktioner. Första är en slumpvariabel som är indikatorfunktionen till händelsen $A \in \mathcal{A}$, som definieras

$$I_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases} \quad (60)$$

Notera att för denna slumpvariabel gäller det att $\mathbb{E}(I_A) = P(A)$.

Den andra indikatorfunktionen är definierat på ett intervall av formen $[t_i, t_{i+1}]$, där

$$I_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}, I_i(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_i, t_{i+1}], \\ 0 & \text{annars.} \end{cases} \quad (61)$$

A.3.2 Hilbertrum av slumpvariabler

Först fixerar vi ett sannolikhetsrum: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Vi behöver följande definition:

Definition A.8 (Enkel slumpvariabel). En *enkel slumpvariabel* är en ändlig linjärkombination av indikatorfunktioner som har formen

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^n c_i I_{A_i}(\omega)$$

där c_i är en reell koefficient, A_i är en händelse i $\mathcal{A}$ för $i = 1, \dots, n$, och I_{A_i} är indikatorfunktionen av formen (60) definierad på dessa mängder.

Sätt $S_{RV} := \{X : X \text{ är en enkel slumpvariabel definierad på } (\Omega, \mathcal{A}, P)\}$. Notera att S_{RV} är ett vektorrum. Låt X och Y vara element i S_{RV} . Vi definierar nu en inre produkt på S_{RV} som

$$\langle X, Y \rangle_{RV} = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n c_i I_{A_i} \sum_{j=1}^n d_j I_{B_j} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i d_j P(A_i \cap B_j).$$

Man kan enkelt visa att $\langle X, Y \rangle_{RV}$ uppfyller de tre axiomen som definierar en inre produkt:

1. **Linjäritet i första variabeln:** $\langle aX, Y \rangle = a\langle X, Y \rangle$ och $\langle X_1 + X_2, Y \rangle = \langle X_1, Y \rangle + \langle X_2, Y \rangle$.
2. **Symmetri:** $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$.
3. **Positiv definit:** $\langle X, X \rangle \geq 0$, $\langle X, X \rangle = 0$ implicerar att¹⁴ $X = 0$.

¹⁴Det skiljer sig åt något för oss i det stokastiska fallet, då $\langle X, X \rangle_{RV} = 0$ implicerar att $P(X = 0) = 1$; det vill säga, att $X = 0$ nästan säkert.

När vi har ett inre produktrum får vi automatiskt den så kallade 2-normen som är $\langle X, X \rangle^{1/2}$ [32, kapitel 7.1]. I vårt fall har vi då normen $\|X\|_{\text{RV}} = (\mathbb{E}(X^2))^{1/2}$, som i sin tur ger oss metriken (eller avståndet) $d(X, Y) = \|X - Y\|_{\text{RV}}$. Då alla $X \in S_{\text{RV}}$ är ändliga linjärkombinationer följer det direkt av definitionen av inre produkten ovan att $\|X\|_{\text{RV}} < \infty$ för alla $X \in S_{\text{RV}}$.

Låt nu $(X_n)_{n=1}^\infty$ vara en följd av element i S_{RV} . Om det finns ett element X i S_{RV} , och till varje $\varepsilon > 0$ finns det ett positivt heltal N sådant att $\|X_n - X\|_{\text{RV}} < \varepsilon$ för alla $n \geq N$, säger vi att följden $(X_n)_{n=1}^\infty$ är konvergent i S_{RV} . Alternativt kan man skriva $\|X_n - X\|_{\text{RV}} \rightarrow 0$ som $n \rightarrow \infty$. Notera att $(\mathbb{E}((X_n - X)^2))^{1/2} = \|X_n - X\|_{\text{RV}} \rightarrow 0$ om och endast om $\|X_n - X\|_{\text{RV}}^2 = \mathbb{E}((X_n - X)^2) \rightarrow 0$, och vi ser att konvergens i S_{RV} är ekvivalent med konvergens i kvadratisk medelvärde som tas upp i kapitel 3 och kapitel 7.

Det är så att S_{RV} inte är fullständigt för alla sannolikhetsrum; det vill säga att det finns något sannolikhetsrum vars tillhörande rum av slumpvariabler S_{RV} innehåller en Cauchyföljd [36, kapitel 3] som inte är konvergent. Vi illustrerar detta med ett exempel.

Exempel A.1. Betrakta slumpförsöket där vi slumpmässigt väljer ett tal från intervallet $[0, 1]$ enligt en likformig sannolikhetsfördelning. Sätt A_i = händelsen att $\omega \in [(i-1)/n, i/n]$. Vi definierar enkla slumpvariabeln

$$X_n(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{n}{i^2} I_{A_i}(\omega).$$

Notera att $\mathbb{E}(I_{A_i}) = P(A_i) = 1/n$. Med $n > m$ ser vi att

$$\begin{aligned} \|X_n - X_m\|_{\text{RV}} &= \mathbb{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n \frac{n}{i^2} I_{A_i} - \sum_{i=1}^m \frac{m}{i^2} I_{A_i} \right)^2 \right)^{1/2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{i^2} \\ &\leq \frac{\pi^2}{6} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{i^2}. \end{aligned}$$

Olikheten följer från faktum att $\sum_{i=1}^\infty 1/i^2 = \pi^2/6$, se [3]. Eftersom serien $\sum_{i=1}^m 1/i^2$ går mot $\pi^2/6$ då $m \rightarrow \infty$ ser vi att $(X_n)_{n=1}^\infty$ är en Cauchyföljd. Men gränsvärdet av Cauchyföljden är ju inte med i S_{RV} , då S_{RV} innehåller endast slumpvariabler som är linjärkombinationer av ett *ändligt* antal indikatorfunktioner, och om vi i X_n låter $n \rightarrow \infty$ får vi ju en *oändlig* linjärkombination.

Som man kan göra när man konstruera mängden av de reella talen från de rationella [39, s. 142-154], konstruerar vi ett Hilbertrum (ett inre produktrum som är fullständigt) H_{RV} genom att ta S_{RV} och lägga till alla gränsvärden av Cauchyföljder som saknas. Vi ger H_{RV} densamma inre produkt, norm och metrik som S_{RV} . Genom konstruktion vet vi att S_{RV} är tätt i H_{RV} , som betyder att till varje $X \in H_{\text{RV}}$ och $\varepsilon > 0$ finns det en $Y \in S_{\text{RV}}$ sådan att $\|X - Y\|_{\text{RV}} < \varepsilon$. Dessutom, då H_{RV} är ett normerat vektorrum vet vi att triangelolikheten $\|X + Y\|_{\text{RV}} \leq \|X\|_{\text{RV}} + \|Y\|_{\text{RV}}$ gäller för alla $X, Y \in H_{\text{RV}}$ [32, kapitel 2.1]. Triangelolikheten, tillsammans med faktum att normen är begränsad för alla $X \in S_{\text{RV}}$, som är tätt i H_{RV} , implicerar att $\|X\|_{\text{RV}} < \infty$ för alla $X \in H_{\text{RV}}$. Vidare, då H_{RV} är ett inre produktrum och $\|\cdot\|_{\text{RV}}$ är 2-normen, vet vi att Cauchy-Schwarz olikheten

$$|\langle X, Y \rangle_{\text{RV}}| \leq \|X\|_{\text{RV}} \|Y\|_{\text{RV}}, \text{ för alla } X, Y \in H_{\text{RV}} \quad (62)$$

gäller, där likheten implicerar att $Y = \alpha X$ för något $\alpha \in \mathbb{R}$ [32, kapitel 7.1].

Exempel A.2 (Exempel på ett viktat Hilbertrum). Låt $\Omega = \mathbb{R}$, och låt $\mathcal{A}$ vara σ -algebran genererad av intervaller av formen $(a, b]$ i $\mathbb{R}$. Fixera något $\mu \in \mathbb{R}$ och $\sigma > 0$. Sätt $P(A) = \int_A p(s) ds$, där täthetsfunktion

$$p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \frac{-(s - \mu)^2}{2\sigma^2}.$$

Låt S_{RV} vara inre produktrummet av enkla slumpvariabler på $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Inre produkten för X, Y i S_{RV} är

$$\langle X, Y \rangle_{\text{RV}} = \mathbb{E}(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} X(s)Y(s)p(s) ds.$$

Vi ser att slumpvariabeln definierad $X(x) = x$ är $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -fördelad enligt definitionen av en normalfördelning [2, definition 3.24], och att X är ett element i S_{RV} . Vi definierar H_{RV} som mängden av gränsvärden av alla Cauchyföljder i S_{RV} . Då är H_{RV} ett Hilbertrum av slumpvariabler definierade på $\mathbb{R}$ med normen

$$\|X\|_{RV}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} X(s)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \frac{-(s-\mu)^2}{2\sigma^2} ds.$$

A.3.3 Mer om konvergens

Vi vet från reell analys ([36, sats 3.2]) att en följd i ett metriskt rum, säg $(p_n)_{n=1}^{\infty}$, konvergerar mot högst en punkt. Dessutom om $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent mot punkten p kan vi skriva $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$. Då vi har definierat H_{RV} som ett metriskt rum, kan vi förvänta oss samma resultat i det stokastiska fallet? Svaret är 'nästan'. Vi ska motivera detta genom att visa att konvergens i kvadratisk medelvärde implicerar *konvergens i sannolikhet*:

$$X_n \rightarrow X \text{ i sannolikhet om } \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0, \text{ för alla } \varepsilon > 0, \quad (63)$$

där $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ är en följd av slumpvariabler och X är en slumpvariabel. Vi börjar med två lemmor som vi kommer att behöva.

Lemma A.1 (Markovs olikhet). *Låt X vara en slumpvariabel med ett begränsat väntevärde. Då gäller det för alla $a > 0$ att*

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.$$

Bevis. Låt A vara händelsen att $|X| \geq a$. Då har vi att $|X| \geq aI_A$, där I_A är indikatorfunktionen (60). Vi tar väntevärdet av båda sidor av olikheten och får

$$\mathbb{E}(|X|) \geq \mathbb{E}(aI_A) = a\mathbb{E}(I_A) = aP(A) = aP(|X| \geq a),$$

som bevisar lemmen. □

Lemma A.2. *Låt X vara en slumpvariabel och $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ en följd av slumpvariabler. Om $X_n \rightarrow X$ som $n \rightarrow \infty$ i kvadratisk medelvärde, implicerar det att X_n konvergerar mot X i medelvärde¹⁵, som definieras*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n - X|) = 0.$$

Bevis. Vi applicerar Cauchy-Schwarz olikheten (62) på slumpvariabeln $|X_n - X|$ och konstanten 1 och tar kvadraten av båda sidor. Vi får

$$(\mathbb{E}(|X_n - X|))^2 \leq \mathbb{E}(|X_n - X|^2)\mathbb{E}(1^2) = \mathbb{E}(|X_n - X|^2).$$

Från detta ser vi direkt att om $\mathbb{E}((X_n - X)^2)$ går mot noll, går även $(\mathbb{E}(|X_n - X|))^2$ mot noll, som i sitt tur implicerar att även $\mathbb{E}(|X_n - X|)$ mot noll, som bevisar lemmen. □

Sats A.1. *Om en följd av slumpvariabler $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot en slumpvariabel X i kvadratisk medelvärde, konvergerar även följden mot X i sannolikhet (se (63) för definitionen).*

Bevis. Vi får via lemma A.1 att

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_n - X|)}{\varepsilon}, \text{ för alla } \varepsilon > 0.$$

Vi ser då att för fixerat ε , som $\mathbb{E}(|X_n - X|) \rightarrow 0$ kommer även $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$, som visar att konvergens i medelvärde implicerar konvergens i sannolikhet. Men lemma A.2 ger oss att konvergens i kvadratisk medelvärde implicerar konvergens i medelvärde, och satsen följer. □

Sats A.2. *En följd $(X_n)_{n=1}^{\infty} \in H_{RV}$ konvergerar nästan säkert mot högst en slumpvariabel i H_{RV} .*

¹⁵Kallas även för stark konvergens. Se kapitel 5.

Bevis. Antag att $(X_n)_{n=1}^\infty$ konvergerar i kvadratisk medelvärde mot slumpvariablerna X och Y i H_{RV} . Då finns det till alla $\varepsilon > 0$ ett heltal N sådant att för $n > N$ det gäller

$$\begin{aligned}\|X - X_n\|_{\text{RV}} &< \varepsilon/2, \\ \|Y - X_n\|_{\text{RV}} &< \varepsilon/2.\end{aligned}$$

Av triangelolikheten får vi då att

$$\|X - Y\|_{\text{RV}} \leq \|X - X_n\|_{\text{RV}} + \|X_n - Y\|_{\text{RV}} < \varepsilon.$$

Men $\varepsilon > 0$ var godtyckligt valt, och så får vi att $\|X - Y\|_{\text{RV}} = 0$. Tag nu ett nytt $\varepsilon > 0$. På ett analogt sätt som i beviset av sats A.1 får vi att $P(|X - Y| > \varepsilon) = 0$. Då är $X = Y$ nästan säkert som visar satsen. $\square$

Notera att konvergens i kvadratisk medel är starkare än konvergens i sannolikhet, då det kan visas att konvergens i sannolikhet implicerar inte konvergens i kvadratisk medel.

Det är inte högst relevant till oss här, men det kan vara intressant att veta att det finns ytterligare två till typer av konvergens: *konvergens i fördelning*, som är svagare än de vi har sett hittills; och *nästan säkert konvergens*. Nästan säkert konvergens implicerar konvergens i sannolikhet, men implicerar inte konvergens i kvadratisk medelvärde, och är inte heller implicerad av konvergens i kvadratisk medelvärde. Ser [15, kapitel 7] för mer detaljer.

A.3.4 Hilbertrum av stokastiska processer

Här betraktar vi kontinuerliga stokastiska processer definierade på något intervall $[0, T]$ och sannolikhetsrum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. På ett analogt sätt som vi gjorde för ett Hilbertrum av slumpvariabler kommer vi att definiera ett inre produktrum av elementära stokastiska processer. Vi börjar med:

Definition A.9 (Enkel stokastisk process). En *enkel stokastisk process* är en slumpmässig stegfunktion $f : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i^{(n)}, \omega) I_i^{(n)}(t),$$

där $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = T$ är en familj av partitioner av $[0, T]$ som i avsnitt A.2, $f(t_i^{(n)}) \in H_{\text{RV}}$ för alla $t_i^{(n)}$, och $I_i^{(n)}$ är en indikatorfunktion av formen (61). Vi kräver att $n < \infty$.

Vi definierar nu inre produktrummet

$$S_{\text{SP}} := \{f : f \text{ är en enkel stokastisk process}\},$$

där inre produkten är

$$\langle f, g \rangle_{\text{SP}} = \int_0^T \mathbb{E}(f(t)g(t)) dt.$$

Som innan får vi via detta 2-normen

$$\|f\|_{\text{SP}} = \langle f, f \rangle_{\text{SP}}^{1/2} = \left(\int_0^T \mathbb{E}(f(t)^2) dt \right)^{1/2}.$$

Att alla $f(t_i^{(n)}) \in H_{\text{RV}}$ medför att $\|f(t_i^{(n)})\|_{\text{RV}} < \infty$ och $\|f(t_i^{(n)})\|_{\text{RV}}^2 = \mathbb{E}(f(t_i^{(n)})^2) < \infty$. Då n är ett ändligt heltal ser vi att

$$\|f\|_{\text{SP}}^2 = \int_0^T \mathbb{E}(f(t)^2) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(f(t_i^{(n)})^2)(t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}) < \infty,$$

för alla f in S_{SP} . På ett analogt sätt som i exempel A.1 kan det visas att S_{SP} inte är fullständigt genom att definiera en Cauchyföljd $(f_n)_{n=0}^\infty$, där man summerar fler och fler termer i summationen av definition A.9. Om vi låter $n \rightarrow \infty$ ser vi att Cauchyföljden inte konvergerar i S_{SP} , då enkla

stokastiska processer är ändliga summor. För att få ett fullständigt rum av stokastiska processer lägger vi till gränsvärdena av alla Cauchyföljder till S_{SP} . Precis som med H_{RV} har vi nu fått ett Hilbertrum för vilket triangel- och Cauchy-Schwarz-olikheten gäller, som vi kallar för H_{SP} . Rummet har samma inre produkt och norm som S_{SP} , som är tätt i H_{SP} . Vidare noterar vi att $\|f\|_{\text{SP}}^2 < \infty$ för alla $f \in S_{\text{SP}}$, som tillsammans med tätheten av S_{SP} i H_{SP} implicerar att $\|f\|_{\text{SP}}^2 < \infty$ för alla f i H_{SP} .

Påstående A.1. *Brownsk rörelse W är ett element i ett Hilbertrum av typen H_{SP} .*

Bevis. Vi börjar med att visa att för varje fix tidpunkt $t \in [0, T]$, $W(t)$ är ett element i Hilbertrummet H_{RV} som definierades i exempel A.2, med $\mu = 0$ och $\sigma = 1$. Fixera en t och låt $\eta_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ vara oberoende slumpvariabler för $i = 0, 1, 2, \dots$. Enligt *Karhunen-Loève* satsen¹⁶ har vi likheten

$$W(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{2T}}{(2i+1)\pi} \eta_i \sin\left(\frac{(2i+1)\pi t}{2T}\right).$$

Vidare ser vi att ändliga summan

$$S_n(t) = \sum_{i=0}^n \frac{2\sqrt{2T}}{(2i+1)\pi} \eta_i \sin\left(\frac{(2i+1)\pi t}{2T}\right)$$

är med i S_{RV} då den är en ändlig linjärkombination av $\mathcal{N}(0, 1)$ -fördelade slumpvariabler. Man kan visa att följderna $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ är en Cauchyföljd, och därför får vi att $W(t)$ är element i H_{RV} för alla $t \in [0, T]$.

Det återstår att visa att processen W är med i H_{SP} . Vi definierar en följd $(f_n)_{i=0}^{\infty}$ av enkla stokastiska processer som i definition A.9, där

$$f_n(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} W(t_i^{(n)}, \omega) I_i^{(n)}(t).$$

Det är klart att alla f_n är i H_{SP} , och vi ser att

$$\begin{aligned} \|f_n - W\|_{\text{SP}}^2 &= \int_0^T \mathbb{E} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (W(t) - W(t_i^{(n)})) I_i^{(n)}(t) \right)^2 dt \\ &= \int_0^T \sum_{i=0}^{n-1} (t - t_i^{(n)}) I_i^{(n)}(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^{(n)}}^{t_{i+1}^{(n)}} (t - t_i^{(n)}) dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(T/n)^2}{2} = \frac{T^2}{2n}. \end{aligned}$$

Då $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - W\|_{\text{SP}}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} T^2/(2n) = 0$, ser vi att $(f_n)_{i=0}^{\infty}$ konvergerar till W i H_{SP} , och påståendet är bevisat. $\square$

A.3.5 Itô-integralen

Vi betraktar integraler av formen $\int_0^T f(s) dW(s)$ och $\int_0^t f(s) dW(s)$. Dessa är avbildningar från H_{SP} till H_{RV} respektive från H_{SP} till H_{SP} . Notera att första integralen är en slumpvariabel och den andra är en stokastisk process.

Vi antar att integranden f är ett element i H_{SP} . Vidare antar vi att följande tre villkor gäller:

1. **Villkor (v1):** $f(0) \in H_{\text{RV}}$. Då, som vi såg i avsnitt A.3.2, är $\|f(0)\|_{\text{RV}}^2 = \mathbb{E}(f(0)^2) \leq k_1$ för något positivt konstant k_1 .
2. **Villkor (v2):** $\|f(t_2) - f(t_1)\|_{\text{RV}}^2 = \mathbb{E}((f(t_2) - f(t_1))^2) \leq k_2 |t_2 - t_1|$, k_2 något positivt konstant.

¹⁶Satsen säger oss att vissa stokastiska processer kan uttryckas som oändliga summor av ortogonala funktioner, genom att hitta en oändlig ortogonal bas av egenvektorer till processens kovariansfunktion, på ett sätt som liknar en Fourier-serier. Se [34, avsnitt 2.2.1] för mer detaljer.

3. **Villkor (v3):** f är en så kallad *anpassad process*.¹⁷ Det betyder att f är $\mathcal{F}(t)$ -mätbar, som diskuterades i krav 1 i definitionen på en lösning till en Itô-SDE, som gavs i kapitel 4¹⁸.

En viktig konsekvens av villkoren (v1) och (v2) är att $\|f(t)\|_{\text{RV}} \leq (k_2 T)^{1/2} + \|f(0)\|_{\text{RV}} < \infty$ för alla $t \in [0, T]$. Detta följer från triangelolikheten:

$$\|f(t)\|_{\text{RV}} = \|f(t) - f(0) + f(0)\|_{\text{RV}} \leq \|f(t) - f(0)\|_{\text{RV}} + \|f(0)\|_{\text{RV}} \leq (k_2 T)^{1/2} + \|f(0)\|_{\text{RV}},$$

och vi ser att varje slumpvariabel som fås genom att fixera en tidpunkt i $f(t)$ är begränsad i kvadratisk medelvärde. Tredje villkoret innebär speciellt att slumpvariabeln $f(t)$, för fixerad tidpunkten t , är oberoende av slumpvariabeln $W(t') - W(t)$ om $t' > t$. Då får vi från definitionen av två oberoende slumpvariabler [2, kapitel 3.8.3] och kravet 2 i kapitel 2 att $\mathbb{E}(f(t)(W(t') - W(t))) = \mathbb{E}(f(t))\mathbb{E}(W(t') - W(t)) = 0$.

Vi tar nu återigen en familj av partitioner av $[0, T]$ som definierades i avsnitt A.2, och indikatorfunktionen $I_i^{(n)}$ (61) på alla delintervall i partitionerna. Sätt

$$f_n(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i^{(n)}(\omega) I_i^{(n)}(t), \quad (64)$$

där alla $f_i^{(n)}$ är element i H_{RV} för vilka villkoret (v3) gäller. Vi definierar nu den stokastiska integralen för stegfunktionen f_n .

Definition A.10 (Stokastisk integral av en stegfunktion). För anpassade processen $f_n \in S_{\text{SP}}$, som är en stokastisk stegfunktion av formen (64), definierar vi integralen

$$I(f_n) = \int_0^T f_n(s) dW(s) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i^{(n)} dW_i^{(n)},$$

där $dW_i^{(n)} = W(t_{i+1}^{(n)}) - W(t_i^{(n)})$.

Att $W \in H_{\text{SP}}$ implicerar att $\|W\|_{\text{SP}} < \infty$, som i sitt tur implicerar att $\|dW_i^{(n)}\|_{\text{RV}} < \infty$, för alla i och n . Då får vi att alla slumpvariabler $f_i^{(n)} dW_i^{(n)}$ är begränsade i normen och därför med i H_{RV} . Detta gör att integralen $I(f_n)$ är en summa av ändligt många slumpvariabler i H_{RV} , som innebär att $I(f_n) \in H_{\text{RV}}$. Dessutom har vi att kvadratisk medelvärde av $I(f_n)$ är lika med normen i kvadrat av den stokastiska processen f_n :

$$\|I(f_n)\|_{\text{RV}}^2 = \mathbb{E} \left(\left(\sum_{i=0}^{n-1} f_i^{(n)} dW_i^{(n)} \right)^2 \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \|f_i^{(n)}\|_{\text{RV}}^2 \Delta t^{(n)} = \int_0^T \mathbb{E}(f_n(t)^2) dt = \|f_n\|_{\text{SP}}^2, \quad (65)$$

där andra likheten följer av att $dW_i^{(n)}$ är oberoende av varandra, att $\mathbb{E}(dW_i^{(n)}) = 0$ enligt krav 3 i kapitel 2, och kovariansen $\text{Cov}(W(t_{i+1}^{(n)}), W(t_i^{(n)})) = \mathbb{E}((W(t_{i+1}^{(n)}) - \mathbb{E}(W(t_{i+1}^{(n)}))) \cdot (W(t_i^{(n)}) - \mathbb{E}(W(t_i^{(n)})))) = \mathbb{E}(W(t_{i+1}^{(n)})W(t_i^{(n)})) = \min(t_{i+1}^{(n)}, t_i^{(n)}) = t_i^{(n)}$, [19, kapitel 5.7].

Tag nu ett element $f \in H_{\text{SP}}$ som uppfyller villkoren (v1)-(v3). Vi definierar följderna $(f_n)_{n=0}^\infty \subset S_{\text{SP}}$ genom

$$f_n(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i^{(n)}, \omega) I_i^{(n)}(t).$$

Noterar att stegfunktionen f_n approximerar stokastiska processen f på samma sätt som en Riemannsumma av en funktion approximerar arean under funktionskurvan. Villkoret (v2) ger oss att

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_{\text{SP}}^2 &= \int_0^T \mathbb{E}((f(t) - f_n(t))^2) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^{(n)}}^{t_{i+1}^{(n)}} \mathbb{E}((f(t) - f_n(t))^2) dt \\ &\leq k_2 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^{(n)}}^{t_{i+1}^{(n)}} (t - t_i^{(n)}) dt = \frac{k_2}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{T}{n} \right)^2 = \frac{k_2 T^2}{2n}. \end{aligned}$$

¹⁷'Adapted' eller 'nonanticipatory' process på engelska.

¹⁸En fullständig förståelse kräver ganska mycket mätteori. En bra sammanfattning med mer detaljer ges på [12, s. 65].

Detta visar att $f_n \rightarrow f$ i H_{SP} som $n \rightarrow \infty$, då storleken på $\Delta t^{(n)}$ minskas och antalet delintervall n ökas, som leder till en förfining av approximationen av f . Då varje konvergent följd är även en Cauchyföljd [36, sats 3.11], vet vi att $(f_n)_{n=0}^\infty$ är en Cauchyföljd i S_{SP} . Speciellt ger detta oss att

$$\|I(f_m) - I(f_n)\|_{\text{RV}}^2 = \|f_m - f_n\|_{\text{SP}}^2 \rightarrow 0 \text{ som } m, n \rightarrow \infty,$$

där likheten följer från en applicering av (65). Nu ser vi att $(I(f_n))_{n=1}^\infty$ är en Cauchyföljd i H_{RV} vars gränsvärde måste också finnas i H_{RV} . Detta leder oss till följande definitioner.

Definition A.11 (Itô-integral av formen $\int_0^T f(t) dW(t)$). Låt $f \in H_{\text{SP}}$ och anta att (v1)-(v3) gäller för f . Då definierar vi *Itô-integralen* $I : H_{\text{SP}} \rightarrow H_{\text{RV}}$, $I(f) = \int_0^T f(t) dW(t)$ som

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T f_n(t) dW(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i^{(n)})(W(t_{i+1}^{(n)}) - W(t_i^{(n)})),$$

där $t_i^{(n)} = iT/n$ och konvergens sker i H_{RV} .

Definition A.12 (Itô-integral av formen $\int_0^t f(s) dW(s)$). Låt $f \in H_{\text{SP}}$ och antar att (v1)-(v3) gäller för f . Då definierar vi *Itô-integralen* $I : H_{\text{SP}} \rightarrow H_{\text{SP}}$, $I(f)(t) = \int_0^t f(s) dW(s)$ som

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f_n(s) dW(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(s_i^{(n)})(W(s_{i+1}^{(n)}) - W(s_i^{(n)})),$$

för alla $t \in [0, T]$, där $s_i^{(n)} = iT/n$ och konvergens sker i H_{RV} .

A.3.6 Några viktiga egenskaper hos Itô-integralen

Likheten (65) är ett viktigt resultat som kallas för den *Itô-isometrin* [43, lemma 3.1.5]. Det innebär att Itô-integralen är en isometri; det vill säga den är en avbildning $I : H_{\text{SP}} \rightarrow H_{\text{RV}}$ som bevarar avstånd. Närmare sagt gäller det för alla f, g i H_{SP} att $\|I(f) - I(g)\|_{\text{RV}} = \|f - g\|_{\text{SP}}$. Som vi såg används resultatet för att definiera Itô-integraler som gränsvärdet av Cauchyföljder i H_{RV} . Dessutom kan det användas för att beräkna variansen hos en Itô-integral. Vi bevisar nu två till viktiga egenskaper hos Itô-integralen.

Sats A.3 (Martingalegenskap). *Stokastiska processen $I(f) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$I(f)(t) = \int_0^t f(s) dW(s), \quad 0 \leq t \leq T,$$

är en martingal med avseende på filtreringen $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(t), t \in [0, T])$. Det betyder att $\mathbb{E}(|I(f)(t)|) < \infty$ för alla t i $[0, T]$, och om $r < t$, gäller det att betingade väntevärde¹⁹ $\mathbb{E}(I(f)(t)|\mathcal{F}(r)) = I(f)(r)$.

Bevis. Vi har redan sett att Itô-integraler är begränsade i väntevärdet. Det återstår att visa att $\mathbb{E}(I(f)(t)|\mathcal{F}(r)) = I(f)(r)$ för alla r, t i $[0, T]$, $r < t$.

Låt $I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n)$, där $I(f_n)$ är Itô-integralen av en stokastisk stegfunktion enligt definition A.10. Vi ser att

$$\mathbb{E}(I(f_n)) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f_i^{(n)} dW_i^{(n)}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(f_i^{(n)})\mathbb{E}(W(t_{i+1}^{(n)}) - W(t_i^{(n)})) = 0, \quad (66)$$

då vi vet att varje slumpvariabel $f_i^{(n)}$ är oberoende av $dW_i^{(n)}$ och $\mathbb{E}(W(t_{i+1}^{(n)}) - W(t_i^{(n)})) = 0$. Dessutom ger lemma A.2 oss att

$$|\mathbb{E}(I(f) - I(f_n))| \leq \mathbb{E}(|I(f) - I(f_n)|) \leq (\mathbb{E}((I(f) - I(f_n))^2))^{1/2} = \|I(f) - I(f_n)\|_{\text{RV}}. \quad (67)$$

¹⁹Se [19, kapitel 5.8] för mer om martingaler, filtreringar och betingade väntevärde.

Välj ett godtyckligt $\varepsilon > 0$. Faktum att $(I(f_n))_{n=1}^\infty$ konvergerar mot $I(f)$, tillsammans med (66) och (67), betyder att det finns ett N sådant att $n > N$ implicerar

$$|\mathbb{E}(I(f))| \leq |\mathbb{E}(I(f) - I(f_n))| + |\mathbb{E}(I(f_n))| < \varepsilon.$$

Då ε valdes godtyckligt har vi att $|\mathbb{E}(I(f))| = 0$.

Vi kollar nu närmare på betingade väntevärdet. Vi har för godtyckliga r, t i $[0, T]$, $r < t$, att

$$\mathbb{E}(I(f)(t)|\mathcal{F}(r)) = \mathbb{E}(I(f)(t) - I(f)(r) + I(f)(r)|\mathcal{F}(r)) = \mathbb{E}(I(f)(t) - I(f)(r)) + I(f)(r) = I(f)(r),$$

ty

$$\mathbb{E}(I(f)(t) - I(f)(r)) = \mathbb{E}(I(f)(t)) - \mathbb{E}(I(f)(r)) = 0$$

som följer av att $|\mathbb{E}(I(f))| = 0$, och

$$\mathbb{E}(I(f)(r)|\mathcal{F}(r)) = I(f)(r),$$

då $I(f)$ är en anpassad process. □

Sats A.4 (Kontinuitetsegenskap). *Itô-integralen $I(f)(t)$ är nästan säkert kontinuerlig med avseende på tidsvariabel t . Speciellt betyder detta att nästan alla av dess realisationer är kontinuerliga funktioner på intervallet $[0, T]$.*

Bevis. Tag t_1, t_2 i $[0, T]$, $t_1 < t_2$. Itô-isometrin (65) och villkor (v1) och (v2) i avsnitt A.3.5 ger oss att

$$\begin{aligned} \|I(f)(t_2) - I(f)(t_1)\|_{\text{RV}}^2 &= \mathbb{E} \left(\left(\int_{t_1}^{t_2} f(s) dW(s) \right)^2 \right) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbb{E}((f(s))^2) ds \\ &\leq 2 \int_{t_1}^{t_2} \mathbb{E}((f(s) - f(t_1))^2) ds + 2 \int_{t_1}^{t_2} \mathbb{E}(f(t_1)^2) ds \\ &\leq k_2(t_2 - t_1)^2 + 2|t_2 - t_1| \|f(t_1)\|_{\text{RV}}^2 \\ &\leq |t_2 - t_1|(5k_2T + 4\|f(0)\|_{\text{RV}}^2), \end{aligned}$$

där sista olikheten följer då (v1) och (v2) implicerar att $\|f(t)\|_{\text{RV}} \leq (k_2T)^{1/2} + \|f(0)\|_{\text{RV}} < \infty$ för alla $t \in [0, T]$. Vi ser att kontinuitet följer eftersom till godtyckliga tidspunkt t och $\varepsilon > 0$ kan vi välja ett boll $B = \{s \in [0, T] : |t - s| < \varepsilon/(5k_2T + 4\|f(0)\|_{\text{RV}}^2)\}$, där s i B implicerar att $\|I(f)(t) - I(f)(s)\|_{\text{RV}} < \varepsilon$. □

A.4 Avslutning och vidare läsning

Vi har nu lyckats ger en definition på Itô-integraler och vi har fått villkor på integranden f som garanterar existensen av integralen. Vi har fått även lite mer intuition bakom betydelsen av att integrera med slumpvariabler och vad konvergens är för något när det gäller sådana objekt. Med integralens definition som element i H_{RV} har vi även fått tillgång till Cauchy–Schwarz olikheten, och vi har kunnat bevisa viktiga egenskaper hos Itô-integraler såsom kontinuitet och martingalegenskapen. Dessa egenskaper används, bland annat, för att bevisa den stokastiska kedjeregeln som vi tittade på i kapitel 8, och även den stokastiska produktregeln [12, kapitel 4.3].

Det mest viktiga med Itô-integralen är dess användning i definitionen av Itô–SDE:n, som vi tog upp i kapitel 4. Då Itô-integralen är en kontinuerlig, anpassad process som är dessutom en martingal, för vi då en Itô–SDE som beskriver en kontinuerlig, anpassad process, vars slumpmässiga beteende beskrivs av en martingal som underlättar beräkningar. Man kan även visa med hjälp av dessa egenskaper existensen av unika lösningar under vissa villkor ([12, kapitel 5.2]).

Det finns en rik och intressant teori bakom stokastisk kalkyl, och det här är bara en början. För dem som är intresserade i mer detaljer och hur egenskaperna hos Itô-integralerna hjälper oss att förstå och använda SDE:er, rekommenderas varmt böckerna [1], [12], [43] och [24].

B Variansreduktion för Monte Carlo-metoden

I kapitel 9 presenterades Monte Carlo-metoderna träff-miss-metoden och medelvärdesmetoden. Nu ska vi se hur metoderna kan förbättras genom att använda olika tekniker för variansreduktion. Huvudinspirationen för detta kapitel är [25]. Precis som i kapitel 9 använder vi oss av ett återkommande exempel där vi approximerar $\pi/4$ numeriskt. Då medelvärdesmetoden har lägre varians än träff-miss-metoden utför vi alla tekniker för variansreduktion på medelvärdesmetoden. Koden finns i bilaga I.

Vi upprepar integralen vi vill approximera, (45) från kapitel 9,

$$I = \int_0^1 f(x) dx,$$

där f är en reellvärd och kontinuerlig funktion som är definierad i $[0,1]$ med värden i intervallet $[0,1]$.

Ett sätt att minska variansen på är att öka n , men detta är inte alltid den bästa lösningen då tiden det tar för datorn att utföra simuleringen ökar med n . Ett annat sätt är att använda sig av en integral som kan beräknas *analytiskt*. Låt g vara en funktion som kan integreras analytiskt. Då kan vi skriva

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx + \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx, \quad (68)$$

vilket innebär att vi endast behöver använda Monte Carlo-metoder för att numeriskt lösa den del av integralen som inte kan beräknas analytiskt.

Låt oss nu kolla på vårt exempel. För den analytiska tekniken använder vi $g(x) = 1 - x^2/2$, där g är Taylorapproximationen av f kring punkten $x = 0$. Vi noterar att $\int_0^1 g(x) dx = 5/6$. Medelvärdesmetoden används då för att beräkna $\int_0^1 (f(x) - g(x)) dx$ från (68). Detta ger oss variansen $6 \cdot 10^{-3}$, alltså en variansreduktion av storleksordningen 10^{-1} .

En annan teknik som används vid variansreduktion går ut på att vi utnyttjar slumpvariabler med känt väntevärde och som har positiv korrelation med variabeln som vi vill approximera. Vi använder alltså *kontrollvariabler*. Precis som innan vill vi beräkna integralen (45). Detta gör vi genom att låta $\mathbb{E}(X)$ vara variabeln vi vill approximera. För träff-miss-metoden har vi $X = Z$ och för medelvärdesmetoden har vi $X = f(U)$. Låt Y vara en annan slumpvariabel som är korrelerat med X och där väntevärdet är noll. Vi låter $\alpha \in \mathbb{R}$ vara en koefficient till Y . Då har vi slumpvariabeln $X + \alpha Y$, vilket innebär att $I = \mathbb{E}(X + \alpha Y)$. Variansen av $X + \alpha Y$ är

$$\text{Var}(X + \alpha Y) = \text{Var}(X) + 2\alpha \text{Cov}(X, Y) + \alpha^2 \text{Var}(Y). \quad (69)$$

Sedan minimerar vi variansen med avseende på α för att få

$$\alpha = -\frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)}.$$

Insättning i (69) ger oss

$$\text{Var}(X + \alpha Y) = \text{Var}(X) - \frac{\text{Cov}(X, Y)^2}{\text{Var}(Y)} = (1 - \rho(X, Y)^2) \text{Var}(X), \quad (70)$$

där $\rho(X, Y)$ är korrelationen mellan X och Y och där vi har använt

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}.$$

Alltså kan vi minska variansen av X om X och Y har positiv korrelation.

Återigen kollar vi nu på vårt exempel där vi approximerar $\pi/4$. För att tillämpa variansreduktion med kontrollvariabler använder vi $X = \sqrt{1 - U^2}$ och Taylorapproximationen $1 - u^2$ som kontrollvariabel. Dock måste $1 - u^2$ centreras och detta ger oss $Y = 1/6 - u^2/2$. Vi måste även bestämma ett värde på $\text{Cov}(X, Y)$ numeriskt, vilket ger oss $\hat{\alpha}$. Vi använder alltså approximationen

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k + \hat{\alpha} Y_k),$$

där $(X_k, Y_k)_{k=1}^n$ är oberoende och likafördelade slumpvariabler som uppför sig på samma sätt som (X, Y) . Detta ger oss variansen $1.4 \cdot 10^{-2}$, en variansreduktion med ungefär $3.6 \cdot 10^{-2}$.

Nästa metod för variansreduktion vi ska titta på kallas för *viktprovtagning* och kan användas om regionen som vi vill approximera är litet. Detta innebär att slumpgeneratorn kommer att ge få punkter som ligger i området och löses genom att vi använder en sannolikhetsfördelning där det är mer sannolikt att slumpgeneratorn ger oss punkter som ligger i regionen vi vill approximera. Om det vi vill approximera är

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi_X(x) dx, \quad (71)$$

där φ_X är tätheten av X , så kan vi byta ut φ_X mot φ , som har annan täthet. För medelvärdesmetoden har vi $X = U \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Tanken är att φ lägger större vikt på den region som vi vill approximera än φ_X . Alltså får vi

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x) \varphi_X(x)}{\varphi(x)} \varphi(x) dx. \quad (72)$$

Låt oss återigen se på vårt exempel. För viktprovtagning noterar vi att för integralen av f , där $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, är regionen av intresse nära origo. Vi kan alltså välja $\varphi(x) = (3\sqrt{1-x})/2$, vilket ger oss

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{2}{3} \int_0^1 \sqrt{1+x} \varphi(x) dx.$$

Fördelningsfunktionen för φ är $F_\varphi(x) = 1 - (1-x)^{3/2}$, vilket innebär att vi kan använda den inversa transformationsmetoden [38, Kapitel 11.3]. Detta ger oss

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{2}{3} \mathbb{E} \left(\sqrt{2 - U^{2/3}} \right).$$

Med denna teknik får vi att variansen för medelvärdesmetoden blir ungefär $5.4 \cdot 10^{-3}$ i vårt exempel.

Den sista metoden för variansreduktion som vi ska presentera går ut på att vi använder *antitetiska variabler*, slumpvariabler som har negativ korrelation. Med två slumpvariabler X och Y och $I = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ får vi

$$\text{Var} \left(\frac{1}{2}(X + Y) \right) = \frac{1}{4} (\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)). \quad (73)$$

Med negativ korrelation mellan X och Y får vi alltså mindre varians om vi använder $(X + Y)/2$ som en approximation till I .

Återigen kollar vi på vårt exempel där vi approximerar $\pi/4$. För att applicera antitetiska variabler till medelvärdesmetoden noterar vi att om $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ så är $(1 - U) \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Vi har också $\text{Cov}(u, 1 - u) = -1/12$ och $\rho(u, 1 - u) = -1$. Då f är monoton i intervallet $[0, 1]$, kan vi förvänta oss att det finns negativ korrelation mellan $f(U)$ och $f(1 - U)$. I vårt exempel använder vi alltså $X = f(U)$ och $Y = f(1 - U)$. Variansen blir då $6.8 \cdot 10^{-3}$, alltså en variansreduktion av storleksordningen 10^{-1} .

Vilken teknik för variansreduktion som ska användas beror på problemet man vill lösa [14]. Man kan även kombinera de olika teknikerna för att minska variansen ytterligare [25]. I vårt exempel kan vi kombinera viktprovtagning och antitetiska variabler. Detta ger oss variansen $3 \cdot 10^{-5}$, vilket innebär att vi får en mycket större variansreduktion jämfört med om vi bara hade använt en av teknikerna.

C Kod för kapitel 2

Här ges koden för simulering och ritning av båda figurerna i kapitel 2. Vi ritar först upp två realisationer av standardiserad Brownsk rörelse, och sedan 5 realisationer av funktionen $F(W(t)) = \exp(t + W(t)/2)$ samt medelvärdet av 1000 sådana vägar.

```
# Simulation av diskreta Brownska vägar
import numpy as np
import numpy.matlib
import matplotlib.pyplot as plt
import math as math

# Sluttid, antal steg, och steglängd
T = 1, N = 500, dt = T/N

t = np.linspace(dt, 1, N)

# Simulering av två diskreta Brownska vägar
dW = math.sqrt(dt) * np.matlib.randn(2,N)
np.insert(dW, 0, 0)
np.insert(t, 0, 0)
W = np.cumsum(dW, axis=1) # Kumulativ summa för att bilda W

# Plot av båda Brownska vägarna
plt.plot(t, np.transpose(W)[:,:], ls="--")
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("W(t)")
```

```
# Simulation av Brownska vägar för funktionen i figur 2.

# Sluttid, antal steg, och steglängd
T = 1, N = 500, dt = T/N

t = np.linspace(dt, 1, N)

M = 1000 # Antal simulerade vägar

# Simulering av M diskreta Brownska vägar och beräkning av
# funktionen  $\exp(t + W(t)/2)$  samt medelvärde av denna över varje väg
dW = math.sqrt(dt) * np.matlib.randn(M,N)
W = np.cumsum(dW, axis=1)
U = np.exp(np.matlib.repmat(t, M, 1) + 0.5*W)
U_mean = np.mean(U, axis=0)

np.insert(t, 0, 0)
np.insert(U_mean, 0, 1)
np.insert(U, 0, 1, axis=1)

# Plot av funktionen beräknad på 5 diskreta vägar samt medelvärdet av alla M
plt.plot(t, np.transpose(U)[: , 1:5], "--", linewidth=1)
plt.plot(t, np.transpose(U_mean), "b")
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("$F(W(t))$")
```

D Kod för kapitel 3

Här presenterar vi koden till kapitel 3. Med denna har vi löst numeriskt Itô-integralen (6) och Stratonovich-integralen (7), och vi har kollat på storleken på felen som fås med approximationerna.

```
# Approximationer av stokastiska integraler.
from numpy import *
import matplotlib.pyplot as plt

# Sluttiden, antal steg och steglängd:
T = 1; N = 500; dt = T/N

# Simulering av Brownsk rörelse m.h.a. pseudo-slumptal. Vi fixerar slumptalen
# som används för reproducerbarhet:
random.seed(30)
dW = sqrt(dt) * random.randn(N+1)
dW[0] = 0
W = cumsum(dW)

# Beräkna approximationer av Ito och Stratonovich integraler med givna Brownsk
# rörelse. Här används multiply() funktion för att multiplicerar dW och W
# elementvis. Denna 'vektoriserad' approach är mer sparsamt med beräkningstid
# än en mer direkt 'for'-loop metod:
ito = sum(multiply(W[0:N], dW[1:N+1]))
strat = sum(multiply(0.5*(W[0:N] + \
    W[1:N+1]) + 0.5 * sqrt(dt) * random.randn(N), dW[1:N+1]))
print('ito =')
print(ito)
print('strat =')
print(strat)

# Beräkna felet hos approximationer:
itoerr = abs(ito - 0.5 * (W[N] * W[N] - T))
straterr = abs(strat - 0.5 * W[N]**2)
print('itoerr =')
print(itoerr)
print('straterr =')
print(straterr)
```

E Kod för kapitel 4

Vi presenterar här koden som används till kapitel 4. Vi implementerar EM-metoden på två olika sätt för att lösa den linjära SDE:n

$$dX(t) = 2X(t) dt + X(t) dW(t), \quad X(0) = 1.$$

Vi simulerar tio olika stickprov med första metoden för att visa slumpmässigheten hos den stokastiska processen som löser SDE:n. Med andra metoden fixerar vi först en simulering av Brownsk rörelse och approximerar lösningen med växande antal av steg, L . Med den analytiska lösningen (13) jämför vi felen mellan dessa approximationer. Sedan plottar vi resultaten. Se figurer 3 och 4.

```
# Implementering av EM metoden på en linjär SDE.
from numpy import *
import matplotlib.pyplot as plt

# En funktion som löser generiska skalära autonom SDE:er. Man anger
# begynnelsevärdet, funktioner f och g, tidsintervallet och antalet steg man
# vill approximerar med:
def SDE(X0, f, g, tInt, L):
    tDelta = tInt[1]/L # Längden av partitioner av tidsintervallet.
    X = zeros(L) # Array för lagringen av diskreta approximationerna.
    X[0] = X0 # Begynnelsevärde.
    Z = random.randn(L-1) # Skapa array av pseudo-N(0,1) stickprov.
    for j in range(L-1): # EM iterationer.
        X[j+1] = X[j] + tDelta * f(X[j]) + sqrt(tDelta) * Z[j] * g(X[j])
    return X

lam = 2; mu = 1; X0 = 1; tInt = [0,1] # Parametrarna till SDE:n.
f = lambda X: lam * X; g = lambda X: mu * X # Linjära funktioner f och g.

# Fixerar en simulering av Brownsk rörelse till andra metoden:
N = 256; dt = tInt[1]/N
dW = sqrt(dt) * random.randn(N+1)
dW[0] = 0
W = cumsum(dW) # Behövs till analytiska lösningen.

# Analytiska lösningen givet Brownsk rörelsen:
Xtrue = X0*exp((lam-0.5*mu**2)*linspace(0,tInt[1],N+1)+mu*W)

# Andra algoritmen som approximerar linjära SDE:n med givna simuleringen av
# Brownsk rörelse tre gånger med ökande antal steg, och som beräknar felet hos
# approximationerna:
L = [64,128,256]; R = [4,2,1]
for i in range(3):
    Xapprox = zeros(L[i]+1)
    Xapprox[0] = X0
    for j in range(L[i]):
        dWinc = sum(dW[R[i]*j+1:R[i]*(j+1)+1])
        Xapprox[j+1] = Xapprox[j] + R[i] * dt * lam * Xapprox[j] + mu * \
            Xapprox[j] * dWinc
    err = abs(Xapprox[L[i]] - Xtrue[N])
    print('Felet vid L = ' + str(L[i]) + ' steg är ' + str(err) + '.')

# Plottar tio simuleringar av SDE:n mha första algoritmen, och plottar
# approximationen med L = 256 steg från andra algoritmen mot analytiska
```

```

# lösningen, och sparar figuren till en PDF fil för importering till Latex:
plt.figure(figsize=(9, 4))
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('x(t)')
nSims = 10; L = 256
for i in range(nSims):
    X = SDE(X0, f, g, tInt, L)
    plt.plot(linspace(0, 1, L), X)
plt.savefig("figur3.pdf")
plt.show()

plt.figure(figsize=(9, 4))
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('X(t)')
plt.plot(linspace(0, 1, N+1), Xtrue, 'm-')
plt.plot(linspace(0, 1, 257), Xapprox, 'r*')
plt.savefig("figur4.pdf")
plt.show()

```

F Kod för kapitel 5

Här ges koden för de två diagramen i kapitel 5. Först utförs testet för stark konvergensordning, som beskrivs i texten, för EM-metoden på SDE:n

$$dX(t) = 2X(t) dt + X(t) dW(t), X(0) = 1.$$

Resultatet av detta ritas överst i den sista rutan nedan. Därefter utförs testet för svag konvergens, som beskrivet i texten, på samma SDE och resultatet ritas nederst i sista rutan.

```
## Test av stark konvergens av EM

# Problem- och approximationsparametrar
lmbda = 2, mu = 1, X_zero = 1, T = 1, N = 2**9, dt = T/N

M = 1000 # Antal simulerade vägar

X_err = np.zeros((5,M))
for s in range(0,M): # for-sats över alla vägar
    dW = np.sqrt(dt) * np.matlib.randn(1,N) # Brownska inkrement
    W = np.cumsum(dW) # Diskret Brownsk väg
    X_true = X_zero * np.exp((lmbda - 0.5 * mu**2) + mu * W[0,-1])
    for p in range(1,6): # for-sats över alla steglängder
        R = 2**(p-1), Dt = R*dt, L = int( N/R ) # Uppdatering av steglängd
        X_temp = X_zero

        for j in range(1,L): # for-sats över en väg
            W_inc = dW[0, R * (j-1): R * j].sum()
            X_temp = X_temp + Dt * lmbda * X_temp + mu * X_temp * W_inc #EM
        X_err[p-1,s] = abs(X_temp - X_true) # Fel i slutpunkt

Dt_vals = dt * (2**np.linspace(0,4,5)) #Värden på steglängder för plottning
```

```
## Test av svag konvergens av EM

# Problem- och approximationsparametrar
lmbda = 2, mu = 1, X_zero = 1, T = 1

M = 500000 # Antal simulerade vägar

X_em = np.zeros((5,1))
for p in range(0,5): # for-sats över alla steglängder
    Dt = 2**(p-10), L = int( T/Dt ) # Uppdatering av steglängd
    X_temp = X_zero * np.ones((M,1))
    for j in range(1,L): # for-sats över en väg
        W_inc = np.sqrt(Dt) * np.matlib.randn(M,1)
        X_temp = X_temp + Dt * lmbda * X_temp + mu * np.multiply(X_temp,W_inc)
    X_em[p] = np.mean(X_temp) # Medelvärde av värdet i slutpunkten för 500000
    # vägar med steglängd relaterad till p
X_err_w = abs(X_em - np.exp(lmbda))

Dt_vals_w = 2**(np.linspace(1,5,5)-10) #Värden på steglängder för plottning
```

```

## Plot för analys av konvergens genom loglog-diagram

plt.subplot(1,2,1)
plt.loglog(Dt_vals, np.mean(X_err, axis=1), "b*-", lw=2)
plt.loglog(Dt_vals, Dt_vals**(0.5), "r--", lw=2)

plt.xlim([1/1000, 1/10])
plt.ylim([1/1000, 10])
plt.xlabel("$\Delta t$")
plt.ylabel("$\mathbb{E}|X_N - X(T)|$", labelpad=0)

plt.subplot(1,2,2)
plt.loglog(Dt_vals_w, X_err_w, "b*-", lw=2)
plt.loglog(Dt_vals_w, Dt_vals_w, "r--", lw=2)

plt.xlim([1/1000, 1/10])
plt.ylim([1/1000, 10])
plt.xlabel("$\Delta t$")
plt.ylabel("$|\mathbb{E}X_N - \mathbb{E}X(T)|$", labelpad=0)

```

G Kod för kapitel 6

Här presenteras koden som används i kapitel 6. Vi implementerar Milstein-metoden för att lösa SDE:n

$$dX(t) = rX(t)(K - X(t))dt + \beta X(t)dW(t), \quad X(0) = X_0.$$

Vi beräknar felet för Milstein-metoden och plottar resultatet. Se figur 6.

```
## Implementering av Milstein metoden och plotta felet

import numpy as np
import numpy.matlib
import matplotlib.pyplot as plt

# Parametrar:

r = 2
K = 1
beta = 1/4
X0 = 1/2
T = 1
N = 2**11
dt = T/N
M = 500
R=[1,16,32,64,128]

dW = np.sqrt(dt) * np.matlib.randn(M,N)
Xmilstein = np.zeros((M,5))

for p in range(0,5): #alla steglängder
    Dt = R[p] * dt
    L = int(N/R[p])
    Xtemp = X0 * np.ones((M,1))
    for j in range(1,L): #en väg
        Winc = dW[:,R[p]*(j-1)+1: R[p]*(j-1)].sum(axis=1)
        Winc_2 = np.multiply(Winc,Winc)
        Winc_2_dt = Winc_2 - Dt
        Xtemp = Xtemp + Dt * r * np.multiply(Xtemp,(K-Xtemp)) + beta *
        ↪ np.multiply(Xtemp,Winc) + np.multiply(Xtemp,Winc_2_dt) * 0.5 *
        ↪ beta**2 #milstein-metoden
    Xmilstein[:,[p]] = Xtemp

Xref = Xmilstein[:,0].reshape(-1,1)
Xerr = abs(Xmilstein[:,1:5] - np.matlib.repmat(Xref,1,4))
m_Xerr = np.mean(Xerr, axis=0)

Dtvals = np.zeros((4,1))
for s in range(0,4):
    Dtvals[s] = dt * R[s+1]

# Plotta
plt.loglog(Dtvals, m_Xerr, "b*-", lw=2, label="Fel mellan approximation och
↪ äkta lösning")
plt.loglog(Dtvals, Dtvals, "r--", lw=2, label="Referenslinje")
plt.xlim([1/1000, 1/10])
plt.ylim([1/10000, 10])
```

```
plt.xlabel("$\Delta t$")  
plt.ylabel("$\mathbb{E}|X_N-X(T)|$", labelpad=0)  
plt.legend(loc="upper right")
```

H Kod för kapitel 8

Här kommer koden till kapitel 8. Vi löser ekvationen $V(X(t)) = \sqrt{X(t)}$, där $X(t)$ löser SDE:n

$$dX(t) = (2 - X(t)) dt + \sqrt{X(t)} dW(t), \quad X(0) = 1.$$

Först löser vi numeriskt SDE:n med EM-metoden, och sedan tar kvadratroten. Denna lösning kallas 'Xem1' i koden. I andra lösningen applicerar vi Itô's lemma (41) på ekvationen som ger:

$$dV(X(t)) = \left(\frac{7}{8V(X(t))} \right) dt + \frac{1}{2} dW(t).$$

Vi löser även denna SDE numeriskt med EM-metoden. Denna lösning kallas 'Xem2'. Till båda lösningar använder vi samma fixerad Brownsk rörelse simulering. Vi plottar båda lösningar mot varandra. Se figur 9.

```
# Testa stokastiska kedjeregeln.
from numpy import *
import scipy.linalg
import matplotlib.pyplot as plt

# Parametrar och begynnelsevärde:
alpha = 2; beta = 1; T = 1; N = 200; dt = T/N; Xzero = 1;
Xzero2 = 1/sqrt(Xzero); Xem1 = zeros(N+1); Xem2 = zeros(N+1); Xem1[0] = Xzero;
Xem2[0] = Xzero2; Xtemp1 = Xzero; Xtemp2 = Xzero2

# En for-loop som approximerar stickprov från SDE:erna Xem1 och Xem2, båda från
# samma simulerad Brownsk rörelsen:
for j in range(N):
    Winc = sqrt(dt)*random.randn()
    f1 = (alpha-Xtemp1)
    g1 = beta*sqrt(abs(Xtemp1))
    Xtemp1 = Xtemp1 + dt*f1 + Winc*g1
    Xem1[j+1] = Xtemp1
    f2 = (4*alpha-beta**2)/(8*Xtemp2) - Xtemp2/2
    g2 = beta/2
    Xtemp2 = Xtemp2 + dt*f2 + Winc*g2
    Xem2[j+1] = Xtemp2

# Ta kvadratroten av Xem1 & plottar mot Xem2. Sedan sparar figuren som PDF:
plt.figure(figsize=(9, 4))
plt.plot(linspace(0,T,N+1),sqrt(abs(Xem1)), 'b-')
plt.plot(linspace(0,T,N+1),Xem2, 'ro')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('V(X)')
plt.savefig("figur10.pdf")
plt.show()

# Beräkna maxnormen av skillnaden mellan lösningarna:
Xdif = linalg.norm(sqrt(Xem1) - Xem2,ord=inf)
print(Xdif)
```

I Kod för kapitel 9

Vi ger här koden till kapitel 9. Vi approximerar $\pi/4$ med två olika Monte Carlo-metoder, träff-miss-metoden och medelvärdesmetoden. Vi beräknar även felet och variansen. Därefter applicerar vi de olika teknikerna för variansreduktion som diskuteras i bilaga B.

```
##Träff-miss-metoden

import numpy

N = 10000 #antal slumpvariabler
numpy.random.seed(1234) #så att det går att reproducera och jämföra

#generera slumpvariabler
x = numpy.random.uniform(0, 1, [N, 1])
y = numpy.random.uniform(0, 1, [N, 1])

hit = x**2+y**2 <= 1 #antal variabler som ligger i approximationsområdet
approx = numpy.sum(hit) / N #approximationen
err = numpy.abs(approx-numpy.pi/4) #beräkna felet
var = numpy.var(hit) #beräkna variansen

print('Verkligt värde: ', numpy.pi/4)
print('Approximation: ', approx)
print('Fel: ', err)
print('Varians: ', var)

##Medelvärdesmetoden

import numpy

N = 10000 #antal slumpvariabler
numpy.random.seed(1234) #så att det går att reproducera och jämföra

#generera slumpvariabler
u = numpy.random.uniform(0, 1, [N, 1])

e = numpy.sqrt(1-u**2)
approx = numpy.sum(e) / N #approximationen
err = numpy.abs(approx-numpy.pi/4) #beräkna felet
var = numpy.var(e) #beräkna variansen

print('Verkligt värde: ', numpy.pi/4)
print('Approximation: ', approx)
print('Fel: ', err)
print('Varians: ', var)

##Variansreduktion med analytiskt metod

e_am = 1-u**2/2 - numpy.sqrt(1-u**2) #vi har g(x)=1-x^2/2
approx_am = 5/6 - numpy.sum(e_am)/N #approximationen, integralen av g(x) är 5/6
err_am = numpy.abs(approx_am-numpy.pi/4) #beräkna felet
var_am = numpy.var(e_am) #beräkna variansen
```

```

print('Analytiskt metod:')
print('Verkligt värde: ', numpy.pi/4)
print('Approximation: ', approx_am)
print('Fel: ', err_am)
print('Varians: ', var_am)

##Variansreduktion med kontrollvariabler

#approximera alpha
numpy.random.seed(4321)
w = numpy.random.uniform(0, 1, [N, 1]) #genererar slumpvariabler
x = numpy.sqrt(1-w**2) #det vi vill approximera
c = 1/6 - w**2 #kontrollvariabeln
cov = numpy.mean((x-numpy.mean(x))*(c-numpy.mean(c))) #Cov(x,c)
alpha = -cov / numpy.var(c) #beräkna alpha

e_kv = numpy.sqrt(1-u**2) + alpha*(1/6-u**2/2)
approx_kv = numpy.sum(e_kv)/N #approximationen
err_kv = numpy.abs(approx_kv-numpy.pi/4) #beräkna felet
var_kv = numpy.var(e_kv) #beräkna variansen

print('Kontrollvariabler:')
print('Verkligt värde: ', numpy.pi/4)
print('Approximation: ', approx_kv)
print('Fel: ', err_kv)
print('Varians: ', var_kv)

##Variansreduktion med viktprovtagning

e_vp = 2*numpy.sqrt(2-u**(2/3))/3
approx_vp = numpy.sum(e_vp)/N #approximationen
err_vp = numpy.abs(approx_vp-numpy.pi/4) #beräkna felet
var_vp = numpy.var(e_vp) #beräkna variansen

print('Viktprovtagning:')
print('Verkligt värde: ', numpy.pi/4)
print('Approximation: ', approx_vp)
print('Fel: ', err_vp)
print('Varians: ', var_vp)

##Variansreduktion med antitetiska variabler

e_av = (numpy.sqrt(1-u**2)+numpy.sqrt(1-(1-u)**2))/2
approx_av = numpy.sum(e_av)/N #approximationen
err_av = numpy.abs(approx_av-numpy.pi/4) #beräkna felet
var_av = numpy.var(e_av) #beräkna variansen

print('Antitetiska variabler:')
print('Verkligt värde: ', numpy.pi/4)
print('Approximation: ', approx_av)
print('Fel: ', err_av)
print('Varians: ', var_av)

```

```

##Variansreduktion med viktprovtagning och antitetiska variabler

e_av_vp = numpy.sqrt(2-u**(2/3))/3 + numpy.sqrt(2-(1-u)**(2/3))/3
approx_av_vp = numpy.sum(e_av_vp)/N #approximationen
err_av_vp = numpy.abs(approx_av_vp-numpy.pi/4) #beräkna felet
var_av_vp = numpy.var(e_av_vp) #beräkna variansen

print('Viktprovtagning och antitetiska variabler:')
print('Verkligt värde: ', numpy.pi/4)
print('Approximation: ', approx_av_vp)
print('Fel: ', err_av_vp)
print('Varians: ', var_av_vp)

```

J Kod för kapitel 10

Här ges all kod som används i kapitel 10. Koden gäller approximationer av lösningar till SDE:n

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \quad r(0) = r_0,$$

med olika medel samt ett test för stark konvergensordning likt det i bilaga F. Vi börjar med ett test för att se hur ofta EM-metoden ger negativa värden, och därmed odefinierade steg, vid approximation av lösningar. En modifierad EM-metod som undviker problem med negativa värden används sedan för att visa hur en approximation av lösningar till SDE:n kan se ut. För att simulera exakta lösningar används en algoritm för provtagning av en icke-centrerad χ^2 -fördelning. Denna lösning används sedan för att jämföra hur bra den modifierade EM-metoden approximerar en verklig lösning. Slutligen görs ett test för konvergens av den metod som presenteras i [11], och ritning av ett loglog-diagram tillsammans med en referenslinje. Proceduren för detta beskrivs i texten.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as math
```

```
## Problem- och approximations-parametrar

a = 3, b = 0.3, sigma = 0.2, T = 1 # Problemparametrar
N = 2**9, dt = 1/N # Antal steg, steglängd
t1 = np.linspace(0, T, N) # Diskretisering av tidsintervallet

r = np.random.randint(0,1000) # Slumpmässigt frö
```

```
## Test för negativitet av EM-metoden på CIR-processen

X_zero = 0.1 # Startpunkt
M = 1000 # Antal vägar
count = 0
for i in range(0,M): # Loop över antal vägar
    dW = np.sqrt(dt) * np.random.randn(1,N)
    W = np.cumsum(dW) # Diskret Brownsk väg
    X_temp = X_zero
    for j in range(1,N): # Loop över en väg
        W_inc = dW[0, R * (j-1): R * j].sum()
        X_temp = X_temp + Dt * a * (b - X_temp) + sigma * \
            math.sqrt(X_temp) * W_inc # EM-metoden
        if X_temp < 0:
            count = count + 1
            break
print("Antal vägar där EM gav negativt värde: " + str(count))
print("Andel av totalt antal vägar: " + str(count / M))
```

```
## Modifierade Euler-Maruyama-metoden

X_zeros = np.arange(0,4,1) # Startpunkter
X_em = np.zeros((N,X_zeros.size))
for i in range(0,X_zeros.size):
    np.random.seed(r) # Tilldelning av frö
    dW = np.sqrt(dt) * np.random.randn(1,N)
    W = np.cumsum(dW) # Diskret Brownsk väg
```

```

X_temp = X_zeros[i]
X_em[0,i] = X_temp
for j in range(1,N):
    W_inc = dW[0, R * (j-1): R * j].sum() # dW
    X_temp = abs(X_temp + Dt * a * (b - X_temp) + sigma * \
        math.sqrt(X_temp) * W_inc) # Mod. EM-metoden
    X_em[j,i] = X_temp

```

Plot av CIR-processen med modifierade Euler-Maruyama-metoden

```

# Fallet låg volatilitet
ax1=plt.subplot(1, 2, 1)
ax1.plot(t2, X_em)
ax1.set_ylim([-0.5, 3.5])
ax1.plot(t1, b*np.ones(t1.size), "black", ls="--")
ax1.set_xlabel("$t$")
ax1.set_ylabel("$r(t)$")

# Fallet hög volatilitet
ax2=plt.subplot(1, 2, 2, sharey=ax1)
ax2.plot(t2, X_em2)
ax2.plot(t1, b*np.ones(t1.size), "black", ls="--")
ax2.set_xlabel("$t$")
ax2.set_ylabel("$r(t)$")

plt.show()

```

Exakt lösning genom provtagning av icke-centrerad chi-två-fördelning
För beskrivning av algoritmen, se referens i kapitel 10

```

def CIR_sampling(a,b,sigma,N,t1,r, X_zero):
    np.random.seed(r) # Tilldelning av frö

    d = 4*a*b / sigma**2

    X_true = X_zero * np.ones(N)
    if d > 1:
        for i in range(0,N-1):
            c = sigma**2 * (1 - np.exp(-a*(t1[i+1] - t1[i]))) / (4*a)
            lmbda = X_true[i] * (np.exp(-a*(t1[i+1] - t1[i]))) / c
            Z = np.random.randn()
            X = np.random.default_rng().chisquare(d-1)
            X_true[i+1] = c * ((Z + np.sqrt(lmbda))**2 + X)

    elif d <= 1:
        for i in range(0,N-1):
            c = sigma**2 * (1 - np.exp(-a*(t1[i+1] - t1[i]))) / (4*a)
            lmbda = X_true[i] * (np.exp(-a*(t1[i+1] - t1[i]))) / c
            N = np.random.poisson(lmbda/2)
            X = np.random.default_rng().chisquare(d+2*N)
            X_true[i+1] = c*X

    return X_true

```

```
X_true = CIR_sampling(a,b,sigma,N,t1, r, 0.1)
```

```
## Plot för jämförelse av modifierade EM-metoden och exakt provtagning
```

```
plt.plot(t1, X_em[:,0], ls="--", label="Modifierade EM-metoden")
plt.plot(t1, X_true, label="Exakt lösning genom provtagning")
plt.plot(t1, b*np.ones(t1.size), "black", ls="--")
```

```
plt.ylim([-0.5, 3.5])
plt.xlabel("$t$")
plt.ylabel("$r(t)$")
```

```
plt.legend(loc="best")
plt.show()
```

```
## Konvergenstest för Euler-metoden från Dereich et. al.
```

```
alpha = (4*a*b - sigma**2) / 8
beta = -a / 2
gamma = sigma / 2
```

```
N = 2**13, dt = 1/N # Antal steg, steglängd
t1 = np.linspace(0, T, N) # Diskretisering av tidsintervallet
```

```
M = 1000 # Antal vägar
X_zero = 0.1 # Startvärde
```

```
X_err_diE = np.zeros((9,M))
for s in range(0,M):
    seed = np.random.randint(0,1000) # Nytt frö för varje väg
    np.random.seed(seed) # Tilldelning av frö
    dW = np.sqrt(dt) * np.random.randn(1,N)
    W = np.cumsum(dW) # Diskret Brownsk väg
```

```
# Verklig lösning enligt algoritm ovan
X_true = CIR_sampling(a,b,sigma,N,t1,seed,X_zero)
```

```
for p in range(3,12): # Loop över varje steglängd
    R = 2**(p-1)
    Dt = R*dt # Ny steglängd för approximation
    L = int( N/R ) # L Euler steg av längd Dt = R*dt
```

```
X_temp_diE = np.sqrt(X_zero)
```

```
max_err_diE = 0 # Största felet per väg
for j in range(0,L): # Loop över en väg
    temp_err_diE = abs(X_temp_diE**2 - X_true[R*j])
    if temp_err_diE > max_err_diE:
        max_err_diE = temp_err_diE
```

```
W_inc = dW[0, R * (j-1): R * j].sum() # dW
```

```
X_temp_diE = (X_temp_diE + gamma * W_inc) / (2*(1-beta*Dt)) + \
```

```

        math.sqrt((X_temp_diE + gamma * W_inc)**2 / (4*(1-beta*Dt)**2) + \
        alpha * Dt / (1-beta*Dt)) # Euler metod från Dereich et. al.

X_err_diE[p-3,s] = max_err_diE

Dt_vals = dt * (2**np.linspace(2,10,9)) # Steglängder för plottning

```

```

## Plot för analys av konvergens

```

```

plt.loglog(Dt_vals, np.mean(X_err_diE, axis=1), "b-*", lw=2, \
label="Fel mellan approximation och äkta lösning")
plt.loglog(Dt_vals, 0.15*abs(np.log(Dt_vals))**(0.5) * Dt_vals**(0.5), \
"r--", lw=2, label="Referenslinje")

plt.xlim([1/10000, 1])
plt.ylim([1/300, 1])
plt.xlabel("$\Delta t$", fontsize="12")
plt.ylabel("$\mathbb{E}\max|r_j-r(\tau_j)|$", labelpad=0, fontsize="12")

plt.legend(loc="best")
plt.show()

```