



Kan en hoppprocess förklara hur man tittar på
tavlor?

Can a jump process explain how one looks at paintings?

*Examensarbete för kandidatexamen i matematisk statistik vid Göteborgs univer-
sitet*

Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers

Linnéa Ahl

Filip Ahlman

Rani Alsaberi

Carl Kindberg

Kan en hopprocess förklara hur man tittar på
tavlor?

Examensarbete för kandidatexamen i matematisk statistik vid Göteborgs universitet

Linnéa Ahl Carl Kindberg

*Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik vid
Chalmers*

Filip Ahlman Rani Alsaberi

Handledare: Aila Särkkä

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2022

Förord

Det här kandidatarbetet i matematisk statistik handlar om huruvida det är möjligt att anpassa en hopprocess till människors ögonrörelser när de tittar på en tavla. Största delen av arbetet utfördes på distans av fyra studenter under vårterminen 2022. Två av studenterna läser teknisk matematik på Chalmers tekniska högskola och de andra två studenterna läser matematisk statistik vid Göteborgs universitet.

Genomgående i arbetet har veckovisa möten genomförts med vår handledare Aila Särkkä. Under mötena diskuterades främst gruppens frågor samt planering av arbetet. Vi vill tacka vår handledare Aila Särkkä för sitt genuina engagemang och stöd under detta arbete.

Under arbetets gång har en loggbok förts över samtliga gruppmedlemmars bidrag, loggboken består dels av individuella tidsloggar där arbetad tid noterats. Loggboken består även av en gemensam dagbok där framsteg och upplägg redovisats. Dagboken skrevs genom ett rullande schema, detta gjordes för att alla medlemmarna i gruppen skall bidra lika mycket. I tabellen nedan redovisas den huvudsakliga författaren för respektive delavschnitt. Alla avsnitt i rapporten har löpande kommenterats av samtliga gruppmedlemmar och sedan reviderats av respektive huvudsakliga författare.

Huvudsakliga författaren av respektive avsnitts ingress betecknas med namn följt av *.

Huvudsakliga författaren av diskussionen är Filip men stycke 6 är skrivet av Linnéa och stycke 9 är skrivet av Carl.

All R kod för arbetet hittas på GitLab via länken: <https://git.chalmers.se/alsaberi/MVEX01-22-11>.

Avsnitt	Huvudsaklig författare
Populärvetenskaplig presentation	Rani
Sammanfattning/Abstract	Rani
1 Inledning	Linnéa
2 Teori	Carl*
2.1 Hopprocess	Carl
2.2 Exponentialfördelning	Carl
2.3 Weibullfördelning	Carl
2.4 Gammafördelning	Carl
2.5 Poissonfördelning	Carl
2.6 Poissonprocess	Carl
2.7 Markovkedja	Carl
2.8 Maximum likelihood uppskattning	Carl
3 Inledande dataanalys	Filip*
3.1 Data	Filip
3.2 Fördelningen av fixeringslängden med fyra tillstånd	Rani
3.3 Fördelningen av fixeringslängden med två tillstånd	Rani
3.4 Jämförelse fixeringslängd expert och novis med fyra tillstånd	Filip
3.5 Jämförelse fixeringslängd individ fem med fyra tillstånd	Filip
4 Implementering av hopprocesser och mått	Rani*
4.1 Poissonprocess	Rani
4.2 Markovprocess	Filip
4.3 Markovprocess med fixeringslängd beroende på tillstånd	Filip
4.4 Implementering av mått för att	

jämföra modeller	Linnéa
5 Resultat: Hopprocessernas förmåga att förklara hur man tittar på tavlan	Linnéa*
5.1 Fördelning av antal fixeringar	Linnéa
5.2 Fördelning av fixeringslängder	Linnéa
5.3 Hopplängder	Linnéa
5.4 Poissonprocessens passform	Linnéa
5.5 Markovprocessernas passform	Linnéa
6 Diskussion	Filip
Appendix	Linnéa
Förord	Carl
Kod:	
Inledande dataanalys:	
- Jämförelse av experter och noviser	Filip
- Fördelningen av fixeringslängden med fyra tillstånd	Rani
- Fördelningen av fixeringslängden med två tillstånd	Rani
Implementering och simulering	Carl, Linnéa

Populärvetenskaplig presentation

Att skapa matematiska modeller som förklarar hur saker och ting fungerar är en stor del av vad matematiker jobbar med. Dessa modeller kan ha en systematisk beskrivning av verkliga fenomen, men de kan även ha en förutspående karaktär. Exempel på sådana är modeller som beskriver ögonrörelser. Ögonrörelser växlar mellan fixeringar och hopp, där fixeringar är då ögonen hålls näst intill helt stilla och hopp är ögonens förflyttningar mellan fixeringar. Att modellera ögonrörelser är viktigt och kan tillämpas inom ett flertal områden som till exempel fordons-, flyg- och försvarsindustrin. Vidare kan de användas för att förutspå människors reaktioner. Att förstå hur människor reagerar är betydelsefullt eftersom studerandet av människans medvetande och uppmärksamhet till exempel kan användas för teknik till självkörande bilar. Innan sådana komplexa modeller som används för självkörande bilar kan konstrueras måste enklare modeller utvecklas. Man kan börja med att utveckla en enkel modell som beskriver hur människor ser på en tavla. Att förklara hur man tittar på en tavla är frågeställningen vi har studerat och utvecklat en modell för. En modell som kan förutspå hur människor tittar på en tavla över tid. Vidare har vi även undersökt om konstexperter och konstnövister ser på en tavla på ett liknande sätt. Där konstexperter är vana vid att se på tavlor, medan konstnövister inte är det.

För att skapa en modell som kan beskriva hur en människa ser på en tavla, behövs först data på människors ögonrörelser när de ser på en tavla. Den insamlade datan kommer ifrån Jyväskylä universitet i Finland. Datat består av ögonrörelser från 20 studenter, tio konstexperter och tio konstnövister. Deltagarnas uppgift var att studera ett antal tavlor. Varje tavla studerades under tre minuter samtidigt som data från deras ögonrörelser registrerades. Vi valde att endast studera en tavla, nämligen *La croisée des destins*. För att vår modell skall kunna utvecklas så måste tavlan delas in i olika områden. Dessa områden är valda efter vad som anses vara de mest intressanta delarna av tavlan. Med relativt enkel matematik för en erfaren matematiker utvecklades en modell som kan förklara hur en människa ser på tavlan över tid. Modellen kan dels förklara hur länge man tittar på varje område, och dels hur många hopp det sker mellan områdena.

När det gäller jämförelsen mellan konstexperter och konstnövister, och hur de ser på en tavla, så pekar våra resultat på att det finns en del mindre skillnader. En mindre skillnad är att konstexperter och konstnövister finner olika områden av tavlan olika intressanta. Det som konstnövister finner intressant är inte lika intressant för konstexperter och vice versa. En annan mindre skillnad är antalet hopp mellan varje område. Konstexperter hade fler hopp, medan konstnövister hade färre antal hopp mellan områdena.

Sammanfattningsvis kan vi säga att med hjälp av matematik kan man skapa modeller för hur en människa ser på en tavla, vilket blir en startpunkt för mer komplicerade modeller. Om vår analys väcker ditt intresse och du vill se hur den studerade tavlan ser ut, indelningen av den och hur de faktiska resultaten ser ut, så kan du läsa vår rapport nedan.

Sammanfattning

Ögonrörelser växlar mellan fixeringar och hopp och ögonrörelser kan användas inom många olika tillämpningsområden. Arbetets syfte är att utveckla en modell, baserad på en hoppprocess, som förklarar hur man tittar på en tavla genom att använda ögonrörelser från den som tittar på tavlan. Dessutom ingår en jämförelse mellan ögonrörelser hos konstexperter, individer som är vana vid att titta på tavlor, och konstnövise, individer som inte har en sådan vana. Tre olika modeller har jämförts, en Poissonprocess och två olika varianter av en Markovprocess. Datan består av ögonrörelser som registrerades från 20 deltagare, tio konstexperter och tio konstnövise, när de studerade tavlan. Vidare studerade deltagarna tavlan under tre minuter men endast den första minuten har undersökts. Enligt de erhållna resultaten kan en fungerande modell konstrueras med hjälp av en Markovkedja för att simulera ögonens hopp och en gammafördelning för att simulera fixeringslängder. Vissa skillnader mellan konstexperter och konstnövise kan noteras. En skillnad är att konstexperternas blick stannar på ett område på tavlan under kortare tid, i jämförelse med konstnövisernas. Vidare tenderar konstexperter att göra fler hopp än konstnövise.

Abstract

Eye movements alternate between fixations and jumps and they can be used in many different application areas. The objective of this work is to develop a model that explains how one looks at a painting, based on a jump process, by using eye movements from the individual looking at the painting. In addition, a comparison is included, between the eye movements of expert art viewers, individuals who are used to looking at paintings, and novice art viewers, individuals who do not have such a habit. Three different models have been compared, a Poisson process and two different variants of Markov processes. The data consists of eye movements registered from ten expert art viewers and ten novice art viewers while they studied the painting. Furthermore, the participants studied the painting during three minutes, but only the first minute has been examined. According to the results obtained, a reasonable model can be constructed using a Markov chain to simulate the jumps of the eyes, and a gamma distribution to simulate the fixation lengths. Some differences between the expert art viewers and the novice art viewers can be seen. One of which is that the expert art viewers' gaze stays on the same region for a shorter amount of time compared to the novice art viewers. Moreover, expert art viewers tend to make more jumps than novice art viewers.

Innehåll

1	Inledning	1
2	Teori	3
2.1	Hopprocess	3
2.2	Exponentialfördelning	3
2.3	Weibullfördelning	4
2.4	Gammalfördelning	4
2.5	Poissonfördelning	5
2.6	Poissonprocess	5
2.7	Markovkedja	5
2.8	Maximum likelihood uppskattning	5
3	Inledande dataanalys	6
3.1	Data	6
3.2	Fördelningen av fixeringslängden med fyra tillstånd	7
3.3	Fördelningen av fixeringslängden med två tillstånd	10
3.4	Jämförelse: fixeringslängd mellan experter och noviser med fyra tillstånd	11
3.5	Jämförelse: fixeringslängd mellan individ fem och noviser med fyra tillstånd	13
4	Implementering av hopprocesser och mått	14
4.1	Poissonprocess	14
4.2	Markovprocess	14
4.3	Markovprocess med fixeringslängd beroende på tillstånd	15
4.4	Implementering av mått för att jämföra modeller	15
5	Resultat: Hopprocessernas förmåga att förklara hur man tittar på tavlan	15
5.1	Fördelning av antal fixeringar	16
5.2	Fördelning av fixeringslängder	17
5.3	Hopplängder	17
5.4	Poissonprocessens passform	18
5.5	Markovprocessernas passform	18
6	Diskussion	19
	Referenser	21
	Appendix	22

1 Inledning

Människan behöver hålla blicken stilla för att i detalj kunna se ett objekt, såsom en tavla [1]. För att uppnå en stilla blick har människan reflexer som motverkar huvud- och kroppsrörelser, samt motverkar att objektet rör sig på ögats näthinna. Dessutom har människan en utvecklad strategi i sättet att röra ögonen på. Ögonrörelserna växlar mellan fixeringar och hopp. Fixeringar är då ögonen hålls näst intill helt stilla och hopp, eller sackader som de även kallas, är ögonens förflyttningar mellan fixeringar.

Ögonrörelser har studerats sedan sent 1800-tal och de första studierna undersökte hur ögonen rör sig när man läser [2]. Sedan dess har forskningen om ögonrörelser genomgått ett flertal olika stadier. Vid sekelskiftet 1800-1900 låg fokus på att undersöka elementära ögonrörelser. På mitten av 1900-talet utfördes studier som främst fokuserade på att undersöka själva ögonrörelserna, snarare än att undersöka bakomliggande kognitiva processer [3]. Under slutet av 1900-talet skedde en större utveckling av inspelningsutrustning för registrering av ögonrörelser och forskningen fokuserade på att undersöka de kognitiva processerna som sker vid ögonrörelser. Nutida forskning kännetecknas av applikationer med interaktivitet. Dessa applikationer bygger på samspel mellan en dator och en användares ögonrörelser. Henderson och Hollingworth menar att ögonrörelser är en viktig faktor när det kommer till att effektivt tillgodogöra sig visuell information, de betonar vikten av att undersöka hur människan uppfattar och lagrar sin visuella omgivning [4]. Duschowski menar att Henderson och Hollingworth gav tidiga bevis på att ögonrörelser har ett samband till hjärnans förmåga att bearbeta sin omgivning. [5].

Ögonrörelser vid scenvisning är ett forskningsområde som studerar hur människan uppfattar olika scener [5]. Exempel på scener är objekt och omgivningar, vilket betyder att en tavla är en scen. Metodisk forskning av ögonens fixeringar, vid uppfattning av scener, genomfördes först av Buswell år 1935 [6]. Buswell observerade att ögonens fixeringsspunkter påverkas av vad en scen föreställer. Rayner och Pollatsek har visat att detaljer relativt långt ifrån ögonens fixeringspunkt kan uppfattas [7]. Samtidigt som speciellt intressanta detaljer ändå brukar fixeras. Dessutom registreras en stor mängd information från en scen under endast en första fixering. Rayner och Pollatsek menar att ögonrörelser är nödvändigt att studera för att fullständigt förstå hur människan uppfattar scener.

Anledningen till att speciellt ögonrörelser vid scenvisning är intressant att studera är för att forskning inom området idag tillämpas i flera olika delar av vårt samhälle. Dessutom går teknikutvecklingen i samhället snabbt, och mer avancerad teknik kräver mer forskning inom området. Företaget Smart Eye jobbar med att utveckla system för avancerad ögonföljning, eller eye tracking som det brukar benämnas [8]. Systemen används för att registrera en människas ögonrörelser och för att förutspå en människans handlingar. Fordons-, flyg- och försvarsindustrin, samt neurovetenskaplig forskning och informationsteknik är bara några exempel på områden i vårt samhälle som använder eye tracking och där tekniken ständigt utvecklas.

En intressant frågeställning, med tanke på eye tracking, är om en blick kan tränas. I fallet då en tavla studeras är det intressant att undersöka om ögonrörelserna skiljer sig åt hos en individ beroende på om individen är van vid att studera konst eller inte. Om det existerar skillnader mellan en otränad och en tränad blick så föreslår det att ögonrörelser kan tränas och då skulle det vara möjligt att följa utvecklingen för en otränad individ.

Studier av ögonrörelser vid studerande av konst där konstnöviser och konstexperter jämförs har tidigare gjorts. Studien av Buswell år 1935 jämförde gruppvis medellängden av de 25 första fixeringarna då de två grupperna observerade en tavla [6]. Den ena gruppen bestod av 611 experter och den andra av 117 noviser. Resultatet visade att fixeringslängderna var kortare för experter än för noviser. Ytterligare en studie utfördes av Kristjanson och Antes år 1989 [9]. De visade tio tavlor för en grupp experter och en grupp noviser. Varje grupp var sedan tidigare bekant med tre av de tio tavlorna, men inte nödvändigtvis samma tre tavlor. I jämförelse med noviserna, när grupperna tittade på tavlor som inte redan var bekanta, hade experterna fler fixeringar på områden av tavlorna som inte ansågs vara av stort intresse. Det var till och med så att experterna studerade alla

områden av tavlorna noggrannare än noviserna.

Ytterligare en studie som jämför konstexperter och konstnoviser är en studie gjord vid Jyväskylä universitet i Finland [10]. Studien har studerat 20 individer när de har tittat på sex olika tavlor. Individerna var studenter vid universitetet, tio var konststudenter eller allmänt konstintresserade och tio var noviser som inte hade något konstintresse och ingen vana vid att ingående titta på tavlor. För varje tavla registrerades individernas ögonrörelser under tre minuter. Ylitalo, Särkkä och Guttorp har analyserat datan från studien. En reflektion de gjorde var att mönstren för ögonrörelserna mellan noviser och experter till stor del kan överensstämma, men att typen och mängden av information grupperna utläser under fixeringar kan skilja sig åt. De jämförde längden av fixeringarna mellan experterna och noviserna och observerade att experterna generellt har kortare fixeringar än noviserna. De såg även att fördelningen av fixeringslängderna genomgående var mer överensstämmande i gruppen experter än gruppen noviser. Dessutom undersökte de om det går att modellera fixeringssprocessen av en tavla med en spatiell punktprocessmodell. Modellen fångade fixeringsprocessens mest framträdande egenskaper men hade svårigheter att hantera förändringen över tid. Vid användning av modellen observerades heller inga betydande skillnader mellan grupperna.

Då det ingick sex tavlor i den ovannämnda studien och då Ylitalo, Särkkä och Guttorp inte studerade alla tavlor i sin forskning, finns det mer data att undersöka. Vi anser att Ylitalos, Särkkäs och Guttorps frågeställningar kan undersökas vidare genom en analys av en av tavlorna som inte redan undersökts. En intressant frågeställning som vi vill fortsätta jobba med är frågan om det går att hitta en enkel matematisk modell som kan förklara hur man tittar på en tavla. Ylitalo, Särkkä och Guttorp undersökte om en spatiell punktprocessmodell kan förklara det, vi vill istället undersöka om någon enkel hopprocess har den förklarande förmågan. Vi vill också fortsätta utforska om det finns skillnader i fixeringsprocessen mellan noviser och experter.

Avstamp för detta arbete tas från studien vid Jyväskylä universitet. Arbetet avgränsas genom att koncentrera analysen till tavlan *La croisée des destins*, se Figur 1. En anledning till att vi endast analyserar en tavla är för att det skulle ta mycket tid i anspråk att analysera flera tavlor och vi fokuserar istället på att undersöka olika typer av hopprocesser och olika indelningar av tavlan. Tavlan delas in på två olika sätt, i två områden och i fyra områden. Indelningen i fyra områden kommer främst undersökas. Jämförelsen av de två indelningarna görs i syftet att undersöka hur olika indelningar påverkar analysen av tavlan. Dessutom kommer endast den inledande minuten av den registrerade datan analyseras, då deltagarnas intresse kan vara mer intensivt under den perioden. I ett senare skede är förhoppningen att resultatet av analysen kan appliceras på de andra tavlorna i studien.



Figur 1: *La croisée des destins* (1988) av Risto Suomi.

För att beskriva hoppen mellan de områden tavlan delas in i används stokastiska processer, hopprocesser med diskreta hopp. En hopprocess utgörs av hoppen mellan tillstånd, vilka i detta fall är tavlans olika områden, och fixeringslängderna i tillstånden [11]. Hoppen och fixeringslängderna antas vara oberoende av varandra. Inför varje hopp väljs ett av tavlans tillstånd oberoende av tidigare val. Först antas det att processen hoppar till tillstånd j med sannolikhet p_j oavsett vilket tillstånd den hoppar ifrån. Om fixeringarnas längder är oberoende och exponentialfördelade kan fixeringsprocessen beskrivas med hjälp av Poissonprocessen. Om sannolikheten att processen hoppar till ett tillstånd istället beror på tillståndet den hoppar från kan en Markovkedja användas för att beskriva hoppen. Det kan även antas att fixeringslängden beror på vilket tillstånd processen är i [12]. Då kan Markovprocesser användas. Det huvudsakliga syftet med det här arbetet är att undersöka om Poissonprocessen eller någon av Markovprocesserna kan förklara hur man tittar på tavlan.

Programmeringspråket R används för att analysera data, estimerar parametrar, simulera hopprocesser och visualisera resultat. Med hjälp av R utvärderas även processernas förmåga att förklara data, förklara hur man tittar på tavlan. Processerna jämförs med olika mått, såsom övergångssannolikheter och hopplängder.

Rapporten är upplagd på följande vis. Avsnitt 2 innehåller definition av hopprocess, teori för exponential-, Weibull-, gamma- och Poissonfördelningen och teori för Poissonprocessen, Markovkedjor och maximum likelihood uppskattning. Avsnitt 3 behandlar en inledande dataanalys och i avsnitt 4 redogörs för huvudimplementeringen av arbetet. I avsnitt 5 redovisas resultaten av analysen och i avsnitt 6 diskuteras dessa. I appendix finns visualiseringar av en del resultat.

2 Teori

En hopprocess består av två delar, hoppen mellan de olika tillstånden och tiden som spenderas i varje tillstånd. Vi har valt att studera tre olika hopprocesser. Den första är en Poissonprocess, den andra är en Markovprocess och den tredje är en variant på Markovprocessen där tiden som spenderas i varje tillstånd beror på vilket tillstånd processen befinner sig i. För att modellera tiden som spenderas i varje tillstånd används tre olika sannolikhetsfördelningar, exponential-, Weibull- och gammafördelningen. Samtliga definitioner i detta avsnitt återfinns i kurslitteratur, se referenser [13], [14] och [15].

2.1 Hopprocess

Definition 2.1 Låt X_i vara en stokastisk process sådan att $\{X_i : i \in I\}$ där I är en indexmängd. När en process utvecklas i tid är det konvention att skriva $X(t)$ där $t \in \mathbb{R}_+$ är en tidpunkt. Låt $t_0 < t_1 < \dots$ vara stokastiska positiva tal.

En hopprocess $X(t)$ kan defineras som:

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n I_{[t_n, t_{n+1})}(t) \quad (2.1)$$

$$I_{[t_n, t_{n+1})} = \begin{cases} 1, & \text{om } t \in [t_n, t_{n+1}), \\ 0, & \text{annars,} \end{cases}$$

där längden av en fixering ges av $t_{n+1} - t_n$.

2.2 Exponentialfördelning

Definition 2.2 En kontinuerlig stokastisk variabel X sägs vara exponentialfördelad med intensitetsparameter $\lambda > 0$ om täthetsfunktionen är given av:

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{om } x \geq 0, \\ 0, & \text{om } x < 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Om X är exponentialfördelad med intensitetsparameter $\lambda > 0$ så kan väntevärdet härledas genom:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \\
 &= \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \\
 &= \left[\begin{array}{l} u = x, \quad v = -e^{-\lambda x} \\ du = dx \quad dv = -\lambda e^{-\lambda x} dx \end{array} \right] \\
 &= \left[-x e^{-\lambda x} \right]_{x=0}^{x=+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x} dx \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \\
 &= \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_{x=0}^{x=+\infty} \\
 &= 0 - \left(-\frac{1}{\lambda} \right) \\
 &= \frac{1}{\lambda}.
 \end{aligned}$$

Vi har även att variansen för en exponentialfördelning är $\text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$.

2.3 Weibullfördelning

Definition 2.3 En kontinuerlig stokastisk variabel X sägs vara Weibullfördelad med skalparameter $a > 0$ och formparameter $b > 0$ om täthetsfunktionen är given av:

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{b}{a^b} x^{b-1} e^{-(x/a)^b}, & \text{om } x \geq 0, \\ 0, & \text{om } x < 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Notera här att om vi låter $a = 1/\lambda$ och $b = 1$, då får vi att:

$$f(x; 1/\lambda, 1) = \frac{1}{(1/\lambda)^1} x^{1-1} e^{-(x/(1/\lambda))^1} = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Det vill säga exponentialfördelningen är ett specialfall av Weibullfördelningen. Väntevärdet och variansen ges av $\mathbb{E}[X] = a\Gamma\left[1 + \frac{1}{b}\right]$ respektive $\text{Var}[X] = a^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) \right]^2 \right]$.

2.4 Gammafördelning

Definition 2.4 En kontinuerlig stokastisk variabel X sägs vara gammafördelad med skalningsparameter $\alpha > 0$ och intensitetsparameter $\beta > 0$ om täthetsfunktionen är given av:

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & \text{om } x \geq 0, \\ 0, & \text{om } x < 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

där $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$ är gammafunktionen.

Notera här att om vi låter $\alpha = 1$ och $\beta = \lambda$, då får vi att:

$$f(x; 1, \lambda) = \frac{\lambda^1}{\Gamma(1)} x^{1-1} e^{-\lambda x} = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Det vill säga även exponentialfördelningen är ett specialfall av gammafördelningen. Väntevärdet och variansen ges av $\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\beta}$ respektive $\text{Var}[X] = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

2.5 Poissonfördelning

Definition 2.5 En diskret stokastisk variabel X är Poissonfördelad med intensitetsparametern $\lambda > 0$ om sannolikhetsfunktionen av X är given av:

$$f(n; \lambda) = \mathbb{P}[X = n] = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Väntevärdet och variansen för en Poissonfördelning ges av $\mathbb{E}[X] = \text{Var}[X] = \lambda$.

2.6 Poissonprocess

Definition 2.6 Räkneprocessen $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ sägs vara en Poissonprocess med intensitetsparameter $\lambda > 0$ om följande krav uppfylls:

- $N(0) = 0$
- $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ har oberoende inkrement
- Antalet händelser i ett intervall med längden t är Poissonfördelade med väntevärde λt . Vilket medför att, $\forall s, t \geq 0$:

$$\mathbb{P}[N(t+s) - N(s) = n] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Det sista kravet medför att Poissonprocessen har stationära inkrement och att:

$$\mathbb{E}[N(t)] = \text{Var}[N(t)] = \lambda t. \quad (2.7)$$

Notera här att ankomsttiden mellan händelserna i en Poissonprocess är exponentialfördelad.

2.7 Markovkedja

Definition 2.7 En stokastisk process $X = \{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ på en uppräkningsbar mängd S är en Markovkedja om, för något $i, j \in S$ och $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = i] = \mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i] = p_{ij}, \quad (2.8)$$

där p_{ij} är sannolikheten att kedjan hoppar från tillstånd i till tillstånd j . Dessa övergångssannolikheter uppfyller $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1, i \in S$, och matrisen $P = [p_{ij}]$ är övergångsmatrisen för kedjan.

2.8 Maximum likelihood uppskattning

För att anpassa en fördelning för en given datamängd behöver man uppskatta parametrarna för denna fördelning. Detta kan göras genom maximum likelihood (ML) uppskattning på följande vis:

Antag att $\mathbf{X} = X_1, X_2, \dots, X_n$ är slumpmässiga oberoende variabler från någon fördelning $f(\mathbf{x}|\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)$. Om \mathbf{X} är diskret så är $f(\mathbf{x}|\theta)$ en sannolikhetsfunktion, om \mathbf{X} är kontinuerlig så är $f(\mathbf{x}|\theta)$ en täthetsfunktion. Givet de observerade värdena $X_i = x_i, i = 1, 2, \dots, n$ låt likelihood-funktionen av θ vara en funktion av $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$ och vara definerad som:

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta) = f(x_1|\theta)f(x_2|\theta)\dots f(x_n|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta). \quad (2.9)$$

För att hitta värdet på θ som maximerar likelihood-funktionen tar vi logaritmen av $L(\theta)$, detta görs för att förenkla beräkningarna och vi får att:

$$l(\theta) = \log[L(\theta)] = \log \left[\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \right] = \sum_{i=1}^n \log[f(x_i|\theta)]. \quad (2.10)$$

Slutligen hittar vi maximum likelihood uppskattning av θ genom att sätta $l'(\theta) = 0$ och lösa ut θ .

3 Inledande dataanalys

Detta avsnitt presenterar datan och redogör för vilka fördelningar som passar datan gällande fixeringslängden och varför vi kommer använda gammafördelningen. Det inkluderas även en jämförelse mellan grupperna experter och noviser, samt en jämförelse mellan en specifik individ och gruppen som individen är del av. Vidare kommer det också att analyseras om indelningen av tavlan har betydelse för fördelningen genom att redogöra för den andra indelningen.

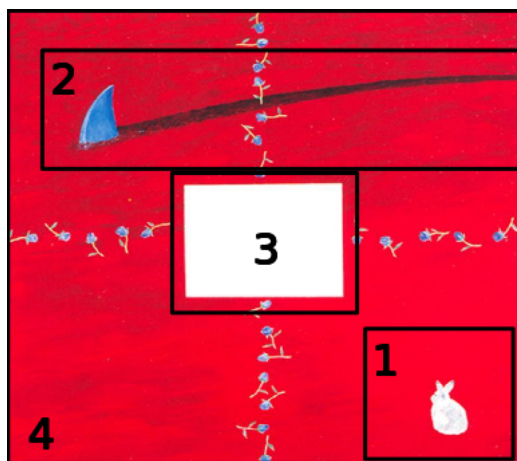
För att göra en bra uppskattning av hur länge en individ betraktar ett område behövs en analys göras av vilken fördelning som bäst representerar originaldatans fixeringslängd. Målet är att hitta en fördelning som passar datan genom att anpassa fördelningens parametrar. Fördelningen kommer användas till modellerna, vilka i sin tur sedan utvärderas för förmågan att förklara hur någon tittar på en tavla.

3.1 Data

Datan vi arbetar med kommer från en studie vid Jyväskylä universitet, där ögonrörelser hos 20 studenter har registrerats under tre minuter. Tio av studenterna var konstintresserade eller konststudenter, vi refererar till denna grupp som experter. Övriga tio studenter hade ingen tidigare erfarenhet av konst och vi refererar till denna grupp som noviser. I denna studie registrerades ögonrörelser för ett flertal tavlor, vi kommer i vårt arbete enbart arbeta med en specifik tavla. Något som även framgår i inledningen är att vi filtrerar bort alla observationer efter den första minuten. Vi begränsar oss också till ögonrörelser innanför tavlan för att förenkla datan för den modell vi ska utveckla.

Tavlan delas in i olika delar utefter vilka områden som utmärker sig i tavlan, dessa områden och vilken indelning man väljer är subjektiv. Vi väljer de mer framträdande områdena medan vi begränsar oss till fyra områden. Detta resulterar i valet av kaninen, den vita rektangel, hajen och dess spår samt de resterande områdena baserat på att de är större objekt i tavlan. Det finns oändligt många indelningar, och vad som väljs att betrakta som intressanta områden går att argumentera.

I Figur 2 kan indelningen av tavlan med fyra områden ses. När en observation faller inom ett område anses den tillhöra det tillståndet. Dessa tillstånd benämns tillstånd 1 (kaninen), tillstånd 2 (hajen och dess spår, benämns även som "hajen"), tillstånd 3 (den vita rektangeln i mitten) och tillstånd 4 (som består av resterande områden). En person kan betrakta ett objekt på tavlan utan att blicken registreras direkt på objektet. Alla områden är därför utvidgade för att säkerställa att när blicken faller nära området inkluderas även den fixeringen till tillståndet. När en person har haft fixeringar i ett tillstånd flera gånger på rad, summeras tiden som spenderas i det tillståndet till en total fixeringslängd.

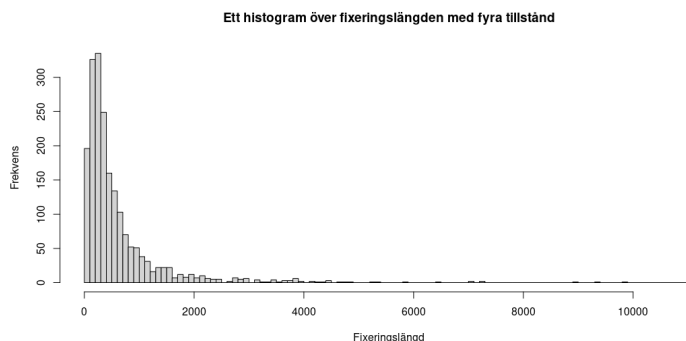


Figur 2: Tavlan med tillståndsindelning. Tillstånd 1, innehåller kaninen, tillstånd 2 är hajen och dess spår, tillstånd 3 den vita rektangeln i mitten och tillstånd 4 är de resterande områdena.

3.2 Fördelningen av fixeringslängden med fyra tillstånd

För att undersöka vilken fördelning som bäst representerar datan behöver vi en djupare förståelse. Vi undersöker vilka fördelningar som kan vara passande och jämför dessa mot datan med hjälp av statistisk analys. Vi kommer bestämma vilken fördelning som är lämpligast att använda för att modellera fixeringslängderna.

Inledningsvis använder vi ett histogram av fixeringslängder mätt i millisekunder, se Figur 3. Utseendet av histogrammet föreslår att en exponentialfördelning är passande.



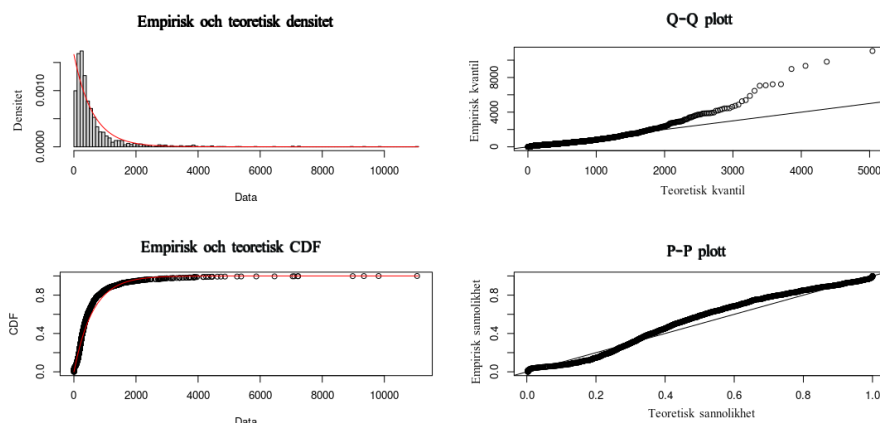
Figur 3: Histogram över fixeringslängder mätt i millisekunder för alla individer.

Med ML metoden kan intensitetsparametern för exponentialfördelningen uppskattas till $\lambda \approx 0,00164$, se Tabell 2. För att se hur bra denna fördelning passar, jämförs den anpassade exponentialfördelningen med data, se Figur 4. Nämligen, kvantil-kvantil-plott (Q-Q plott) och en sannolikhets-sannolikhet-plott (P-P plott). Q-Q plotten jämför kvantilerna mellan den empiriska fördelningen med den teoretiska fördelningen, P-P plotten jämför den empiriska kumulativa fördelningsfunktionen med den teoretiska kumulativa fördelningsfunktionen.

Utifrån Figur 4 kan vi dra slutsatsen att exponentialfördelningen är lämplig. Enligt Q-Q plotten stämmer exponentialfördelningen överens med den empiriska fördelningen fram till ungefär 2000 ms. Även enligt P-P plotten är överensstämmelsen bra förutom små avvikelser vid 0,2 och 0,6.

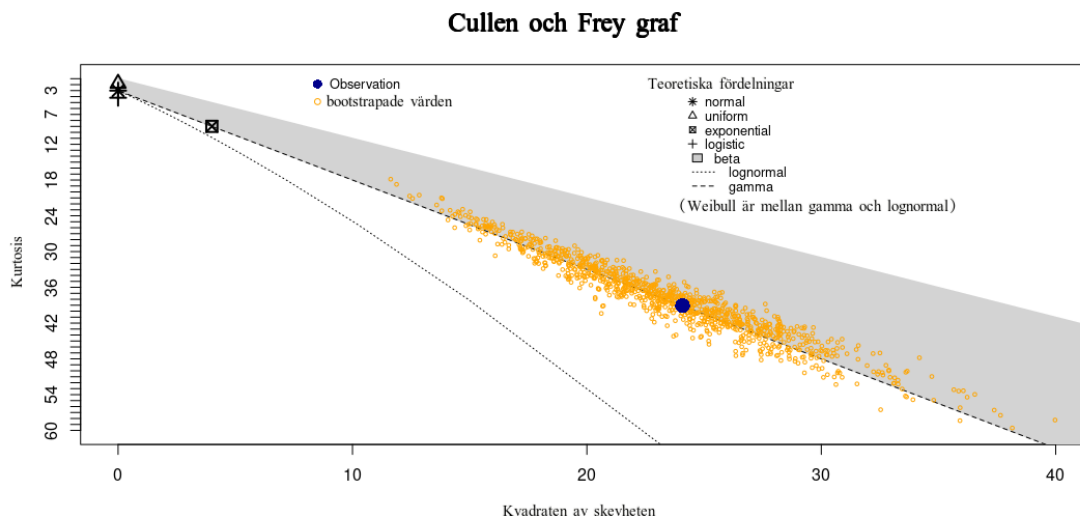
	ML uppskattning	Median	2,5%	97,5%
Intensitetsparameter	0,00164	0,00164	0,00158	0,00172

Tabell 2: ML uppskattning och konfidensintervall för intensitetsparametern för exponentialfördelningen, baserade på värden framtagna med hjälp av den parametriska bootstrapmetoden.



Figur 4: Uppe till vänster visas fixeringslängder från datan (histogram) och nere till vänster den empiriska fördelningsfunktionen (svart) mot den skattade exponentialfördelningen (röd). Till höger visas Q-Q plott (uppe) och P-P plott (nere) av datan (svart) mot den skattade exponentialfördelningen.

För att undersöka om fler fördelningar är passande använder vi oss av en *Cullen och Frey graf*, se Figur 5. Cullen och Frey grafen är ett statistiskt hjälpmedel för att få en indikation på vilken fördelning som kan passa data. Först beräknas kvadraten av skevheten (x-axeln) och kurtosis (y-axeln), sedan simuleras värden med bootstrapmetoden (gula punkter).



Figur 5: Cullen och Frey graf av fixernglängder med simulerade värden med bootstrapmetoden.

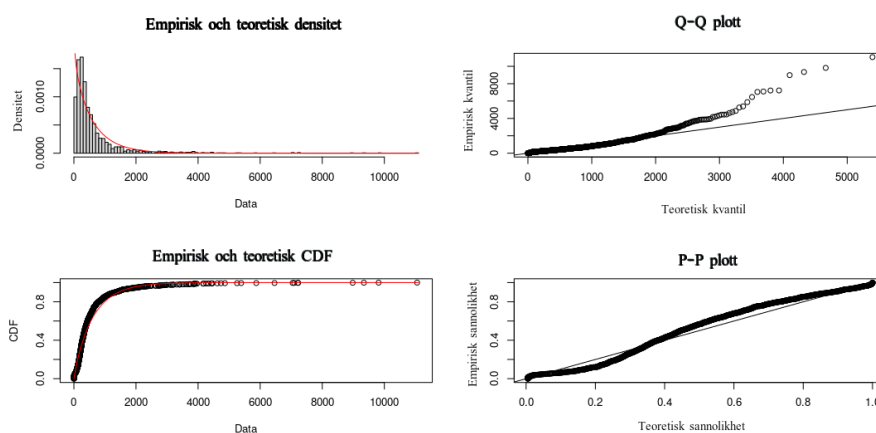
Eftersom de flesta gula punkterna faller över gammalinjen så föreslår Figur 5 att gammalfördelningen är en passande fördelning. Vidare är Weibullfördelningen mellan lognormal- och gammalinjen,

där en del gula punkter ligger. Vi väljer således även att undersöka Weibullfördelningen.

Vi uppskattar gammafördelningens skalnings- och intensitetsparameter med hjälp av ML metoden till $\alpha \approx 0,903$ och $\beta \approx 0,00148$, se Tabell 3. Notera att när $\alpha = 1$ medför det att gammafördelningen blir en exponentialfördelning. Vi kan då jämföra $\beta \approx 0,00148$ och $\lambda \approx 0,00164$ och inser att de är ganska lika. Vidare visas hur bra fördelningen passar, se Figur 6.

	ML uppskattning	Median	2,5%	97,5%
Skalningsparameter	0,90318	0,90508	0,85902	0,95924
Intensitetsparameter	0,00148	0,00148	0,00138	0,00159

Tabell 3: ML uppskattning och konfidensintervall för intensitetsparametern för gammafördelningen, baserade på värden framtagna med hjälp av den parametriska bootstrappmetoden.

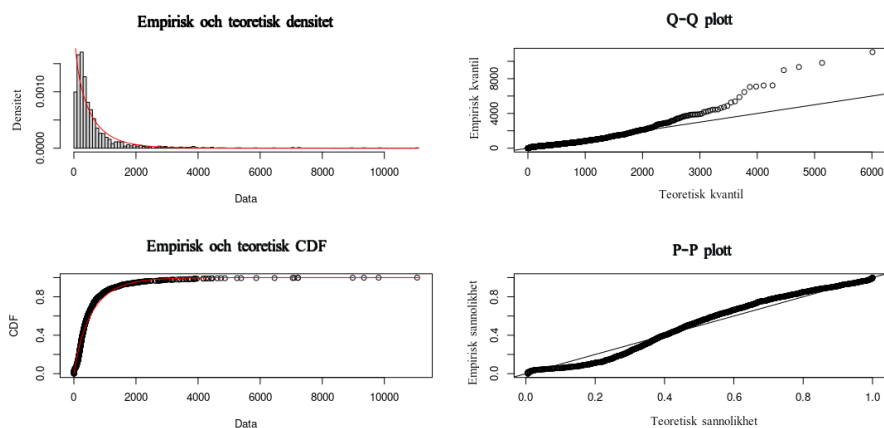


Figur 6: Uppe till vänster visas fixeringslängder från datan (histogram) och nere till vänster den empiriska fördelningsfunktionen (svart) mot den skattade gammafördelningen (röd). Till höger visas Q-Q plott (uppe) och P-P plott (nere) av datan (svart) mot den skattade gammafördelningen.

Vidare uppskattar vi Weibullfördelningens skalnings- och skevhetsparameter med hjälp av ML metoden till $a \approx 0,901$ och $b \approx 575,114$, se Tabell 4. Notera att när $a = 1$ medför det att Weibullfördelningen blir en exponentialfördelning. Då kan vi jämföra intensitetsparametern och skevhetsparametern $\lambda \approx 0,00164$, $b = \frac{1}{\lambda} \approx 609,756$. Återigen ser vi att parametrarna är ganska lika. Vidare ses hur bra Weibullfördelningen passar i Figur 7.

	ML uppskattning	Median	2,5%	97,5%
Skalningsparameter	0,901	0,901	0,872	0,933
Skevhetsparameter	575,114	575,763	545,160	607,504

Tabell 4: ML uppskattning och konfidensintervall för intensitetsparametern för Weibullfördelningen, baserade på värden framtagna med hjälp av den parametriska bootstrappmetoden.



Figur 7: Uppe till vänster visas fixeringslängderna från datan (histogram) och nere till vänster den empiriska fördelningsfunktionen (svart) mot den skattade Weibullfördelningen (röd). Till höger visas Q-Q plott (uppe) och P-P plott (nere) av datan (svart) mot den skattade Weibullfördelningen.

Som vi kan se i Figurerna 6 och 7 är både gamma- och Weibullfördelningen passande fördelningar för datan. Det finns små skillnader mellan Q-Q plottarna och något större skillnader ses i P-P plottarna vid intervallen $0,4 - 0,8$ och $0,1 - 0,3$. Vi kan nu säga att både gamma- och Weibullfördelningen är mer passande för datan än exponentialfördelningen. Vi väljer att använda gammafördelningen då gammafördelningen tenderar att bättre passa datan vid lägre värden och vi har högre frekvens av mindre värden i datan.

Slutligen gjordes ett Kolmogorov-Smirnov test som är ett statistisk test som besvarar frågan "Vad är sannolikheten att en samling av data kommer från en viss sannolikhetsfördelning?". Vidare förkastar man sannolikhetsfördelningen på signifikansnivå $0,05$ om p -värdet $< 0,05$, medan om p -värdet $> 0,05$ kan man inte förkasta fördelningen. Enligt testresultaten i Tabell 5 kan vi inte förkasta någon av fördelningarna.

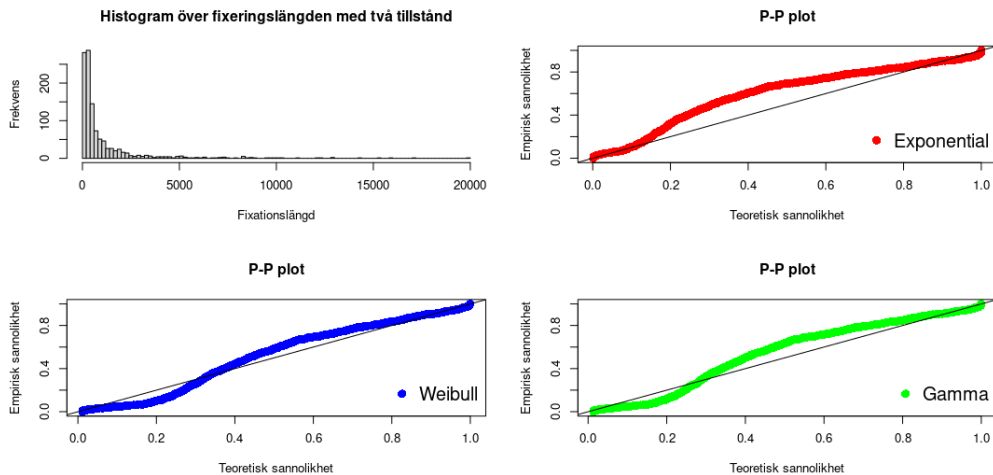
	Exponential	Gamma	Weibull
p-värde	0,0925	0,0983	0,08696

Tabell 5: Resultat från Kolmogorov-Smirnov test.

3.3 Fördelningen av fixeringslängden med två tillstånd

Nedan undersöks om indelningen av tavlan är en påverkande faktor för valet av fördelning. Tavlan delas därför in i två områden nämligen den vita rektangeln (tillstånd 3) och resterande. Eftersom den vita rektangeln i mitten är betydligt mindre än det resterande området kan detta medföra att mer tid spenderas i det större området.

I detta fall ger en P-P plott en tydligare indikation på hur passande en fördelning är i jämförelse med tillhörande Q-Q plottar, därför presenteras inte Q-Q plottarna här. Histogrammet i Figur 8 påpekar att exponentialfördelningen skulle passa. Betraktar man P-P plottarna i Figur 8 så inser vi att exponentialfördelningen inte är att föredra. P-P plotten belyser att exponentialfördelningen inte passar datan för majoriteten av observationerna. För indelningen med två tillstånd är gamma- och Weibullfördelningen mer passande.



Figur 8: Uppe till vänster visas fixeringslängderna från datan (histogram) och nere till vänster visas P-P plott av datan (blå) mot den skattade Weibullfördelningen, uppe till höger visas P-P plott av datan (röd) mot den skattade exponentialfördelningen och nere till höger visas P-P plott av datan (grön) mot den skattade gammalfördelningen.

Sammanfattningsvis kan vi konstatera att exponentialfördelningen påverkas starkt negativt av den här specifika indelningen. Gamma- och Weibullfördelningarna påverkas inte nämnvärt. Vi kan konkludera att indelningen av tavlan samt hur många tillstånd vi har, kan vara avgörande för vilken fördelning som passar datan bäst. Framöver i arbetet kommer vi att begränsa oss till indelningen med fyra tillstånd, det vill säga den i Figur 2.

3.4 Jämförelse: fixeringslängd mellan experter och noviser med fyra tillstånd

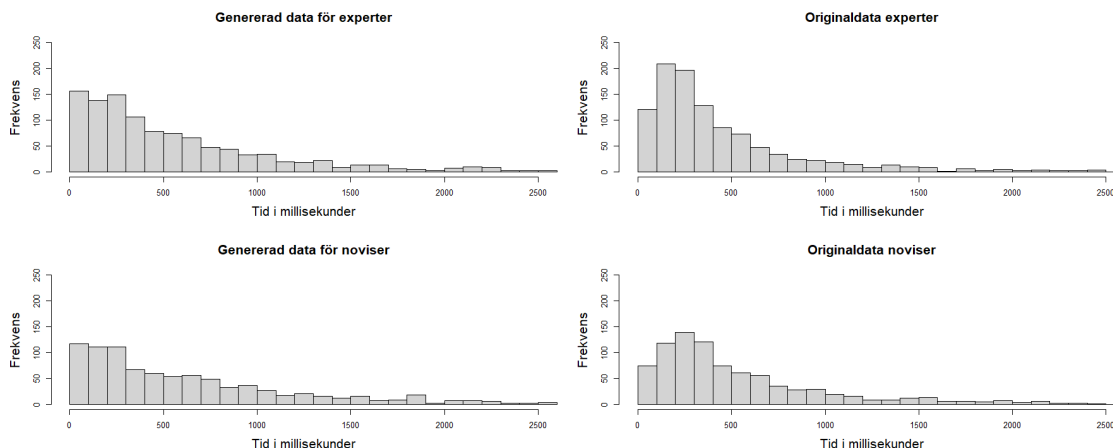
En jämförelse experter och noviser emellan görs för att understryka skillnader och liknelser i grupperna, detta för att få en klarare bild av hur datan skall hanteras. I fallet då vi kan visa att det inte finns några större skillnader i grupperna är det inte längre intressant att betrakta noviser och experter som olika grupper. Går det däremot att visa att grupperna har betydliga skillnader kan det vara ointressant att betrakta grupperna ihop utan det skulle krävas att de separeras. Ytterligare en anledning är att när vi sedan jämför resultat kan vi lättare förklara hur vår modell beter sig när vi anpassar den mot experter, noviser eller individer.

I Tabell 6 kan man se att andelen observationer under 500 millisekunder är fler för experterna, både på grund av att experterna har en aning högre procentuell andel observationer i spannet, men också på grund av att experterna har fler observationer allmänt. Via histogrammen i Figur 9 kan vi se skillnader i fördelningar, resultatet visar ingen större skillnad utseendemässigt, dock skiljer de sig markant i medelvärde.

Vi kan jämföra en uppskattning av exponentialfördelningarna mot originaldatan, se Figur 9. Exponentialfördelningen är liknande för experter och noviser, så pass att det är svårt att urskilja någon direkt skillnad. Jämfört med originaldatan är båda fördelningarna en rimlig uppskattning förutom i 0 – 400 millisekunder spannet. Observationer över 400 millisekunder är en god uppskattning för både noviser och experter.

Millisekunder	0-500	500-1000	1000-1500	Antal observationer
Noviser	94,3%	3,4%	0,67%	890
Experter	95,5%	4,6%	0,65%	1076

Tabell 6: Procentuell andel av observationer för ett tidsspänn.



Figur 9: Ovan till vänster visas histogram över experternas genererade data, ovan till höger visas originaldatan för experter, nedan till vänster visas histogram över novisernas genererade data, nere till höger visas originaldatan för noviser, för den genererade datan har exponentialfördelningen använts.

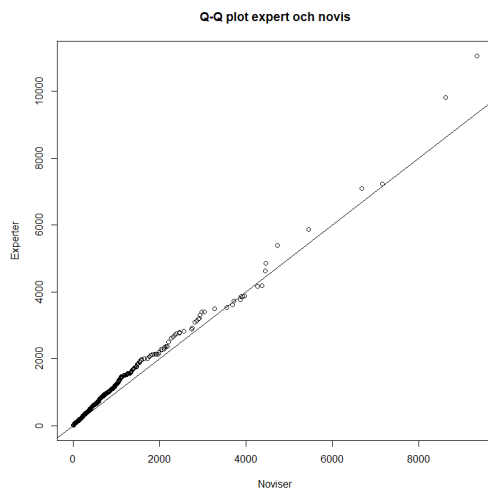
Från Tabell 7 kan vi utläsa och jämföra medelvärdet för experterna och noviserna. Noviserna ligger klart högre, en skillnad på 116 millisekunder. Skillnaderna i medelvärden och medianvärden påvisar en positivt skev fördelning för både noviser och experter.

	Medelvärde	Median	Intensitetsparameter	Genererat medelvärde
Noviser	673 ms	392 ms	0,0015	683 ms
Experter	557 ms	310 ms	0,0180	463 ms

Tabell 7: Medelvärde, median, en ML uppskattning för exponentialfördelningen och antal observationer för både noviser och experter.

Vidare för att se hur de minsta och största värdena påverkar datan, gjordes en eliminering av de minsta och största 0,5% av värdena. Man ser redan då man tittar på medianen att båda fördelningarna har en lägre median än medelvärde, men efter eliminationen av endast 1% av datan sänks medelvärdet från 557 till 525 millisekunder för experter och från 673 till 633 millisekunder för noviser. Det är ingen större skillnad mellan experter och noviser, en förändring på 32 respektive 40 millisekunder är endast en skillnad med 0,2 procentenheter, vilket är nästintill obetydligt. Alltså skiljer sig de minsta och största värdena hos experter och noviser väldigt lite.

För att vidare bekräfta våra resultat gjordes en Q-Q plott för fixeringslängder mellan experter och noviser, se Figur 10. Q-Q plotten indikerar en mindre skillnad, eftersom för mindre värden följs en nästintill rak linje. Vi ser större skillnader på större fixeringslängder, vilket kan bero på mycket färre datapunkter för större värden.



Figur 10: Q-Q plott av experternas och novisernas fixeringslängder.

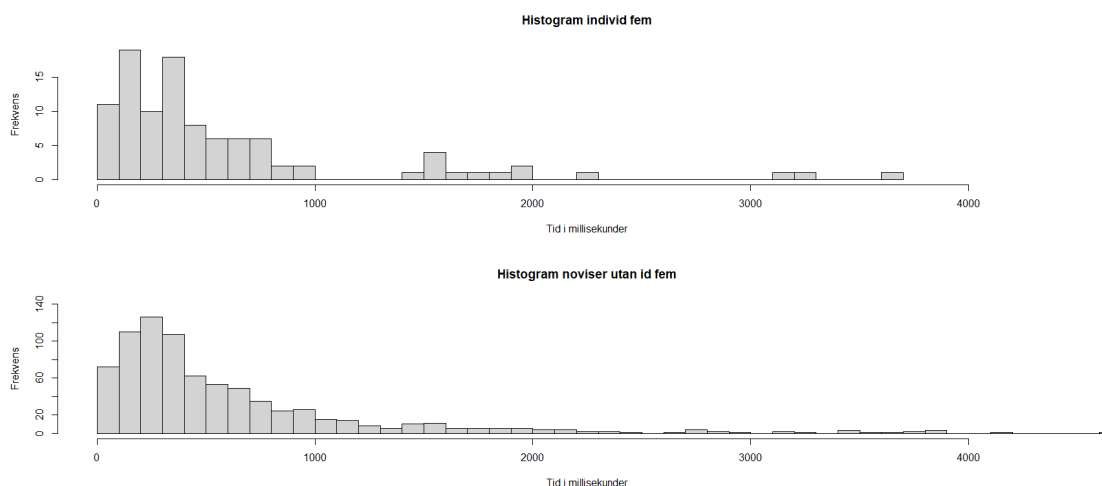
Alltså skiljer sig noviser och experter väldigt lite fixeringslängdsmässigt, då de inte skiljer sig så mycket skulle man kunna använda en gemensam fördelning. Vi vet också att medelvärdet skiljer sig och då hade en separat uppskattning av parametrarna varit att föredra.

3.5 Jämförelse: fixeringslängd mellan individ fem och noviser med fyra tillstånd

Jämförelsen i detta avsnitt redogör för möjliga skillnader emellan individ fem och noviserna utan individ fem, detta för att lättare evaluera resultaten vi får för individ fem samt för en bättre helhetsbild på datan.

Anledningen till att vi valde att betrakta specifikt individ fem var från början för att han inte gjorde fixeringar utanför tavlan. Hans data var därför mer hanterbar att jobba med, senare när vi ändå tog bort observationer utanför tavlan var detta inte längre något problem för någon individ. Valet av individ fem kvarstod dock. Visuellt skiljer sig datan för individ fem från noviserna utan individ fem men inte tillräckligt för att fördelningen skulle kunna misstänkas vara en annan.

Individ fem är en novis och då gruppen noviser skiljer sig väldigt lite från hela datan så jämförs individ fem mot gruppen noviser utan individ fem. Individ fem har ett medelvärde på 585 millisekunder medan gruppen noviser har ett på 673 millisekunder. Individ fem har alltså ett lågt medelvärde jämfört med gruppen, och är på så sätt närmare en expert i fixeringslängd. Endast 64,7% av fixeringslängderna hos individ fem ligger i spannet 0 – 500 millisekunder, vilket skiljer sig stort från gruppens 94,3%. Istället är spannet 500 – 1000 millisekunder 21,5% av totala antalet fixeringar vilket också skiljer sig väldigt mycket från gruppens 4,6%. Histogrammet, se Figur 11, för individ fem skiljer sig en del ifrån de andra noviserna men inte till den grad att de inte skulle tillhöra samma fördelning. Skillnaderna kan förklaras genom att antalet datapunkter skiljer mycket.



Figur 11: Ovan visas ett histogram över individ fem som är en novis och nedtill visas ett histogram för noviser utan individ fem.

Om en metod baserad på individ fem skulle resultera i värden närmare en expert eller ännu längre ifrån medelindividerna skulle detta kunna förklaras av det faktum att fixeringslängden hos individ fem skiljer sig väldigt mycket från dessa grupper.

4 Implementering av hopprocesser och mått

I detta avsnitt introducerar vi tre modeller som försöker förklara hur man tittar på tavlan, se Figur 1. Dessa tre modeller är en Poissonprocess och två Markovprocesser. Som det konstaterades i avsnitt 3 är gammafördelningen den mest passande fördelningen för datan. På grund av antaganden för Poissonprocessen måste exponentialfördelningen användas, som till viss del också passar datan. Gammafördelningen används istället för Markovprocesserna.

4.1 Poissonprocess

Poissonprocessen implementeras som en serie av diskreta hopp där den genomsnittliga tiden mellan hoppen är känd, men fixeringslängderna är exponentialfördelade med $\lambda > 0$. Poissonprocessen väljer initialt ett av n tillstånd, där $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, med sannolikhet $\frac{1}{n}$. Därefter hoppar processen med sannolikheten $\frac{1}{n-1}$ till ett nytt tillstånd. Då processen är definierad på sådant sätt att den inte kan hoppa till samma tillstånd som den befinner sig i.

Notera att ML uppskattningen beräknades för exponentialfördelningen genom att först substituera in (2.2) i (2.10),

$$l(\lambda) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{j=i}^n x_i, \quad (4.1)$$

sedan sätta derivatan lika med noll och slutligen lösa ut $\hat{\lambda}$

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}. \quad (4.2)$$

4.2 Markovprocess

Simuleringen av Markovprocessen behöver en fördelning för fixeringslängden och en övergångsmatris för att generera en kedja med olika tillstånd. Övergångsmatrisen ger sannolikheterna att vi

hoppar från ett tillstånd till ett annat. Matrisen skapas genom att först för varje tillstånd räkna antalet hopp till alla möjliga tillstånd. Sedan dividera de beräknade antal hoppen med totala antalet hopp från det aktuella tillståndet.

Gällande fixeringslängden, det vill säga hur länge processen befinner sig i ett tillstånd, vet vi från avsnitt 3 att gammafördelningen är passande för datan. Gammafördelningens parametrar α och β uppskattas genom ML metoden baserat på originaldatan för en grupp eller individ. Slutligen skapas Markovprocessen genom att tillsätta en slumpmässig tid från en gammafördelning till varje tillstånd i en kedja genererad av en övergångsmatrix. Vi hänvisar till denna specifika Markovprocess som "Markov".

ML uppskattningen för gammafördelningen beräknas genom att substituera in (2.4) i (2.10),

$$l(\alpha, \beta) = (n+1)\alpha \log \beta - (n+1) \log \Gamma(\alpha) + (\alpha-1) \sum_{i=0}^n (\log x_i - \beta x_i). \quad (4.3)$$

(4.3) deriveras med avseende på α och β , och derivatan sätts sedan lika med noll:

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \frac{(n+1)\alpha}{\beta} - \sum_{i=0}^n x_i = 0 \quad (4.4)$$

$$\implies \hat{\beta} = \frac{(n+1)\hat{\alpha}}{\sum_{i=0}^n x_i}. \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = (n+1) \log \beta - (n+1) \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=0}^n \log x_i = 0, \quad (4.6)$$

$$\implies \frac{\Gamma'(\hat{\alpha})}{\Gamma(\hat{\alpha})} = \log(\hat{\beta}) + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \log x_i, \quad (4.7)$$

där (4.7) löses numeriskt med hjälp av $\hat{\beta}$.

4.3 Markovprocess med fixeringslängd beroende på tillstånd

Denna process implementeras på liknande vis som den första markovprocessen, vi genererar en Markovkedja och lägger sedan till en fixeringslängd för varje tillstånd. Skillnaden är att en gammafördelning uppskattas för varje tillstånd kedjan kan befinna sig i. ML uppskattningen för parametrarna till varje gammafördelning baseras på originaldatan till det specifika tillståndet. Vi hänvisar till denna specifika Markovprocess som "Markov 2".

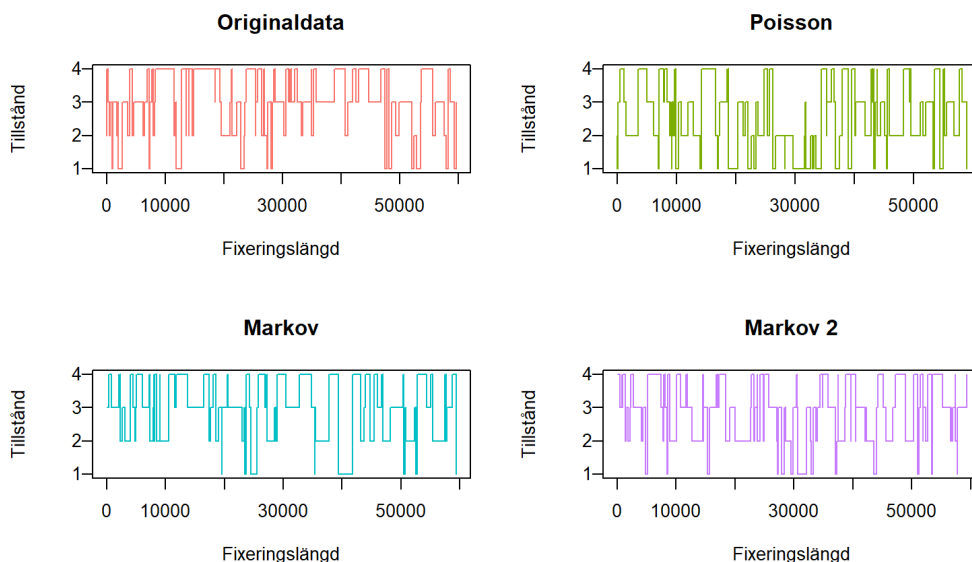
4.4 Implementering av mått för att jämföra modeller

För att få ett konkret mått på hur bra en modell är, mäts något som vi kallar för hopplängden. I varje område väljs en punkt som representerar det tillståndet. För alla tillstånd utom tillstånd 4 väljs mittpunkten av området. Mittpunkten för tillstånd 4 sammanfaller med mittpunkten för tillstånd 3 och därför väljs en punkt längre ner till vänster på tavlan för tillstånd 4. Det viktiga är inte att mittpunkten väljs för alla tillstånd, utan att varje tillstånd representeras av en unik punkt. För varje hopp mäts längden mellan tillståndens utvalda punkter och längderna summeras till en total hopplängd. Tavlan är 766*768 pixlar stor och hopplängden mäts i antal pixlar.

5 Resultat: Hopprocessernas förmåga att förklara hur man tittar på tavlan

I detta avsnitt redogörs för de erhållna resultaten. En illustration av hopprocesserna och originaldatan för individ fem visas i Figur 12. Vi jämför även modellerna mot originaldatan för antalet

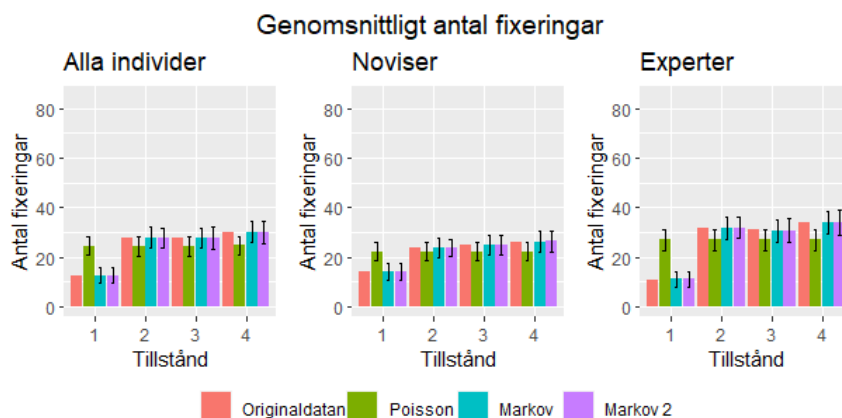
fixeringar och fixeringslängder, fördelat mellan tavlans tillstånd, samt hopplängder. Genomgående jämförs gruppen bestående av alla individer, noviser och experter. Viss jämförelse görs även mellan individer. Intressanta resultat belyses speciellt medan en mer ingående diskussion ges i avsnitt 6.



Figur 12: Visualisering av ögonrörelserna för individ fem under de första 60 000 millisekunderna, det vill säga de första 60 sekunderna, samt illustration av de olika hopprocesserna.

5.1 Fördelning av antal fixeringar

I Figur 13 åskådliggörs fördelningen av genomsnittliga antalet fixeringar, för de olika modellerna och originaldatan, för tavlans tillstånd. Resultatet är baserat på 10 000 simuleringar och visas för grupperna alla individer, noviser och experter. Resultaten för varje enskild individ finns i appendix, se Figurerna A1, A2 och A3. Antalet fixeringar för originaldatan ges av ett medelvärde för samtliga individer i respektive grupp.



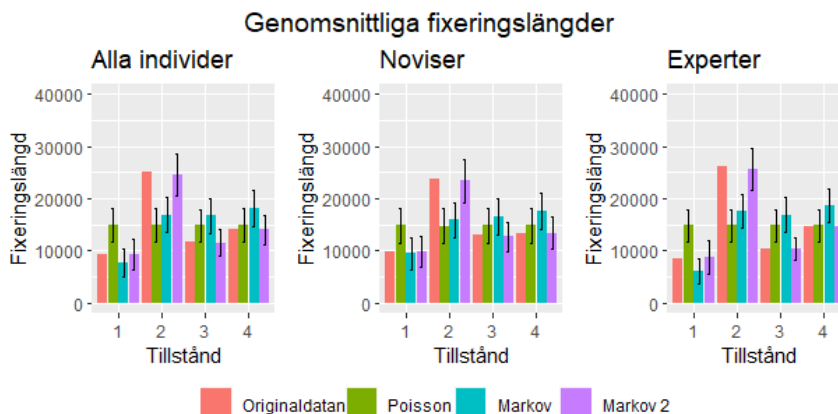
Figur 13: Genomsnittligt antal fixeringar för de tre modellerna, med respektive standardavvikelse, jämfört med originaldatan för tavlans tillstånd baserat på 10 000 simuleringar för alla individer (vänster), noviser (mitten) och experter (höger).

Från Figur 13 kan det utläsas att experterna i genomsnitt har fler fixeringar än noviserna, det vill

säga fler hopp, vilket betyder att experterna har kortare fixeringstider än noviserna. Det beror på att den totala fixeringstiden är en minut och vid fler hopp blir den genomsnittliga fixeringslängden kortare. Antalet fixeringar fördelade mellan tavlans tillstånd ser liknande ut för noviserna och experterna. I tillstånd 1 har grupperna färre fixeringar än i tillstånd 2, 3 och 4. Tillstånd 1 som föreställer kaninen verkar inte vara lika intressant som övriga tillstånd, men noviserna har ändå en större andel av sina fixeringar på kaninen än vad experterna har.

5.2 Fördelning av fixeringslängder

Fördelningen av fixeringslängden visar hur intressanta tavlans olika områden är. För grupperna alla individer, noviser och experter visas i Figur 14 den genomsnittliga fördelningen av den totala fixeringstiden på 60 sekunder för tavlans tillstånd, för originaldatan och för alla modeller. Resultatet är baserat på 10 000 simuleringar. I appendix visas fördelningen av fixeringslängder för varje enskild individ, se Figurer A4, A5 och A6. Fördelningen av fixeringslängder för originaldatan ges av ett medelvärde för samtliga individer i respektive grupp.

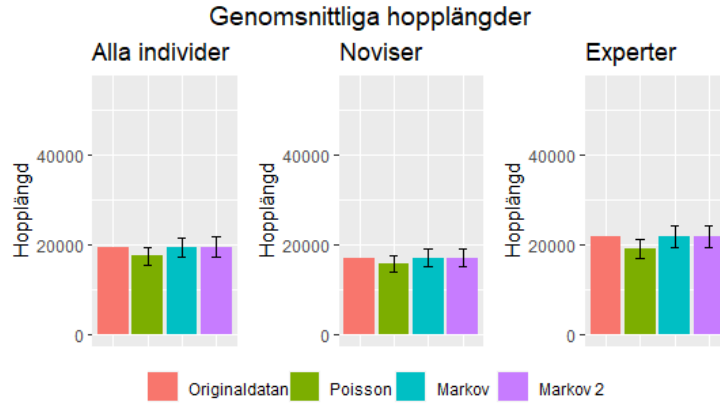


Figur 14: Genomsnittliga fixeringslängder i millisekunder för de tre modellerna, med respektive standardavvikelse, jämfört med originaldatan för tavlans tillstånd baserat på 10 000 simuleringar för alla individer (vänster), noviser (mitten) och experter (höger).

Även om tillstånd 2, hajen och dess spår, har liknande antal fixeringar som tillstånd 1, 3 och 4, så syns i Figur 14 att tillstånd 2 har en längre fixeringslängd än övriga tillstånd. Detta betyder att hajen studeras under längre tid än övriga tillstånd när den fixeras. Noviser och experter verkar fördela sin totala fixeringslängd på liknande vis, men noviser lägger något mer tid i tillstånd 1 och 3 och något mindre tid i tillstånd 2 och 4 än experterna. Det vill säga, kaninen och den vita rektangeln verkar vara mer intressant för noviserna än experterna. Medan experterna finner hajen och de övriga områdena av tavlan mer intressanta än noviserna.

5.3 Hopplängder

En jämförelse av hopplängder, så som de är definierade i avsnitt 4.4, mellan modellerna och originaldatan är ett mått på hur bra modellerna är. För grupperna alla individer, noviser och experter åskådliggörs i Figur 15 genomsnittliga hopplängder för alla modeller och originaldatan. Resultaten baseras på ett genomsnitt av 10 000 simuleringar. Hopplängderna för varje individ kan ses i appendix, se Figureerna A7, A8 och A9. I Figur 15 ser man att gruppen noviser i snitt har en kortare hopplängd än experterna.



Figur 15: Genomsnittliga hopplängder i pixlar för de använda modellerna, med respektive standardavvikelse, jämfört med originaldatan baserat på 10 000 simuleringar för alla individer (vänster), noviser (mitten) och experter (höger).

5.4 Poissonprocessens passform

I Figur 12 är det tydligt att Poissonprocessen ger fler fixeringar i tillstånd 1 jämfört med originaldatan och övriga modeller. Eftersom individ fem gör få fixeringar i tillstånd 1 indikerar det att Poissonprocessen inte kan förklara hur denna individ tittar på tavlan.

I Figurerna 13, 14 och 15 åskådliggörs att Poissonprocessen inte modellerar fördelningen av antalet fixeringar och fixeringslängderna för grupperna. Poissonprocessen lyckas heller inte modellera hopplängden för alla grupper. Modellen gör ett bättre jobb med att modellera kortare hopplängder men den modellerar ändå inte hopplängden för alla individer, vilket ses i Figurerna A7, A8 och A9 i appendix.

Att Poissonmodellen inte passar datan speciellt bra har en naturlig förklaring. En övergångsmatrix för Poissonprocessen i vårt fall ser ut på följande vis, där sannolikheterna är avrundade till två decimaler:

$$P_{Poisson} = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,33 & 0,33 & 0,33 \\ 0,33 & 0,00 & 0,33 & 0,33 \\ 0,33 & 0,33 & 0,00 & 0,33 \\ 0,33 & 0,33 & 0,33 & 0,00 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

En anledning till att Markovmodellerna presterar bättre än Poissonmodellen beror på att övergångsmatriserna för Markovprocesserna är anpassade efter datan, detta kan ses genom att visuellt betrakta övergångsmatriserna för Markovprocesserna nedan. Det är tydligt att sannolikheterna skiljer sig från $\frac{1}{3}$ och det observeras också skillnader mellan grupperna.

$$P_{Expert} = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,25 & 0,34 & 0,41 \\ 0,18 & 0,00 & 0,41 & 0,41 \\ 0,17 & 0,40 & 0,00 & 0,43 \\ 0,22 & 0,39 & 0,39 & 0,00 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad P_{Novis} = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,25 & 0,34 & 0,41 \\ 0,10 & 0,00 & 0,42 & 0,48 \\ 0,06 & 0,48 & 0,00 & 0,46 \\ 0,18 & 0,43 & 0,39 & 0,00 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

5.5 Markovprocessernas passform

I Figur 12 är det inte tydligt vilken av Markovprocesserna som är mest passande, då båda liknar originaldatan. I Figur 13 visas att Markovprocesserna har liknande standardavvikelse för genomsnittligt antal fixeringar och att båda processerna modellerar datan bra på gruppnivå. För de

enskilda individerna skiljer sig genomsnittliga antalet fixeringar en del, men Markovprocesserna modellerar väl även på individnivå, se appendix.

Det framgår tydligt i Figur 14 och Figurerna A4, A5 och A6 i appendix att Markov 2 modellerar fixeringslängderna på grupp- och individnivå. Markov gör däremot inte det, varken för grupperna eller individerna.

I Figur 15 åskådliggörs att Markovprocesserna modellerar originaldatans hopplängd för alla grupper. Markovprocesserna har liknande standardavvikelse. På individnivå skiljer sig hopplängden mycket, exempelvis har individ ett en hopplängd på strax över 45 000 pixlar medan individ två har en hopplängd på cirka 10 000 och då tillhör båda individerna gruppen experter. Markovprocesserna gör trots den stora längdvariationen ett bra jobb, både för grupper och individer.

6 Diskussion

I detta avsnitt diskuteras resultaten av de tre modellerna som redovisades i avsnitt 5. Vidare diskuteras också hur modellerna passar till de olika grupperna samt möjliga förbättringar av vårt arbete och tänkbara framtida studier.

Poissonprocessen antar exponentialfördelade fixeringslängder men med avseende på andledningarna presenterade i avsnitt 3.2 så vet vi att gammafördelningen är att föredra framför exponentialfördelningen. Därför ligger Poissonprocessen i underläge mot Markovprocesserna. Övergångsmatrisen, se 5.4, till denna Poissonprocess är oanpassbar till de faktiska sannolikheterna för byte av tillstånd. Eftersom Poissonprocessen varken modellerar fixeringslängden eller tillstånden bättre än Markovprocessen konstaterar vi att Poissonprocessen är en för simpel modell och därmed väljer vi att fokusera på Markovprocesserna.

Vid en första anblick ser båda Markovmodellerna liknande ut, se Figur 13 och 15, däremot ser vi en skillnad i Figur 14. Markovprocessen med fixeringsfördelning beroende på tillstånd presterar synbart bättre än Markovmodellen som antar samma fixeringslängdsfördelning för alla tillstånd.

I Figur 13, där genomsnittligt antal fixeringar visas, ser vi ingen skillnad på våra modeller i anpassningen till originaldatan. Vi ser heller ingen skillnad på individnivå i Figurerna A1, A2 och A3. Båda Markovmodellerna uppskattar alltså det genomsnittliga antalet fixeringar väl. Den genomsnittliga hopplängden för båda Markovprocesserna visas i Figur 14 och ingen synbar skillnad ses för varken experter eller noviser, liknande är det heller ingen skillnad på individnivå i Figurerna A7, A8 och A9 i appendix.

När vi betraktar Figur 14 kan det avläsas att den första Markovmodellen passar ungefär lika bra för experter och noviser, vistelsetiden i tillstånd 1 (kaninen) uppskattas bättre för noviser medan för experter uppskattas vistelsetiden i tillstånd 2 (hajen och dess spår) bättre. Den genomsnittliga fixeringslängden är generellt dåligt anpassad för Markov. Markov 2 presterar här synbart bättre för gruppen alla individer i tillstånd 2 däremot ser vi att den inte har samma medelvärde som originaldatan, men fortfarande väldigt nära. Till skillnad från alla individer och experter så är uppskattningen av den genomsnittliga fixeringslängden för noviser bättre i tillstånd 2, utan att vara sämre i något av de övriga tillstånden. På individnivå i Figurerna A4, A5 och A6 ser vi en mer komplex bild av Markov 2, den fortsätter att generellt ge en bra uppskattning för vistelsetiden medan den på liknande sätt som för gruppen experter inte helt korrekt uppskattar tiden blicken stannar i tillstånd 2. De individerna som har en längre fixeringslängd i tillstånd 2 är märkbart svårare att hantera.

Markov 2 uppskattar alltså oberoende av vilken grupp den passas mot, med undantag för den genomsnittliga fixeringslängden. Modellen uppskattar längden för noviser bättre än för experter, vilket till viss del kan ske på grund av att tillstånd 2 generellt har en längre fixeringslängd för de flesta individer och grupper vilket gör skillnaderna större och mer synbara för just det tillståndet.

Vår slutsats är att modellen som bäst beskriver individers ögonrörelser vid studerande av tavlan är Markov 2.

Det kan framstå som anmärkningsvärt att tillståndet med rektangeln tycks vara mer intressant än kaninen, för både noviserna och experterna. En bidragande faktor kan vara att den vita rektangeln utgör ett större område av tavlan än kaninen. Vidare fixeras tillståndet bestående av tavlans övriga områden liknande antal gånger som hajen och rektangeln. Det kan dock vara så att fler fixeringar görs i det resterande området samt i tillståndet med hajen på grund av att det finns rosor i dessa områden som drar intresset dit. Rosorna kan även vara en faktor till att en större andel av fixeringstiden spenderas i tillståndet med hajen än övriga tillstånd. Området med hajen är även större än områdena kaninen och rektangeln, vilket också kan vara en orsak till fördelningen av fixeringslängden. Att gruppen noviser i snitt har kortare hopplängd än experter kan förklaras av att experterna gör fler hopp än noviserna, detta redogjordes för i avsnitt 5. Det kan emellertid även tyda på att experterna gör längre hopp än noviserna.

I inledningen noterades att studierna av Buswell och av Ylitalo, Särkkä och Guttorp båda kom fram till slutsatsen att experter generellt har kortare fixeringslängd än noviser [6, 10]. Vår analys belyser att fixeringslängden hos experter och noviser skiljer sig åt till det faktum att experter har kortare fixeringslängd än noviser. I både dataanalysen i avsnitt 3 och resultatet i avsnitt 5 där vi har implementerat modellen är resultatet överensstämmande, experter tenderar att skifta fokus oftare. Notera att i vårt arbete är fixeringstiden den tid blicken stannar i ett av de fyra områdena, inte tiden som blicken stannar på en punkt som i de tidigare arbetena.

Det finns ett flertal potentiella ändringar som möjligtvis hade förbättrat detta arbete. I detta arbete undersöktes endast två olika indelningar av tavlan. Genom att inkludera andra indelningar av tavlan hade en jämförelse mellan dessa indelningar möjliggjorts. Ett antagande som gjordes var att alla observationer utanför tavlan ansågs vara brus. Därmed valde vi att filtrera bort alla observationer utanför tavlan. Ett alternativ hade varit att addera ytterligare ett tillstånd utanför tavlan, som skulle inkludera dessa observationer. Ytterligare ett problem i detta arbete är att vi inte har någon möjlighet att kontrollera den faktiska sekvensen som ögonen rör sig. När man tillsätter en slumpmässig variabel är det möjligt att sekvensen som återspeglar hur ögonen rör sig inte stämmer överens med verkligheten. Detta skulle kunna lösas genom att tillåta att övergångsmatrisen för Markovprocessen ändras i tid. Denna lösning skulle däremot också möjligen resultera i nya möjliga problem med överanpassning av modellen.

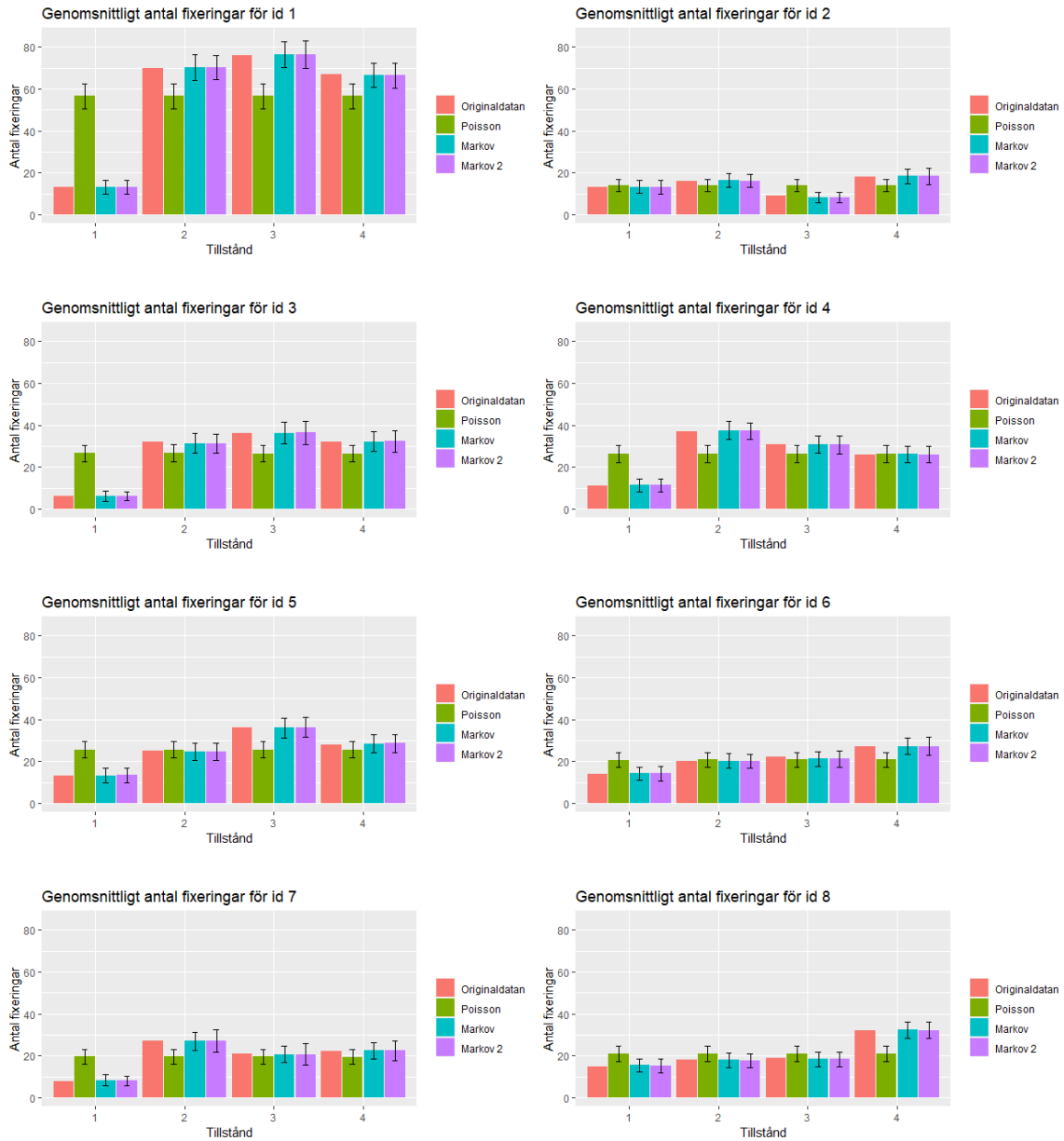
Referenser

- [1] Land M. Eye movements in man and other animals. *Vision Research*. 2019;162:1-7.
- [2] Huey E.B. *The psychology and pedagogy of reading*. 1 uppl. New York: Macmillan; 1908.
- [3] Rayner, K. Eye movements in reading and information processing: 20 years of research. *Psychological Bulletin*. 1998;124(3):372-422.
- [4] Henderson, J.M., Hollingworth, A. *Eye guidance in reading and scene perception*. 1 uppl. Amsterdam: Elsevier; 1998.
- [5] Duchowski A. T. A breadth-first survey of eye-tracking applications. *Behavior Research Methods, Instruments & Computers*. 2002;34(4):455-470.
- [6] Buswell, G.T. *How people look at pictures—a study of the psychology of perception in art*. 1 uppl. Chicago: The Univ. Chicago Press; 1935.
- [7] Rayner, K., Pollatsek, A. Eye movements and scene perception. *Can J Psychol*. 1992;46:342-376.
- [8] Smart Eye. Smart Eye har idag ett av marknadens ledande system för avancerad eye-tracking [Internet]. Göteborg: Smart Eye AB; 2021 [citerad 2022-05-05]. Hämtad från: <http://corp.smarteye.se/sv/teknologi/>
- [9] Kristjanson A.F., Antes J.R. Eye movement analysis of artists and nonartists viewing paintings. *Visual Arts Research*. 1989;15(2):21–30.
- [10] Ylitalo A., Särkkä A., Guttorp P. Stochastic analysis and modelling of eye movements in viewing paintings. *Annals of Applied Statistics*. 2016;10(2):549-574.
- [11] Wilkinson Darren J. *Stochastic Modelling for Systems Biology*. 2 uppl. London: CRC Press, Taylor Francis Group; 2012.
- [12] Barbu V., Limnios N. *Semi-Markov Chains and Hidden Semi-Markov Models toward Applications*. 1 uppl. New York: Springer; 2008.
- [13] Hwei P. Hsu. *Schaum's Outline of Probability, Random Variables, and Random Processes*. 3 uppl. [Utgivningsort saknas]: McGraw-Hill; 2014.
- [14] Serfozo, R. *Basics of Applied Stochastic Processes*. 1 uppl. Berlin: Springer; 2009.
- [15] Alm S.E., Britton T. *Stokastik - Sannolikhets-teori och statistik-teori med tillämpningar*. 1 uppl. Stockholm: Liber; 2008.

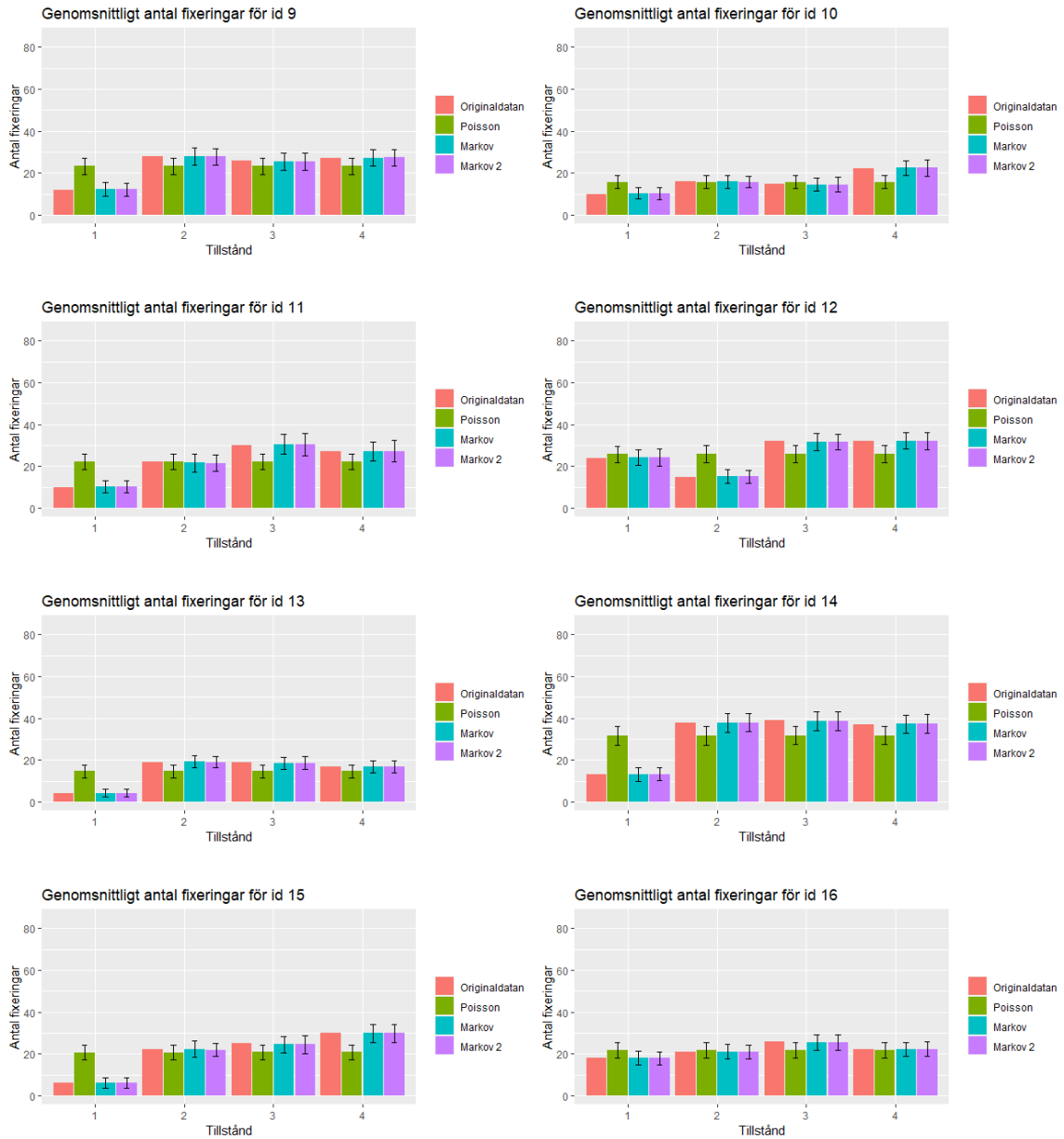
Appendix

Fördelning av antal fixeringar för alla individer

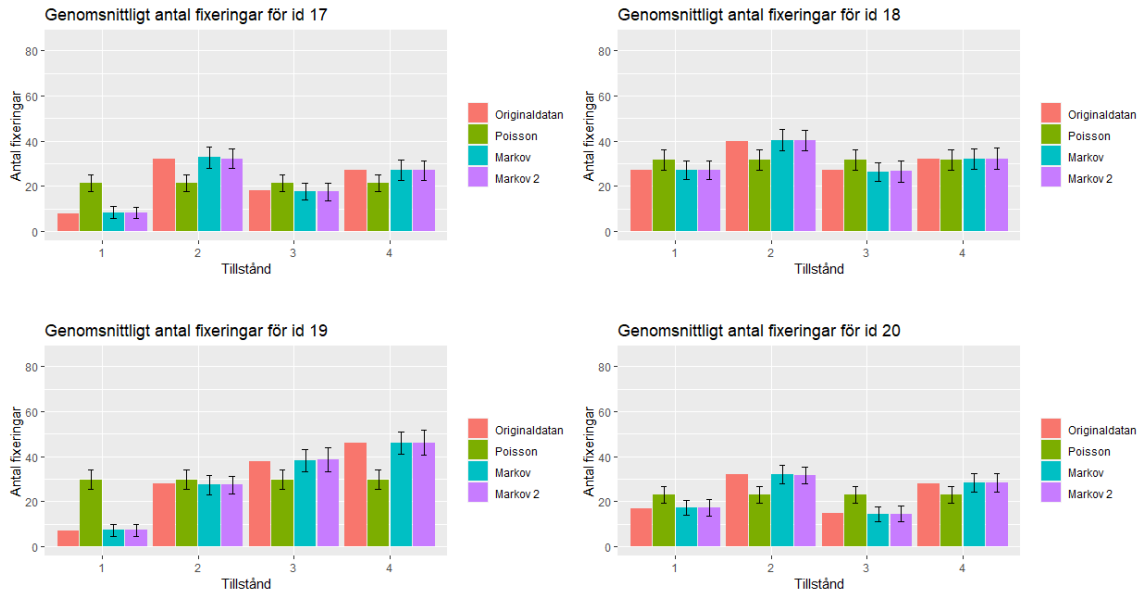
I Figurerna A1, A2 och A3 visas genomsnittlig antal fixeringar för de tre modellerna med respektive standardavvikelse, jämfört med originaldatan för tavlans tillstånd för alla individer.



Figur A1: Genomsnittligt antal fixeringar för de tre modellerna, med respektive standardavvikelse, jämfört med originaldatan för tavlans tillstånd baserat på 10 000 simuleringar för id 1-8.



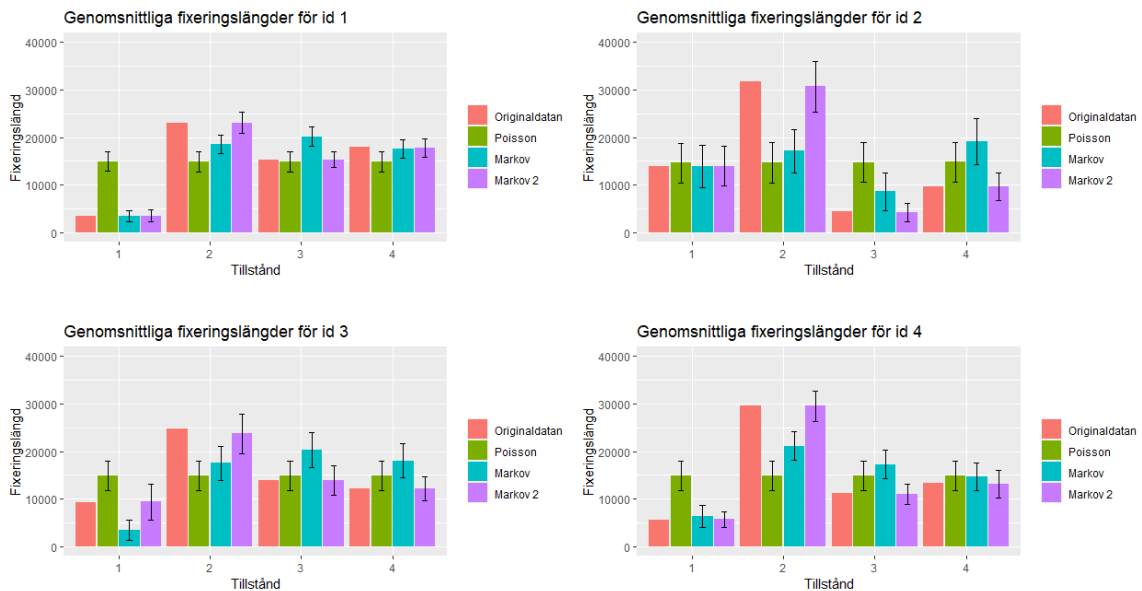
Figur A2: Genomsnittligt antal fixeringar för de tre modellerna, med respektive standardavvikelse, jämfört med originaldata för tavlans tillstånd baserat på 10 000 simuleringar för id 9-16.



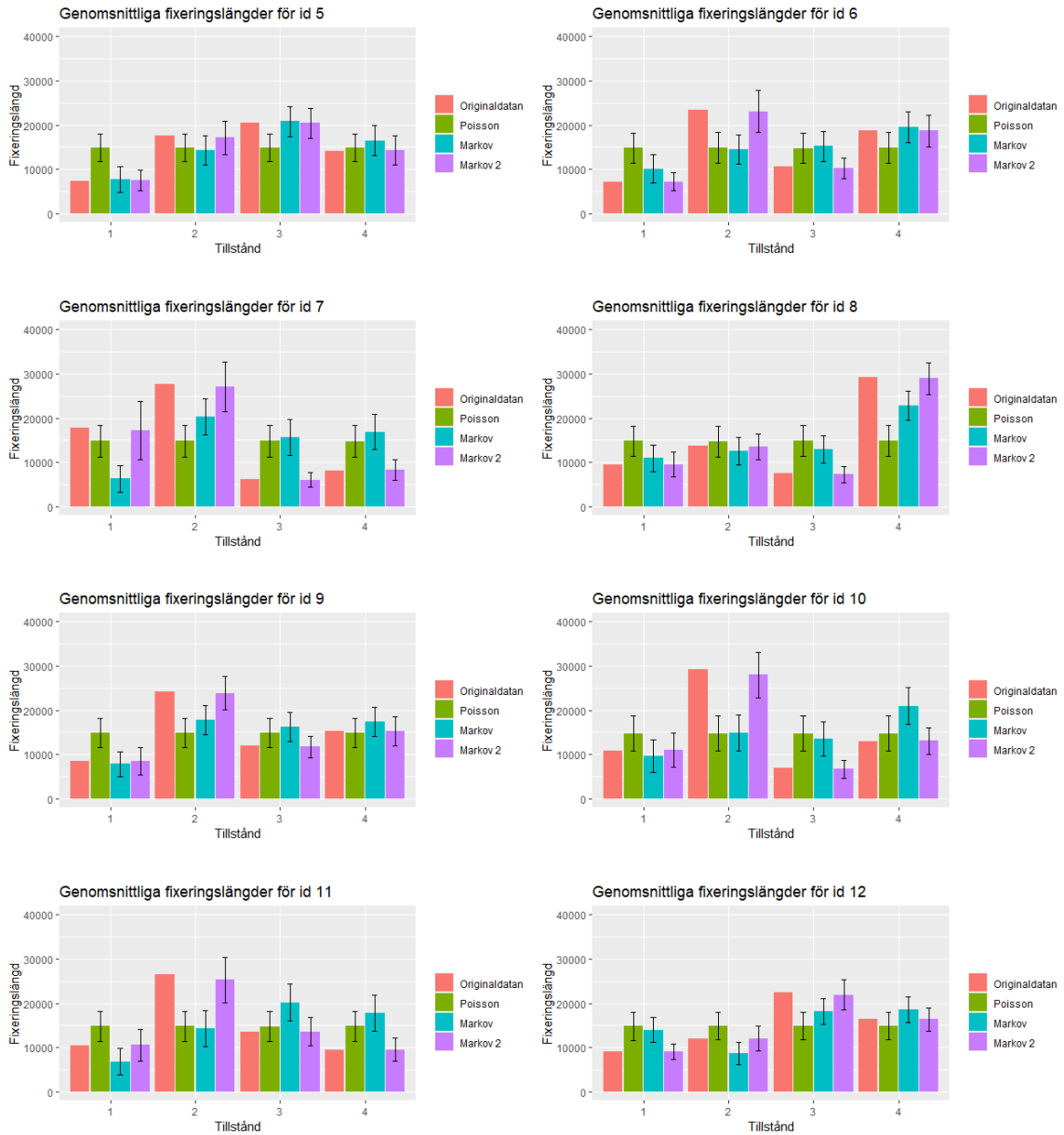
Figur A3: Genomsnittligt antal fixeringar för de tre modellerna, med respektive standardavvikelse, jämfört med originaldatan för tavlan och dess tillstånd baserat på 10 000 simuleringar för id 17-20.

Fördelning av fixeringslängder för alla individer

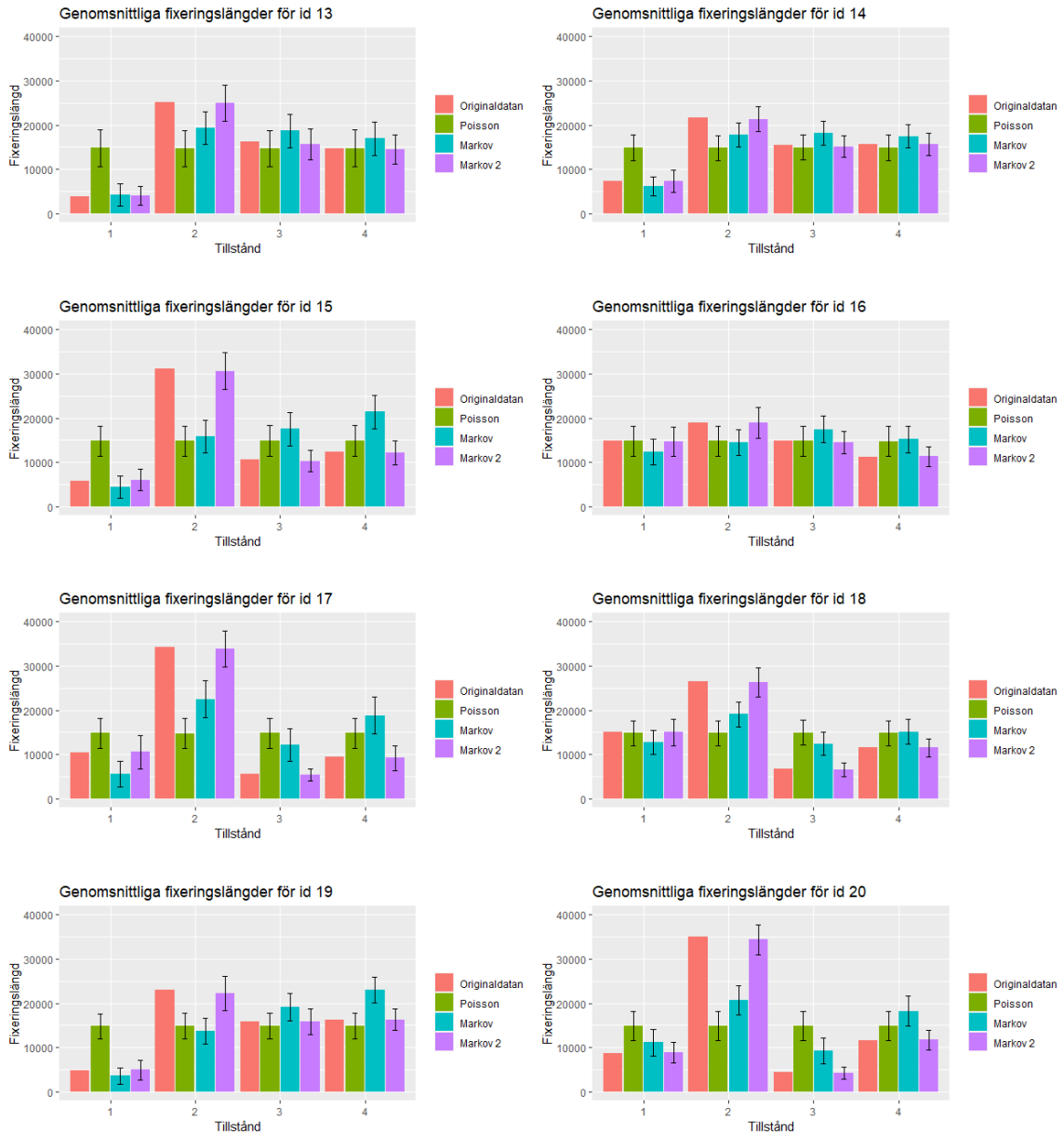
I Figurerna A4, A5 och A6 visas genomsnittliga fixeringslängder för de tre modellerna med respektive standardavvikelse, jämfört med originaldatan för tavlans tillstånd för alla individer.



Figur A4: Genomsnittliga fixeringslängder i millisekunder för de tre modellerna, med respektive standardavvikelse, jämfört med originaldatan för tavlans tillstånd baserat på 10 000 simuleringar för id 1-4.



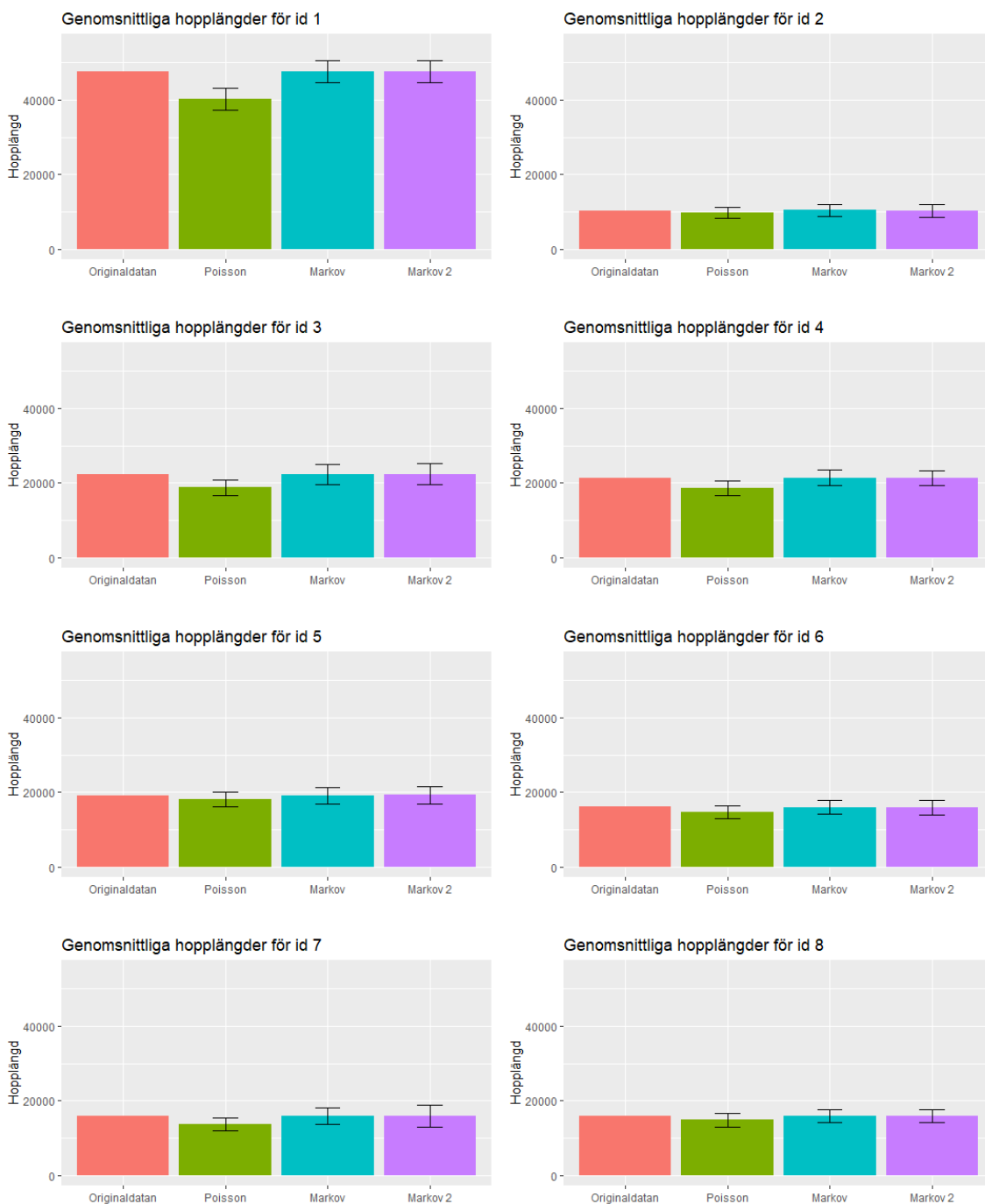
Figur A5: Genomsnittliga fixeringslängder i millisekunder för de tre modellerna, med respektive standardavvikelse, jämfört med originaldatan för tavlans tillstånd baserat på 10 000 simuleringar för id 5-12.



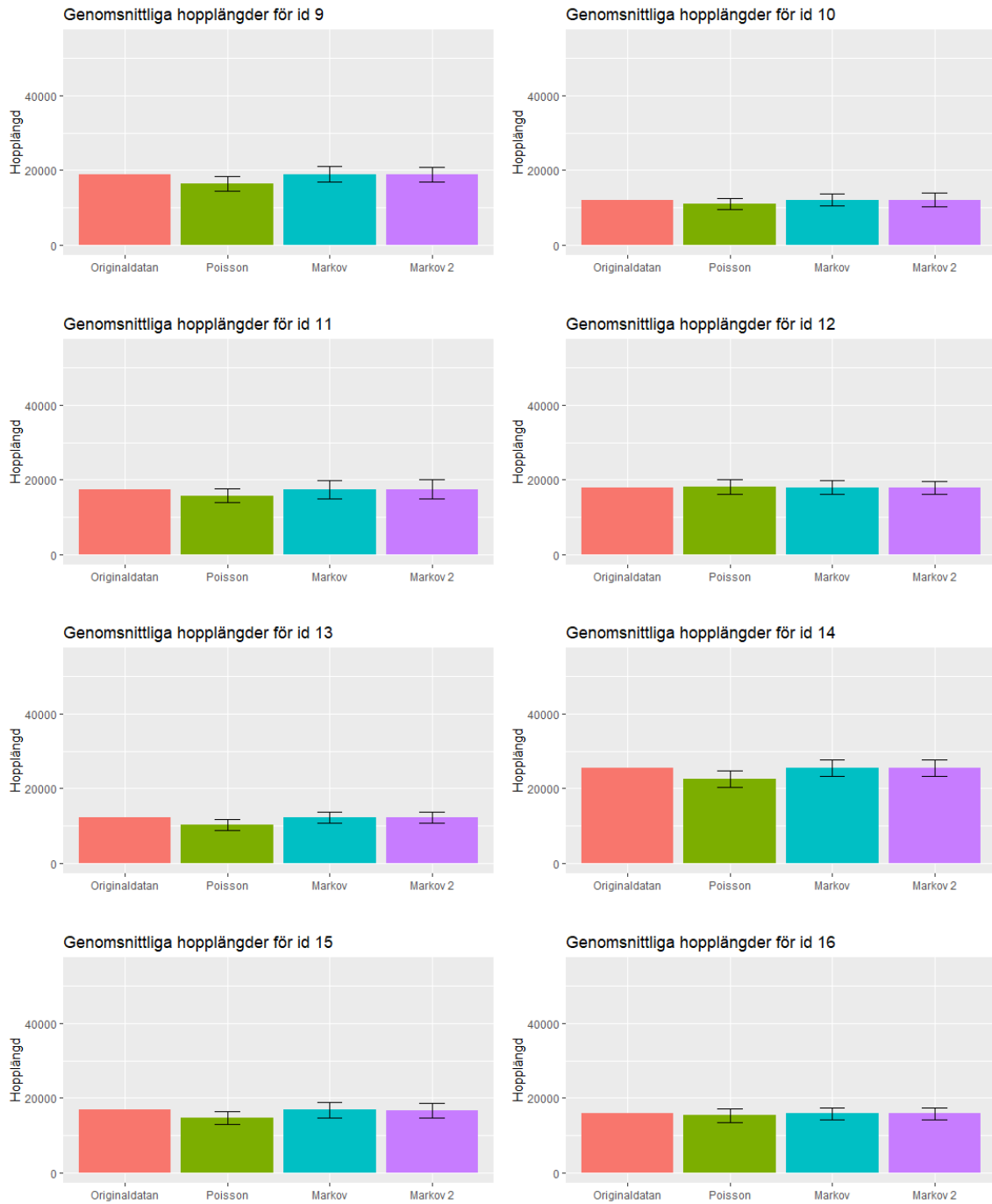
Figur A6: Genomsnittliga fixeringslängder i millisekunder för de tre modellerna, med respektive standardavvikelse, jämfört med originaldata för tavlans tillstånd baserat på 10 000 simuleringar för id 13-20.

Hopplängder för alla individer

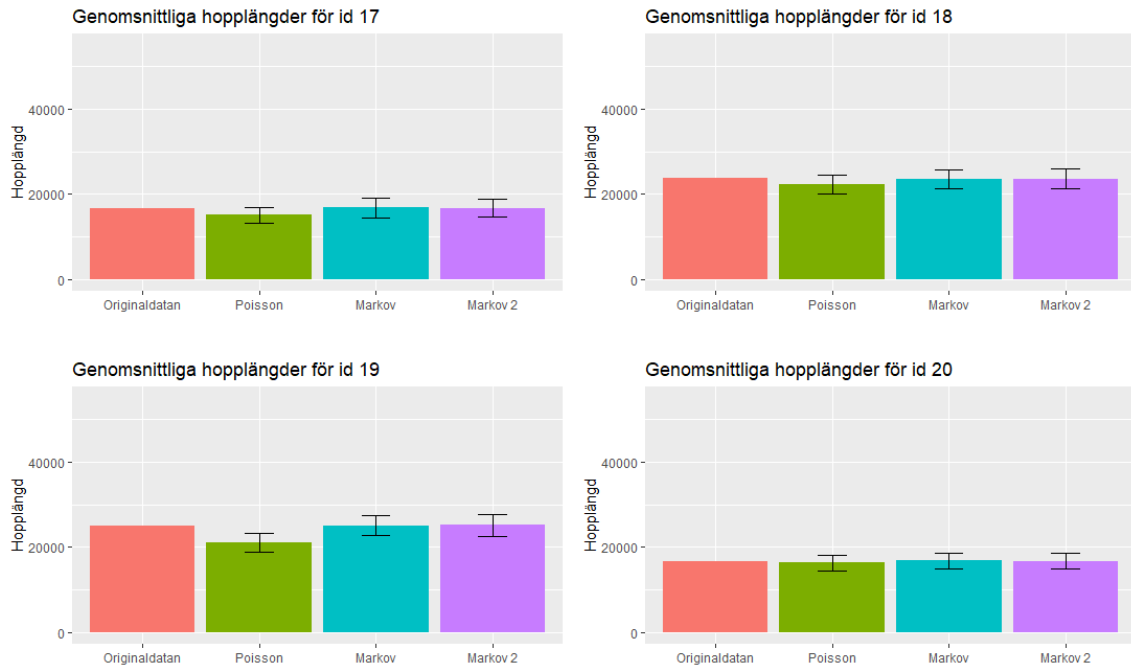
I Figurerna A7, A8 och A9 visas genomsnittliga hopplängder för de tre modellerna med respektive standardavvikelse, jämfört med originaldatan för alla individer.



Figur A7: Genomsnittliga hopplängder i pixlar för de tre modellerna, med respektive standardavvikelse, jämfört med originaldatan baserat på 10 000 simuleringar för id 1-8.



Figur A8: Genomsnittliga hopplängder i pixlar för de tre modellerna, med respektive standardavvikelse, jämfört med originaldatan baserat på 10 000 simuleringar för id 9-16.



Figur A9: Genomsnittliga hopplängder i pixlar för de tre modellerna, med respektive standardavvikelse, jämfört med originaldatan baserat på 10 000 simuleringar för id 17-20.