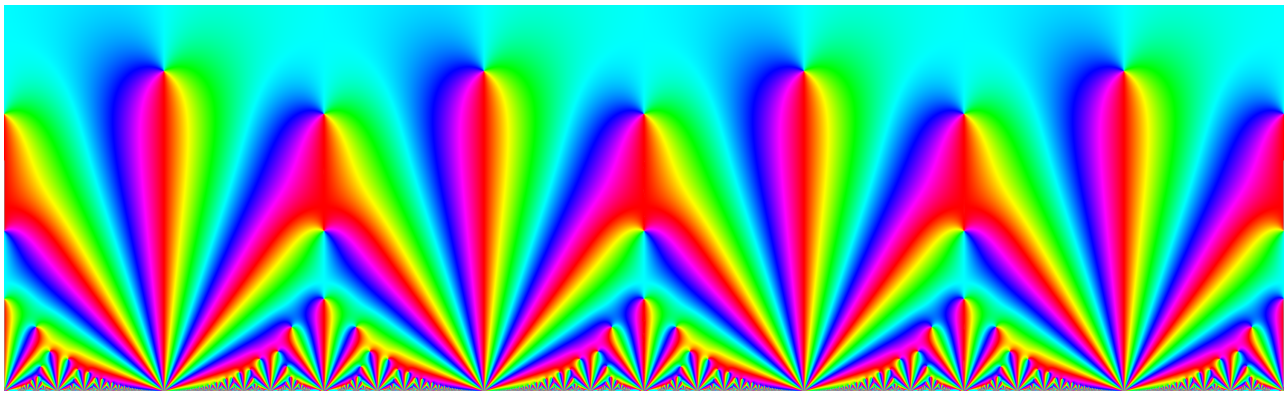
CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET



Fourierserieutveckling av andra ordningens Eisensteinserier

Fourier series expansion of second order Eisenstein series

Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers

Albin Ahlbäck
Erik Bivrin
Victor Brun
Gustav Mårdby

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2021

Denna sida är avsiktligt lämnad blank.

Fourierserieutveckling av andra ordningens Eisensteinserier

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk fysik vid Chalmers

Albin Ahlbäck Erik Bivrin

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik vid Chalmers

Victor Brun Gustav Mårdby

Handledare: Tobias Magnusson
Martin Raum

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2021

Denna sida är avsiktligt lämnad blank.

Förord

Vi vill börja med att tacka handledarna Tobias Magnusson och Martin Raum då de redan från start visade ett stort intresse för vårt lärande och detta kandidatarbete. Speciellt vill vi tacka dem för deras tålamod och deras pedagogik i och med att många av de komponenter som detta arbete har innefattat inte omfattas av vår grundutbildning.

I synnerhet är vi tacksamma till Tobias som har haft tålamodet att lära ut material som sträcker sig långt utöver vad man kan förvänta sig av ett kandidatarbete. Många av anteckningarna om representationsteori, gruppteori och abstrakt algebra har inte bara ledsagat oss om hur man kan betrakta modulära former ur vidare perspektiv utan även förberett oss väl inför vidare studier inom matematik.

Och tack, Martin. Du har inte varit rädd att presentera material som har legat utanför våra kunskapsramar. Förståelsen för materialet ligger nu inom ett kortare räckhåll än vad det någonsin har gjort och fascinationen för ämnena bara gror.

Under arbetets gång har en dagbok tillsammans med en individuell tidslogg förts över våra fram- och motgångar. Däremot har det viktigaste verktyget för oss varit ett `Git`-repository för att handhålla projektets filer, problemställningar och dess struktur. Även om alla författare har varit delaktiga i de flesta delarna av detta arbete, presenterar vi nedan en tabell över vilka som kan anses vara huvudförfattare av avsnitten:

Avsnitt	**Författare**
Populärvetenskaplig presentation	VB, GM
Sammanfattning	VB, GM
Inledning	VB, GM
Förberedelser	–
Speciella linjära gruppen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$	AA, EB
Övre halvplanet $\mathbb{H}$	AA, EB
Kongruensdelgrupper och deras verkan på övre halvplanet	AA
Modulära former	AA, EB, GM
Modulära symboler	AA, EB, VB
Första ordningens Eisensteinserier	VB
Fourierserieutveckling	AA, EB, VB, GM
Eisensteinbasen för första nivåns modulära former	EB, GM
Andra ordningens modulära former	–
Kopplingar till första ordningens modulära former	AA, GM
En första konstruktion av andra ordningens Eisensteinserier	VB
Aritmetiska typer och periodpolynom	AA, VB
Fourierserie av generaliserade andra ordningens Eisensteinserier	AA
Avslutande reflektioner	AA, EB, VB, GM
Algebraiska termer och definitioner	AA, VB
Elementär talteori	AA, GM
Lipschitz summationsformler	–
Lipschitz summationsformel	AA, VB, GM
Lipschitz polynomsummationsformel	AA
Eichler-Shimura-isomorfin för vikt 2	AA
Mer om modulära symboler	AA, EB
Bernoullitalen B_k	GM
Existensen av den modulära diskriminantfunktionen Δ	GM

Populärvetenskaplig presentation

Aritmetikens linda var lertavlor och dess näring bokföringen. Det dröjde emellertid inte länge innan siffrorna frigjordes från deras världsliga anknytning och blev abstrakta idéer – idéer som började utforskas utan tanke på tillämpning. Det var här talteorin och klassiska geometrin föddes.

Talteorins utveckling grundar sig i försök att besvara några enkla frågor kring tal och deras egenskaper. Det visar sig nämligen att många utav dessa lättförståeliga frågor har ett svar som är allt annat än trivialt. Ett välkänt exempel är Fermats sista sats som säger att det inte finns några positiva heltalslösningar till ekvationen

$$a^n + b^n = c^n,$$

för heltal $n > 2$. Trots att denna sats formulerades redan år 1637 av Pierre de Fermat bevisades den inte förrän år 1995 av Sir Andrew Wiles. Wiles bevis blev över 150 sidor långt och bottnade i att hitta en djup koppling mellan *elliptiska kurvor* och *modulära former*, det vill säga en koppling mellan geometri och talteoretiska funktioner. Kopplingen kallas idag för modularitetssatsen och förmodades redan på 1950-talet av matematikerna Yutaka Taniyama och Goro Shimura, vilket då kallades för Taniyama-Shimuras förmodan.

En annan mycket produktiv matematiker som studerade modulära former var Martin Eichler, som apokryfiskt är tilldelad citatet:

> *Det finns fem elementära artimetiska operationer: addition, subtraktion, multiplikation, division och modulära former.*

Bevisligen är modulära former av stort intresse. Dessa matematiska konstruktioner är en klass av komplexvärda funktioner vilka karaktäriseras av att de dels uppfyller vissa symmetrier och dels är ”tillräckligt snälla”. De enklaste typerna av modulära former är funktioner kallade *Eisensteinserier*. Ett exempel illustreras i figuren nedan.

Illustration av Fourierserien av en Eisensteinserie av vikt 8*, där argumentet av funktionen representeras av färgspektrumet.*

Eisensteinserier är inte bara användbara för att kunna generera fina bilder, utan de är även användbara då vi genom dessa kan härleda en mängd av så kallade identiteter. Ett nära besläktat exempel till Fermats sista sats är Jacobis sats som ponerar över antalet sätt ett positivt heltal kan skrivas som summan av fyra kvadrater, vilket visar sig kunna uttryckas som en av dessa identiteter.

Kopplingen som Eisensteinserier och modulära former har till lättförståeliga frågor är alltså mer än tillräcklig för att väcka intresset hos de flesta, i synnerhet kandidatstudenter på ett civilingenjörsprogram. Fokuset av detta arbete ligger därför i att studera strukturen på dessa funktioner och sedan generalisera funktionerna, där vi på vägen behandlar talteori, analys och abstrakt algebra.

Sammanfattning

Detta kandidatarbete i matematik – vid Chalmers tekniska högskola – studerar en typ av modulära former vid namn Eisensteinserier med syftet att öka förståelsen för båda av dessa matematiska konstruktioner. Efter ett antal förberedelser börjar vi betrakta den klassiska Eisensteinserien, visar att det är en första ordningens modulär form, erhåller dess Fourierserieutveckling och undersöker dimensionen av de vektorrum som spänns upp av dessa serier. Därefter lyfter vi blicken och redogör för kopplingen mellan första och andra ordningens modulära former, mer specifikt för glatta sådana. Den klassiska Eisensteinserien generaliseras sedermera till en andra ordningens modulär form. I nästa steg introducerar vi aritmetiska typer och periodpolynom, vilka grundar sig i representationsteori och kohomologi. För periodpolynomen av $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ utvecklas dessutom en begränsning som är ett starkare resultat än vad som återfinns i litteraturen. Vi konstruerar dessutom generaliserade andra ordningens Eisensteinserier för $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, för vilka vi med hjälp av denna periodpolynomsbegränsning finner en Fourierserieutveckling. Slutligen föreslår vi inriktningar på framtida forskning för dessa generaliserade Eisensteinserier.

Abstract

This bachelor's thesis in mathematics – at Chalmers University of Technology – studies a type of modular forms called Eisenstein series with the intent of deepening the understanding of these mathematical constructs. First we consider the classical Eisenstein series, prove that it is indeed a modular form, obtain its Fourier series expansion, and examine the dimensions of the vector spaces that are spanned by these series. Thereafter we examine the connetion between first and second order modular forms, more precisely smooth modular forms. Following this, the classical Eisenstein series is generalised to a second order modular form with the purpose of showcasing the existence of a second order Eisenstein series. The two concepts arithmetic types and period polynomials are then introduced. For period polynomials on $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ an original upper bound is derived. Furthermore, we construct generalised second order Eisenstein series on $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, and by utilising the upper bound of period polynomials on we derive a generalised Fourier series expansion. Lastly, we suggest some directions for future research into these generalised Eisenstein series.

Denna sida är avsiktligt lämnad blank.

Notation

$\mathbb{Z}_{>0}$	Alla heltal större än 0.
$\mathbb{Z}_{\geq 0}$	Alla heltal större än eller lika med 0.
$\mathbb{Z}_{\neq 0}$	Alla heltal skilda från 0.
$0 \in \mathbb{C}$	Identiteten för den additiva gruppen av komplexa tal $\mathbb{C}$.
$\tau = x + iy$	Ett element τ i det komplexa övre halvplanet $\mathbb{H}$, vilket har den implicita formen $x + iy$ för $x \in \mathbb{R}$ och $y \in \mathbb{R}_{>0}$ om inget annat framgår.
q, q_N	Beteckningar för de τ-beroende $q = \exp(2\pi i\tau)$ och $q_N = \exp(2\pi i\tau/N)$.
$\big(a,\, b;\, c,\, d\big)$	Matris på formen $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. För att särskilja detta från godtycklig tupel används något större parenteser.
$1 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$	Enhetsmatrisen $\big(1,\, 0;\, 0,\, 1\big)$ i gruppen av 2×2-matriser med heltalskomponenter och determinant 1.
$\mathrm{tr}(\gamma)$	Spåret $a + d$ av matrisen $\gamma = \big(a,\, b;\, c,\, d\big)$.
$\mathrm{Hom}(G, H)$	Mängden av alla homomorfier från G till H.
$\Gamma\gamma$	Sidoklassen $\big\{\delta\gamma : \delta \in \Gamma\big\}$.
$[x]$	Ekvivalensklassen där x är en representant för någon uppenbar ekvivalensrelation.
$\ll$, $\ll_f$	Relationen $\ll$ använder vi som följande. Om f, g är funktioner definierade på någon mängd X så att $g \geq 0$, säger vi att $f(x) \ll g(x)$ om det existerar $A \geq 0$ så att det för alla $x \in X$ gäller att $\lvert f(x)\rvert \leq Ag(x)$. Vi kompletterar med indexet f likt $\ll_f$ om valet av A beror på f.
$[a \sim b]$	Notation för Iverson bracket, som är 1 om $a \sim b$ och 0 om påståendet är falskt.
$\phi : X \ni x \longmapsto \phi(x) \in Y$	Avbildningen ϕ som tar element $x \in X$ till element $\phi(x) \in Y$.

Innehåll

1 Inledning

Nyfikenhet ligger till grund för detta arbete. Det är nervkittlande att svaren på frågor så enkla som ”på hur många sätt kan ett givet heltal skrivas som summan av fyra heltalskvadrater?” utvecklas till något som kräver tämligen god matematisk förmåga för att förstå. Detta arbete ägnar sig åt att studera det maskineri som ligger till grund för vissa av dessa invecklade svar. Mer specifikt betraktar vi *modulära former*, i synnerhet *Eisensteinserier*. Syftet med detta arbete är alltså att få en fördjupad förståelse av modulära former, Eisensteinserier och deras kopplingar med varandra. Den metod som begagnats för att uppnå en fördjupad förståelse har varit individuella litteraturstudier av läroböcker och vetenskapliga artiklar, vilka därefter kompletterats med handledning. Studierna har mynnat ut i skriftliga individuella sammanfattningar vilka gruppen tillsammans har diskuterat. Dessa sammanfattningar har sedermera flätats samman för att skapa detta arbete.

Modulära former är komplexvärda holomorfa funktioner på övre halvplanet vilka uppfyller vissa symmetri- och begränsningskrav. Dessa har en central roll inom modern talteori och geometri. Exempelvis grundade sig beviset för Fermats sista sats av Andrew Wiles från år 1995 på modulära former. Ett intressant specialfall av modulära former kallas Eisensteinserier, och i en nyligen publicerad artikel av Raum och Xia [RX20] visade de att alla modulära former kan uttryckas med hjälp av Eisensteinserier. Detta öppnar upp möjligheten att studera dessa matematiska konstruktioner ur en mängd olika perspektiv. Vi har i detta arbete avgränsat oss till att studera dem med målet att härleda en Fourierserieutveckling av första respektive andra ordningens Eisensteinserie.

För att ytterligare övertyga läsaren om användbarheten av dessa serier visar vi kort hur de verktyg som utvecklas senare i rapporten kan användas för att svara på den enkla frågan ställd i början av detta avsnitt: på hur många sätt kan ett givet heltal skrivas som summan av fyra heltalskvadrater?

Låt $r(n,k)$ beteckna antalet sätt vi kan skriva heltalet n som en summa av k stycken heltalskvadrater, och låt θ vara den genererande funktionen till r:

$$\theta(\tau,k)=\sum_{n=0}^{\infty} r(n,k)e^{2\pi in\tau}.$$

Det kan då visas att θ är en modulär form som tillhör ett 2-dimensionellt vektorrum uppspänt av Eisensteinserier. Genom att betrakta koefficienterna för deras Fourierserieutvecklingar erhåller vi $r(n,k)$ som en explicit linjärkombination av dessa Eisensteinserier. För $k=4$ får vi speciellt

$$r(n,4)=8\sum_{\substack{0<d|n\\ 4\nmid n}} d,$$

och problemet är härmed löst.

2 Förberedelser

2.1 Speciella linjära gruppen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

I detta arbete kommer den speciella linjära gruppen av grad två över heltalen, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, att ha en central roll. Denna grupp ges av

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}^{2\times 2} : ad-bc=1\right\}$$

vars gruppoperation ges av vanlig matrismultiplikation (för definition av grupp se definition A.1). Ofta betecknas γ som ett element i $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, där det är underförstått att $\gamma=\big(a,\,b;\,c,\,d\big)$.

Det visar sig att denna grupp genereras av elementen

$$S=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\qquad\text{och}\qquad T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

det vill säga varje element i $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ kan skrivas som en produkt av S, T och deras inverser. Noteras det också att $S^2 = -1$ och $T^n = \big(1,\, n;\, 0,\, 1\big)$ för godtyckligt $n \in \mathbb{Z}$ kan följande sats formuleras.

Sats 2.1. *Varje element $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ kan med heltal $m, \alpha_0, \ldots, \alpha_l$ skrivas på formen*

$$\gamma = \pm T^m \qquad \textit{eller} \qquad \gamma = \pm T^m S T^{\alpha_l} S T^{\alpha_{l-1}} \cdots S T^{\alpha_0}.$$

Är $c \neq 0$ säger vi att längden av γ är det minsta l så att γ kan skrivas på denna form.

Bevis. Vi bevisar satsen genom induktion på $c(\gamma)$. Låt oss först betrakta $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ där $c = 0$. Eftersom $ad - bc = 1$ måste $a = d = \pm 1$. Detta innebär att γ är på formen

$$\gamma = \pm T^{\pm b} = \pm \begin{pmatrix} 1 & \pm b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

och vi har erhållit den första likheten i satsen för fallet $c = 0$. Vi gör nu induktionsantagandet för alla γ med $|c(\gamma)| \leq n - 1$ där $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. För γ med $|c(\gamma)| = n$ har vi då att

$$\gamma \big(S T^{\alpha}\big)^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha a - b & a \\ c\alpha - d & c \end{pmatrix} = \delta.$$

Låter vi α vara kvoten i den Euklidiska divisionen $d = c\alpha + r$ för något $|r| < |c|$, är det tydligt att $|c(\delta)| = |r| < |c(\gamma)|$. Enligt induktionsaxiomet följer därmed påståendet. □

Valet av generatorerna S och T är inte unikt – paret S och ST genererar också $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Detta val har en intressant egenskap: $S^4 = (ST)^6 = 1$. Vi säger att elementen S och ST har *ordning* 4 respektive 6. Detta skiljer dem från många andra element, exempelvis T som har *oändlig ordning* vilket innebär att $T^n \neq 1$ för alla $n \neq 0$. Det leder oss till frågan om vilka element i $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ som har ändlig ordning. För att kunna besvara denna fråga behövs först en del förberedande arbete göras.

Vi minns att egenvärdena λ till en 2×2-matris med determinant 1 ges på formen

$$\lambda = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{tr}(\gamma) \pm \sqrt{\mathrm{tr}^2(\gamma) - 4}\Big), \tag{2.1}$$

vilket är viktigt eftersom elementen i $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ kan kategoriseras utifrån deras egenvärden.

Definition 2.1. Låt $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Vi säger att γ är

1) *hyperboliskt* om $|\,\mathrm{tr}(\gamma)| > 2$, i vilket fall γ har två reella egenvärden,
2) *paraboliskt* om $|\,\mathrm{tr}(\gamma)| = 2$, i vilket fall γ har ett reellt egenvärde ± 1,
3) *elliptiskt* om $|\,\mathrm{tr}(\gamma)| < 2$, i vilket fall γ har två komplexa egenvärden.

Exempelvis är S ett elliptiskt element och ST^3 ett hyperboliskt element. Men i synnerhet är vi intresserade av den delgrupp som genereras av det paraboliska elementet T. Denna grupp betecknar vi med Γ_∞^+ och kan skrivas som

$$\Gamma_\infty^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Denna grupp används flitigt för att skapa kvotmängden $\Gamma_\infty^+ \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (se definition A.5) eftersom $c(\gamma)$ och $d(\gamma)$ unikt definierar $[\gamma] \in \Gamma_\infty^+ \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Proposition 2.2. *Avbildningen*

$$\Phi : \Gamma_\infty^+ \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ni \Gamma_\infty^+ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto (c, d) \in \big\{(c, d) \in \mathbb{Z}^2 : \gcd(c, d) = 1\big\}$$

är väldefinierad och bijektiv.

Bevis. För att visa att avbildningen är väldefinierad, låt $\Gamma_\infty^+\gamma = \Gamma_\infty^+\delta$ för några $\gamma, \delta \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Det ger att $T^n\gamma = \delta$ för något heltal n. Således är $c(\gamma) = c(\delta)$ och $d(\gamma) = d(\delta)$.

För surjektivitet, välj ett godtyckligt par av relativt prima tal, (c, d). Enligt Bézouts identitet (se proposition B.1) existerar det heltal a, b sådana att $ad - bc = 1$. Detta ger att

$$\Phi(\Gamma_\infty^+ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)) = (c, d),$$

vilket visar surjektivitet.

För injektivitet, låt γ och δ uppfylla att $\Phi(\Gamma_\infty^+\gamma) = \Phi(\Gamma_\infty^+\delta)$. Det betyder att $c(\gamma) = c(\delta) = c$ och $d(\gamma) = d(\delta) = d$, och således fås

$$\gamma\delta^{-1} = \begin{pmatrix} a(\gamma) & b(\gamma) \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b(\delta) \\ -c & a(\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\gamma)d - b(\gamma)c & a(\delta)b(\gamma) - a(\gamma)b(\delta) \\ 0 & a(\delta)d - b(\delta)c \end{pmatrix} = T^{a(\delta)b(\gamma) - a(\gamma)b(\delta)},$$

där sista likheten följer från att $a(\gamma)d - b(\gamma)c = a(\delta)d - b(\delta)c = 1$. Detta visar att $\Gamma_\infty^+\gamma = \Gamma_\infty^+\delta$, vilket avslutar beviset. □

Innan vi återvänder till ordningen av ett element behöver vi härleda en viktig egenskap hos paraboliska element i $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Lemma 2.3. *Varje paraboliskt element $\pi \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ kan skrivas på formen $\pi = \pm\gamma^{-1}T^n\gamma$ för något $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ och $n \in \mathbb{Z}$.*

Bevis. Om $\mathrm{tr}(\pi) = +2$ tar elementet formen $\pi = \big(a,\, b;\, c,\, 2-a\big)$, där $a(2-a) - bc = 1$. Då är $\big(a-1,\, b\big)$ en vänsteregenvektor till π med egenvärde 1 eftersom

$$\big(a-1,\, b\big)\pi = \big((a-1)a + bc,\, (a-1)b + b(2-a)\big) = \big(a - (a(2-a) - bc),\, b\big) = \big(a-1,\, b\big).$$

Vidare, låt $m = \gcd(a-1, b)$ så att $r = (a-1)/m$ och $s = b/m$ kan identifieras med en representant $\gamma = \big(*, *;\ r,\, s\big)$ i $\Gamma_\infty^+ \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (se lemma 2.2). Då $\big(r,\, s\big)$ också är en vänsteregenvektor till π med egenvärde 1 måste

$$\gamma\pi = \begin{pmatrix} * & * \\ r & s \end{pmatrix}\pi = \begin{pmatrix} * & * \\ r & s \end{pmatrix}.$$

Lemma 2.2 ger nu att $\Gamma_\infty^+\gamma\pi = \Gamma_\infty^+\gamma$, och vi erhåller att $\pi = \gamma^{-1}T^n\gamma$ för något $n \in \mathbb{Z}$ när $\mathrm{tr}(\pi) = +2$.

I det fall då $\mathrm{tr}(\pi) = -2$ sätter vi $\pi' = -\pi$. Eftersom $\mathrm{tr}(\pi') = +2$ får vi att $\pi = -\pi' = -\gamma^{-1}T^n\gamma$, vilket avslutar beviset. □

Med dessa begrepp och egenskaper kan vi till slut återvända till frågan om vilken ordning ett element har.

Sats 2.4. *Ett element i $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ har ändlig ordning om och endast om det är elliptiskt eller lika med ± 1. Vidare bestäms ordningen av ett elliptiskt element ϵ enligt*

$$\mathrm{ord}(\epsilon) = \begin{cases} 6 & \textit{om } \mathrm{tr}(\epsilon) = +1, \\ 4 & \textit{om } \mathrm{tr}(\epsilon) = 0, \\ 3 & \textit{om } \mathrm{tr}(\epsilon) = -1. \end{cases}$$

Bevis. Först betraktar vi ett paraboliskt element $\pi = \pm\gamma^{-1}T^n\gamma$ (se lemma 2.3) för något heltal $n \neq 0$ och $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Då $\pi^m = \pm\gamma^{-1}T^{mn}\gamma$ måste $mn = 0$ för att $\pi^m = 1$, vilket endast gäller för $m = 0$ eller $n = 0$ och det paraboliska fallet är därmed visat.

För hyperboliska och elliptiska element påminner vi oss om att distinkta egenvärden innebär att vi kan diagonalisera elementen. Vi kan därför skriva dem på formen PDP^{-1} där D är en komplexvärd diagonalmatris och P är en komplexvärd matris.

Då γ är ett hyperboliskt element får vi att $\gamma^m = PD^mP^{-1}$. Från (2.1) ser vi att absolutbeloppet av egenvärderna till γ är skilda från 1, och därför gäller det att $\gamma^m = PD^mP^{-1} = 1$ om och endast om $m = 0$, och det hyperboliska fallet är därmed visat.

Om ϵ är ett elliptiskt element gäller det att $\operatorname{tr}(\epsilon) \in \{-1, 0, 1\}$, för vilket vi genom (2.1) kan beräkna dess egenvärden. Om $\operatorname{tr}(\epsilon) = 1$ får vi att egenvärdena blir $e^{\pm 2\pi i/6}$, vilket ger att ordningen är 6. På liknande sätt får vi att om $\operatorname{tr}(\epsilon) = 0$ är egenvärdena $\pm i$ och ordningen är 4 samt om $\operatorname{tr}(\epsilon) = -1$ blir egenvärdena $e^{\pm 2\pi i/3}$ vars ordning är 3. Satsen är därmed visad. □

2.2 Övre halvplanet $\mathbb{H}$

För att senare kunna definiera och studera modulära former behöver vi betrakta det övre halvplanet och hur Möbiusavbildningar beter sig på det.

Det övre halvplanet definieras som

$$\mathbb{H} = \big\{\tau \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\tau > 0\big\},$$

vars element ofta betecknas med $\tau = x + iy$ för $x \in \mathbb{R}$ och $y \in \mathbb{R}_{>0}$. På denna mängd vänsterverkar $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ genom Möbiusavbildningen

$$\gamma\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Läsaren kan bekräfta att $(\gamma\delta)\tau = \gamma(\delta\tau)$ för $\gamma, \delta \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ och $\big(1,\, 0;\, 0,\, 1\big)\tau = \tau$, det vill säga att Möbiusavbildningar ger upphov till en gruppverkan. I synnerhet får vi att

$$\operatorname{Im}(\gamma\tau) = \frac{(ad-bc)y}{|c\tau+d|^2} = \frac{\operatorname{Im}\tau}{|c\tau+d|^2} \qquad \text{och} \qquad \frac{\mathrm{d}(\gamma\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{ad-bc}{(c\tau+d)^2} = (c\tau+d)^{-2}.$$

För modulära former är det naturligt att utvidga det övre halvplanet till att inkludera den imaginära oändligheten $i\infty$. För att Möbiusavbildningen ska verka slutet på denna mängd behöver vi även inkludera *spetsarna* $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ genom

$$\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{i\infty\} \qquad \text{där} \qquad \gamma(i\infty) = a/c \qquad \text{och} \qquad \gamma(-d/c) = i\infty \qquad \text{då } c \neq 0.$$

När $c = 0$ är $\gamma(i\infty) = i\infty$. Av särskilt intresse är *fixpunkterna* för denna verkan, det vill säga de punkter τ där $\gamma\tau = \tau$. Det visar sig att man kan klassificera ett element γ som paraboliskt, hyperboliskt eller elliptiskt efter dess fixpunkter.

Proposition 2.5. *Låt $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ så att $\gamma \neq \pm 1$. Fixpunkterna kan då bestämmas efter $|\operatorname{tr}(\gamma)|$:*

1) *om γ är hyperbolisk har γ inga fixpunkter i $\mathbb{H}^*$,*
2) *om γ är parabolisk har γ exakt en fixpunkt i någon spets $\tau \in \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$,*
3) *om γ är elliptisk har γ exakt en fixpunkt i $\mathbb{H}$.*

Bevis. Först betraktar vi fixpunkten i oändligheten. Vi har $\gamma(i\infty) = i\infty$ om och endast om $c = 0$, vilket implicerar att γ är på formen $\pm T^n$ (se sats 2.1). Detta är den enda fixpunkten eftersom ett γ på denna form ger att $\gamma\tau = \tau + n$ för alla ändliga τ.

För resten av beviset antar vi att $c \neq 0$, vilket bara kan ha ändliga fixpunkter. Här ger $\gamma\tau = \tau$ upphov till en andragradsekvation med lösningen

$$\tau = \frac{a - d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c} = \frac{a - d \pm \sqrt{\operatorname{tr}^2(\gamma) - 4}}{2c},$$

där sista likheten följer av att $ad - bc = 1$. För paraboliska element är lösningen en rationell dubbelrot eftersom $\operatorname{tr}(\gamma) = \pm 2$ (se definition 2.1). För elliptiska element får vi två icke-reella lösningar, varav en ligger i $\mathbb{H}$, eftersom $\operatorname{tr}^2(\gamma) < 4$. Detta visar de första två fallen.

För hyperboliska γ har ekvationen två reella rötter då $\operatorname{tr}^2(\gamma) > 4$. För att τ ska vara rationellt måste diskriminanten $\operatorname{tr}^2(\gamma) - 4$ vara en perfekt kvadrat. Observera att de närmaste kvadraterna till $\operatorname{tr}^2(\gamma)$ är $(\operatorname{tr}(\gamma) \pm 1)^2$, vilket skiljer sig med $|2\operatorname{tr}(\gamma) \pm 1| \geq 5$ från $\operatorname{tr}^2(\gamma)$. Därför kan $\operatorname{tr}^2(\gamma) - 4$ inte vara en perfekt kvadrat, vilket visar att τ är irrationellt och det sista fallet är därmed visat. □

Framöver kommer vi att studera funktioner som är symmetriska under verkan $\tau \mapsto \gamma\tau$. Läsaren känner säkert till att P-periodiska funktioner är symmetriska under transformationen $t \mapsto t + P$ och kan därför helt förstås utifrån deras beteende på intervallet $[0, P]$. På ett liknande sätt innebär symmetri under verkan av $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ att vi i regel inte behöver studera funktionen på hela $\mathbb{H}$, utan kan begränsa oss till den så kallade *fundamentala domänen*

$$\mathcal{F} = \big\{\tau \in \mathbb{H} : |\tau| \geq 1,\ |\operatorname{Re}\tau| \leq 1/2\big\}. \tag{2.2}$$

Proposition 2.6. *För varje $\tau \in \mathbb{H}$ finns ett $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ så att $\gamma\tau \in \mathcal{F}$.*

Bevis. Fixera $\tau \in \mathbb{H}$ och notera att uttrycket $|c\tau + d|$ har ett minimum över heltalsparen $(c, d) \neq (0, 0)$, eftersom det endast finns ett ändligt antal par som ger $|c\tau + d| \leq 1$.

Låt (c, d) vara det heltalspar som minimerar $|c\tau + d|$. Då måste $\gcd(c, d) = 1$, eftersom det annars inte skulle vara minimalt. Enligt proposition 2.2 kan vi identifiera (c, d) med ekvivalensklassen $\Gamma_\infty^+\gamma$ för något $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ med $c(\gamma) = c$ och $d(\gamma) = d$. Eftersom $T^n\gamma\tau = \gamma\tau + n$ kan vi välja ett n så att $|\operatorname{Re}\big(T^n\gamma z\big)| \leq 1/2$. Slutligen; eftersom $|c\tau + d|$ är minimal måste $|(a + cn)\tau + (b + dn)| \geq |c\tau + d|$, och därför är $|T^n\gamma z| \geq 1$, vilket visar att $T^n\gamma z \in \mathcal{F}$. □

Man kan lätt utvidga påståendet till att valet av γ är unikt så länge inte $\gamma\tau$ är på randen av $\mathcal{F}$. Vidare kan denna proposition tolkas som att kvotrummet $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ ”modelleras” av $\mathcal{F}$ [DS00, s. 54].

2.3 Kongruensdelgrupper och deras verkan på övre halvplanet

Senare i arbetet kommer vi att introducera modulära former associerade till delgrupper av $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. I synnerhet är kongruensdelgrupper av intresse. Dessa kan betraktas som utökningar av den *principala kongruensdelgruppen*

$$\Gamma(N) = \left\{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod N\right\},$$

där kongruensen sker elementvis.

Definition 2.2. Mängden $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sägs vara en *kongruensdelgrupp* om $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$ för något positivt heltal N. Det minsta N som uppfyller denna relation sägs vara *nivån* av Γ.

När det i framtiden refereras till en delgrupp Γ, antar vi alltid att denna har ett begränsat index med avseende på $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, det vill säga antalet element i $\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ är ändligt, men ofta kräver vi att den också ska vara en kongruensdelgrupp.

Betrakta nu kvotmängden $\Gamma\backslash\mathbb{H}^*$. Man kan visa att denna kvotmängd har strukturen av en så kallad kompakt Riemannyta. Har denna yta g antal ”hål”[1], säger vi att Γ har *genus* g. Två punkter τ_1 och τ_2 är ekvivalenta under verkan av Γ om det existerar $\gamma \in \Gamma$ så att $\gamma\tau_1 = \tau_2$.

Generatorerna för dessa delgrupper Γ är dock inte lika enkla som för $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Följande proposition, visad av Fricke och Klein, och återgiven i Iwaniecs bok [Iwa97], lämnas därför utan bevis.

Proposition 2.7. *Låt $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ha ändligt index, där $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ har genus g, r antal inekvivalenta elliptiska fixpunkter och h inekvivalenta spetsar. Då genereras Γ av hyperboliska element $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$, elliptiska element $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r$ och paraboliska element $\pi_1, \ldots, \pi_h$ som uppfyller relationen*

$$[\gamma_1, \gamma_{g+1}] \cdots [\gamma_g, \gamma_{2g}]\epsilon_1 \cdots \epsilon_r\pi_1 \cdots \pi_h = 1,$$

där $[\gamma, \delta]$ är kommutatorn $\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1}$.

[1] Detta begreppet kan göras rigoröst, men ligger utanför arbetets omfång.

2.4 Modulära former

För att på ett smidigt sätt kunna definiera och förstå modulära former är det viktigt att utveckla en användbar notation. Vi introducerar därför *streckverkan*.

Definition 2.3. Låt $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ och $\gamma \in \Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Vi definerar då *streckverkan* av vikt k på f som

$$\big(f\big|_k\gamma\big)(\tau) = (c\tau + d)^{-k} f(\gamma\tau).$$

Detta är en högerverkan av Γ, vilket läsaren kan verifiera. Denna kan dessutom utvidgas till en högerrepresentation (se definition A.12) genom att låta gruppringen $\mathbb{C}[\Gamma]$ (se definition A.10) verka på f genom

$$f\big|_k(a\gamma + b\delta) = a\big(f\big|_k\gamma\big) + b\big(f\big|_k\delta\big) \qquad \text{respektive} \qquad \big(f\big|_k a\gamma\big)b\delta = ab\big(f\big|_k\gamma\delta\big)$$

för $a\gamma + b\delta \in \mathbb{C}[\Gamma]$, där resterande relationer uttömms genom linjäritet.

Den etablerade notationen gör det nu möjligt att smidigt definiera första ordningens modulära former, vilka vi ofta bara kallar modulära former.

Definition 2.4. Låt Γ vara en kongruensdelgrupp och låt $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ vara holomorf. Vi säger då att f är en *(första ordningens) modulär form* av Γ och av heltalsvikt k om

1) $f\big|_k(\gamma - 1) = 0$ för alla $\gamma \in \Gamma$,
2) $\big(f\big|_k\gamma\big)(\tau)$ är begränsad för alla $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ då $\tau \to i\infty$.

Vektorrummet som spänns upp av dessa funktioner betecknar vi $\mathrm{M}_k(\Gamma)$. Om det vidare gäller att $\big(f\big|_k\gamma\big)(\tau) \to 0$ då $\tau \to i\infty$ för alla $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ säger vi att f är en *spetsform*. Vektorrummet av spetsformer betecknas $\mathrm{S}_k(\Gamma)$.

Krav (2) i definition 2.4 brukar kallas *holomorfi i spetsarna*, där varje γ representerar spetsen $\gamma(i\infty)$. Begränsningen innebär nämligen att $f\big|_k\gamma$ kan utökas till en "holomorf funktion i $i\infty$" – vad detta betyder preciseras i sats 2.9 där vi använder detta för att visa existensen av Fourierserieutvecklingar av modulära former. Innan dess härleds dock ett antal räkneregler för modulära former.

Proposition 2.8. *Låt f och g vara element i $\mathrm{M}_k(\Gamma)$ respektive $\mathrm{M}_l(\Gamma)$. Då gäller det att $f \cdot g$ är ett element i $\mathrm{M}_{k+l}(\Gamma)$. Om det vidare gäller att g är nollskild på $\mathbb{H}$ och att $\big(f/g\big|_k\gamma\big)(\tau)$ är begränsad då $\tau \to i\infty$ för alla $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, gäller det att f/g är ett element i $\mathrm{M}_{k-l}(\Gamma)$.*

Bevis. Notera att både $f \cdot g$ och f/g är holomorfa på $\mathbb{H}$ och invarianta under streckverkan av Γ av vikt $k+l$ respektive $k-l$. Vidare är båda begränsade under streckverkan av $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ då $\tau \to i\infty$, vilket avslutar beviset om att de är modulära former. □

Sats 2.9. *Låt Γ vara en kongruensdelgrupp av nivå N och låt $f \in \mathrm{M}_k(\Gamma)$. För varje val av $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ har $f\big|_k\gamma$ en Fourierserieutveckling på formen*

$$\big(f\big|_k\gamma\big)(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q_N^n$$

för $\tau \in \mathbb{H}$, där $q_N = \exp(2\pi i\tau/N)$, och koefficienterna $a_n \in \mathbb{C}$ endast beror på sidoklassen $\Gamma\gamma$ (se definition A.4). Vidare gäller att f är en spetsform precis när $a_0 = 0$ för alla γ.

Bevis. Först ska vi visa att $f\big|_k\gamma$ är N-periodisk. Läsaren kan själv bekräfta att $\gamma T^N \gamma^{-1} \in \Gamma(N) \subseteq \Gamma$, så att f är invariant under dess streckverkan. I synnerhet har vi att

$$\big(f\big|_k\gamma\big)(\tau) = \big(f\big|_k(\gamma T^N\gamma^{-1})\big|_k\gamma\big)(\tau) = \big(f\big|_k\gamma T^N\big)(\tau) = \big(f\big|_k\gamma\big)(\tau + N).$$

Det följer att funktionen $F(q_N) = \big(f\big|_k\gamma\big)\big(N\log(q_N)/(2\pi i)\big)$ är väldefinierad för $0 < |q_N| < 1$, eftersom olika grenar av logaritmen bara skiftar högerledets argument med en multipel av N.

Notera nu att $F(q_N)$ är holomorf i den punkterade enhetsskivan. När $\tau \to i\infty$ går $q_N \to 0$, så F är begränsad runt $q_N = 0$, som därmed är en hävbar singularitet. Det innebär att F har en Taylorserie runt $q_N = 0$ som konvergerar i hela öppna enhetsskivan och således har $f\big|_k\gamma$ en Fourierserieutveckling.

Att koefficienterna a_n bara beror på sidoklassen $\Gamma\gamma$ följer av att $f|_k\Gamma\gamma = f|_k\gamma$, och att koefficienterna i en Taylorserie är unika. Konstanttermen a_0 är gränsvärdet $\lim_{q_N\to 0} F(q_N) = \lim_{\tau\to i\infty}\big(f\big|_k\gamma\big)(\tau)$, och att detta är noll för alla γ är själva definitionen av spetsform, vilket avslutar beviset. □

Historiskt sett har spetsformer varit tämligen svårstuderade, men eftersom de kan Fourierserieutvecklas är det möjligt att begränsa dem på olika sätt. Ett exempel på detta är följande lemma, som är en modifierad variant av lemma 3.61 i [Shi94], vilken visar att spetsformer kan begränsas av imaginärdelen av deras argument.

Lemma 2.10. *Låt $f \in \mathrm{M}_k(\Gamma)$ för någon kongruensdelgrupp Γ. Om $f \in \mathrm{S}_k(\Gamma)$ eller $k \le 0$ gäller*

$$|f(\tau)| \ll_f y^{-k/2}.$$

Bevis. Låt $h(\tau) = |f(\tau)|y^{k/2}$ och notera att $h \circ \gamma$ är invariant för $\gamma \in \Gamma$. För $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ har vi

$$h(\gamma\tau) = |f(\gamma\tau)|\big(y|c\tau + d|^{-2}\big)^{k/2} = \big|(c\tau+d)^{-k}f(\gamma\tau)\big|y^{k/2} = \big|f\big|_k\gamma(\tau)\big|y^{k/2}.$$

När $k \le 0$ ger uttrycket ovan tillsammans med begränsningskravet i definition 2.4 att $h(\gamma\tau)$ är begränsad när $\tau \to i\infty$. Om f är en spetsform gäller samma begränsning även för positiva k, ty

$$h(\gamma\tau) = \Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n q_N^n\Big|y^{k/2} = \mathcal{O}(q_N)\ln^{k/2}|q_N| \longrightarrow 0 \quad \text{eftersom} \quad q_N \to 0.$$

Nu ska vi visa att $h(\tau)$ är begränsad på hela $\mathbb{H}$ med hjälp av fundamentaldomänen $\mathcal{F}$ från (2.2). Fixera ett γ. Vi har visat att det finns ett y_0 så att $h(\gamma\tau)$ är begränsad när $y \ge y_0$. Eftersom h är kontinuerlig är $h(\gamma\tau)$ också begränsad på delmängden av $\mathcal{F}$ med $y \le y_0$, som är sluten och begränsad. Alltså finns en γ-beroende konstant C_γ så att $h(\gamma\tau) \le C_\gamma$ för $\tau \in \mathcal{F}$. Då h är Γ-invariant kan vi välja C_γ som bara beror på sidoklassen $\Gamma\gamma$:

$$h(\Gamma\gamma\tau) = h(\gamma\tau) \le C_\gamma = C_{\Gamma\gamma}.$$

Eftersom Γ har ändligt index finns det då bara en ändlig uppsättning $C_{\Gamma\gamma}$, så om vi kallar den största konstanten för C är $h(\gamma\tau) \le C$ för $\tau \in \mathcal{F}$ oberoende av $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Slutligen tillämpar vi proposition 2.6: för varje $\tau \in \mathbb{H}$ finns ett γ så att $\gamma\tau \in \mathcal{F}$, som gör att $h(\tau) = h(\gamma^{-1}\gamma\tau) \le C$. Således är h begränsad på hela $\mathbb{H}$. □

Följande proposition är en modifierad variant av lemma 3.62 i [Shi94] och ytterligare ett exempel på en begränsning av spetsformer, här av deras Fourierkoefficienter.

Proposition 2.11. *Låt $f \in \mathrm{S}_k(\Gamma)$ för något $k > 0$ och någon kongruensdelgrupp Γ av nivå N. Då är Fourierkoefficienterna a_n för f begränsade enligt*

$$|a_n| \ll_f n^{k/2}.$$

Bevis. I enlighet med sats 2.9 skriver vi $f(\tau) = F(q_N) = \sum a_n q_N^n$. Vi kan då skriva dess koefficienter enligt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{F(q_N)}{q_N^{n+1}}\,\mathrm{d}q_N$$

för någon enkel positivt orienterad kurva som omsluter $q_N = 0$. Sätt kurvan till en cirkel med radie $|q_N| = e^{-1/n}$. Då får vi att $y = N/(2\pi n)$. Med hjälp av lemma 2.10 kan vi då göra begränsningen $|F(q)| \le C\big(N/(2\pi n)\big)^{-k/2}$ för något $C > 0$. Detta ger att

$$|a_n| \le e^{-1/n}\max_q\Big(\frac{|F(q_N)|}{|q_N|^{n+1}}\Big) \le eC\Big(\frac{2\pi n}{N}\Big)^{k/2} \ll n^{k/2},$$

vilket var det som skulle visas. □

Dessa begränsningar kommer till stor användbarhet vid studier av den djupa koppling som föreligger mellan modulära former och homomorfier (se definition A.6) mellan kongruensdelgrupper Γ och $\mathbb{C}$. Tillika kommer egenskaper hos rummen av spetsformer till nytta då vi betraktar denna koppling. Därför antecknas följande proposition från [DS00, s. 87-88], men beviset utelämnas.

Proposition 2.12. *Låt kongruensdelgruppen Γ ha genus g. Då är*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{S}_2(\Gamma) = g.$$

2.5 Modulära symboler

För att skapa homomorfier mellan kongruensdelgrupper Γ och $\mathbb{C}$ utnyttjas ofta konstruktioner som kallas modulära symboler. De har kopplingar till ett område inom topologi som kallas homologi.

För våra ändamål definierar vi en modulär symbol $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Gamma \times \mathrm{S}_2(\Gamma) \to \mathbb{C}$ via

$$\langle \gamma, f \rangle = \int_{z_0}^{\gamma z_0} f(z)\,\mathrm{d}z$$

för $z_0 \in \mathbb{H}^*$. Som notationen antyder är modulära symboler oberoende av z_0, vilket även gäller då $z_0 = i\infty$ eftersom Fourierserieutvecklingarna av spetsformerna visar att de avtar exponentiellt då $\tau \to i\infty$.

Proposition 2.13. *Den modulära symbolen $\langle \gamma, f \rangle = \int_{z_0}^{\gamma z_0} f(z)\,\mathrm{d}z$ är oberoende av $z_0 \in \mathbb{H}$, och uppfyller räkneregeln*

$$\langle \gamma\delta, f \rangle = \langle \gamma, f \rangle + \langle \delta, f \rangle \tag{2.3}$$

för alla $f \in \mathrm{S}_2(\Gamma)$ och $\gamma, \delta \in \Gamma$.

Två bevis av denna proposition finns i appendix E.

Likheten (2.3) innebär att avbildningen $\gamma \mapsto \langle \gamma, f \rangle$ är en homomorfi från Γ till $\mathbb{C}$ för en fix spetsform $f \in \mathrm{S}_2(\Gamma)$. Det sista vi vill visa innan modulära symboler kommer till användning är hur vi kan begränsa dem med avseende på γ.

Följande proposition är en modifierad version av O'Sullivans resultat i [OSu00].

Proposition 2.14. *Låt $f \in \mathrm{S}_2(\Gamma)$ för kongruensdelgruppen Γ. Då är*

$$\langle \gamma, f \rangle \ll_f |c(\gamma)|.$$

Bevis. Låt $f \in \mathrm{S}_2(\Gamma)$ vara fixt och låt $z_0 \in \mathbb{H}$. Eftersom $\gamma z_0 \in \mathbb{H}$ och Fourierserien av f i $i\infty$ är likformigt konvergent, kan vi skriva

$$\langle \gamma, f \rangle = \int_{z_0}^{\gamma z_0} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\big(\tfrac{2\pi i n z}{N}\big) \Big)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n N}{2\pi i n} \Big(\exp\big(\tfrac{2\pi i n \gamma z_0}{N}\big) - \exp\big(\tfrac{2\pi i n z_0}{N}\big) \Big).$$

Beteckna $y = \mathrm{Im}(z_0)$ och kom ihåg att $\mathrm{Im}(\gamma z_0) = \mathrm{Im}(z_0)|cz_0 + d|^{-2}$. Då $|a_n| \ll n$ för vikt $k = 2$ (se proposition 2.11), erhålles

$$|\langle \gamma, f \rangle| \ll \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\exp\big(-\tfrac{2\pi n y}{N|cz_0+d|^2}\big) + \exp\big(-\tfrac{2\pi n y}{N}\big) \Big) = \frac{\exp\big(-\frac{2\pi y}{N|cz_0+d|^2}\big)}{1 - \exp\big(-\frac{2\pi y}{N|cz_0+d|^2}\big)} + \frac{\exp\big(-\frac{2\pi y}{N}\big)}{1 - \exp\big(-\frac{2\pi y}{N}\big)}.$$

Låter vi $z_0 = -d/c + i|c|^{-1}$, finner vi via olikheten $e^{-x}/(1 - e^{-x}) \leq 1/x$ för $x > 0$ att

$$\langle \gamma, f \rangle \ll \frac{N|cz_0 + d|^2}{2\pi y} + \frac{N}{2\pi y} = \frac{N|c|}{\pi} \ll |c|,$$

och beviset är således klart. □

3 Första ordningens Eisensteinserier

Som vi motiverade i inledningen är Eisensteinserier av stort intresse eftersom dessa kan uttrycka alla sorters modulära former. I detta avsnitt ska vi illustrera detta för första ordningens modulära former av $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Definition 3.1. *Första ordningens Eisensteinserie* av $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ och heltalsvikt $k > 2$ definieras som

$$E_k(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{[\gamma] \in \Gamma_\infty^+ \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \left(1\big|_k \gamma\right)(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\gcd(c,d)=1} \frac{1}{(c\tau + d)^k}$$

för $\tau \in \mathbb{H}$.

Att dessa summor är väldefinierade är inte självklart. För första summan vet vi från proposition 2.2 att alla representanter i $\Gamma_\infty^+ \gamma$ har samma relativt prima $c(\gamma)$ och $d(\gamma)$. Eftersom $\left(1\big|_k \gamma\right)(\tau) = (c\tau + d)^{-k}$ är termen väldefinierad. Samma proposition säger även att varje relativt primt par (c, d) förekommer en gång i den tidigare summan, så den andra summan har samma termer som den första. Senare, i följdsats 3.2, visas också att serierna är absolutkonvergenta, varför summationsordningen inte spelar roll.

Koefficienten $1/2$ framför E_k är en normeringsfaktor som tillkommer för att den konstanta termen i dess Fourierserie ska bli 1, något som vi kommer att se senare.

Vidare kan vi omkonstruera Eisensteinserier så att de kan ses som en flerdimensionell generalisering av Riemanns zetafunktion, vilket även sägs i [DS00, s. 4]. Vi kallar dessa Eisensteinserier *icke-normaliserade*, eftersom den konstanta termen i deras Fourierserier inte blir 1.

Definition 3.2. Vi definierar *första ordningens icke-normaliserade Eisensteinserier* av $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ och heltalsvikt $k > 2$ som

$$G_k(\tau) = \sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ (c,d) \neq (0,0)}} \frac{1}{(c\tau + d)^k},$$

för $\tau \in \mathbb{H}$.

Det första steget för att kunna konstruera och härleda Fourierserieutvecklingen av en andra ordningens Eisensteinserie är att betrakta de metoder som begagnas för att finna Fourierserieutvcklingar av första ordningens Eisensteinserier. Bland de viktigaste är att bevisa absolut och likformig konvergens, som visas i följande proposition.

Proposition 3.1. *Om $k > 2$ är G_k absolutkonvergent på $\mathbb{H}$. Vidare är G_k likformigt konvergent på alla rektanglar $R = \{\tau \in \mathbb{H} : x_0 \leq x \leq x_1,\ y \geq y_0 > 0\}$.*

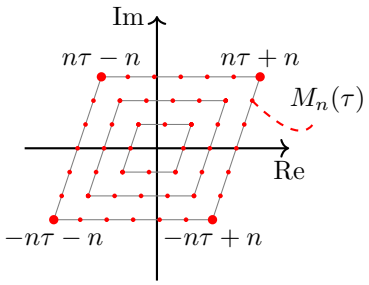
Bevis. Låt $P_n(\tau)$ vara randen till parallellogrammen med hörnen $\pm n\tau \pm n$ för $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ och låt

$$L(\tau) = \{c\tau + d \in \mathbb{C} : c, d \in \mathbb{Z},\ (c, d) \neq (0, 0)\}.$$

Snittet $M_n(\tau) = P_n(\tau) \cap L(\tau)$ kan ses i figur 1. Från denna ser vi att vi kan skriva

$$G_{k,N}(\tau) = \sum_{\substack{|c|,|d| \leq N \\ (c,d) \neq (0,0)}} \frac{1}{(c\tau + d)^k} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{\omega \in M_n(\tau)} \frac{1}{\omega^k}.$$

Notera att antalet element i $M_n(\tau)$ är $8n$ och att det minsta avståndet, $r_n(\tau)$, från origo till $P_n(\tau)$, uppfyller relationen $r_n(\tau) = nr_1(\tau)$, där $r_1(\tau) > 0$ som en följd av att $\mathrm{Im}\,\tau \neq 0$. Då $k > 2$ kan vi då för varje $\tau \in \mathbb{H}$ uppskatta



Figur 1: *Illustration av snittet mellan parallellogrammen och gittret, det vill säga mängden $M_n(\tau)$.*

$$\left|G_{k,N}(\tau)\right| \leq \sum_{n=1}^{N} \sum_{\omega \in M_n(\tau)} \frac{1}{|\omega|^k} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{8n}{\big(nr_1(\tau)\big)^k} = 8r_1(\tau)^{-k} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{k-1}} \longrightarrow 8r_1(\tau)^{-k}\zeta(k-1)$$

då $N \to \infty$ eftersom $r_n(\tau)$ är mindre än avståndet från origo till $M_n(\tau)$ och eftersom Riemanns zetafunktion $\zeta(s)$ är absolutkonvergent för $\operatorname{Re} s > 1$.

Vidare anmärker vi att $r_1(\tau)$ har en lägsta begränsning för varje rektangel R, vilket är varför vi har en majorerande funktion på varje sådant område. Weierstraß majorantsats ger därmed att $G_k(\tau)$ konvergerar likformigt på R, vilket avslutar beviset. □

Eftersom alla termer i E_k finns i G_k kan vi använda samma majorerande serie på E_k.

Följdsats 3.2. *För $k > 2$ är E_k absolutkonvergent på $\mathbb{H}$ samt likformigt konvergent på alla rektanglar $\big\{\tau \in \mathbb{H} : x_0 \leq x \leq x_1,\ y \geq y_0 > 0\big\}$.*

Med konvergens bevisad för båda serierna kan vi till slut visa hur G_k och E_k förhåller sig till varandra.

Proposition 3.3. *För $k > 2$ uppfyller G_k och E_k relationen*

$$G_k(\tau) = 2\,\zeta(k)\,E_k(\tau).$$

Bevis. Notera att givet $(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ finns ett unikt par (c',d') så att $(c,d) = n \cdot (c',d')$ där $n = \gcd(c,d)$. Eftersom G_k är absolutkonvergent kan vi byta ordning på summationen:

$$G_k(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gcd(c,d)=n} \frac{1}{(c\tau+d)^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \sum_{\gcd(c',d')=1} \frac{1}{(c'\tau+d')^k} = 2\,\zeta(k)\,E_k(\tau).$$

□

Tillräckligt mycket teori är nu på plats för oss att kunna formulera det som nämns redan i inledningen: Eisensteinserier av första ordningen är första ordningens modulära former.

Sats 3.4. *För heltalsvikt $k > 2$ är G_k och E_k modulära former av $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ och vikt k.*

Bevis. För att visa att E_k är invariant under streckverkan av $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ observerar vi att

$$E_k\big|_k\gamma = \sum_{[\delta] \in \Gamma_\infty^+ \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \big(1\big|_k\delta\big)\big|_k\gamma = \sum_{[\delta] \in \Gamma_\infty^+ \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} 1\big|_k\delta\gamma = E_k,$$

där sista likheten följer av koordinatbytet $\delta \mapsto \delta\gamma^{-1}$, att $\big(\Gamma_\infty^+ \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)\gamma^{-1} = \Gamma_\infty^+ \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tillsammans med absolutkonvergens. Därav är E_k och G_k invarianta under streckverkan av $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, och likformig konvergens innebär att funktionerna är holomorfa. Beviset av proposition 3.1 innebär också att G_k är begränsad på rektanglar $[0,1] + i[y_0,\infty)$, som på grund av 1-periodicitet är giltig för alla $x+iy$ med $y > y_0$, vilket är precis vad vi menar med att funktionen är begränsad när $\tau \to i\infty$. □

3.1 Fourierserieutveckling

Genom att minnas proposition 2.9 kan vi nu med säkerhet säga att varje första ordningens Eisensteinserie har en Fourierserieutveckling. Vi har dock i inledningen sett att den explicita serieutvecklingen är av intresse, inte bara det faktum att den existerar, vilket är varför vi nedan presenterar en härledning av denna.

I följande bevis kommer Lipschitz summationsformel att användas för att härleda Fourierserieutvecklingen av första ordningens Eisensteinserie. Av platsskäl har vi lämnat formulering och flera bevis av summationsformeln i appendix C.1.

Sats 3.5. *Låt G_k ha jämn heltalsvikt $k > 2$. Då har G_k Fourierserieutvecklingen*

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n,$$

där $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$ summerar över alla positiva heltal som delar n.

Bevis. Eftersom serien är absolutkonvergent (se proposition 3.1) kan den skrivas om som

$$G_k(\tau) = \sum_{\substack{c,d\in\mathbb{Z}\\(c,d)\neq(0,0)}}\frac{1}{(c\tau+d)^k} = \sum_{d\in\mathbb{Z}_{\neq 0}}\frac{1}{d^k} + \sum_{c\in\mathbb{Z}_{\neq 0}}\sum_{d\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(c\tau+d)^k} = 2\zeta(k) + 2\sum_{c=1}^{\infty}\sum_{d\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(c\tau+d)^k},$$

eftersom k är jämnt. Genom Lipschitz summationsformel (se proposition C.1) erhåller vi att

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + 2\frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{c=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}m^{k-1}q^{mc} = 2\zeta(k) + 2\frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{d|n}d^{k-1}\Big)q^n,$$

där sista likheten följer från variabelbytena $mc \mapsto n$ och $m \mapsto d$ så att d delar n, vilket avslutar beviset. □

Med hjälp av denna sats och propositionen om förhållandet $G_k = 2\zeta(k)E_k$ (se proposition 3.3) kan vi utrycka Fourierserieutvecklingen av E_k. Använder vi dessutom förhållandet mellan Bernoullitalen B_k och Riemanns ζ-funktion,

$$\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k B_k}{2k!}$$

för jämna $k \geq 2$ (se sats F.3), vilket ger att

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n. \tag{3.1}$$

3.2 Eisensteinbasen för första nivåns modulära former

För att fördjupa förståelsen av vektorrummen av modulära former ägnar vi detta avsnitt åt att bestämma dimensionen av och en bas för $\mathrm{M}_k\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$. För att göra detta utnyttjas att den så kallade *modulära diskriminantfunktionen* (se appendix G) $\Delta \in \mathrm{M}_{12}\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$ är nollskild på $\mathbb{H}$ och har koefficient 0 och 1 för q^0- respektive q^1-termen i dess Fourierserieutveckling vid spetsen $i\infty$ (se sats G.5). Det tillåter oss att inducera över vikten k med hjälp av basfallen nedan.

Proposition 3.6. *Om k är udda eller negativ är* $\dim \mathrm{M}_k\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big) = 0$.

Bevis. Låt $f \in \mathrm{M}_k\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$. Om k är udda måste f vara nollfunktionen eftersom $-1 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ och

$$f(\tau) = \big(f\big|_k - 1\big)(\tau) = (-1)^k f(\tau) = -f(\tau).$$

Betrakta nu fallet då $k < 0$. Skriv f som en Taylorserie i q, $f(\tau) = F(q)$ enligt sats 2.9. För varje $y > 0$ inför vi en cirkel med radie $|q| = e^{-2\pi y}$, så att $|F(q)| \geq Cy^{-k/2}$ på cirkeln enligt lemma 2.10. Detta tillåter oss att uppskatta Fourierkoefficienterna:

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\frac{F(q)}{q^{n+1}}\,\mathrm{d}q\right| \leq Cy^{-k/2}e^{2\pi n y}.$$

Uppskattningen gäller för alla $y > 0$, så via gränsvärdet $y \to 0$ ser vi att $a_n = 0$. □

Proposition 3.7. *Dimensionen av* $\mathrm{M}_k\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$ *är* 0 *för* $k = 2$*, och* 1 *för* $k \in \{0, 4, 6, 8, 10\}$.

Bevis. Antag först att $k \in \{4, 6, 8, 10\}$. Låt $f \in \mathrm{M}_k\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$ med Fourierkoefficienterna a_n för $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Notera att $f(\tau) - a_0 E_k(\tau) \in \mathrm{M}_k\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$ vars gränsvärde är 0 då $\tau \to i\infty$. Genom division med den modulära diskriminantfunktionen erhålles att

$$\frac{f(\tau) - a_0 E_k(\tau)}{\Delta(\tau)} = \frac{a_1 q + \mathcal{O}(q^2)}{q + \mathcal{O}(q^2)} = \frac{a_1 + \mathcal{O}(q)}{1 + \mathcal{O}(q)} \longrightarrow a_1$$

då $q \to 0$, vilket är ekvivalent med att $\tau \to i\infty$. Därmed är $\big(f(\tau) - a_0 E_k(\tau)\big)/\Delta(\tau)$ begränsad då $\tau \to i\infty$, och är därför en modulär form av vikt $k - 12$ (se proposition 2.8). Men $k - 12 < 0$, så det måste vara nollfunktionen (se proposition 3.6). Detta ger att $f(\tau) = a_0 E_k(\tau)$ för alla $\tau \in \mathbb{H}$, och därmed är $\dim \mathrm{M}_k\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big) = 1$.

För $k = 0$ ser vi på samma sätt att $(f - a_0)/\Delta = 0$, så $f = a_0$ och $\dim \mathrm{M}_0\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big) = 1$.

Antag nu att $k = 2$ och låt $f \in \mathrm{M}_k\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$. Då är $f(i) = 0$ eftersom

$$f(i) = \big(f\big|_2 S\big)(i) = i^{-2} f(-1/i) = -f(i). \tag{3.2}$$

Vidare är $f^2 \in \mathrm{M}_4\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$ (se proposition 2.8), och eftersom $\dim \mathrm{M}_4\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big) = 1$ finns ett $c_0 \in \mathbb{C}$ sådant att $f^2 = c_0 E_4$. Från (3.1) har vi att

$$E_4(i) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) e^{-2\pi n} > 1 \tag{3.3}$$

eftersom termerna i summan är strikt större än 0. Alltså måste $c_0 = 0$, vilket medför att $f = 0$. Därmed är $\dim \mathrm{M}_2\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big) = 0$, vilket avslutar beviset. □

En konsekvens av proposition 3.7 är att $E_4^2 = E_8$. Båda funktionerna är nämligen element i $\mathrm{M}_8\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$, som är 1-dimensionell, vilket ger att det finns ett $c \in \mathbb{C}$ sådan att $E_4^2 = cE_8$. Eftersom den konstanta termen i Fourierserieutvecklingen är 1 både för E_4^2 och E_8 måste $c = 1$. På samma sätt blir $E_4 E_6 = E_{10}$.

Med undantag för udda vikter har vi hittills bara betraktat $k < 12$. Detta visar sig dock, på grund av symmentrin som återfinns kring $k = 12$, vara tillräckligt för att härleda ett uttryck för $\dim \mathrm{M}_k\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$ för godtyckligt $k \in \mathbb{Z}$.

Sats 3.8. *För varje heltal* k *är* $\mathrm{M}_k\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$ *ändligdimensionellt. För jämna* $k \geq 0$ *ges dimensionen av*

$$\dim \mathrm{M}_k\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big) = \begin{cases} \lfloor k/12 \rfloor & \text{om } k \equiv 2 \pmod{12}, \\ \lfloor k/12 \rfloor + 1 & \text{om } k \not\equiv 2 \pmod{12}. \end{cases}$$

Bevis. Vi vet redan från proposition 3.6 och 3.7 att resultatet gäller då $k < 12$ eller k är udda. Antag därför att $k \geq 12$ är jämnt och låt $f \in \mathrm{M}_k\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$ där $a_0 = \lim_{\tau \to i\infty} f(\tau)$. Med samma argument som i beviset för proposition 3.7 har vi att $(f - a_0 E_k)/\Delta = g \in \mathrm{M}_{k-12}\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$, eller omskrivet $f = a_0 E_k + g\Delta$. Eftersom varje f kan skrivas på den formen är avbildningen

$$\phi : \mathbb{C} \times \mathrm{M}_{k-12}\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big) \ni (c, g) \longmapsto cE_k + g\Delta \in \mathrm{M}_k\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$$

surjektiv. För injektivitet, anta att $\phi(c_0, g) = \phi(\tilde{c}_0, \tilde{g})$ för några $c_0, g, \tilde{c}_0$ och $\tilde{g}$. Vi ser att $\phi(c_0 - \tilde{c}_0, g - \tilde{g}) = 0$, och därmed är dess Fourierkoefficienter $a_n = 0$. Då är $c_0 = \tilde{c}_0$ som följd av att Δ inte har någon konstant term i dess Fourierserieutveckling. Då måste även $g = \tilde{g}$, vilket visar injektivitet.

Eftersom ϕ är bijektiv är $\mathbb{C} \times \mathrm{M}_{k-12}\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$ och $\mathrm{M}_k\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$ isomorfa. Detta ger att

$$\dim \mathrm{M}_k\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big) = 1 + \dim \mathrm{M}_{k-12}\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big),$$

och formeln för $\dim \mathrm{M}_k\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$ följer av induktion på k från basfallen i proposition 3.7. □

Notera att E_4^3 och E_6^2 är element i $\mathrm{M}_{12}\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$. Eftersom $\dim \mathrm{M}_{12}\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big) = 2$ betyder detta att $\{E_4^3, E_6^2\}$ antingen utgör en bas för $\mathrm{M}_{12}\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$ eller är skalärmultiplar av varandra. Om de vore skalärmultiplar av varandra, så skulle de vara lika, eftersom bådas Fourierserieutveckling har konstant term 1 och Fourierkoefficienter är unika. Koefficienten för q^1-termen är emellertid 720 för E_4^3 medan den är -1008 för E_6^2. Alltså har vi en motsägelse och E_4^3 och E_6^2 måste därför utgöra en bas för $\mathrm{M}_{12}\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$.

För att bestämma en bas för $\mathrm{M}_k\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$ för godtyckligt jämnt $k \geq 4$ noterar vi att vi kan skriva $k = 4a + 6b$, för några icke-negativa heltal a och b. Detta är idén till följande resultat.

Sats 3.9. *För jämna $k \geq 0$ utgör Eisensteinbasen $\mathcal{E} = \big\{E_4^a E_6^b : a, b \geq 0,\ 4a + 6b = k\big\}$ en bas för $\mathrm{M}_k\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$.*

Bevis. Genom jämförelse av antalet icke-negativa heltalslösningar till ekvationen $4a + 6b = k$ (se följdsats B.3) och dimensionen av $\mathrm{M}_k\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$ för jämna $k \geq 0$ (se sats 3.8), ser vi att $\mathcal{E}$ har rätt antal element. Det återstår att visa att elementen är linjärt oberoende.

Enligt (3.3) är $E_4(i) > 0$. Vidare såg vi i (3.2) att alla modulära former av vikt 2 är noll i $\tau = i$. Eftersom $i^6 = i^2$ erhåller vi med samma argument att $E_6(i) = 0$. Om $k \leq 12$ är elementen i $\mathcal{E}$ trivialt linjärt oberoende eftersom $\dim \mathrm{M}_k\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big) \leq 1$ för $k \leq 10$ och vi har bevisat att de är linjärt oberoende för $k = 12$. Låt därför $k > 12$ och antag det finns $C_{a,b} \in \mathbb{C}$ så att

$$\sum_{\substack{4a+6b=k \\ a,b\geq 0}} C_{a,b} E_4^a(\tau) E_6^b(\tau) = 0$$

för alla $\tau \in \mathbb{H}$. Låter vi $\tau = i$ ser vi att enbart en term med $b = 0$ kan vara nollskilld då $E_6(i) = 0$ medan $E_4(i) > 0$. Detta ger att koefficienter $C_{a,0} = 0$. Då vi nu är säkra om att vi i alla termer har E_6, delar vi med E_6. Genom induktion på b blir resterande koefficienter 0 vilket visar linjärt oberoende. □

4 Andra ordningens modulära former

Hittils har teorin enbart beträffat första ordningens modulära former, men likt många andra matematiska konstruktioner kan även dessa generaliseras. Lägger vi till ytterligare en möjlighet för invarians kan andra ordningens modulära former erhållas.

Definition 4.1. Låt Γ vara en kongruensdelgrupp och låt $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ vara holomorf. Vi säger då att f är en *andra ordningens modulär form* av heltalsvikt k om

1) $f\big|_k(\gamma - 1)(\delta - 1) = 0$ för alla $\gamma, \delta \in \Gamma$,
2) $\big(f\big|_k\gamma\big)(\tau)$ är begränsad för alla $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ då $\tau \to i\infty$.

Rummet av dessa funktioner betecknas med $\mathrm{M}_k^2(\Gamma)$.

Slutligen noterar vi att då man betraktar kopplingen mellan första och andra ordningens modulära former är det av intresse att utvidga definitionerna genom att byta ut kravet om holomorfi till endast glatthet. Vi gör också det svagare begränsningskravet att $\big(f\big|_k\gamma\big)(\tau) \ll y^m$ för något $m \geq 0$ då $\tau \to i\infty$ för alla $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Rummet av första ordningens glatta modulära former betecknar vi $\widetilde{\mathrm{M}}_k(\Gamma)$. För andra ordningens glatta modulära former inför vi också den ytterligare begränsningen att

$$f\big|_k(\pi - 1) = 0 \quad \text{för alla paraboliska } \pi \in \Gamma$$

i syfte att dessa ska ha Fourierserieutvecklingar i alla spetsar. Rummen av dessa funktioner betecknar vi $\widetilde{\mathrm{M}}_k^2(\Gamma)$. Även om det är tydligt att andra ordningens modulära former är en generalisering av första ordningens modulära former, är det ännu inte tydligt om vilka relationer dessa rum har. I kommande delavsnitt ska vi därför försöka illustrera detta för glatta modulära former. Därefter ges ett exempel på en andra ordningens modulär form för godtycklig kongruensdelgrupp Γ. Till sist introducerar vi aritmetiska typer och periodpolynom, vilka används för att kunna betrakta en sorts generaliserade andra ordningens Eisensteinserier för $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ för vilka vi härleder Fourierserieutvecklingar.

4.1 Kopplingar till första ordningens modulära former

De resultat som här presenteras är en grundligare genomgång av resultat från Chinta *et al.* i [CDO02]. Vi vill anmärka att ett starkare resultat har erhållits av Diamantis och O'Sullivan i [DO08], men att denna teori är mer komplicerad då den innefattar studien av Poincaréserier, en generalisering av Eisensteinserier, vilket ligger utanför arbetets omfång.

Minns att andra ordningens glatta modulära former är utvidgningen av andra ordningens modulära former till att inkludera glatta funktioner, med begränsningen att de behöver vara invarianta under streckverkan av paraboliska element. Vår förståelse av relationerna mellan detta rum och första ordningens modulära former börjar med att betrakta följande relation.

Lemma 4.1. *Låt f vara en andra ordningens modulär form för kongruensdelgruppen Γ. Då gäller det för alla elliptiska element $\epsilon \in \Gamma$ att $f\big|_k(\epsilon - 1) = 0$.*

Bevis. Eftersom elliptiska element har ändlig ordning (se sats 2.4), existerar det heltal $n > 1$ så att

$$f\big|_k(\epsilon-1) = f\big|_k(\epsilon^{n+1}-1) = f\big|_k(\epsilon-1)(1+\epsilon+\cdots+\epsilon^n)$$
$$= (n+1)f\big|_k(\epsilon-1) + \sum_{j=0}^{n} f\big|_k(\epsilon-1)(\epsilon^j-1) = (n+1)f\big|_k(\epsilon-1),$$

vilket visar att $f\big|_k(\epsilon - 1) = 0$. □

Redan nu kan den triviala relationen mellan första och andra ordningens modulära former finnas. Om en kongruensdelgrupp Γ har genus $g = 0$ har Γ inga hyperboliska generatorer (se proposition 2.7). Att Γ då genereras av enbart elliptiska och paraboliska element och att alla $f \in \widetilde{\mathrm{M}}_k^2(\Gamma)$ är invarianta under streckverkan av dessa element, gäller det att $\widetilde{\mathrm{M}}_k^2(\Gamma) = \widetilde{\mathrm{M}}_k(\Gamma)$.

För att betrakta icke-triviala relationer är nästa steg är att introducera $\mathrm{Hom}_0(\Gamma, \mathbb{C})$ som de homomorfier vilka avbildar paraboliska element $\pi \in \Gamma$ på $0 \in \mathbb{C}$. En bas för dessa homomorfier ges av L_j för $j = 1, \ldots, 2g$ genom $L_j(\gamma_m) = \delta_{jm}$ då γ_m är en hyperbolisk generator, medan $L_j = 0$ för resterande generatorer. Med en väl utvald bas $h_1, \ldots, h_g$ för $\mathrm{S}_2(\Gamma)$ (se proposition 2.12) påstår vi att vi kan skriva

$$L_j(\gamma) = \begin{cases} \mathrm{Re}\langle \gamma, h_j \rangle & \text{om } 1 \le j \le g, \\ \mathrm{Im}\langle \gamma, h_{j-g} \rangle & \text{om } g+1 \le j \le 2g. \end{cases}$$

Sannerligen bildar högerledet en homomorfi (se proposition 2.13). I synnerhet är det ett element i $\mathrm{Hom}_0(\Gamma, \mathbb{C})$, då paraboliska element har fixpunkter i $\mathbb{H}^*$ (se proposition 2.5). För att visa att vi kan skriva L_j på detta sätt räcker det med att bevisa att högerledet bildar en bas för $\mathrm{Hom}_0(\Gamma, \mathbb{C})$ för varje bas $h_1, \ldots, h_g$. Detta görs med följande proposition från [GO03], vilket är ett specialfall av Eichler-Shimura-isomorfin för vikt $k = 2$, något vi bevisar i appendix D.

Proposition 4.2. *Låt $h_1, \ldots, h_g$ vara bas för $\mathrm{S}_2(\Gamma)$ för kongruensdelgruppen Γ. Då bildar funktionerna*

$$A_j(\gamma) = \mathrm{Re}\langle \gamma, h_j \rangle \qquad \textit{och} \qquad B_j(\gamma) = \mathrm{Im}\langle \gamma, h_j \rangle$$

en bas för $\mathrm{Hom}_0(\Gamma, \mathbb{C})$.

Eftersom $\langle \gamma, f \rangle$ är linjär med avseende på $f \in \mathrm{S}_2(\Gamma)$ återfinns det nu att L_j kan skrivas på det påstådda sättet. Det är möjligt att hitta funktioner $\Lambda_j(\tau)$ vilka uppfyller relationerna $L_j(\gamma) = \Lambda_j(\gamma\tau) - \Lambda_j(\tau)$, exempelvis genom

$$\Lambda_j(\tau) = \begin{cases} \mathrm{Re} \int_{i\infty}^{\tau} h_j(z)\,\mathrm{d}z & \text{om } 1 \le j \le g, \\ \mathrm{Im} \int_{i\infty}^{\tau} h_{j-g}(z)\,\mathrm{d}z & \text{om } g+1 \le j \le 2g. \end{cases}$$

Denna konstruktion kan tillika användas för att konstruera andra ordningens glatta modulära former från första ordningens glatta modulära former.

Lemma 4.3. *För $f_j \in \widetilde{\mathrm{M}}_k(\Gamma)$ gäller det att $\sum_{j=1}^{2g} f_j \Lambda_j \in \widetilde{\mathrm{M}}_k^2(\Gamma)$.*

Bevis. Beteckna summan som f och notera att $\Lambda_j(\tau)$ är glatt och går mot noll då $\tau \to i\infty$. Eftersom $f_j \ll y^m$ för något $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ då $\tau \to i\infty$, är f likaså. För att visa resterande villkor, noterar vi att streckverkan

$$\big(f\big|_k\gamma\big)(\tau) = \sum_{j=1}^{2g} (c\tau + d)^{-k} f_j(\gamma\tau)\Lambda_j(\gamma\tau)$$

är begränsad för alla $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ då $\tau \to i\infty$. För $\gamma \in \Gamma$ ser vi att $f|_k(\gamma - 1) = \sum f_j L_j(\gamma)$. I synnerhet är $f|_k(\pi - 1) = 0$ för paraboliska π. Beviset avslutas genom observationen

$$f\big|_k(\gamma - 1)(\delta - 1) = \sum_{j=1}^{2g} L_j(\gamma)\, f_j\big|_k(\delta - 1) = 0.$$

□

Det är alltså möjligt att konstruera andra ordningens glatta modulära former från första ordningens motsvarighet, men likväl är det möjligt att gå åt andra hållet. Nedan definierar vi en avbildning från $\widetilde{\mathrm{M}}_k^2(\Gamma)$ till en direkt summa av $\widetilde{\mathrm{M}}_k(\Gamma)$ (se definition A.8), visar att den är surjektiv för att slutligen använda den till att konstruera en exakt sekvens (se definition A.9).

Definition 4.2. Låt Γ vara en kongruensdelgrupp med genus $g \geq 1$. Då definierar vi

$$\xi : \widetilde{\mathrm{M}}_k^2(\Gamma) \ni f \longmapsto \big(f\big|_k(\gamma_1 - 1), \ldots, f\big|_k(\gamma_{2g} - 1)\big) \in \bigoplus_{j=1}^{2g} \widetilde{\mathrm{M}}_k(\Gamma).$$

Lemma 4.4. *Avbildningen ξ är surjektiv.*

Bevis. Låt $(f_1, \ldots, f_{2g}) \in \bigoplus_{j=1}^{2g} \widetilde{\mathrm{M}}_k(\Gamma)$ vara godtyckligt. Bildar vi $f = \sum_{j=1}^{2g} f_j \Lambda_j$ ser vi från beviset av lemma 4.3 att $\xi(f) = (f_1, \ldots, f_{2g})$. Eftersom $(f_1, \ldots, f_{2g})$ är godtyckligt är avbildningen surjektiv. □

Sats 4.5. *Låt kongruensdelgruppen Γ ha genus $g \geq 1$. Då är följande sekvens exakt:*

$$0 \longrightarrow \widetilde{\mathrm{M}}_k(\Gamma) \hookrightarrow \widetilde{\mathrm{M}}_k^2(\Gamma) \xrightarrow{\xi} \bigoplus_{j=1}^{2g} \widetilde{\mathrm{M}}_k(\Gamma) \longrightarrow 0.$$

Bevis. Den första delsekvensen följer av definitionen av exakt sekvens. Den andra delsekvensen följer av att $\widetilde{\mathrm{M}}_k(\Gamma) \subseteq \widetilde{\mathrm{M}}_k^2(\Gamma)$ och att $\widetilde{\mathrm{M}}_k(\Gamma) = \ker \xi$ (se definition A.7). Att den sista delsekvensen är surjektiv har redan visats i lemma 4.4, vilket avslutar beviset. □

4.2 En första konstruktion av andra ordningens Eisensteinserier

Med en känsla om andra ordningens modulära former är nästa steg att bekanta oss med exempel på andra ordningens modulära former, mer specifikt andra ordningens Eisensteinserier. För att generalisera teorin till godtyckliga kongruensdelgrupper Γ, betecknar vi

$$\tilde{\Gamma}_\infty^+ = \Gamma_\infty^+ \cap \Gamma.$$

Definition 4.3. För $f \in \mathrm{S}_2(\Gamma)$ av kongruensdelgruppen Γ definierar vi Eisensteinserien $H_{k,f}$ av heltalsvikt $k > 3$ som

$$H_{k,f}(\tau) = \sum_{[\gamma] \in \tilde{\Gamma}_\infty^+ \backslash \Gamma} \frac{\langle \gamma, f \rangle}{(c\tau + d)^k} = \sum_{[\gamma] \in \tilde{\Gamma}_\infty^+ \backslash \Gamma} \langle \gamma, f \rangle \big(1\big|_k\gamma\big)(\tau).$$

Det är inte självklart att denna serie är väldefinerad, så låt oss bekräfta detta. Vi vet redan att $1\big|_k\gamma$ är oberoende av representantval i $\tilde{\Gamma}_\infty^+\backslash\Gamma$. Eftersom elementen i $\tilde{\Gamma}_\infty^+$ är på formen $T^n \in \Gamma$ kan godtyckligt $\delta \in \tilde{\Gamma}_\infty^+\gamma$ skrivas som $\gamma = T^n\delta$, vilket ger

$$\langle \gamma, f\rangle = \langle T^n\delta, f\rangle = \langle T^n, f\rangle + \langle \delta, f\rangle = \langle \delta, f\rangle,$$

där vi har utnyttjat att modulära symboler är homomorfier mellan Γ och $\mathbb{C}$ (se proposition 2.13) och att T^n har en fixpunkt i $i\infty$.

För att $H_{k,f}$ skall kunna visas vara en andra ordningens modulär form måste vi vara övertygade om att den är absolut och likformigt konvergent. Med orsak av detta formuleras följande proposition.

Proposition 4.6. *Låt $k > 3$ vara ett heltal. Då är $H_{k,f}$ absolutkonvergent på $\mathbb{H}\cup\{i\infty\}$ och likformigt konvergent på rektanglar $\{z \in \mathbb{H}^* : x_1 \le x \le x_2,\ y \ge y_0 > 0\}$.*

Bevis. Genom den övre begränsningen av modulära symboler (se proposition 2.14) återfinns det att

$$\frac{\langle \gamma, f\rangle}{(c\tau + d)^k} \ll_f \frac{|c|}{|c\tau + d|^k}. \tag{4.1}$$

Eftersom $\tilde{\Gamma}_\infty^+\backslash\Gamma \subseteq \Gamma_\infty^+\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ finner vi genom en naturlig utvidgning av beviset för absolutkonvergens av G_k (se proposition 3.1) att påståendet stämmer. □

Sats 4.7. *För heltal $k > 3$ gäller det att $H_{k,f} \in \mathrm{M}_k^2(\Gamma)$.*

Bevis. För $\gamma \in \Gamma$ har vi att

$$H_{k,f}\big|_k\gamma = \sum_{[\delta]\in\tilde{\Gamma}_\infty^+\backslash\Gamma} \langle \delta, f\rangle\big(1\big|_k\delta\gamma\big) = \sum_{[\delta]\in\tilde{\Gamma}_\infty^+\backslash\Gamma} \langle \delta\gamma^{-1}, f\rangle\big(1\big|_k\delta\big) = H_{k,f} - \langle \gamma, f\rangle \sum_{[\delta]\in\tilde{\Gamma}_\infty^+\backslash\Gamma} \big(1\big|_k\delta\big),$$

där andra likheten utnyttjar koordinatbytet $\delta \mapsto \delta\gamma^{-1}$. Här är sista termen en första ordningens Eisensteinserie av vikt k för kongruensdelgruppen Γ, vilket för $\gamma, \delta \in \Gamma$ ger att

$$H_{k,f}\big|_k(\gamma - 1)(\delta - 1) = 0.$$

Det återstår att visa att $\big(H_{k,f}\big|_k\gamma\big)(\tau)$ är begränsad då $\tau \to i\infty$ för $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Fixera ett sådant γ och låt $\tau \in \mathbb{H}$, så att vi likt (4.1) kan göra begränsningen

$$\begin{aligned}\big(H_{k,f}\big|_k\gamma\big)(\tau) &\ll_f \sum_{[\delta]\in\tilde{\Gamma}_\infty^+\backslash\Gamma} \big|c(\delta)\cdot\big(1\big|_k\delta\gamma\big)(\tau)\big| \le \sum_{[\delta]\in\Gamma_\infty^+\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \big|c(\delta)\cdot\big(1\big|_k\delta\gamma\big)(\tau)\big| \\ &= \sum_{[\delta]\in\Gamma_\infty^+\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{|c(\delta)d(\gamma) - d(\delta)c(\gamma)|}{|c(\delta)\tau + d(\delta)|^k} \le \max\big\{|c(\gamma)|, |d(\gamma)|\big\} \sum_{[\delta]\in\Gamma_\infty^+\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{|c(\delta)| + |d(\delta)|}{|c(\delta)\tau + d(\delta)|^k},\end{aligned}$$

där andra olikheten följer av att $\tilde{\Gamma}_\infty^+\backslash\Gamma \subseteq \Gamma_\infty^+\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Denna konvergerar likformigt på rektanglar $\{z \in \mathbb{H}^* : x_1 \le x \le x_2,\ y \ge y_0 > 0\}$ och är därmed begränsad då $\tau \to i\infty$, vilket avslutar beviset. □

4.3 Aritmetiska typer och periodpolynom

Generaliseringen av Eisensteinserier till en andra ordningens modulär form är alltså fullt möjlig. Med denna insikt ligger frågan om vilka andra generaliseringar som kan göras nära till hands. I detta delavsnitt introducerar vi två begrepp, aritmetiska typer och periodpolynom, vilka vi använder för att konstruera generaliserade andra ordningens Eisensteinserier.

Vi kallar ändligdimensionella komplexa representationer av delgrupper $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ med ändligt index för *aritmetiska typer* (för definition av en representation, se definition A.12). I synnerhet är vi intresserade av symmetriska potenser av standardrepresentationen, $\mathrm{sym}^{\mathsf{d}}(\mathrm{std})$, eftersom varje komplex,

icke-reducerbar och ändligdimensionell representation för $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ är isomorf med $\mathrm{sym}^{\mathsf{d}}(\mathrm{std})$. Även om konstruktionen av $\mathrm{sym}^{\mathsf{d}}(\mathrm{std})$ kan göras formellt, räcker det för våra ändamål att modellera denna representation genom

$$\Big(\sum_{j=0}^{\mathsf{d}} v_j X^j\Big)\gamma = \sum_{j=0}^{\mathsf{d}} v_j (aX+b)^j (cX+d)^{\mathsf{d}-j} \qquad \text{för} \quad \sum_{j=0}^{\mathsf{d}} v_j X^j \in V,$$

där V är rummet av polynom med komplexvärda koefficienter och högst grad d.

Med dessa representationer kan vi då skapa *periodpolynom*. I detta arbete kommer de betraktas som en formell konstruktion, men de härstammar från området kohomologi och är egentligen ett fall av 1-kocykler. Artikeln av Paşol och Popa [PP13] diskuterar detta i detalj.

Definition 4.4. Låt element i kongruensdelgruppen Γ verka på ett vektorrum V som en aritmetisk typ. Då definierar vi *periodpolynomen* av denna representation som funktionerna $\phi : \Gamma \to V$ vilka uppfyller relationerna

$$\phi(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)) = 0 \qquad \text{och} \qquad \phi(\gamma\delta) = \phi(\gamma)\delta + \phi(\delta),$$

för alla $\gamma, \delta \in \Gamma$.

Observera att det direkt från definition 4.4 följer att $\phi(\pm T^n) = 0$ för alla $n \in \mathbb{Z}$ så att $\pm T^n \in \Gamma$, där det i synnerhet gäller att $\phi(-1) = 0$ om $-1 \in \Gamma$. Det kan oberveras att det existerar en avbildning som tar element från kvotmängden $\tilde{\Gamma}_\infty^+ \backslash \Gamma$ till ett periodpolynom, vilket vi formulerar i följande proposition.

Proposition 4.8. *Låt ϕ vara ett periodpolynom för Γ. Då är följande avbildning väldefinierad:*

$$\widetilde{\phi} : \tilde{\Gamma}_\infty^+ \backslash \Gamma \ni \Gamma_\infty^+ \gamma \longmapsto \phi(\gamma) \in V.$$

Bevis. Låt $\tilde{\Gamma}_\infty^+ \gamma = \tilde{\Gamma}_\infty^+ \delta$ för några $\gamma, \delta \in \Gamma$. Eftersom $\gamma = T^n \delta$ för något $T^n \in \tilde{\Gamma}_\infty^+$ följer satsen av att

$$\phi(\gamma) = \phi(T^n\delta) = \phi(T^n)\delta + \phi(\delta) = \phi(\delta).$$

□

Begränsar vi oss till $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ erhåller vi ett intressant resultat.

Proposition 4.9. *Periodpolynom för $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ bestäms entydigt av sitt värde i generatorn S.*

Bevis. Från sats 2.1 vet vi att varje $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ med $c \neq 0$ kan skrivas på formen $\gamma = \pm T^m S T^{\alpha_l} \cdots S T^{\alpha_0}$ för några heltal $m, \alpha_0, \ldots, \alpha_l$. Genom ordnade produkter över gruppelementen erhåller vi att

$$\phi(\gamma) = \phi(\pm T^m) \prod_{j=0}^{l} S T^{\alpha_{l-j}} + \phi\Big(\prod_{j=0}^{l} S T^{\alpha_{l-j}}\Big) = \phi\Big(\prod_{j=0}^{l} S T^{\alpha_{l-j}}\Big) = \phi(S) T \prod_{j=1}^{l} S T^{\alpha_{l-j}} + \phi\Big(T \prod_{j=1}^{l} S T^{\alpha_{l-j}}\Big)$$

$$= \phi(S) T \prod_{j=1}^{l} S T^{\alpha_{l-j}} + \phi\Big(\prod_{j=1}^{l} S T^{\alpha_{l-j}}\Big) = \cdots = \phi(S)\big(T^{\alpha_l} S T^{\alpha_{l-1}} \cdots S T^{\alpha_0} + \cdots + T^{\alpha_1} S T^{\alpha_0} + T^{\alpha_0}\big),$$

vilket visar fallet då $c \neq 0$. Eftersom $\phi(\gamma) = 0$ då $c = 0$ erhåller vi vad som skulle visas. □

Slutligen betraktar vi periodpolynom av $\mathrm{sym}^{\mathsf{d}}(\mathrm{std})$, vilka begagnas i efterföljande avsnitt för att konstruera generaliserade andra ordningens Eisensteinserier. För att serien skall vara möjlig att betrakta behöver en övre begränsning av periodpolynom av $\mathrm{sym}^{\mathsf{d}}(\mathrm{std})$ etableras. Vi redogör detta i följande proposition och följdsats, vilka är starkare resultat än vad som erhölls i lemma 4.6 i [MR17].

Proposition 4.10. *Låt ϕ vara ett periodpolynom för $\mathrm{sym}^{\mathsf{d}}(\mathrm{std})$ av $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ och låt $\|\cdot\|$ beteckna godtycklig p-norm. För $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ med $c \neq 0$ och längd l gäller det att*

$$\|\phi(\gamma)\| \leq 2^{l+1-[|c|>|d|]} (2^{\mathsf{d}}+1)^{l-[|c|>|d|]} \|\phi(S)\| \big(|c|+|d|\big)^{\mathsf{d}} + \big[|c|>|d|\big] \|\phi(S)\|.$$

Bevis. Notera att verkan av S på V bara är en omordning av element upp till elementvis multiplikation av ± 1, vilket är varför $\|vS\| = \|v\|$ för $v \in V$. Vidare uppskattar vi för T^n där $n \neq 0$ att

$$\|vT^n\| = \Big\|\sum_{j=0}^{\mathsf{d}} v_j \sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m} X^m n^{j-m}\Big\| \leq \|v\| \sum_{j=0}^{\mathsf{d}} \big(1+|n|\big)^j \leq 2\big(1+|n|\big)^{\mathsf{d}} \|v\|.$$

Vi bevisar induktivt. För $l = 0$ och $\alpha_0 = 0$ har vi att $\|\phi(\gamma)\| = \|\phi(S)\|$ och för $\alpha_0 \neq 0$ har vi att

$$\|\phi(\gamma)\| = \big\|\phi(\pm T^m S T^{\alpha_0})\big\| = \big\|\phi(S)T^{\alpha_0}\big\| \leq 2\big(1+|\alpha_0|\big)^{\mathsf{d}} \|\phi(S)\|,$$

och basfallet är därmed visat eftersom $c = \pm 1$ och $d = \pm\alpha_0$. Nu gör vi induktionsantagandet för δ med längd $l-1$ där $|d(\delta)| > |c(\delta)| > 0$. Vi låter $\gamma = \delta S T^{\alpha_0}$ så att γ har längd l med relationerna $d(\delta) = c(\gamma)$ och $c(\delta) = \alpha_0 c(\gamma) - d(\gamma)$. Om $|d(\gamma)| > |c(\gamma)|$ gäller det att $0 \neq |\alpha_0| < |d(\gamma)/c(\gamma)|$ och därför är

$$\|\phi(\gamma)\| = \big\|\phi(\delta S)T^{\alpha_0}\big\| \leq 2\big(1+|\alpha_0|\big)^{\mathsf{d}} \big(\|\phi(\delta)\| + \|\phi(S)\|\big) \leq 2^{l+1}(2^{\mathsf{d}}+1)^l \|\phi(S)\| \big(|c(\gamma)| + |d(\gamma)|\big)^{\mathsf{d}}.$$

I det fall då $\gamma = \delta S T^{\alpha_0}$ är sådant att $|c(\gamma)| > |d(\gamma)|$ har vi enligt Euklides algoritm att $\alpha_0 = 0$ (relationen mellan längden av γ och Euklides algoritm kan ses i beviset för sats 2.1), och vi kan på så sätt visa detta fall med hjälp av det som redan har erhållits:

$$\|\phi(\gamma)\| \leq \|\phi(\delta)\| + \|\phi(S)\| \leq 2^l \big(2^{\mathsf{d}}+1\big)^{l-1} \|\phi(S)\| \big(|c(\gamma)| + |d(\gamma)|\big)^{\mathsf{d}} + \|\phi(S)\|.$$

Detta avslutar beviset. □

Följdsats 4.11. *Periodpolynomet ϕ för $\mathrm{sym}^{\mathsf{d}}(\mathrm{std})$ av $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ har den övre begränsningen*

$$\|\phi(\gamma)\| < 2^{\mathsf{d}+1} \|\phi(S)\| \big(|c|+|d|\big)^{\mathsf{d}} \min\big\{|c|,|d|\big\}^{(1+r_{\mathsf{d}})\log_\varphi 2} + \big[|c| > |d|\big] \|\phi(S)\|$$

där $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ och $r_{\mathsf{d}} = \log_2\big(1+2^{-\mathsf{d}}\big)$.

Bevis. Satsen följer av att längden av γ är övre begränsad av $\big[|c| > |d|\big] + \log_\varphi \min\big\{|c|,|d|\big\}$ (se följdsats B.7) och den övre begränsningen av ϕ enligt proposition 4.10. □

4.4 Fourierserie av generaliserade andra ordningens Eisensteinserier

Med tillräckligt mycket teori på plats är vi nu redo att konstruera *generaliserade andra ordningens Eisensteinserier*. Benämningen ”generaliserade” har författarna själva myntat eftersom de serier vi i detta avsnitt presenterar inte är andra ordningens modulära former, bortsett från vissa triviala val av periodpolynom. Varför dessa ändå betraktas är för att de dyker upp som komponenter i vissa *vektorvärda modulära former*, vilka Mertens och Raum i [MR17] visade generaliserar begreppen *högre ordningars modulära former*, *falska modulära former* och *itererade Eichler-Shimura-integraler*, där andra ordningens modulära former är en instans av högre ordningars modulära former.

Vi formulerar generaliserade andra ordningens Eisensteinserier i följande definition, men anmärker till läsaren att motsvarande Eisensteinserier kan erhållas vid begränsningen till kongruensdelgrupper Γ.

Definition 4.5. Låt ϕ vara ett periodpolynom av $\mathrm{sym}^{\mathsf{d}}(\mathrm{std})$ för $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Då definierar vi den *generaliserade andra ordningens Eisensteinserie* av ϕ och heltalsvikt k som

$$E_{k,\phi}(\tau) = \sum_{[\gamma] \in \Gamma_\infty^+ \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \big(\phi(\gamma)\big|_k \gamma\big)(\tau) = \sum_{\gcd(c,d)=1} \frac{\phi(c,d)}{(c\tau+d)^k},$$

för $\tau \in \mathbb{H} \cup \{i\infty\}$. Att $E_{k,\phi}$ är väldefinierad och att andra likheten gäller följer från proposition 4.8.

Vore vi att välja ϕ som periodpolynomet av den triviala representationen ser vi att $\phi \in \mathrm{Hom}(\Gamma, V)$. Vid vidare begränsningen att $\phi(\pi) = 0$ för alla paraboliska $\pi \in \Gamma$, ser vi att $\phi \in \mathrm{Hom}_0(\Gamma, V)$ vilket kan identifieras med en modulär symbol, varpå $E_{k,\phi}$ kan identifieras med $H_{k,f}$ (se definition 4.3). Då $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ får vi emellertid att $H_{k,f} = 0$ eftersom $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ genereras av det elliptiska elementet S och paraboliska elementet T, så i syfte att kunna erhålla intressanta resultat bör därför $E_{k,\phi}$ studeras för periodpolynomet ϕ till $\mathrm{sym}^{\mathsf{d}}(\mathrm{std})$ med $\mathsf{d} > 0$.

Liksom vid studien av de tidigare definierade Eisensteinserier är det första steget även för $E_{k,\phi}$ att undersöka dess konvergens. Vi formulerar därför följande proposition.

Proposition 4.12. *Låt $k > 2 + (1 + r_{\mathsf{d}}) \log_\varphi 2 + \mathsf{d}$ vara ett heltal och låt ϕ vara ett periodpolynom för $\mathrm{sym}^{\mathsf{d}}(\mathrm{std})$ av $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Då är $E_{k,\phi}$ absolutkonvergent på $\mathbb{H} \cup \{i\infty\}$ och likformigt konvergent på rektanglar $\{z \in \mathbb{H}^* : x_1 \le x \le x_2,\ y \ge y_0 > 0\}$.*

Bevis. Vi generaliserar beviset av proposition 3.1 och behåller notationen därifrån. Vid beteckning av $m(\mathsf{d}) = \mathsf{d} + (1 + r_{\mathsf{d}}) \log_\varphi 2$ erhåller vi genom följdsats 4.11 att

$$\Big\| \sum_{\substack{(c,d)=1 \\ |c|,|d| \le N}} \frac{\phi(c,d)}{(c\tau + d)^k} \Big\| \ll_\phi \sum_{\substack{(c,d)=1 \\ |c|,|d| \le N}} \frac{\big(|c| + |d|\big)^{m(\mathsf{d})}}{|c\tau + d|^k} \ll_\phi \sum_{n=1}^{N} \sum_{\omega \in M_n(\tau)} \frac{n^{m(\mathsf{d})}}{|\omega|^k} = 8\, r_1^{-k}(\tau) \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{k - m(\mathsf{d}) - 1}}.$$

För alla $k > 2 + m(\mathsf{d})$ konvergerar summan då $N \to \infty$, vilket visar absolutkonvergens. Likformig konvergens följer då av Weierstraß majorantsats. □

Även om $E_{k,\phi}$ på egen hand inte utgör en modulär form, kan vi trots detta ta fram en "generaliserad" Fourierserieutveckling av den, där Fourierkoefficienterna är τ-beroende. Varför $E_{k,\phi}(\tau)$ i det generella fallet inte har konstanta Fourierkoefficienter är för att funktionen inte är periodisk; den är inte invariant under streckverkan av T. Med hjälp av följdsats 4.11 och följande lemma, vilket är ett specialfall av lemma 6.1 i [MR17] och bevisas i avsnitt C.2, kan vi formulera denna Fourierserie.

Proposition 4.13 (Lipschitz polynomsummationsformel)**.** *Låt $\tau \in \mathbb{H}$ och $k > 2 + j$ för $k, j \in \mathbb{Z}_{>0}$. Då är*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(X+n)^j}{(\tau + n)^k} = -2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sum_{\beta=0}^{j} \binom{j}{\beta} \frac{(-2\pi i n)^{k-\beta-1}}{(k-\beta-1)!} \sum_{\lambda=0}^{j-\beta} \binom{j-\beta}{\lambda} X^\lambda (-\tau)^{j-\beta-\lambda}.$$

Sats 4.14. *Låt ϕ vara ett periodpolynom för $\mathrm{sym}^{\mathsf{d}}(\mathrm{std})$ av $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Då gäller det att*

$$E_{k,\phi}(\tau) = -2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sum_{c \in \mathbb{Z}_{\neq 0}} \frac{1}{c^k} \sum_{d \,(\mathrm{mod}\, c)^\times} \exp\big(2\pi i \tfrac{nd}{c}\big) \sum_{j=0}^{\mathsf{d}} \phi_j(c,d) \sum_{\beta=0}^{j} \binom{j}{\beta} \frac{(-2\pi i n)^{k-\beta-1}}{(k-\beta-1)!} \sum_{\lambda=0}^{j-\beta} \binom{j-\beta}{\lambda} X^\lambda \Big(-\tau - \frac{d}{c}\Big)^{j-\beta-\lambda},$$

om $k \ge 2 + (1 + r_{\mathsf{d}}) \log_\phi 2 + \mathsf{d}$, där $\phi_j(c,d)$ är den $j$te komponenten i vektorn $\phi(c,d) = \sum v_j X^j$.

Bevis. Vi skriver

$$\begin{aligned} E_{k,\phi}(\tau) = \sum_{\gcd(c,d)=1} \frac{\phi(c,d)}{(c\tau + d)^k} &= \phi(0,1) + (-1)^{-k}\phi(0,-1) + \sum_{c \in \mathbb{Z}_{\neq 0}} \frac{1}{c^k} \sum_{\gcd(c,d)=1} \frac{\phi(c,d)}{\big(\tau + \frac{d}{c}\big)^k} \\ &= \sum_{c \in \mathbb{Z}_{\neq 0}} \frac{1}{c^k} \sum_{d \,(\mathrm{mod}\, c)^\times} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\phi(c, d + nc)}{\big(\tau + \frac{d}{c} + n\big)^k} = \sum_{c \in \mathbb{Z}_{\neq 0}} \frac{1}{c^k} \sum_{d \,(\mathrm{mod}\, c)^\times} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\phi(c,d) T^n}{\big(\tau + \frac{d}{c} + n\big)^k}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

där vi har använt proposition B.4 och att $\phi(0,\pm 1) = \phi(\pm 1) = 0$ i tredje likheten. Genom Lipschitz polynomsummationsformel erhåller vi att

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\phi(c,d)T^n}{\left(\tau+\frac{d}{c}+n\right)^k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sum_{j=0}^{\mathsf{d}} \phi_j(c,d)(X+n)^j}{\left(\tau+\frac{d}{c}+n\right)^k} = \sum_{j=0}^{\mathsf{d}} \phi_j(c,d) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(X+n)^j}{\left(\tau+\frac{d}{c}+n\right)^k}$$
$$= -2\pi i \sum_{j=0}^{\mathsf{d}} \phi_j(c,d) \sum_{n=1}^{\infty} q^n \exp\left(2\pi i \tfrac{nd}{c}\right) \sum_{\beta=0}^{j} \binom{j}{\beta} \frac{(-2\pi i n)^{k-\beta-1}}{(k-\beta-1)!} \sum_{\lambda=0}^{j-\beta} \binom{j-\beta}{\lambda} X^\lambda \left(-\tau-\frac{d}{c}\right)^{j-\beta-\lambda}.$$

Applicerar vi denna formel på (4.2) och omordnar den erhållna summan får vi det som skulle visas. □

5 Avslutande reflektioner

Kombinationen av litteraturstudier och handledning har väl tjänat syftet att fördjupa författarnas förståelse för modulära former och angränsande teori. Speciellt har studierna av matematiska artiklar gjort författarna mer bekväma med att tillgodogöra sig den moderna matematiska forskningen. Metoden har dessutom lämnat utrymme för författarna att utforska diverse tangerande områden.

I förhållande till syftet har alltså metoden givit goda resultat, resultat vilka kan delas in i två olika kategorier – författarnas ökade kunskap inom ämnena samt matematiska resultat. Den första kategorin avser författarnas ökade förståelse av modulära former och Eisensteinserier efter arbetets avslut, medan den andra kategorin avser de matematiska resultat som har fallit ur lärandeprocessen.

En objektiv diskussion kring författarnas förståelse av de studerade ämnena är ytterst svår att genomföra. Därför poängterar vi enbart att samtliga författare anser sig ha uppnått en tämligen god förståelse av grunderna inom modulära former och angränsande ämnen samtidigt som de också också blivit införstådda med hur mycket de ännu inte förstår. Vidare är de matematiska resultat som fallit ur lärandeprocessen, och inte återfinns i litteraturen, den övre begränsningen av periodpolynom för $\mathrm{sym}^{\mathsf{d}}(\mathrm{std})$ av $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ och Fourierserieutvecklingen av den generaliserade Eisensteinserien av andra ordningen, vilka ses i proposition 4.10 och proposition 4.14. Som tidigare nämnt är begränsningen av periodpolynom en starkare variant av lemma 4.6 i [MR17]. Första författaren förmodar dessutom att den övre begränsningen kan göras snävare och oberoende av längden av γ.

Vad beträffar fortsatt forskning skulle ännu intressantare resultat möjligen erhållas om den generaliserade Eisensteinserien undersöktes för kongruensdelgrupper $\Gamma \subsetneq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. För att visa konvergens för generaliserade Eisensteinserier för godtycklig kongruensdelgrupp måste dock nya begränsningar av periodpolynom erhållas, vilket sannolikt kräver en ökad förståelse av kohomologi. Ett första steg skulle kunna innebära att betrakta periodpolynom av kongruensdelgrupper med två spetsklasser.

Utöver de aspekter av Eisensteinseriers Fourierserier som i inledningen sägs vara intressanta är också deras egenskap att spänna upp vissa rum av modulära former av intresse. Vi har sett exempel på detta i avsnitt 3.2 där Fourierserieutvecklingen används för att visa att $\left\{E_4^a E_6^b : a,b \geq 0,\ 4a+6b=k\right\}$ för jämna $k \geq 0$ utgör en bas för $\mathrm{M}_k\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$. Eisensteinserierna har alltså ytterligare ett fullgott skäl för entusiasm.

Referenser

[CDO02] G. Chinta, N. Diamantis och C. O'Sullivan. "Second order modular forms". I: *Acta Arithmetica* 103.3 (2002), s. 209–223. DOI: 10.4064/aa103-3-2.

[Cre97] J. E. Cremona. "Algorithms for Modular Elliptic Curves". I: 2. utg. 1997. Kap. 2, s. 12. URL: https://homepages.warwick.ac.uk/~masgaj/book/fulltext/chapter2.pdf (hämtad 2021-03-05).

[DO08] Nikolaos Diamantis och Cormac O'Sullivan. "The dimensions of spaces of holomorphic second-order automorphic forms and their cohomology". I: *Trans. Amer. Math. Soc* 360.11 (juni 2008), s. 5629–5666.

[DS00] Fred Diamond och Jerry Shurman. 1. utg. New York, NY, USA: Springer, 2000. DOI: 10.1007/978-0-387-27226-9.

[GO03] Dorian Goldfeld och Cormac O'Sullivan. "Estimating Additive Character Sums for Fuchsian Groups". I: *The Ramanujan Journal* 7 (2003), s. 241–267. DOI: 10.1023/A:1026255414488.

[GR07] I.S. Gradshteyn och I.M. Ryzhik. I: *Table of Integrals, Series, and Products*. 7. utg. Cambridge, MA, USA: Academic Press, 2007. Kap. 1.431, s. 45. ISBN: 9780123736376.

[Hat02] Allen Hatcher. Cambridge, Storbrittanien: Cambridge University Press, 2002. ISBN: 0-521-79540-0.

[Iwa97] Henryk Iwaniec. Vol. 17. Providence, RI, USA: American Mathematical Society, 1997. ISBN: 0-8218-0777-3.

[Kna93] Anthony W. Knapp. I: *Elliptic Curves*. Vol. 40. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1993. Kap. 11, s. 317. ISBN: 9780691085593.

[MR17] Michael H. Mertens och Martin Raum. "Modular forms of virtually real-arithmetic type. Mixed mock modular forms yield vector-valued modular forms". I: (dec. 2017). URL: https://arxiv.org/abs/1712.03004v1 (hämtad 2021-03-23).

[OSu00] Cormac O'Sullivan. "Properties of Eisenstein series formed with modular symbols". I: *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 518 (jan. 2000), s. 163–186. DOI: 10.1515/crll.2000.003.

[PA01] Paul C. Pasles och Wladimir de Azevedo Pribitkin. "A generalization of the Lipschitz summation formula and some applications". I: *Proceedings of the American Mathematical Society* 129.11 (april 2001), s. 3177–3184. DOI: 10.1090/S0002-9939-01-06038-5.

[PP13] Vicenţiu Paşol och Alexandru A. Popa. "Modular forms and period polynomials". I: *Proceedings of the London Mathematical Society* 107.4 (febr. 2013), s. 713–743. DOI: 10.1112/plms/pdt003.

[RX20] Martin Raum och Jiacheng Xia. "All modular forms of weight 2 can be expressed by Eisenstein series". I: *Research in Number Theory* 6.32 (aug. 2020). DOI: 10.1007/s40993-020-00207-z.

[Shi94] Goro Shimura. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1994. ISBN: 0-691-08092-5.

[SS03] Elias M. Stein och Rami Shakarchi. Vol. 1. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 2003. ISBN: 978-0-691-11384-5.

[Sur03] B Sury. "Bernoulli numbers and the Riemann zeta function". I: *Resonance* 8.7 (2003), s. 54–62.

A Algebraiska termer och definitioner

Definition A.1. En *grupp* G är en mängd utrustad med en binär operation $\cdot : G \times G \to G$ så att

1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, (associativitet)
2) det finns ett $1 \in G$ så att $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, (identitet)
3) det finns ett $a^{-1} \in G$ så att $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$, (inverterbarhet)

för alla $a, b, c \in G$. Om det dessutom gäller att $a \cdot b = b \cdot a$ för alla $a, b \in G$ kallas gruppen *abelsk* eller *kommutativ*.

Definition A.2. En *ring* R är en mängd med de binära operationerna addition $+ : R \times R \to R$ och multiplikation $\cdot : R \times R \to R$ så att

1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ och $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, (associativitet)
2) $a + b = b + a$, (kommutativ addition)
3) det existerar $0, 1 \in R$ sådana att $a + 0 = a$ och $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, (identiteter)
4) det existerar $-a \in R$ sådant att $a + (-a) = 0$, (additativ invers)
5) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ och $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, (distributivitet)

för alla $a, b, c \in R$.

Definition A.3. En *kropp* K är en ring som dessutom uppfyller att

1) $a \cdot b = b \cdot a$, (kommutativ multiplikation)
2) om $a \neq 0$ finns ett $a^{-1} \in K$ så att $a \cdot a^{-1} = 1$, (multiplikativ invers)

för alla $a, b \in K$.

Definition A.4. Låt G vara en grupp och låt $H \subseteq G$. För ett givet $g \in G$ definierar vi då den (högra) *sidoklassen* av H genom

$$Hg = \big\{hg : g \in G\big\}.$$

Definition A.5. Låt G vara en grupp och låt $H \subseteq G$. Då definierar vi den (högra) *kvotmängden* $H\backslash G$ genom

$$H\backslash G = \big\{Hg : g \in G\big\}.$$

Två *representanter* $[a], [b] \in H\backslash G$ där $a, b \in G$ sägs då vara ekvivalenta om det finns något $h \in H$ så att $a = hb$.

Definition A.6. Låt A och B vara två algebraiska strukturer av samma typ. En *homomorfi* mellan dessa strukturer är då en avbildning mellan strukturerna som är strukturbevarande.

Exempelvis har vi för två grupper G och H med gruppoperationerna $\cdot$ respektive $\times$ att en homomorfin $f : G \to H$ uppfyller

$$f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) \times f(g_2)$$

för alla $g_1, g_2 \in G$.

Definition A.7. Låt f vara en grupphomomorfi mellan G och H. Vi säger då att *kärnan* av avbildningen f är

$$\ker f = \big\{g \in G : f(g) = 1\big\}.$$

Definition A.8. Låt $\{A_i\}_{i=1}^n$ vara en mängd ändligdimensionella vektorrum över kroppen K. Vi definierar då den *direkta summan* av dessa vektorrum som

$$\bigoplus_{i \in I} A_i = \big\{(a_1, ..., a_n) : a_j \in A_j\big\}.$$

Exempelvis har vi att $A_1 \oplus A_2$ följer räknereglerna $c(a, b) = (ca, cb)$ och $(a, b) + (p, q) = (a + p, b + q)$ för $c \in K$, $a, p \in A_1$ och $b, q \in A_2$. Högre ordningar följer motsvarande räkneregler.

Definition A.9. Låt $\{G_j\}_j$ vara en mängd grupper med grupphomomorfier $f_j \in \mathrm{Hom}(G_{j-1}, G_j)$. Vi säger då att sekvensen

$$\cdots \xrightarrow{f_{j-1}} G_{j-1} \xrightarrow{f_j} G_j \xrightarrow{f_{j+1}} G_{j+1} \xrightarrow{f_{j+2}} \cdots$$

är *exakt* om $\mathrm{im}(f_j) = \ker(f_{j+1})$.

Definition A.10. Låt G vara en grupp och R vara en ring. *Gruppringen* $R[G]$ definierar vi som element på formen

$$\sum_{g \in G} a_g g$$

för $a_g \in R$. Addition och multiplikation följer från

$$\sum_{g\in G} a_g g + \sum_{g\in G} b_g g = \sum_{g\in G} (a_g + b_g) g \qquad \text{och} \qquad \Big(\sum_{g\in G} a_g g\Big)\Big(\sum_{g\in G} b_g g\Big) = \sum_{g\in G}\Big(\sum_{hk=g} a_h b_k\Big) g,$$

vilket medför att $R[G]$ är en ring.

Definition A.11. Om R är en ring definierar vi en *(höger) R-modul* M av den abelska gruppen M och den binära operationen $\cdot : M \times R \to M$ så att vi för varje $r, s \in R$ och $x, y \in M$ har

$$(x+y)\cdot r = x\cdot r + y\cdot r, \qquad x\cdot(r+s) = x\cdot r + x\cdot s, \qquad x\cdot(rs) = (x\cdot r)\cdot s \qquad \text{och} \qquad x\cdot 1 = x.$$

Definition A.12. Låt $\mathbb{C}[G]$ vara gruppringen av gruppen G. Vi säger då att en *(höger-)representation* av G över $\mathbb{C}$ är en (höger) $\mathbb{C}[G]$-modul V. För definition av gruppring och modul, se definition A.10 respektive A.11.

B Elementär talteori

Proposition B.1 (Bézouts identitet)**.** *Låt a och b vara heltal med största gemensamma delare d. Då går det att hitta $x, y \in \mathbb{Z}$ så att*

$$ax + by = d.$$

Bevis. Notera att identiteten är trivial då något av eller båda talen a, b är 0. För resterande delar antar vi därför att a och b är nollskilda. Vi antar också att $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ är det minsta talet som uppfyller att $ax + by = d$ för några $x, y \in \mathbb{Z}$.

Vi visar först att d delar både a och b. Vi skriver a i termer av den Euklidiska divisionen $a = dq + r$ med resten $|r| < d$ och kvoten q. Här kan r skrivas på formen

$$r = a - dq = a - (ax + by)q = (1 - x)a - (yq)b.$$

Notera att r då är skriven på samma form som d. Då d är det minsta positiva talet som kan ha denna form, innebär detta att $r = 0$. Vi får då att $a = dq$ för vilket d delar a. Med samma resonemang får vi att d delar b.

Vi vill nu visa att $d = \gcd(a, b)$. Låt e vara någon gemensam delare till a och b så att $a = ea'$ och $b = eb'$ för några heltal a' och b'. Vi erhåller därför

$$d = ax + by = e(a'x + b'y) \qquad \text{eller} \qquad d/e = a'x + b'y \in \mathbb{Z}.$$

Alltså är d den största gemensamma delaren eftersom $d \geq c$. Detta vilket avslutar beviset. □

Följdsats B.2. *Låt a och b vara heltal med största gemensamma delare d. Givet en lösning (x, y) till Bézouts identitet, är resterande lösningar på formen*

$$\big(x + nb/d,\ y - na/d\big)$$

för $n \in \mathbb{Z}$.

Bevis. Det är tydligt att lösningarna är på formen $(x+\alpha b, y-\alpha a)$ för några $\alpha \in \mathbb{Q}$. För att lösningarna ska vara heltal kräver det att nämnaren i α delar både a och b, vilket motiverar lösningsformen $(x + nb/d,\ y - na/d)$ där $d = \gcd(a, b)$. Att n är godtyckligt heltal utgör inget hinder, vilket avslutar beviset. □

Följdsats B.3. *Låt k vara ett jämnt heltal och låt N_k beteckna antalet icke-negativa heltalslösningar till ekvationen $4a + 6b = k$. Då är*

$$N_{12k} = k + 1, \tag{B.1}$$
$$N_{12k+2} = k, \tag{B.2}$$
$$N_{12k+4} = k + 1, \tag{B.3}$$
$$N_{12k+6} = k + 1, \tag{B.4}$$
$$N_{12k+8} = k + 1, \tag{B.5}$$
$$N_{12k+10} = k + 1 \tag{B.6}$$

för $k \geq 0$. Speciellt är

$$N_k = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{om } k \equiv 2 \pmod{12}, \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1 & \text{om } k \not\equiv 2 \pmod{12}. \end{cases}$$

för jämna $k \geq 0$.

Bevis. Betrakta exempelvis (B.2), som hör till ekvationen $4a+6b = 12k+2$, eller ekvivalent $2a+3b = 6k+1$. Eftersom 2 och 3 är relativt prima och en heltalslösning till ekvationen är $(a, b) = (3k - 1, 1)$ ges samtliga heltalslösningar av $(a, b) = (3k - 1 - 3n, 1 + 2n)$, $n \in \mathbb{Z}$ (se följdsats B.2). Av dessa är både a och b icke-negativa då $0 \leq n \leq k - 1$. Alltså har ekvationen k icke-negativa heltalslösningar. Resterande fall bevisas på samma sätt. □

Proposition B.4. *Låt n vara ett heltal och låt*

$$A = \big\{k \in \mathbb{Z} : \gcd(k, n) = 1\big\} \qquad \text{och} \qquad B = \big\{r \in \mathbb{Z} : [r] \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\big\},$$

där $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ syftar till alla inverterbara element i $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Då är $A = B$.

Bevis. För att visa att $A \subseteq B$ låter vi $k \in A$ och noterar att vi behöver visa att $[k]$ är inverterbar. Då $\gcd(k, n) = 1$ ger Bézouts identitet att det finns $x, y \in \mathbb{Z}$ så att $kx + ny = 1$. För detta fall har vi att ekvivalensklassen $[x]$ inverterar $[k]$ genom

$$[k][x] = [kx] = [1 - ny] = [1],$$

vilket visar att $A \subseteq B$.

För att visa att $B \subseteq A$ låter vi $r \in B$ och noterar att det per definition finns $x \in \mathbb{Z}$ så att

$$[r][x] = [rx] = [1].$$

Därför existerar det $y \in \mathbb{Z}$ så att $rx-1 = ny$. Eftersom $\gcd(r, n) \mid n$ och $\gcd(r, n) \mid r$, måste $\gcd(r, n) \mid 1$ vilket är varför $\gcd(r, n) = 1$. □

Lemma B.5. *Låt Euklides algoritm kräva N steg för ett positivt heltalspar (a, b) där $a > b$. Då är Fibonaccitalen (F_{N+2}, F_{N+1}) det minsta paret som detta kan ske för.*

Bevis. Låt oss begagna induktion där basfallet är $N = 1$ för vilket det gäller det att $b \mid a$. Det minsta paret detta håller för är $(2, 1) = (F_3, F_2)$.

Vi gör induktionsantagandet för något tal $N - 1$, vars minsta par betecknar vi (a_{N-1}, b_{N-1}). För det N :te steget erhåller vi då att det minsta är

$$a_N = qb_N + r = qa_{N-1} + b_{N-1} \geq 1 \cdot F_{N+1} + F_N = F_{N+2},$$

vilket avslutar beviset. □

Proposition B.6. *Det största antalet steg N i Euklides algoritm av ett nollskillt par (a, b) är övre begränsat av*

$$N \leq 1 + \big[|a| < |b|\big] + \log_\varphi \min\big\{|a|, |b|\big\},$$

där $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$.

Bevis. Anta att $|a| > |b|$. För $N \geq 2$ har vi att

$$F_N = \frac{\varphi^N - (-\varphi)^{-N}}{\sqrt{5}} \geq \varphi^{N-2}.$$

Eftersom $|b| \geq F_{N+1}$ (se lemma B.5), har vi att

$$|b| \geq \varphi^{N-1} \qquad \text{eller} \qquad N \leq 1 + \log_\varphi |b|,$$

vilket visar fallet då $|a| > |b|$.

Om $|a| < |b|$ är första iterationen i Euklides algoritm avbildningen $(a, b) \mapsto (b, a)$ och vi är tillbaka första fallet, vilket avslutar beviset. □

Följdsats B.7. *Låt $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ där $c \neq 0$. Då är längden av γ övre begränsat av*

$$l \leq \big[|c| > |d|\big] + \log_\varphi \min\big\{|c|, |d|\big\},$$

där $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$.

Bevis. Detta följer direkt av relationen $l = N - 1$ (se proposition B.6 för begränsning av N samt beviset för sats 2.1 för relationen mellan längden på γ och Euklides algoritm). □

C Lipschitz summationsformler

C.1 Lipschitz summationsformel

Lipschitz summationsformel kan ses som ett grundresultat för modulära former då det kan utnyttjas för att härleda Fourierserieutvecklingen för Eisensteinserier (för exempel, se avsnitt 3.1). Många generaliseringar av Lipschitz summationsformel finns, inte minst den av Pasles och Pribitkin [PA01] som generaliserar formeln till två variabler. Detta avsnitt dedikeras till att visa grundformeln för Lipschitz summationsformel, vilket vi sedan generaliserar till polynom i täljaren. Ett mer generellt fall av det senare visades av Mertens och Raum i [MR17].

Proposition C.1 (Lipschitz summationsformel)**.** *För heltal $k > 1$ och $\tau \in \mathbb{H}$ gäller det att*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau + n)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n$$

där $q = e^{2\pi i \tau}$.

Bevis. Fixera $y > 0$ så att vi kan beteckna vänsterledet som $f_y(x)$, vilket är 1-periodiskt och absolutkonvergent på $\mathbb{R}$. Detta innebär att f har en Fourierserie som är likformigt konvergent på $\mathbb{R}$ (se exempelvis följdsats 2.3 i [SS03]). Fixera $n \in \mathbb{Z}$ och betrakta den n :te Fourierkoefficienten av f_y:

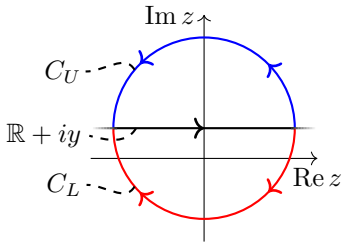
$$c_n(y) = \int_0^1 f_y(x) e^{-2\pi i n x} \, \mathrm{d}x = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \frac{e^{-2\pi i n x}}{(x + iy + m)^k} \, \mathrm{d}x = e^{-2\pi n y} \int_{\mathbb{R}+iy} \frac{e^{-2\pi i n z}}{z^k} \, \mathrm{d}z, \tag{C.1}$$

där sista likheten följer från summering av integralerna och variabelbytet $x \mapsto x + iy$. Betrakta para-

metriseringen $z = Re^{i\theta} + iy$ där $C_L(R)$ är kurvan då θ går från 0 till $-\pi$ och $C_U(R)$ den där θ går från 0 till π, vilka kan ses i figur 2. Om $n > 0$ fås för $R > y$ att

$$\Big|\int_{C_L(R)} \frac{e^{-2\pi inz}}{z^k}\,\mathrm{d}z\Big| \leq \pi R \frac{e^{2\pi ny}}{(R-y)^k} \longrightarrow 0$$

då $R \to \infty$. Om $n \leq 0$ fås på motsvarande sätt att integralen över $C_U(R)$ går mot 0 då $R \to \infty$. Om $n > 0$ adderar vi till integralen över $C_L(R)$ till (C.1) vilket sluter integrationskurvan, varpå Cauchys residysats tillämpas enligt



Figur 2: *Kurvor C_L och C_U som används för att kunna utnyttja Cauchys residysats.*

$$c_n(y) = e^{-2\pi ny} \lim_{R\to\infty} \int_{\substack{(\mathbb{R}+iy)\\ \cup C_L(R)}} \frac{e^{-2\pi inz}}{z^k}\,\mathrm{d}z = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\big(z^{-k}e^{-2\pi inz}\big)e^{-2\pi ny} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} n^{k-1} e^{-2\pi ny},$$

där minustecknet framför residyn kommer från att kurvan löps med negativ orientering. Om $n \leq 0$ blir $c_n(y) = 0$ då $(\mathbb{R} + iy) \cup C_U(R)$ inte omsluter någon pol. Detta innebär att

$$f_y(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(y) e^{2\pi inx} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} e^{2\pi in(x+iy)} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n,$$

vilket var vad som avsågs att bevisas. □

Vi kommer under kommande delar redogöra hur man kan visa Lipschitz summationformel genom identiteter av cotangens.

Sats C.2. *För alla $\tau \in \mathbb{H}$ gäller att*

$$\frac{1}{\tau} + \sum_{d=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\tau - d} + \frac{1}{\tau + d}\Big) = \pi \cot \pi\tau = \pi i - 2\pi i \sum_{m=0}^{\infty} q^m, \tag{C.2}$$

där $q = e^{2\pi i\tau}$.

Bevis. Vi börjar med att bevisa högerledet. Vi har en geometrisk serie, som konvergerar eftersom $\tau \in \mathbb{H}$ och därmed är $|q| < 1$. Vi får

$$\pi i - 2\pi i \sum_{m=0}^{\infty} q^m = \pi i\Big(\frac{e^{2\pi i\tau} + 1}{e^{2\pi i\tau} - 1}\Big) = \pi i\Big(\frac{e^{\pi i\tau} + e^{-\pi i\tau}}{e^{\pi i\tau} - e^{-\pi i\tau}}\Big) = \pi \cot \pi\tau.$$

Vi ska nu visa att vänsterledet är lika med $\pi \cot \pi\tau$. Vi gör detta med hjälp av produktutvecklingen av $\sin(\pi\tau)$, tagen från [GR07], vilken ges av

$$\sin(\pi\tau) = \pi\tau \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{\tau^2}{n^2}\Big), \tau \in \mathbb{H}.$$

Tas nu den logaritmiska derivatan av båda sidorna erhålles

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Big(\log\big(\sin(\pi\tau)\big)\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Big(\log(\pi\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \log\Big(1 - \frac{\tau^2}{n^2}\Big)\Big).$$

Detta ger

$$\frac{\pi\cos(\pi\tau)}{\sin(\pi\tau)} = \frac{1}{\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\tau}{\tau^2 - n^2},$$

vilket är ekvivalent med att

$$\pi\cot(\pi\tau) = \frac{1}{\tau} + \sum_{d=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\tau-d} + \frac{1}{\tau+d}\Big).$$

□

Notera att beviset av vänsterledet i (C.2) blir relativt enkelt då produktutvecklingen av $\sin(\pi\tau)$ utnyttjas. Man kan fråga sig om det är möjligt att bevisa resultatet utan att använda denna produktutveckling. Svaret är ja. Nedan ges ett bevis som endast utnyttjar ytterst grundläggande komplex analys.

Bevis. Vi bevisar att vänsterledet i (C.2) är lika med $\pi\cot(\pi\tau)$ genom att först bevisa formeln

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\tau)} = \sum_{d\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau-d)^2} \quad \text{för } \tau \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}.$$

Låt $g, h : \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ där $g(\tau) = \pi^2/\sin^2(\pi\tau)$ och $h(\tau) = \sum_{d\in\mathbb{Z}} 1/(\tau-d)^2$. Det är lätt att se att h har poler av ordning 2 då $\tau = m \in \mathbb{Z}$, och är holomorf då $\tau \notin \mathbb{Z}$. För varje $m \in \mathbb{Z}$ kan vi nämligen skriva

$$\sum_{d\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau-d)^2} = \frac{1}{(\tau-m)^2} + \tilde{h}_m(\tau),$$

för någon funktion $\tilde{h}_m$ som är holomorf i $\tau = m$.

Detsamma gäller för g. Eftersom g är heltalsperiodisk räcker det att betrakta Laurentserieutvecklingen kring $\tau = 0$:

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\tau)} = \frac{\pi^2}{(\pi\tau+\tilde{g}(\tau))^2} = \frac{1}{\tau^2}\frac{1}{(1+\hat{g}(\tau))^2},$$

för några funktioner $\tilde{g}, \hat{g} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sådana att

$$\tilde{g}(\tau) = \mathcal{O}(\tau^3),$$
$$\hat{g}(\tau) = \mathcal{O}(\tau^2).$$

Detta ger att

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\tau)} = \frac{1}{\tau^2} + \mathcal{O}(1).$$

Alltså är Laurentserieutvecklingarnas första term lika, det vill säga $1/\tau^2$. Detta ger att funktionen $f : \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, där $f(\tau) = g(\tau) - h(\tau)$, är holomorf, och har hävbara singulariteter då $\tau \in \mathbb{Z}$. Detta ger i sin tur att det finns en funktion $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sådan att $\tilde{f}$ är hel och $\tilde{f}(\tau) = f(\tau)$ för alla $\tau \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.

Vi ska nu visa att $\tilde{f}$ är begränsad ty Liouvilles sats ger då att $\tilde{f}$ är konstant. Eftersom både g och h är heltalsperiodiska på $\mathbb{R}$ är $\tilde{f}$ begränsad på $\mathbb{R}$. Ett tillräckligt villkor för att $\tilde{f}$ är begränsad på hela $\mathbb{C}$ är därmed att

$$\lim_{\tau\to\pm i\infty} \tilde{f}(\tau) = 0. \tag{C.3}$$

Vi bevisar att (C.3) gäller genom att betrakta gränsvärdet för g och h separat. Vi har, för $\tau = x + iy$,

$$|\sin(\pi\tau)| = \frac{1}{2}|e^{i\pi\tau} - e^{-i\pi\tau}| = \frac{1}{2}|e^{-\pi y+i\pi x} - e^{\pi y-i\pi x}|.$$

Om $y \to \infty$, så får vi

$$\frac{1}{2}|e^{-\pi y+i\pi x} - e^{\pi y-i\pi x}| \geq \frac{1}{2}\left(|e^{\pi y-i\pi x}| - |e^{-\pi y+i\pi x}|\right) = \sinh(\pi y) \to \infty.$$

Om istället $y \to -\infty$, så får vi på samma sätt

$$\frac{1}{2}|e^{-\pi y+i\pi x} - e^{\pi y-i\pi x}| \geq \frac{1}{2}\left(|e^{-\pi y+i\pi x}| - |e^{\pi y-i\pi x}|\right) = \sinh(-\pi y) \to \infty.$$

Alltså är

$$\lim_{\tau\to\pm i\infty} \sin(\pi\tau) = \infty,$$

vilket ger att

$$\lim_{\tau\to\pm i\infty} g(\tau) = 0.$$

För h, skriv

$$h(\tau) = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{(\tau-d)^2} + \sum_{d=-\infty}^{-1} \frac{1}{(\tau-d)^2}.$$

Vi har

$$|h(\tau)| \leq \Big|\sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{(\tau-d)^2}\Big| + \Big|\sum_{d=-\infty}^{-1} \frac{1}{(\tau-d)^2}\Big| \leq \sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{|\tau-d|^2} + \sum_{d=-\infty}^{-1} \frac{1}{|\tau-d|^2}.$$

Fixera $\epsilon > 0$ och skriv, för $\tau = x + iy$,

$$\sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{|\tau-d|^2} = \sum_{d=0}^{N} \frac{1}{|\tau-d|^2} + \sum_{d=N+1}^{\infty} \frac{1}{|\tau-d|^2} = \sum_{d=0}^{N} \frac{1}{(x-d)^2+y^2} + \sum_{d=N+1}^{\infty} \frac{1}{(x-d)^2+y^2}.$$

Eftersom $\sum_{d=0}^{\infty} 1/((x-d)^2+y^2)$ konvergerar kan vi välja N så att $\sum_{d=N+1}^{\infty} 1/((x-d)^2+y^2) < \epsilon/2$. För detta N får vi

$$\sum_{d=0}^{N} \frac{1}{(x-d)^2+y^2} \leq \frac{N+1}{\min\{(x-d)^2 : d = 0, 1, ..., N\} + y^2} \to 0$$

då $y \to \infty$, det vill säga

$$\sum_{d=0}^{N} \frac{1}{(x-d)^2+y^2} < \frac{\epsilon}{2}$$

för tillräckligt stort y. Alltså är

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\tau-d)^2} < \epsilon$$

för tillräckligt stort y, vilket ger att

$$\lim_{\tau\to\pm i\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\tau-d)^2} = 0.$$

Beviset för att

$$\lim_{\tau\to\pm i\infty} \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{(\tau-d)^2} = 0$$

sker på samma sätt. Alltså är

$$\lim_{\tau\to\pm i\infty} \tilde{f}(\tau) = 0.$$

Funktionen $\tilde{f}$ är alltså begränsad på $\mathbb{C}$. Liouvilles sats ger därmed att $\tilde{f}$ är konstant. Dessutom ger (C.3) att konstanten måste vara 0. Alltså är

$$g(\tau) = h(\tau), \tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},$$

det vill säga

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\tau)} = \sum_{d\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau-d)^2}, \tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Notera nu att

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\tau)} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\big(\pi\cot(\pi\tau)\big)$$

och

$$\sum_{d\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau-d)^2} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\bigg(\frac{1}{\tau} + \sum_{d=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\tau-d} + \frac{1}{\tau+d}\Big)\bigg).$$

Detta ger att

$$\pi\cot(\pi\tau) = C + \frac{1}{\tau} + \sum_{d=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\tau-d} + \frac{1}{\tau+d}\Big),$$

för någon konstant C. Eftersom vänsterledet är udda måste högerledet också vara det, vilket endast är fallet då $C = 0$. Alltså är

$$\frac{1}{\tau} + \sum_{d=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\tau-d} + \frac{1}{\tau+d}\Big) = \pi\cot(\pi\tau), \tau \in \mathbb{H},$$

vilket var vad som skulle visas. □

Enligt sats C.2 har vi nu

$$\frac{1}{\tau} + \sum_{d=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\tau-d} + \frac{1}{\tau+d}\Big) = \pi i - 2\pi i \sum_{m=0}^{\infty} q^m, \quad q = e^{2\pi i\tau}.$$

Vi deriverar båda sidorna med avseende på τ $(k-1)$ gånger. Med induktion får vi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau^{k-1}}\Big(\sum_{d\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\tau+d}\Big) = (k-1)!\,(-1)^{k-1}\sum_{d\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+d)^k}$$

samt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau^{k-1}}\Big(\pi i - 2\pi i\sum_{m=0}^{\infty} e^{2\pi i m\tau}\Big) = -(2\pi i)^k \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} e^{2\pi i m\tau}.$$

Sätter vi dem lika med varandra får vi

$$\sum_{d\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+d)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} e^{2\pi i m\tau},$$

vilket ger

$$\sum_{d\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(c\tau+d)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} e^{2\pi i m c\tau}.$$

Detta är precis vad vi fick i beviset av sats 3.5. Fourierserieutvecklingen av G_k fås därför på samma sätt härifrån.

C.2 Lipschitz polynomsummationsformel

Följande bevis är ett specialfall av beviset av lemma 6.1 i [MR17].

Bevis av proposition 4.13. Undersökning visar att båda serier är absolutkonvergenta för $k > 2 + j$ där $k, j \in \mathbb{Z}_{>0}$. Vi erhåller därför att

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(X+n)^j}{(\tau+n)^k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\big(X-\tau+(\tau+n)\big)^j}{(\tau+n)^k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+n)^k} \sum_{\beta=0}^{j}\sum_{\lambda=0}^{j-\beta} \binom{j}{\beta}\binom{j-\beta}{\lambda} X^\lambda (-\tau)^{j-\beta-\lambda}(\tau+n)^\beta$$

$$= \sum_{\beta=0}^{j}\sum_{\lambda=0}^{j-\beta} \binom{j}{\beta}\binom{j-\beta}{\lambda} X^\lambda (-\tau)^{j-\beta-\lambda} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+n)^{k-\beta}}.$$

Genom Lipschitz summationsformel (se proposition C.1) erhåller vi att

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(X+n)^j}{(\tau+n)^k} = \sum_{\beta=0}^{j}\sum_{\lambda=0}^{j-\beta} \binom{j}{\beta}\binom{j-\beta}{\lambda} X^\lambda (-\tau)^{j-\beta-\lambda} \frac{(-2\pi i)^{k-\beta}}{(k-\beta-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-\beta-1} q^n$$

$$= -2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sum_{\beta=0}^{j} \binom{j}{\beta} \frac{(-2\pi i n)^{k-\beta-1}}{(k-\beta-1)!} \sum_{\lambda=0}^{j-\beta} \binom{j-\beta}{\lambda} X^\lambda (-\tau)^{j-\beta-\lambda}.$$

vilket avslutar beviset. □

D Eichler-Shimura-isomorfin för vikt 2

Topologi är ett viktigt verktyg för att kunna studera modulära former ur ett vidare perspektiv, mer specifikt studier av *homologigrupper* såsom den *första homologigruppen* H_1. För en precis definition av homologigrupper refererar vi till Hatchers verk om algebraisk topologi [Hat02].

Kvotrummet $\Gamma\backslash\mathbb{H}^*$ är en ”välartad” topologi att betrakta eftersom det bildar en så kallad kompakt Riemannyta. Dessa ytor har bland annat den egenskapen vi formulerar i följande proposition, direkt tagen, utan bevis, ur Knapps bok om elliptiska kurvor [Kna93].

Proposition D.1. *Låt X vara en kompakt Riemannyta med genus $g \geq 1$ för vilket $c_1, \ldots, c_{2g}$ är en bas för första homologigruppen $H_1(X)$. Om $\omega_1, \ldots, \omega_g$ är en bas för rummet av holomorfa differentialer från X till $\mathbb{C}$ är vektorerna*

$$\Big(\int_{c_j} \omega_1;\ \cdots\ ;\int_{c_j} \omega_g\Big) \in \mathbb{C}^g$$

linjärt oberoende över $\mathbb{R}$.

Med denna sats bevisar vi proposition 4.2, vilket är en omskrivning av beviset från [GO03].

Bevis av proposition 4.2. Eftersom Γ har $2g$ hyperboliska generatorer (se proposition 2.7), är det tydligt att $\mathrm{Hom}_0(\Gamma, \mathbb{C})$ är $2g$-dimensionell. Låt γ vara ett hyperboliskt element och fixera $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ sådana att

$$\sum_{j=1}^{2g} (a_j A_j + b_j B_j)(\gamma) = 0.$$

Betecknar vi $q_a = \sum_j a_j h_j$ och $q_b = \sum_j b_j h_j$ kan vi skriva ekvationen som $\mathrm{Re}\langle\gamma, q_a\rangle + \mathrm{Im}\langle\gamma, q_b\rangle = 0$. För $q = q_a - iq_b$ gäller det då att $\mathrm{Re}\langle\gamma, q\rangle = 0$. Men $h_j(z)\,\mathrm{d}z$ bildar en bas av holomorfa differentialer och kurvan $[z_0, \gamma z_0]$ är ett element i homologigruppen $H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}^*)$, så egenskaperna av kompakta Riemannytor ger oss att $q = 0$ (se proposition D.1). Då $h_1, \ldots, h_g$ är en bas gäller det att $a_j = ib_j$. Men eftersom $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ innebär det att $a_j = b_j = 0$, vilket visar linjärt oberoende. □

E Mer om modulära symboler

Nedan följer två bevis av proposition 2.13; först kommer ett direkt bevis.

Bevis av proposition 2.13. Eftersom f är holomorf på $\mathbb{H}$ har den en primitiv funktion F, så att $\int_{z_0}^{\gamma z_0} f\,\mathrm{d}z = F(\gamma z_0) - F(z_0)$. Deriverar vi detta uttryck med avseende på z_0 får vi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_0}[F(\gamma z_0) - F(z_0)] = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}z_0} f(\gamma z_0) - f(z_0) = \big(f\big|_2\gamma\big)(z_0) - f(z_0) = 0,$$

då f är en modulär form. Räkneregeln följer direkt av z_0-oberoendet:

$$\langle \gamma\delta, f\rangle = \int_{z_0}^{\gamma\delta z_0} f\,\mathrm{d}z = \int_{\delta z_0}^{\gamma(\delta z_0)} f\,\mathrm{d}z + \int_{z_0}^{\delta z_0} f\,\mathrm{d}z = \langle \gamma, f\rangle + \langle \delta, f\rangle,$$

eftersom $\delta z_0 \in \mathbb{H}$. □

Proposition 2.13 följer också av följande omskrivning av proposition 2.1.1 i [Cre97].

Proposition E.1. *Låt γ, δ vara element i kongruensdelgruppen Γ och låt $f \in \mathrm{S}_2(\Gamma)$. För godtyckliga $a, b \in \mathbb{H}^*$ där vi betecknar $\{a, b\} = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$ är*

$$\{\gamma a, \gamma b\} = \{a, b\}, \qquad \{a, \gamma a\} = \{b, \gamma b\} \qquad \text{och} \qquad \{a, \gamma\delta a\} = \{a, \gamma a\} + \{a, \delta a\}.$$

Bevis. Den första likheten följer från koordinatbytet $z \mapsto \gamma^{-1}z$:

$$\{a, b\} = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma a}^{\gamma b} f(\gamma^{-1}z)\,\mathrm{d}(\gamma^{-1}z) = \int_{\gamma a}^{\gamma b} \big(f\big|_2\gamma^{-1}\big)(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma a}^{\gamma b} f(z)\,\mathrm{d}z = \{\gamma a, \gamma b\}.$$

Den andra likheten följer från det som nu har visats samt av räkneregler för integraler:

$$\{a, \gamma a\} = \{a, b\} + \{b, \gamma b\} + \{\gamma b, \gamma a\} = \{a, b\} + \{b, \gamma b\} + \{b, a\} = \{b, \gamma b\}.$$

Den tredje likheten följer av att

$$\{a, \gamma\delta a\} = \{a, \gamma a\} + \{\gamma a, \gamma\delta a\} = \{a, \gamma a\} + \{a, \delta a\},$$

vilket avslutar beviset. □

F Bernoullitalen B_k

I avsnitt 3.1 använder vi Bernoullitalen B_k för att beskriva Eisensteinserierna. Bernoullitalen dyker upp i många olika sammanhang inom matematiken, men i detta arbete används de främst för att enklare bestämma koefficienterna i Fourierserieutvecklingarna av G_k och E_k. Således följer en kort introduktion av dem.

Sats F.1. *Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1}, & \text{om } x \neq 0, \\ 1, & \text{om } x = 0. \end{cases} \tag{F.1}$$

Då är $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Bevis. Betrakta $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{om } x \neq 0, \\ 1, & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

Notera att g kan skrivas som en potensserie centrerad kring $x = 0$ med oändlig konvergensradie:

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}.$$

Alltså är $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Eftersom $f(x) \neq 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ följer det att även $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. □

Definition F.1. Låt f vara definierad som i (F.1). Då är det k :te *Bernoullitalet*

$$B_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^k}\Big(f(x)\Big)\Big|_{x=0}.$$

Om man räknar ut B_k för $0 \leq k \leq 12$ får man

$$1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{6}, 0, \frac{-1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, \frac{-1}{30}, 0, \frac{5}{66}, 0, \frac{-691}{2730}.$$

Notera att B_k verkar vara 0 för alla udda $k \geq 3$. Detta gäller generellt.

Proposition F.2. *För alla $k \geq 1$ är $B_{2k+1} = 0$.*

Bevis. Från definitionen av B_k följer det att

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}. \tag{F.2}$$

Å ena sidan blir

$$\frac{x}{e^x - 1} - \frac{-x}{e^{-x} - 1} = \frac{x(e^{-x} - 1) + x(e^x - 1)}{(e^x - 1)(e^{-x} - 1)} = -x,$$

och å andra sidan

$$\frac{x}{e^x - 1} - \frac{-x}{e^{-x} - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{(-x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k - (-x)^k}{k!} = 2\sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Alltså är

$$2\sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -x,$$

vilket ger att $B_1 = -1/2$ och $B_{2k+1} = 0$ för $k \geq 1$. □

Följande sats relaterar B_k med Riemanns ζ-funktion. Bevisidén är tagen från [Sur03].

Sats F.3. *För varje $k \geq 1$ är*

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^k B_{2k}}{2(2k)!}.$$

Bevis. Precis som i beviset av sats C.2 tar vi den logaritmiska derivatan av produktutvecklingen för $\sin(\tau)$, vilken återfinns i [GR07]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \log\big(\sin(\tau)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \log\Big(\tau \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{\tau^2}{\pi^2 n^2}\Big)\Big).$$

Vi får

$$\tau\cot(\tau) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau^2}{\pi^2n^2-\tau^2} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{\tau^2}{\pi^2n^2}\Big)^k = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{\tau^2}{\pi^2}\Big)^k\zeta(2k). \tag{F.3}$$

Betrakta nu funktionen f definierad enligt (F.1). Notera att funktionens definitionsmängd kan utökas till $\mathbb{C}$, och funktionen blir då hel. Insättning av $x = 2i\tau$ i (F.2) ger

$$\frac{2i\tau}{e^{2i\tau}-1} = \sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{(2i\tau)^k}{k!}. \tag{F.4}$$

Eftersom $B_k = 0$ för alla udda $k \geq 3$ (se proposition F.2) kan vi skriva om högerledet i (F.4) som

$$\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{(2i\tau)^k}{k!} = 1 - i\tau + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^kB_{2k}\frac{2^{2k}\tau^{2k}}{(2k)!}.$$

Insättning i (F.4) ger

$$\tau\cot(\tau) = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}B_{2k}\frac{2^{2k-1}\tau^{2k}}{(2k)!}. \tag{F.5}$$

Sätter vi uttrycken för $\tau\cot(\tau)$, enligt (F.3) respektive (F.5), lika med varandra får vi till slut

$$\Big(\frac{\tau^2}{\pi^2}\Big)^k\zeta(2k) = (-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}\tau^{2k}B_{2k}}{(2k)!},$$

det vill säga

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!}.$$

□

G Existensen av den modulära diskriminantfunktionen Δ

I det här avsnittet bevisar vi att det existerar en funktion $\Delta \in \mathrm{M}_{12}\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$ som är nollskild på $\mathbb{H}$ och har koefficient 0 och 1 för q^0- respektive q^1-termen i dess Fourierserieutveckling. Vi använder Poissons summationsformel för att erhålla resultatet. Denna följer nedan och återfinns i de flesta böcker om Fourieranalys – exempelvis sats 3.1 i [SS03].

Sats G.1. *Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vara kontinuerlig och absolutintegrerbar. Om*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-2\pi ix\xi}\,\mathrm{d}x$$

också är kontinuerlig och absolutintegrerbar på $\mathbb{R}$, så är

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n).$$

Lemma G.2. *Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vara en absolutintegrerbar funktion. Om $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ och $f_{a,b}(x) = f(ax+b)$, så är*

$$\hat{f}_{a,b}(\xi) = \frac{e^{2\pi ib\xi/a}}{a}\hat{f}\Big(\frac{\xi}{a}\Big).$$

Bevis. Vi har

$$\hat{f}_{a,b}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax+b)e^{-2\pi i x\xi}\mathrm{d}x.$$

Variabelbytet $t = ax + b$ ger direkt

$$\hat{f}_{a,b}(\xi) = \frac{e^{2\pi ib\xi/a}}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi it(\xi/a)}\mathrm{d}t = \frac{e^{2\pi ib\xi/a}}{a}\hat{f}\Big(\frac{\xi}{a}\Big).$$

□

Proposition G.3. *Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $f(x) = xe^{-\pi ax^2}$, för något $a > 0$. Då är*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{-i\xi}{a\sqrt{a}}e^{-\pi\xi^2/a}.$$

Bevis. Antag först att $a = 1$. Vi får

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\pi x^2}e^{-2\pi ix\xi}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\pi(x^2+2ix\xi)}\mathrm{d}x.$$

Kvadratkomplettering följt av variabelbytet $t = x + i\xi$ ger

$$\hat{f}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\pi(x+i\xi)^2}\mathrm{d}x = e^{-\pi\xi^2}\int_{-\infty+i\xi}^{\infty+i\xi}(t-i\xi)e^{-\pi t^2}\mathrm{d}t =$$

$$= e^{-\pi\xi^2}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\pi t^2}\mathrm{d}t - i\xi\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\mathrm{d}t\Big). \tag{G.1}$$

Den första integralen i (G.1) är lika med 0, ty integranden är udda. Den andra integralen kan man, t.ex. genom att göra variabelbytet $t \mapsto t\sqrt{\pi}$, se är lika med 1. Alltså blir

$$\hat{f}(\xi) = -i\xi e^{-\pi\xi^2}.$$

För godtyckligt $a > 0$ ger lemma G.2 att

$$\hat{f}(\xi) = \frac{-i\xi}{a\sqrt{a}}e^{-\pi\xi^2/a},$$

vilket avslutar beviset. □

Sats G.4. *Antag att $f, \hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ är kontinuerliga och absolutintegrerbara. Då är*

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\ udda}} (-1)^{(n-1)/2}f(n) = \frac{i}{2}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\ udda}} (-1)^{(n-1)/2}\hat{f}\Big(\frac{n}{4}\Big).$$

Bevis. Notera att

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\ \text{udda}}} (-1)^{(n-1)/2}f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(4n+1) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(4n-1).$$

Poissons summationsformel (se sats G.1) följt av lemma G.2 ger

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(4n+1) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(4n-1) = \frac{1}{4}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi in/2}\hat{f}\Big(\frac{n}{4}\Big) - \frac{1}{4}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi in/2}\hat{f}\Big(\frac{n}{4}\Big) =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(i^n - (-i)^n)\hat{f}\Big(\frac{n}{4}\Big) = \frac{i}{2}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\ \text{udda}}} (-1)^{(n-1)/2}\hat{f}\Big(\frac{n}{4}\Big).$$

□

Vi har nu de verktyg som krävs för att bevisa existensen av Δ.

Sats G.5. *Det existerar en funktion $\Delta \in \mathrm{M}_{12}\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$ som är nollskild på $\mathbb{H}$ och har koefficient 0 och 1 för q^0- respektive q^1-termen i dess Fourierserieutveckling.*

Bevis. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $f(x) = xe^{-\pi a x^2}$, för något $a > 0$. Enligt proposition G.3 är

$$\hat{f}(\xi) = \frac{-i\xi}{a\sqrt{a}} e^{-\pi\xi^2/a},$$

och eftersom både f och $\hat{f}$ är kontinuerliga och absolutintegrerbara kan vi använda sats G.4 för att erhålla

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n \text{ udda}}} (-1)^{(n-1)/2} n e^{-\pi a n^2} = \frac{i}{2} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n \text{ udda}}} (-1)^{(n-1)/2} \frac{-in}{4a\sqrt{a}} e^{-\pi n^2/(16a)}$$
$$= \frac{1}{8a\sqrt{a}} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n \text{ udda}}} (-1)^{(n-1)/2} n e^{-\pi n^2/(16a)}.$$

Om vi byter ut a mot $a/4$ får vi

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n \text{ udda}}} (-1)^{(n-1)/2} n e^{-\pi a n^2/4} = \frac{1}{a\sqrt{a}} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n \text{ udda}}} (-1)^{(n-1)/2} n e^{-\pi n^2/(4a)}. \tag{G.2}$$

För båda summorna i (G.2) är bidragen vid n och $-n$ lika, vilket gör att summorna föreklas till

$$\sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ udda}}} (-1)^{(n-1)/2} n e^{-\pi a n^2/4} = \frac{1}{a\sqrt{a}} \sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ udda}}} (-1)^{(n-1)/2} n e^{-\pi n^2/(4a)}.$$

Låt nu $\theta : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ där

$$\theta(\tau) = \sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ udda}}} (-1)^{(n-1)/2} n e^{\pi i n^2 \tau/4} = q^{1/8} - 3q^{9/8} + 5q^{25/8} - \ldots$$

Vi ska visa att $\theta(\tau)^8$ uppfyller de egenskaper som formulerades i satsen. Om vi skriver $\tau = x + iy$ får vi

$$\theta(x+iy) = \sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ udda}}} (-1)^{(n-1)/2} n e^{-\pi n^2 y/4} e^{\pi i n^2 x/4}.$$

Serien avtar exponentiellt och är likformigt konvergent på kompakta delmängder till $\mathbb{H}$. Alltså är θ holomorf på $\mathbb{H}$. Dessutom är $\lim_{\tau\to i\infty} \theta(\tau) = 0$. Längs den imaginära axeln använder vi (G.2) och får

$$\theta(iy) = \sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ udda}}} (-1)^{(n-1)/2} n e^{-\pi n^2 y/4} = \frac{1}{y\sqrt{y}} \sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ udda}}} (-1)^{(n-1)/2} n e^{-\pi n^2/(4y)} = \frac{1}{y\sqrt{y}} \theta\Big(\frac{i}{y}\Big) = \frac{1}{y\sqrt{y}} \theta\Big(\frac{-1}{iy}\Big).$$

Alltså är

$$\theta\Big(\frac{-1}{\tau}\Big)^8 = \tau^{12}\theta(\tau)^8$$

för alla τ längs den imaginära axeln. Eftersom θ är holomorf på $\mathbb{H}$ måste likheten därmed gälla för alla $\tau \in \mathbb{H}$. Vidare är

$$\theta(\tau+1) = \sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ udda}}} (-1)^{(n-1)/2} n e^{\pi i n^2 \tau/4} e^{\pi i n^2/4}.$$

För ett godtyckligt udda n kan vi skriva $n = 2m + 1$. Eftersom $m^2 + m$ är jämnt för alla heltal m är $e^{\pi i(m^2+m)} = 1$, och vi får

$$e^{\pi i n^2/4} = e^{\pi i(m^2+m)} e^{\pi i/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Det följer därmed att

$$\theta(\tau + 1) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\theta(\tau),$$

det vill säga $\theta(\tau+1)^8 = \theta(\tau)^8$.

Låt nu $\Delta : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ där

$$\Delta(\tau) = \theta(\tau)^8 = \big(q^{1/8} + \mathcal{O}(q^{9/8})\big)^8 = q + \mathcal{O}(q^2).$$

Vi har visat att Δ är holomorf på $\mathbb{H}$, $\Delta(\tau+1) = \Delta(\tau)$, $\Delta(-1/\tau) = \tau^{12}\Delta(\tau)$ och att $\Delta(\tau)$ är begränsad då $\tau \to i\infty$. Således är $\Delta \in \mathrm{M}_{12}\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$. Det återstår att visa att Δ är nollskild på $\mathbb{H}$.

Att Δ är nollskild på $\mathbb{H}$ är uppenbarligen ekvivalent med att θ är det. Vi sätter därför $\theta(\tau_0) = 0$ för något $\tau_0 \in \mathbb{H}$. Då är $\theta(\gamma\tau_0) = 0$ för alla $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, och vi kan därmed utan inskränkning anta att τ_0 ligger i fundamentaldomänen $\mathcal{F}$ (se proposition 2.6). Vi erhåller då

$$0 = \theta(\tau_0) = \sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ udda}}} (-1)^{(n-1)/2} n e^{\pi i n^2 \tau_0/4} = e^{\pi i \tau_0/4} + \sum_{\substack{n\geq 3\\ n \text{ udda}}} (-1)^{(n-1)/2} n e^{\pi i n^2 \tau_0/4},$$

vilket ger

$$|e^{\pi i \tau_0/4}| \leq \sum_{\substack{n\geq 3\\ n \text{ udda}}} n|e^{\pi i n^2 \tau_0/4}|.$$

Skriv $\tau_0 = x_0 + iy_0$. Eftersom $\tau_0 \in \mathcal{F}$ måste $y_0 \geq \sqrt{3}/2$. Vi får

$$e^{-\pi y_0/4} \leq \sum_{\substack{n\geq 3\\ n \text{ udda}}} n e^{-\pi n^2 y_0/4},$$

eller ekvivalent

$$1 \leq \sum_{\substack{n\geq 3\\ n \text{ udda}}} n e^{-\pi(n^2-1)y_0/4} \leq \sum_{\substack{n\geq 3\\ n \text{ udda}}} n e^{-\pi(n^2-1)\sqrt{3}/8}. \tag{G.3}$$

Vi ska visa att den högra summan i (G.3) faktiskt är mindre än 1. Notera att

$$\sum_{\substack{n\geq 3\\ n \text{ udda}}} n e^{-\pi(n^2-1)\sqrt{3}/8} = \sum_{m\geq 1} (2m+1) e^{-\pi(m^2+m)\sqrt{3}/2} \leq \sum_{m\geq 1} (2m+1) e^{-\pi m\sqrt{3}}, \tag{G.4}$$

där vi i sista olikheten utnyttjade att $m^2 + m \geq 2m$ för alla $m \geq 1$. Vi har nu en potensserie, som vi kan evaluera, ty om vi definierar $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ där

$$f(x) = \sum_{m\geq 1} (2m+1)x^m = 2\sum_{m\geq 1} m x^m + \sum_{m\geq 1} x^m = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{x}{1-x},$$

så blir den högra summan i (G.4) lika med

$$f(e^{-\pi\sqrt{3}}) = \frac{2e^{-\pi\sqrt{3}}}{(1-e^{-\pi\sqrt{3}})^2} + \frac{e^{-\pi\sqrt{3}}}{1-e^{-\pi\sqrt{3}}} \approx 0.013 < 1.$$

Det föreligger alltså en motsägelse och således måste θ, och därmed Δ, är nollskild på $\mathbb{H}$. □

Funktionen Δ kan till synes verka endast teoretiskt konstruerad, men eftersom $\Delta \in \mathrm{M}_{12}\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$ och $\dim \mathrm{M}_{12}\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big) = 2$ finns ett enkelt samband mellan Δ och de vanliga Eisensteinserierna.

Följdsats G.6. *Låt Δ vara definierad som i beviset av sats G.5. Då är*

$$\Delta(\tau) = \frac{E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2}{1728}.$$

Bevis. Mängden $\{E_4^3, E_6^2\}$ utgör en bas för $\mathrm{M}_{12}\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$ (se sats 3.9), vilket ger att det finns entydigt bestämda tal $a, b \in \mathbb{C}$ sådana att $\Delta(\tau) = aE_4(\tau)^3 + bE_6(\tau)^2$ för alla $\tau \in \mathbb{H}$. Eftersom

$$E_4(\tau)^3 = \big(1 + 240q + \mathcal{O}(q^2)\big)^3 = 1 + 720q + \mathcal{O}(q^2),$$
$$E_6(\tau)^2 = \big(1 - 504q + \mathcal{O}(q^2)\big)^2 = 1 - 1008q + \mathcal{O}(q^2)$$

blir

$$aE_4(\tau)^3 + bE_6(\tau)^2 = a + b + (720a - 1008b)q + \mathcal{O}(q^2).$$

För att $aE_4(\tau)^3 + bE_6(\tau)^2$ ska vara lika med $\Delta(\tau) = q + \mathcal{O}(q^2)$ måste alltså

$$a + b = 0,$$
$$720a - 1008b = 1,$$

vilket ger att $a = -b = 1/1728$. □