CHALMERS
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Innovation in mathematics education

A synthesis of the debate

Master's thesis in Technology and learning

OLLE HELLBLOM

Department of Applied information technology
CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Gothenburg, Sweden 2016

REPORT NO. 2016:011

Innovation in mathematics education

A synthesis of the debate

OLLE HELLBLOM

Department of Applied Information Technology
CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Göteborg, Sweden 2016

Innovation in mathematics education
A synthesis of the debate
Olle Hellblom

Department of Applied Information Technology
Chalmers University of Technology
SE-412 96 Göteborg
Sweden
Telephone +46 (0)31-772 1000

Abstract

Mathematics is one of three core subjects in Swedish schools and we put a lot of time and effort into teaching all children mathematics. However, many pupils and adults do not understand the purpose or applications of mathematical knowledge and why we all need it. Issues regarding mathematics education are debated on all levels of society, in national politics as well as in local newspapers, and most people seem to have an opinion about what the problem is or what we should do about it. With this as background I have investigated the question "How do we want to organize mathematics education?" with focus on Swedish upper secondary education. However, I believe that the results are relevant for mathematics education on most levels in many countries.

Since I also have studied architecture, a subject which is often labeled as creative, and have experienced very different teaching methods compared to mathematics education the thesis is also focused on the relationship between mathematics and creativity. The thesis argues that the debate on mathematics education consists of several different questions that are discussed simultaneously. To better understand what the issues are, I have categorized the critique of mathematics education into three main questions: "Why do we study mathematics?", "What do we teach?" and "How do we teach mathematics?" The study is based on interviews and a review of the mathematics education research literature. The interviews present four different professional perspectives on mathematics, problem-solving and creativity and the review serves as base for the categorization of both critique of the current state of mathematics education as well as proposals of what should be done to improve the situation. The thesis presents three common propositions on how to change mathematics education to increase pupils' motivation and knowledge: "A problem-solving approach", "A modelling approach" and "A redefinition of school mathematics", and describe how these answer the questions *why*, *what* and *how* we should teach and learn. A conceptual framework was developed to compare the three different propositions to each other, and to the traditional way of teaching, to illustrate the similarities and differences of the different approaches. To highlight some important aspects of mathematics education a comparison to architecture education is conducted since the author has experience from both subjects.

The thesis concludes that there is no total consensus about how we should improve mathematics education but that there is agreement on some points. Most researchers agree that mathematics education should be an investigative and creative subject, where students get to explore mathematics rather than just reading about what mathematicians have discovered before them.

Table of contents

1 Introduction

Mathematics has always been present in my life, in various ways during various times. I started my mathematical journey as a very enthusiastic child and I first got my hands on my big brothers textbooks from school when I was about five or six years old. A few years later my excitement about mathematics was gone. After only a couple of years in school I had realised that mathematics is neither exciting nor particularly interesting. Today, more than twenty years later, I finally feel excited about the subject again. And now I am about to return to the school system that killed my excitement years ago, by becoming a mathematics teacher.

This master thesis consists of a number of chapters where I, in different ways, try to describe and analyse the views on mathematics education, the current state of mathematics education, and what challenges and tools I as a mathematics teacher need to be aware of. Since I am to become a teacher at upper secondary level in Sweden, this is my main focus, but ideas about mathematics education on lower levels are relevant as well since they also concern the great effort and time all pupils have to put into the subject. I have used literature from many different countries since I have found that many ideas are similar in many parts of the world, for example the view on traditional mathematics education.

1.1 Background

Mathematics is a school subject that more than any other seems to have the ability to stir up emotions. Declining results in Swedish schools and on international assessments makes the front page and ever so often the debate on mathematics education breaks out in newspapers and other media in Sweden. We seem to have high expectations on mathematics and on what skills and abilities we develope by studying it. These high expectations are illustrated by the results of a recent Swedish study which show that one in three have experienced that the mathematics skills they learned in school have not been useful, yet only 6 percent believe that too much time and effort is put into mathematics in school (Olén 2016). I would have expected that many of those who have experienced mathematics as useless would argue that it is a waste of time to study mathematics so extensively in school.

Questions that often are debated regard the nature of mathematics, *what* pupils should learn in school and *why* and *how* we should best teach these skills and abilities. These topics are also very interesting to investigate since I believe that teachers often will have to answer questions raised by pupils about these issues. Many times have I and my peers at the teacher program discussed how and what to answer when pupils ask “why do I have to learn this?”

Two concepts that I have found to be used a lot in the debate on mathematics education are *problem solving* and creativity. When studying to become a teacher I have encountered problem solving many times, for example when reading official documents about the mathematics education or when studying various teaching methods. I have also encountered the concept many times in my engineering studies, in fact, solving problems seems like the best way to generally describe what it is that engineers do. To quote Scott Adams, creator of the comic strip Dilbert:

> **Engineers like to solve problems. If there are no problems handily available, they will create their own problems.**

In architecture education, creativity is of great importance and much time and effort is spent on studying the creative process and practicing how to approach problems and tasks with an open mind. When reading about mathematics education I have encountered the opinion that mathematics could and should be a creative subject as well. My experience is that the teaching methods in mathematics and architecture are very different, but I have started to realise that the subjects have many similarities and that maybe the teaching methods do not have to be so very different.

My own experiences partly come from studies at the undergraduate program Architecture and engineering at Chalmers University of Technology, where I have studied equal parts engineering and architecture. From my studies and my one year internship at an architecture firm, I have found that problem solving is an important aspect of architecture too, but that architecture often is considered primarily a creative subject and profession. This made me interested in why two professions where both problem solving and creativity are important are looked at so differently.

1.2 Aims

The first aim with this report is to survey the literature and opinions about mathematics education. I believe that other teacher students like myself may find it interesting and important to know what has been said about our profession, both historically and recently, so that we have a broad knowledge and understanding of mathematics education. By surveying what others have said I hope to be able to compare these thoughts and opinions to my own experience from school. Hopefully this will help me and my peers not to repeat the same mistakes some of us have experienced in school that leave many pupils bored and frustrated.

My background as an architecture student has raised my curiosity of the relationship between mathematics and creativity, therefore I also aim to compare my experiences from the two subjects with common opinions about mathematics education.

Based on my research I finally aim to summarize some of the ideas about how we should teach mathematics and how we should treat the subject, for example regarding importance and applicability. Lastly I will try to conclude my findings and discuss how I can use the knowledge I have gained in my future career, and what is needed to implement changes to our educational system.

Research questions

- How are mathematics and creativity related?
- How can we organize mathematics education so that it lives up to our expectations?

1.3 Method

To answer my questions I have used a few different methods. The main part consists of desktop studies which are based on different kinds of literature, varying from academic research and reports, to debate articles published in newspapers. I have read different kinds of literature to get a broad understanding about common opinions and ideas. To find the most relevant literature for this thesis I have taken advice from my tutors and interviewees, by looking into references, and by experience from previous university courses I have attended.

In addition to the desktop studies I have also conducted 4 qualitative interviews with people at Chalmers University of Technology who have experience of mathematics, problem solving, and creativity. The purpose of the interviews is to understand a few different perspectives on these three topics and thereby contribute to the understanding of differences in experiences and opinions about the mathematics education.

As a way to sum up my experiences and ideas I have also made a comparison between mathematics and architecture to highlight some of the characteristics of the subjects and how we perceive them.

1.4 Structure of the thesis

Chapter 2 describes the background and current views on knowledge and learning since these have great influence on opinions on how to best help pupils learn what we want them to learn.

Chapter 3 consists of four interviews that I have conducted to get a better understanding of some general conceptions about mathematics, problem solving and creativity. The interviewees are four persons that in different ways are engaged in mathematics, problem solving, and creativity in their professional lives. They represent four different perspectives which I find relevant and representable, namely, professional mathematician, architect, university level teacher and engineer with focus on problem solving, and high school mathematics teacher and researcher.

Chapter 4 is the first part of the desktop study where I summarize the characteristics of mathematics education today, and describe the most common opinions and critique about this current state of mathematics education.

Chapter 5 is the second part of the desktop study. Based on the literature I have identified three main categories of suggestions for how we should teach mathematics, to make pupils consider the subject important and interesting and to reach better results.

In chapter 6 I describe my experiences from architecture school and compare these with my findings from the interviews, the literature study, and the summary of mathematics education today. I believe that my background in a subject where creativity is highly valued allows me to make a comparison that could be valuable to many who are interested in mathematics education as an example of another teaching philosophy.

Lastly, in chapter 7, I conclude and summarize my findings and present a conceptual framework for how we could describe and analyse differences and similarities in the different suggestions for changes in mathematics education.

2 Theoretical Background

When discussing and researching pedagogical and educational topics it is important to take into account theories about knowledge and learning as these are fundamental elements upon which the school system is built. Different ideas about what knowledge is and how we can gain this knowledge have been predominant at different times in history, and these have affected the structure of our educational systems.

A well known theory of knowledge that used to be dominant in educational settings is the objectivistic epistemology which claim that knowledge and truth can be contained in objects and words (Lorsbach & Tobin 1992). This means that knowledge can be transferred from one person to another, for instance in a lecturing situation where a teacher explains something to pupils (Bodner 1986). With this view on knowledge and learning what becomes most important in schools are knowledgeable teachers and obedient pupils who listen to their teachers in order to gain their knowledge. This epistemology together with the behavioural theory of learning, whose main focus was to reward correct responses and punish incorrect ones, required passive pupils that listened and answered questions (Svinicki 1999). Even though this idea might seem old fashioned to some, Svinicki claims that our educational system still is somewhat based on behaviouristic ideas, especially when it comes to organization and management of classes and grading criteria.

However, the ideas about knowledge and learning are changing and since a few decades the constructivist theory have become more common as we have understood to value thinking as an important part of education, a concept which behaviourism ignores (Bodner 1986 and Svinicki 1999). Constructivism also represents another view on the concept of knowledge, rather than being something that can be transferred directly from one person to another, the learner have to experience and understand to acquire knowledge. The constructivist epistemology emphasizes the learner's role in the learning process, good teachers and obedient pupils are not enough since the learners also need to take an active role in their schooling for learning to occur. One challenge for constructivist teachers therefore is to motivate pupils and get them to understand that they are responsible for their own learning.

Many teachers agree with the constructivist theory about knowledge and learning, but they find it difficult to teach in accordance with these ideas due to lack of supportive structures to help them change the way they teach (Brooks & Brooks 1999). The previously dominant idea that order and obedience are the most important factors of the organization of education still have a big influence on common teaching practices, even though most teachers would agree that these ideas are outdated. Many teachers who believe in the underlying ideas of constructivism are afraid that it would be too difficult to change the way they teach, so they are sticking to what they have always done (Brooks & Brooks 1999). Another issue with reforming the way we teach is that the pupils also are used to the traditional way of teaching, and most of them expect the teachers to tell them what to do and think and what is right and wrong (Lorbach & Tobin 1992).

One important way to support and encourage teachers to practice the constructivist ideas is to provide examples of what the theory stand for, Brooks & Brooks have done so by listing a number of characteristics of the constructivist teacher (1999). One main aspect of the list is that "learners are at the center of the teaching and learning process" as Svinicki summarize the constructivist ideas (1999, p 24). Many bullets in the list point out that the teacher should base the education on pupil ideas, questions or hypotheses. The teacher's role is to encourage pupil thinking, reasoning, questioning, and discussions rather than to instruct, explain, and correct. The interaction and discussion with others is also an important characteristic of constructivist teaching as this gives pupils opportunity to compare and test their theories and ideas with their peers (Lorsbach & Tobin 1992).

3 Interviews

As a first step toward better understanding of different perspectives on mathematics, mathematics education, problem solving and creativity I have conducted interviews with persons who in different ways work with these subjects. The purpose of these interviews is to complement my own experiences when reading and analysing literature. It is also a way to better understand how mathematics and creativity relate to each other, as this is one of the questions I want to investigate.

I chose to conduct in-depth interviews since this is an efficient method to understand the interviewees points of view (Legard, Keegan & Ward 2003). I believe that this would give the interviewees best opportunities to express their own ideas and experiences relating to the questions. The questions I use as guideline for the interviews are:

- What is problem solving?
- How do you work with problem solving?
- What characterizes a good problem-solving process?
- Is problem-solving creative?
- Is mathematics a creative subject?

Since I have experienced that problem-solving looks very different in mathematics, engineering, and architecture studies I want to hear opinions about this from representatives from the three fields as well as from a mathematics teacher. I am also interested in their opinions about creativity, since I have found that much literature mentions this as an important aspect of mathematics education which contradicts my experience, and what I believe to be the general opinion, that mathematics is not a creative subject.

The quotes in this chapter are meant to highlight some of the interviewees most important ideas and experiences. I have translated all the quotes from Swedish to the best of my ability, and I have had to make some changes in the structure of the sentences to fit into written form. Transcripts of all the interviews can be found in Appendix A.

3.1 A mathematician’s perspective

Bo Berndtsson: Professor at the mathematics department at Chalmers university of technology

In his profession as mathematics professor, Bo Berndtsson engages in problem solving in many different ways. He could try to solve old, famous problems that no one has yet been able to solve, he could solve problems that others have encountered during their research, or he could try to come up with new problems and questions that no one has thought of before. Whichever problem he chooses to work on, creativity is an important skill since the problems often are ill-defined[1] and he has to try different methods and strategies to see if they might lead to a solution.

> **Before finding a solution, before reaching results or something worth writing down, one has tried a number of different things that have not worked.**

While the problems that Berndtsson and other mathematics researchers encounter often are ill-defined, the problems in school textbooks are often well-defined and have a satisfying solution. Berndtsson acknowledges this discrepancy but since well-defined problems can be more easily adjusted to suit pupils’ ability, he believes that the textbook problems work well as exercises for the pupils anyway.

Bo Berndtsson has always had an interest in maths and already in school considered it a creative subject, because even if the problems in the textbooks already had been solved by someone else it was intriguing to try to figure them out for yourself and finding an appealing solution. He also points out that working as a mathematics professor most certainly is a creative profession and if one should try to compare mathematical research with any other activity he believes that composing music or painting or the likes are what resembles the subject the most.

> **I believe that most people actually find mathematics enjoyable, [...] what brings them down, what make pupils consider mathematics boring, are problems that are not adapted to their ability.**

Bo Berndtsson believes that we all have an innate interest for solving problems, and that most people actually enjoy mathematics even if they might claim the opposite. He believes that, if presented to problems that are challenging, but not too difficult, pupils or people in general would enjoy solving those problems. Many people are solving crossword-puzzles or sudokus just for pleasure, and other mathematical problems could also be looked at this way, as an interesting problem which you are more than happy to spend your spare time on solving.

1 The concepts well- and ill-defined problems are further discussed in chapter 6

3.2 An architect’s perspective

Morten Lund: Artistic professor at the architecture department at Chalmers university of technology

Morten Lund is certain that architects and mathematicians are alike in their curiosity and search for patterns and beauty. When I first ask him about architecture and creativity he is reluctant to talk about it. Later on I understand that the reason is that, to him, being an architect is not necessarily a more creative profession than any other. Creativity is more of a personal skill, and whether a person works as an architect, a baker, a teacher or a mason does not necessarily impact on how creative she is. Lund claims that any person or any job can be creative.

> **I have nothing against the word creativity in itself, but I have something against connecting certain professions with creativity. Everyone, if you are a baker, a mason, if you are a kindergarten teacher, whatever, we all need creativity or we would not survive.**

Lund is fascinated by mathematics and by it being a language that can explain very complex phenomena. He believes that the mathematical strategies could be used in architecture as well, not the specific mathematical methods but the systematic reasoning. The mathematical strategies could be used to analyse situations and define possibilities and limitations of a project.

> **What is important is that you are aware that you have a method, it must not be silent knowledge. It cannot just be instinctive feeling or intuition. You can use intuition, but also the use of intuition must be reflected upon as a method.**

In the courses Lund is responsible for at Chalmers the students have to reflect on the methods they are using in the design process. They can choose any method they like but they need to explain how they came to the conclusions and decisions that they did. Lund has developed a method that he uses since he has found it very helpful and he teaches his students this method but also encourages them to use other methods if they prefer. The method consists of three steps: concept, sketch, and presentation. In the first phase Lund encourages his students to “do first, think later” to have them turn their ideas or thoughts into models that they can discuss, combine, develop or dismiss in the next phases of their projects. He has experienced that many are afraid to make errors and he tries to focus on the desire to create rather than on how to solve problems in the best and most efficient way.

3.3 An engineer's perspective

Dag Wedelin: Associate professor at the computing science department at Chalmers university of technology

According to Dag Wedelin, a problem solving situation occurs every time a person does not have a clear method for how to solve a problem. In his experience this is a very common situation that he often finds himself in as a researcher and engineer and quite frequently as a teacher too. What characterizes problem solving the most, whether you are an experienced problem solver or not, is that you have to investigate different possibilities to find a solution, problem solving is a constant exploration.

When exploring a problem, one needs different methods and skills which vary depending on the problem and previous knowledge. First of all, Wedelin claims that the understanding of the problem is crucial, to some extent the problem solving process can be seen as an exploration of the problem that leads to such understanding that one can guess or understand the solution as well. Another useful method is to try to divide the problem into smaller, easier problems that can lead towards a solution. One important aspect of Wedelin's problem solving strategy is to always try to start at the beginning of a problem, even though one has seen similar problems before and, most likely, it would be possible to reuse the same method, it is important not to jump to conclusions. Previous knowledge and experiences should not lead to skipping the first steps of the solution but it should function as a tool for acceleration that helps the person along the way.

When it comes to design problems, an important method is the iterative method, engineers, mathematicians and architects all use this method. It implies making a guess or an assumption that probably leads in the right direction. The next step is to test and evaluate this guess or assumption to be able to take another step towards the solution. By iterating this step many times there are good opportunities to find an adequate solution. When using this method it is important not to get too attached to one's ideas, when realizing that one idea is not good enough one has to be open to take a few steps back and try again.

> **The reason that school mathematics does not seem to be creative is that we, in schools, often are eager to tell pupils about the final results. Instead of letting the pupils create their own knowledge we are telling them about what knowledge others have created.**

Wedelin claims that most problem solving requires creativity. When asked about his views on mathematics, and school mathematics in specific, he points out that mathematics as well as any other subject can be creative but it depends on the way it is taught. He argues that most mathematics education is too focused on telling pupils about what knowledge others have created throughout history instead of letting the pupils create their own knowledge. Most other subjects let pupils write essays or assign them other tasks which require the pupils to reflect on their own ideas and opinions and to express these, which is more or less creative. In mathematics, on the other hand, pupils are often just told what is right and what is wrong and what they need to remember.

Mathematics does not necessarily involve any physical artifacts but the subject might still be creative since we can create ideas and assumptions in the world of ideas and explore, test and analyse these using our reasoning ability.

> **It is very common that people involved in mathematics education, when they try to be deeply philosophical, ponder the question "What is mathematics, really?". The question they should ask themselves is "What do we want our children to learn?". We might conclude that they should learn mathematics, we could also come to the conclusion that they should learn something else.**

When it comes to the debate on mathematics education Wedelin believes that too many ask themselves the question "What is mathematics, really?" and that we rather should focus on what we believe our children need to learn in school. The history of mathematics is extraordinary, and humanity have been fascinated by the subject for thousands of years, but the goal of our education does not necessarily have to be to teach the pupils the results of this history, instead we could focus on the processes that have lead to these results. If we are more interested in the pupils' development of their problem solving skills then there might even be another subject more suitable for this. Wedelin has an idea about mathematical thinking, a subject separated from mathematics that focuses on reasoning, creativity and problem solving. Wedelin believes this might be a good idea if there is a need to change the way we teach mathematics since mathematics as a subject have such a rich history that it would be difficult to change our ideas about it.

> **I believe that the school should focus on something which I call mathematical thinking rather than mathematics. Mathematics is an academic subject and there are always a lot of people who may have strong opinions about what mathematics is and what it is not. Mathematical thinking is a concept that is not quite as restrictive, it is not used quite as much and you can define it a little more freely.**

3.4 A teacher's perspective

Éva Fülöp: Doctoral student at the University of Gothenburg and high school mathematics teacher

In her research, Éva Fülöp first of all makes a distinction between tasks and problems. To consider something a problem she has two requirements, first of all the pupil who is about to solve the problem cannot have a method or algorithm that she can apply directly to the problem, in such cases it is not a problem but a task. Secondly, the pupil needs to have an interest or a desire to solve the problem. This means that a problem is a relative concept, what is a problem to someone might be a standard task to someone else.

When it comes to problem solving Fülöp considers it a three step procedure. First you need a strategy for how to analyse and try to solve the problem, secondly you have to choose a method for how to solve it and lastly you need to apply an algorithm to find the solution. Fülöp is researching strategies for solving problems, the first step in this procedure, and she claims that it is when performing this step that pupils need to be the most creative. This is when the pupils ask themselves questions like "What am I supposed to do?" and "How do I start?" and get the opportunity to create something new. These ideas do not have to be entirely new, as long as the pupil experiences it as a new idea or new knowledge.

> **My problem as a teacher was that I did not know what to do when pupils, as they faced unfamiliar problems, said "We have not learnt this", "I don't know the answer", or "I give up". I was interested in how to teach the pupils not to react in this way but to instead think of possible ways to take on the problem.**

The background to Fülöps research is that she as a mathematics teacher had experienced many pupils giving up when facing problems they did not know how to solve. Fülöp wanted to research the topic how to get pupils not to give up when faced with a difficult problem, and the effects of trying to teach pupils about strategies for problem solving within the regular course plan in a Swedish upper secondary school.

In traditional education the teacher often does not give the pupils the opportunity to experience the questions as problems. Fülöp tries to discuss different ways of approaching problems with the pupils. In this phase it is important to have a discussion without correct or incorrect ideas, the pupils need to suggest strategies and then discuss and analyse them in order to figure out if and how they can use that strategy. The pupils were asked to explain how they were thinking when solving problems, to realise that it is often possible to use a range of different strategies to solve a problem.

> **Usually the teacher writes a task on the chalkboard and says "this is how you should think", and never lets the pupils experience the question as a problem. Once the pupils have exams there is no one there who can help them to skip the first step and tell them what to do or how to think.**

When designing the classes for the study Fülöp had three principles. Either she used a problem that could be solved using different strategies, or she focused on one strategy and that it could be used for many different tasks, or she focused on comparing different strategies to find out if one is more effective than the others.

Ninety percent of the pupils that were involved in the research were used to traditional teaching and had previously worked individually in their textbooks during class. This resulted in a lot of frustration among the pupils during the first weeks of Fülöp's study. The low performing pupils were frustrated because they were used to sitting in the back and doing a few tasks every lesson without being noticed by the teacher, but now they had to participate in discussions. The high performing pupils were frustrated because they claimed not to learn anything when they did not have the time to finish all the tasks in the textbook. The new way of teaching also resulted in frustrated parents who thought the pupils should use their textbooks to a greater extent. However, most of the parents were reassured after the pupils performed above average on a test four weeks into the study.

The pupils also got used to the new kind of classes, and at the end of the year many of the pupils wanted to show alternative strategies to each other and discuss which strategies were the most efficient. During the year Fülöp decided to compromise and periodically let the pupils work in their textbooks to provide time for them to practice methods and algorithms as well as strategies.

3.5 Summary

What is problem-solving?

Both Dag Wedelin and Éva Fülöp both make a difference on problems and standard tasks and define problem-solving as the activity of solving problems that one does not have a known method or algorithm for solving.

How do you work with problem-solving?

Morten Lund points to the importance of using one or many different methods for solving problems and that realizing this and analysing these methods are a crucial part of the problem-solving process. He has found one method that he has found useful but says that many other methods could work as well or better for other people. Dag Wedelin also points to a number of different methods to solve problems and that which methods that work best also depends on the problem. He also emphasizes the importance of starting at the beginning of problems and not jump to conclusions. Bo Berndtsson claims not to use any specific method for solving problems but he usually has to try many different methods before finding one that works.

What characterizes a good problem-solving process?

I recognize many of the questions Éva Fülöp has experienced from pupils and one question that I have heard many times is “How was I supposed to know that?” after a pupil has seen a solution to a problem. This could be seen as an indication of a disconnection between many teachers’ idea that we are learning problem solving and the pupils’ idea that they are learning methods and algorithms for calculating correct answers. Fülöp’s idea is that one of the most important stages of the problem-solving process is this first step when one has to figure out what strategy to use to solve a problem. Wedelin underlines the importance of really understanding the problem before trying to use a certain method or algorithm to solve it.

Berndtsson remembers that he always has been interested in understanding and finding elegant solutions to problems. This is similar to Fülöps idea that a prerequisite for teaching problem-solving is that the pupils have a desire to solve the problems.

Is problem-solving creative?

Bo Berndtsson is often faced with ill-defined problems which mean that they are complex and the roads toward a solution are obscure and that to figure out where and how to start require creativity. This is in line with Éva Fülöp’s opinion that creativity above all is important at the first steps of a problem-solving process. Dag Wedelin expresses the creative act as “creating something out of nothing”, for example making guesses, assumptions and the act of choosing and trying a method without knowing whether or not it will lead to anything.

Is mathematics a creative subject?

All interviewees highlighted different aspects of this question, but all agree that mathematics could and should be creative. At one of my first meetings with my supervisor he asked me if I myself believe that mathematics is a creative subject and I found myself uncertain. I think that this is due to the fact that my experience from mathematics education is very different from what people who are involved in mathematics education are hoping it should be. After these interviews I understand that the question if mathematics is a creative subject is somewhat trivial because, as both Morten Lund and Dag Wedelin say, any subject can be creative. But the very fact that I am asking myself this questions after more than fifteen years of school and university studies is interesting.

My experienced discrepancy between mathematics education an architecture education was one of the reasons for me to investigate the relationship between mathematics and creativity. I wondered for example if mathematics education could learn anything from the emphasis on the creative process of architecture education. From the interview with Lund I also learned that the opposite could be true as well, that architect students could learn from mathematicians. I do not believe that this contradicts my theory, but rather that it acknowledges that the two subjects have many things in common.

4 Mathematics education - Current state and opinions

In this chapter I try to describe how and why mathematics education is usually organized the way it is, and what the most common opinions and critique about it is. To do this I have mainly used literature which is critical about the current state of mathematics education, which also presents different arguments for change. The three questions *why*, *what*, and *how* are being used as the structure for this chapter, as I investigate if there is a logical connection between the answers to these questions.

The first question addressed is "Why do we teach mathematics?" and concern questions about the nature of mathematics, the applications of mathematics, and views on the subject in general. A secondary question of this section is why we consider mathematics to be so important in comparison to most other school subjects. After establishing why we study mathematics, I go on to investigate what we teach as I believe that this should be a consequence of the answer to why we study mathematics. Following the same principle, the answer to what we want pupils to learn should influence how we teach to best reach these goals.

4.1 Why do we teach mathematics?

Mathematics is highly valued in our society which is shown by often occurring initiatives to raise pupils motivation and interest in the subject, and by how we regard poor results on international assessments as severe failures of the school system. In Sweden mathematics is also one of three core subjects, that pupils need to pass to be eligible for high school studies, alongside the Swedish and English language. What is it about mathematics that makes it so special and inevitable for all?

One argument is that we need mathematics to understand modern society since we are all surrounded by products developed with the help of advanced mathematics, such as computers, cars and smartphones (Andersson, Lundh & Jännti 2013). This does not, however, explain the fact that mathematics has been considered a very important subject also before the development of advanced technology, at least since the Greek society laid the foundations to our educational system, about two thousand five hundred years ago. It has since also been claimed that studying mathematics offers the pupil, not only knowledge of the subject, but also discipline and intellect in a broader sense (Lundgren, Säljö & Liberg 2012). This is still evident in the debate about school and mathematics today as shown in an opinion article, published in the Swedish newspaper Svenska dagbladet in 2013, in which the authors claim that "Good basic knowledge of mathematics among the population is fundamental for a democratic society" (Andersson, Lundh & Jännti, my translation). Sverker Lundin (2011) has found that this opinion has been common in Sweden at least since the 19th century. Through his research of historical documents Lundin has found that the advocates of the necessity of mathematics have typically linked mathematical knowledge and education to skills and values such as intelligence, high morals, self confidence and democracy.

During the recent years I have tried to keep myself up to date with the debate on mathematics education and I have seen these kinds of arguments many times. The opposers to arguments that mathematics enhances the intellect often compare them to religious belief. This is exemplified by Stellan Welin's (2013b) response to Andersson, Lundh and Jännti's article where he claims that "mathematics has replaced the catechism", referring to Luther's small catechism which all Swedish pupils had to learn by heart until year 1919 (Lundgren, Säljö & Liberg 2012). Regarding the argument that we all need mathematics to understand our surroundings, Welin (2013a) claims that most people do not need to study much mathematics since we in our everyday life have access to tools that help us calculate everything we need. He argues that those who find mathematics interesting and fun and who consider working in a field where mathematical knowledge is required should be able to choose to study mathematics extensively but that the others only need the most basic knowledge of the subject. In the same article Welin also claims that the pupils of today have "seen through the myth about the importance of mathematics" (Welin 2013a, my translation).

Related to these ideas or not, we fail in motivating pupils to study mathematics so severely that it is, by far, the most hated subject in school (Boaler 2009). One common way to motivate pupils and convince them that mathematics is important for us all in our everyday lives is to use word problems based on realistic situations to illustrate the applications of mathematics in everyday life. Boaler (2009) claims that the problem seems to be that we fail miserably when trying to do so and that the result is tasks that describe absurd "real life" situations. I found the example below in a lecture about rich mathematical problems:

> **It takes Nina 10 seconds to run 200 meters.**
> - **How many seconds will it take her to run 400 meters?**
> - **How many meters has she run after one minute?**
> - **Create one general expression for how many meters she has run after X seconds and create one general expression for how many seconds it takes her to run Y meters.**

(UR Samtiden - Matematik i kubik 2012)

Just as Boaler points out, this example is absurd. The first question I want to ask is *What is Nina?* For humans, the women's world record on 200 meters is 21.34 seconds (IAAF 2016). My next question arises when I look at task a: I realise that, when running twice the distance, Nina's average speed will most likely be lower, but I have no idea of how I am expected to take that into consideration. If I would approach this task realistically, one way could be to calculate the ratio of the women's world record of the two distances and multiply it by 10:

$$\frac{47.6}{21.34} \approx 22.31$$

I find it very unlikely that this kind of solution is what the teacher was hoping for in this case. Concerning tasks b and c, other questions arise. For example if she still runs the first 200 meters in 10 seconds or have constant speed. This task was presented as a good example of a rich problem, and the lecturer did not mention any of my concerns.

Sverker Lundin (2011) has taken an interest in word problems and one common kind of critique of mathematics education coming from people who believe in the importance of mathematics. He calls this type of opinion *the standard critique* and it has two major characteristics. Firstly the standard critique, just like some of the opinions cited above, claims that mathematical knowledge provides the learner with skills that are essential to understanding things outside of the field of mathematics. The second characteristic of the standard critique is that it calls for reform since the mathematics education is not able to lift this greater purpose of mathematical knowledge but instead focuses on practicing mechanical calculations which many pupils find dull and pointless. Lundin claims that the absurdities, illustrated by the example above, often are ignored since standard critics believe that word problems with a somewhat realistic context support the idea that mathematics is important in our lives.

> **[This] is founded on a belief in the possibility of designing settings in school which differ from reality in such a way that the engagement with *them* is a better preparation for understanding and mastering reality than engagement with reality itself.**

(Lundin 2011, p. 77)

The behaviours of pupils and teachers in mathematics classes are explained with the concept of *the holy seriousness of play*, a concept stemming from the idea that playing is an important human activity. Using this concept Lundin sees three possible explanations for what is going on in the classrooms. The first explanations is *immersion* which means to just go on and play the game. The pupils and teachers are aware that the word problems are in fact different from real problems but they still believe that the act of solving them is meaningful.

> **On the one hand, we do note the nonrealism of the task, but on the other, we do not consider the task to be nonsensical.**
>
> (Lundin 2011, p. 78)

Another explanation is that participants in mathematics education take *cynical distance* from the activities they are involved in. This means that they are aware of the fact that the tasks and problems they are assigned are stupid, but that they can not do anything about it because they are involved in a school system created and managed by incompetent people. This viewpoint does not either, however, question the very fact that mathematical knowledge is important.

The third explanation is to disagree with the current state of mathematics education but to have *faith* in its greater purpose. This is somewhat similar to the cynical point of view but the faithful has an expressed belief in the importance of mathematics and in this way shares the view of the standard critic. The faithful believes that what needs to be done to fix the mathematics education is to try harder:

> **The form of engagement with word problems, the centrality of this practice in mathematics education, not to mention the place of mathematics education in society at large, together quite strongly suggests that this practice *could* lead to generally beneficial knowledge.**
>
> (Lundin 2011, p. 80)

Lundin claims that the fact that mathematics education has played such an important role in our schools for such a long time has made it important in our society. Attempts to emphasis the importance of mathematics in schools and plans to motivate pupils to study mathematics are made ever so often. Many people believe in the idea that mathematics is important, and that the tests and grades in school bare witness of more than just the ability to perform in the school subject mathematics.

> **The proponents of the standard critique are [...] in a sense more right than they could ever imagine when they argue that mathematics education is a central and necessary part of modern society. While mathematics may not be very useful as a means to understand and control the social and physical reality, the argument of this article shows that the very *attempt to make it useful* contributes in a fundamental way to the very constitution**

of the peculiarly modern reality in which we imagine such use to take place.

(Lundin 2011, p. 83)

Andrew Hacker (2012) is of similar opinion and argues that we are forcing all pupils to study as much mathematics as we do out of habit. Since mathematics has been considered important for such a long time it has also become important, this is exemplified by the fact that many universities require high grades in high level math courses from their applicants even though mathematics does not seem important in the professions they are studying for. Hacker argues that a lot of schools and programs at university level have prerequisites in mathematics just to appear serious and rigorous. Even if some believe that mathematical knowledge has no greater purpose, our societies are organized around the idea that mathematical knowledge and intelligence are interconnected which means that high grades in mathematics are important to be considered intelligent.

Another reason to study mathematics is that it is a subject in which pupils get to develop their creativity and reasoning abilities. Paul Lockhart (2009) argues that the heart of mathematics is about curiosity and finding patterns and relations, and that schools fail both in realizing this and in teaching this to the pupils. He claims that the only difference between mathematics and other arts is that our culture considers it a scientific subject, rather than an artistic and creative one, and that we talk about the importance of the subject in terms of specific mathematical skills rather than in terms of a field where we get to explore our creativity and imagination. Lockhart compares the way mathematics is taught in our culture with an imaginary culture where thorough musical knowledge is considered necessary for everyone, but instead of letting pupils practice instruments or singing, playing in bands, and performing, the teaching is only focused on musical theory and writing flawless sheet music. Lockhart is a strong opposer of our current system of mathematics education as he claims that it kills the pupils' curiosity and interest in the subject.

Common opinions about why we study mathematics

- It is important to understand the modern society and all the advanced technology that surrounds us.
- It is important to be able to handle our private economy.
- Mathematical knowledge increases the general intelligence of pupils.
- Mathematics has become important because our society has considered it important for such a long time.
- Mathematics is not important and by arguing that it is more important than other subjects, pupils become reluctant to study the subject which otherwise could be considered interesting and creative.

4.2 What do we teach?

When deciding what pupils should learn in mathematics classes we could use different approaches. One way is to ask ourselves what mathematics really is and look at the results from the history of mathematics to decide what aspects and knowledge that have been most important to the development of the subject. According to Dag Wedelin (2015) this approach is too common among those who plan and design our curriculums. He argues that what we really should ask ourselves is what we want or need pupils to learn and that the most important aspects of the history of mathematics are the processes that lead to the results rather than the actual results. Just as Wedelin points out, the long history of mathematics is sometimes a problem when discussing or arguing for the contents of mathematics education since it can prevent us from unbiased decisions regarding what is the most important and useful aspects of the subject. These issues are also looked at by Magdalene Lampert (1990) and Alan Schoenfeld (1992) who raise the question whether we should teach the school subject mathematics, or the discipline mathematics as professional mathematicians perceive it. The fact that the two are perceived so differently, confirms the relevance of the question.

Pupil beliefs about the nature of mathematics, talent and ability are also important and these are based on experiences learned both in and outside of school. Some of the most typical beliefs are that there is only one correct way of solving a mathematical problem, that a problem always have only one correct solution, that mathematics is not as much about understanding as about remembering, and that if a person has not solved a problem within five minutes he or she will not be able to solve it at all (Schoenfeld 1992). We need to understand that when we are trying to teach mathematics, we are also teaching pupils what knowing mathematics is and how to act when doing mathematics. School experience typically tell pupils that:

> ***Doing* mathematics means following the rules laid down by the teacher; *knowing* mathematics means remembering and applying the correct rule when the teacher asks a question; and mathematical *truth is determined* when the answer is ratified by the teacher.**
>
> (Lampert 1990, p. 32)

Independent of the contents of the courses pupils are also learning what doing and knowing mathematics is. Their perception of this is often very different from Lampert's and many other researchers' idea that knowing mathematics is a wider concept that for example includes the abilities to generate strategies and argue for their legitimacy with conjectures and proofs (Lampert 1990). One reason for this discrepancy is that when we are teaching any subject we are also implicitly teaching the culture of that subject (Schoenfeld 1992). If we in mathematics classes make pupils practice algorithms individually by calculating tasks in their textbooks they will learn that mathematics is a discipline in which one is supposed to finish an extensive number of similar tasks, individually and in silence. That is not how mathematicians, who highlight the importance of cooperative work on difficult and complex problems, would describe their working-culture (Boaler 2009, Schoenfeld 1992). This means that the teaching method we use is important since this will represent the working method pupils associate with mathematics.

As mentioned in chapter 4.1, problems that describe realistic situations are often used to motivate pupils that mathematics is important and that they will have use of what they learn. Jo Boaler (2009) claims that real life context should be used in mathematical problems only if it is realistic and increases pupils' interest in the problem, but also that there are many mathematical tasks and problems without context that can engage pupils. Others claim that problems should always be based in real situations and the results should be of real interest. This opinion is above all expressed by advocates of a modelling approach on mathematics which I will come back to in chapter 5. Boaler's research has shown that mathematics can provide pupils with skills that help them in everyday life but that most pupils do not believe that they will have any use for what they learn in mathematics classes outside of the classroom. She does not argue for one teaching model in particular, even if the main object of her research is to teach using a problem solving approach, but she has found that schools and teachers who are able to motivate pupils to study mathematics also can help them see what real world situations can have in common with what they learn in school (Boaler 2009).

The contents of the curriculum is of course also important for deciding what pupils are learning in mathematics classes, and one question is if focus should be on skills that are specifically useful in mathematical context, or on skills and methods that can be applied in situations outside of school or in other subjects. The Swedish national agency for education admits that too much focus has been on practising procedures and calculations in the mathematics education (Skolverket 2015). When the Swedish curriculums for the upper secondary school were updated in 2011, this was acknowledged and more effort was to be put into practicing other aspects of mathematics which indicates a shift toward broader and more general knowledge. To highlight the different aspects of mathematics the plan mentions seven skills that pupils should develop in all mathematics courses.

The first skill that pupils should develop is their *concept skill* . They should understand different mathematical concepts and how they relate to each other. pupils should also learn how and when to use these concepts. Pupils should also get to practice their *procedure skill* by choosing and using algorithms when solving tasks. By solving less familiar problems that require the pupils to figure out the procedures and strategies themselves, they get to practice their *problem-solving skill*. This skill is seen as both a goal in itself as well as a tool to practice other skills. By developing their problem-solving skill, pupils could more easily think creatively, discuss alternative ways of solving problems, and so on. The next skill is *modelling skill* which means that pupils should get the chance to develop their ability to analyse real life situations and make mathematical models that can represent these. By creating formal proofs and similar activities pupils should develop their *reasoning skill* which is needed to make correct logical conclusions. Pupils should also practice different methods of communicating through mathematics in different ways depending on the situation and who the recipient is by developing their *communication skill*. The seventh and final skill is *relevance skill*. This is the ability to understand what relevance mathematics has in different situations, for example in other subjects (Skolverket 2015).

Apart from these skills every course also has central content that describe what the pupils should learn more specifically. These official documents often highlight the importance of connecting mathematics to other subjects and situations the pupils will get into in their professional lives. This means that the mathematics courses could be different at different schools depending on what programs the pupils are studying at.

The opinion that the content of the mathematics education is too focused on specific practicing algorithms and facts that many pupils fail to see any use of outside of the classroom is common amongst researchers of the subject. In chapter 5 I have identified what I have found to be the three most common solutions that researchers present to make mathematics teaching relevant and interesting.

Common opinions about what we teach in mathematics classes

- We teach mathematical skills that are needed in everyday life to be able to handle private economy and to make correct choices in a democratic society.
- We teach pupils mathematical skills that are needed in many different professions of the modern, high technological society.
- We teach problem-solving skills that are applicable in many other areas than mathematics.
- We teach pupils that mathematics is a subject in which memorizing rules and formulas is more important than thinking and reasoning.
- We teach pupils that the mathematician is a person who works individually on short well defined problems.

4.3 How do we teach?

The ways we teach in mathematics classes of course vary, but my experience from being a pupil, a mathematics teacher at university and a teacher trainee at Swedish upper secondary schools has shown that what Jo Boaler describes as the traditional teaching is still predominant (Boaler 2009). Many other methods are also being used and tested and I will describe some of these in chapter 5. In this section I will try to describe the significant aspects of the traditional way of teaching and how it affects pupils' learning.

A typical traditional mathematics class starts with the teacher showing some formulas and their proofs on the blackboard in front of the class. The pupils then get to practice the formulas by individually applying them on a number of tasks in their textbooks. Most of the textbooks I have encountered follow the same structure where a chapter starts with proofs and formulas that are followed by a few pages of tasks where the pupils get to apply what has just been introduced to them.

> **If I had to design a mechanism for the express purpose of *destroying* a child's natural curiosity and love of pattern-making, I couldn't possibly do as good a job as [our present system of mathematics education] - I simply wouldn't have the imagination to come up with the kind of senseless soul-crushing ideas that constitute contemporary mathematics education.**
>
> (Lockhart 2009, p.21)

As expressed in the quote above, Paul Lockhart is a committed opponent of this way of teaching. Jo Boaler argues that traditional methods could work well with highly dedicated teachers but that there is a big risk that it leads to what she calls *passive learning*. The characteristics of this kind of teaching is that pupils are learning *without thought, without talking* and *without reality* (Boaler 2009).

Just as mentioned in the previous section about what we are teaching pupils, learning without thought means that many pupils experience mathematics as a subject where the most important skill is to be able to remember rules and formulas as well as possible. Magdalene Lampert describes this as an answer-getting process rather than an sense-making (Green 2014). When faced with a task or a problem, rather than analysing and thinking about ways of solving it, the pupils experience that they are expected to just apply the formulas they have most recently been shown by the teacher. Research has even shown that pupils' focus on remembering an abundance of formulas actually impairs their problem solving ability (Boaler 2009).

Another characteristic of traditional teaching is that pupils work individually in silence. Instead of talking about problems and ideas of ways to solve them, the pupils are often expected to learn by listening to the teacher, reading, and practicing in their textbooks. There is a big difference between listening to someone talk about mathematics and talking about it yourself and explaining it to others (Boaler 2009), when hearing someone explain something it is often easy to agree that it makes sense, but in order to really understand it talking and discussions are crucial. According to Lampert (1990) the traditional classroom environment often fosters pupils who do not want to explain their thoughts out of fear of being wrong or getting into discussions about more complex problems.

Lampert and many researchers before her have identified many behaviors in conventional classrooms that are not helping the pupils changing their perception of what knowing mathematics is (Lampert 1990). First of all, pupils often see the teacher as an authority who tells the pupils if they are right or wrong which maintains the idea that finding the correct solution is what is the most important. In her role as a teacher, Lampert believes it is important to participate in arguments with the pupils and prove why rules work in a mathematical sense rather than knowing the answers and explaining how to use formulas. The teacher must be prepared when problems and arguments evolve in different directions instead of pointing the pupils in a predetermined direction. Using and discussing proofs is also important to prevent pupils from using rules or formulas as arguments which is another common behavior. Other unfavourable approaches come from the fact that pupils seldom get to discuss their theories and ideas with each other. A classroom environment where pupils are afraid of expressing incorrect ideas or solutions are holding back many pupils' opportunities to learn.

As mentioned in chapter 4.1, mathematical problems often take place in an absurd reality. Pupils learn to ignore these absurdities when solving the problems since that is "just the way it is". But these types of problems contribute to the fact that many pupils do not believe that they will have use for the mathematics they learned in school anywhere else in life (Boaler 2009). Not only the problem but also the practices and rules applied in a traditional classroom are often perceived as absurd or different from those applied to life outside the classroom (Boaler 2009).

Magdalene Lampert also presents an alternative way to describe traditional mathematics education and how we could change focus from answer-getting to sense-making (Green 2014). She argues that the traditional class structure "I, We, You" should be replaced with the structure "You, Y'all, We." The traditional lesson often starts with the teacher showing an example "I", followed by another example that the teacher and the students solve together "We", the rest of the lesson the students get to practice on their own "You". Her alternative lesson structure revolve around one problem that the students first examine individually "You", then in groups "Y'all" and finally the class and the teacher discuss and analyse the problem together "We".

How we are teaching is also affected by our beliefs related to mathematics (Schoenfeld 1992). Pupils', teachers' as well as societal beliefs have great impact on the mathematics education. Two important aspects of societal beliefs are what we believe is possible for the pupils to learn and what method we believe should be used to teach them. These two aspects affect what expectations we have on pupils and how big a challenge we believe they can handle. Low expectations on pupils' ability to learn and understand has shown to have negative effects on their actual learning (Boaler 2009). Societal beliefs could also regard what is desirable to learn which is related to the question why we teach mathematics.

Teachers' beliefs influence the lessons and the classroom environment and is based on what views the teacher has on mathematics and how it should be taught. At one end of the scale are the teachers who believe that mathematics is a subject consisting of truths and fact that the pupils need to learn and that the teacher's role is to distribute information for the pupils to receive. The teachers at the other end of the scale see mathematics as a subject that provide a framework in which the pupils can explore ideas and practice their problem solving ability (Schoenfeld 1992). As mentioned in chapter 2, the constructivist theory of knowledge and learning has been predominant for a couple of decades but just as mentioned there, many teachers are afraid of changing their way of teaching and research has in fact shown that many teachers revert to the the way they themselves were taught in school after finishing their teachers education, ignoring much of what they have learned at university (Schoenfeld 1992). Most teachers still show examples on the whiteboard and let pupils work in their textbooks. The problem-solving approach is often considered the standard method for constructivist teaching (Lorsbach & Tobin 1992) but problem-solving is still often reduced to a small part of the subject instead of being a general approach used when learning other mathematical content as well.

Schoenfeld (1992) believes that the reason that teachers do not use problem-solving strategies to a greater extent is that it is more difficult for them in three aspects. First, it is more difficult mathematically since the teacher has to consider and analyse pupils' different approaches instead of just the one that the teacher chooses. Second, it is a greater pedagogical challenge since the teacher has to allow the pupils to solve the problems their own way instead of instructing them how to follow the method the teacher has decided. Lastly it is more difficult personally since the teacher often will find him- or herself in the situation of not knowing the answer.

Common opinions regarding how we teach mathematics

- We are teaching the same way we have been teaching for a long time which has proven to work well.
- The traditional way of teaching is not up to date with the current ideas about knowledge and learning.
- The mathematics education is focused on answer-getting rather than sense-making.
- Traditional mathematics education does not encourage but rather opposes group work, discussions and reasoning.
- Problem-solving is only perceived as contents of mathematics courses but is should be the general approach to the subject.

5 Mathematics education - Alternatives

Many agree that something has to be done about the mathematics education. But the opinions on what we should do to solve the problems vary a lot. From the idea that we are on the right track but the lacking results are due to a lack of resources, to the opinion that we should not teach mathematics at all or teach it without grading pupils' performance.

In chapter 4 i tried to describe the predominant way we are currently teaching in mathematics classes and problems that are highlighted by researchers and authors on the subject. In this chapter I will list some of the ideas about how we could and should teach mathematics that I have encountered during my research. I have focused on teaching ideas that are specific for mathematics education even though some of them resemble other more general teaching methods and philosophies.

5.1 A problem-solving approach

I have found that the most widespread opinion about how we should teach mathematics is that we should focus more on problems and problem solving rather than practising rules and calculating standard tasks. The idea that problem solving is the heart of mathematics and that it should be the main focus of mathematics education has been expressed at least since the end of the 1970's (Schoenfeld 1992) and is still very common today (for example Posamentier & Krulik 2008, and Hagland, Hedrén & Taflin 2005). Many teacher organisations and school officials has argued that problem-solving is a fundamental part of mathematics and that it should pervade all mathematical activity in school (Posamentier & Krulik 2008). It is not always obvious however, if problem-solving is a skill that is needed to better understand and learn mathematics or if the problem-solving skill itself is the mathematical knowledge that pupils should acquire. This duality is expressed in the Swedish official documents describing the purpose of mathematics.

> **Teaching shall strengthen pupils' confidence in their ability to use mathematics in different contexts, and provide space for problem-solving as both ends and means.**
>
> (Skolverket 2015, my translation)

Since most of the texts I have read that advocate for a problem-solving approach are texts regarding teaching methods rather than mathematical contents, I would say that the main focus of the problem-solving approach is its efficiency as a teaching method. But just as mentioned in chapter 4.2 teaching methods also affect what students learn. Problem-solving is considered important for pupils ability to learn the contents of mathematics courses, and for helping pupils understand how mathematics can be applied in other subjects and in real life situations (Boaler 2009).

Problem-solving strategies

When distinguishing problems from standard tasks, many highlight the characteristics of a problem as the absence of an algorithm that will lead to the solution. For example Posamentier & Krulik defines a problem this way, which is similar to many others' definitions:

> **In essence, a problem is a situation that confronts a person, that requires resolution, and for which the path to the solution is not immediately known.**

(2008, p. 1)

When trying to solve problems it is necessary to take one step back to try and find out how to solve it and what algorithms might be useful. Teaching pupils to analyse and look at the whole picture this way is often referred to as teaching problem-solving strategies. One of the most classic texts about problem-solving strategies is George Pólya's "How to solve it", first printed in 1945. One of the main topics of the book is heuristics, the study of methods for discovery and problem-solving, and Pólya argues that it is important to take heuristics into consideration when designing teaching models in general and especially when designing mathematical teaching models (Pólya 1973).

Heuristics can be used to design strategies for problem-solving which in turn can be taught to the pupils. By focusing on problem-solving strategies that are applicable to problems in many different contexts pupils learn how to approach contents and subjects unknown to them. The problem-solving strategy Pólya designed consists of general questions that can be applied to almost any problem:

1. Understanding the problem.
2. Devising a plan.
3. Carrying out the plan.
4. Looking back.

(Pólya 1973, pp. xvi-xvii)

Teaching pupils different strategies and to analyse their own strategies is a common component of a problem-solving approach. Éva Fülöp's research (2015) show that focus on the first steps of problem-solving where the pupils have to decide which methods to use can help pupils develop their creativity by trying different ways of solving problems rather than giving up when faced with a difficult problem that they do not know how to solve. Posamentier & Krulik (2008) claim that working with problem-solving strategies is an important tool to make pupils aware of the methods they use both in school and in everyday life to solve problems. We often encounter tasks that we are familiar with and know how to solve but to practice our ability to solve other, more complicated problems, studying problem-solving strategies is an efficient method. Mathematics courses in schools are often planned and connected by how the contents in the different courses relate to each other but we often neglect the fact that similar strategies can be used throughout most parts of mathematics. By focusing on strategies and their general applicability we can help pupils see the purpose of practicing problem-solving and there is a better chance that they will learn to see mathematics as a fascinating subject for problem-solving (Posamentier & Krulik 2008).

Group work and discussions

One of the most common and important aspects of a problem-solving approach is that it is a method that advocates changing the conventional mathematics learning environment where pupils work individually and silent into a place where collaboration and discussions are encouraged (e.g. Boaler 2009 and Hagland, Hedrén, & Taflin 2005). One argument for this way of studying mathematics is that it resembles the way professional mathematicians work. This brings legitimacy to the method in two ways, it indicates that it is an efficient method and it teaches pupils a methods that is used in the mathematical discipline outside of the school (Lampert 1990). It is also helping pupils express ideas and argue for their opinions which is an important part of problem-solving. Discussions in class help pupils understand that there often are many alternative ways of solving the same problem and a discussion of the effectiveness of different strategies and methods can take place (Hagland, Hedrén, & Taflin 2005). When the environment in a classroom is encouraging pupils to make guesses on solutions and methods they get to see that the most important aspect of mathematics is not necessarily the results and solutions. When highlighting the discussion, the reasoning and the arguments pupils have better opportunity to improve their confidence and courage when solving problems.

We all use problem-solving strategies subconsciously in everyday situations but by pointing out the specific strategies and illustrating them with examples teachers can create a learning environment where pupils can improve their problem solving skills as well as other mathematical abilities (Posamentier & Krulik 2005). Posamentier and Krulik lists ten problem-solving strategies that teachers and pupils could use when trying to figure out how to best solve a problem and they point out that most problems can be solved using a number of different strategies:

1. Working backwards
2. Finding a pattern
3. Adopting a different point of view
4. Solving a simpler analogous problem
5. Considering extreme cases
6. Making a drawing (Visual representation)
7. Intelligent guessing and testing (Including approximation)
8. Accounting for all possibilities (exhaustive listing)
9. Organizing data
10. Logical reasoning

(Posamentier & Krulik 2005, p. 5)

Talking in mathematics classes is also important since it helps pupils deepen their knowledge and understanding. Helping others and explaining is an efficient learning method which is a reason why many argue that groups with pupils on different levels of ability is prefered since this can help evoke dynamic conversations in classes (Boaler 2009).

Projects

Another possibility when using a problem-solving approach is to teach mathematics by working with projects. Rather than focusing on practising one specific method, projects let pupils explore larger problems in different direction. As the pupils are faced with questions along the way they have to find out what methods they need to answer them. Working in projects means working with many different areas of mathematics at the same time rather than focusing on one specific set of methods and formulas which often is the case in traditional teaching (Boaler 2009).

5.2 A modelling approach

Another common opinion about how we should change mathematics education is that we should focus on mathematical modelling. When working with models, the main focus is always on the process and the pupils have to analyse their models and their results in order to understand what changes they could do to their models to get more accurate results. A models and modelling focused mathematics education is a platform where pupils need to work in groups, discuss their ideas, and analyse their results while working on realistic problems that they find meaningful (Lesh & Doerr 2003). Teaching modelling and problem solving in combination can be very effective both when it comes to teaching specific abilities and knowledge, and as a way of helping students understand the purposes and applications of mathematics (Wedelin & Adawi 2014).

The modelling approach to mathematics education is to some extent similar to the problem-solving approach since mathematical modelling also revolves around solving problems. But the starting point of the problems and the methods are different. In a traditional, as well as in a problem-solving approach to mathematics education, pupils usually have to try and make meaning of abstract tasks or problems themselves. A modelling perspective starts out at the other end and makes mathematical problems out of real world situations. This often means that the problems solved in a modelling approach are ill-defined, or ill-structured, rather than well-defined which is usually the case. Learning how to create models to describe or analyse real world situations can help pupils become better problem solvers in everyday life, and provides them with tools that help them handle and understand complex situations that this modern life puts them in (Lesh & Doerr 2003).

The modelling approach focuses a lot on the applications of mathematics, which is an efficient way to motivate pupils as they understand what use they can have of mathematics outside of the school system (Levy 2015). Mathematical modelling resembles the way mathematics is used in many different disciplines, such as engineering and economics, which connects mathematical knowledge to other subject that pupils study in school and might work with in the future (Ang 2001). This way of adapting mathematics education to methods used in other disciplines differs from the perhaps more common opinion that mathematics education should resemble the way mathematicians work, which for example implies prioritising learning how to formulate formal proofs and similar activities.

To describe what modelling problems is I use Wedelin and Adawi's (2015) seven principles for how to design realistic problems that can be used for teaching modelling. First of all, the problem should be real in the sense that the solution should be of interest either in a direct or indirect way. The following two principles are that the problem should be challenging both to understand and to solve. Modelling skill is practiced when students are faced with ill-defined, complex problems that they will have to try and simplify to overview and understand, and by solving difficult problems they practice their problem solving ability. The fourth principle states that problems should not require learning of extensive new theory before being attempted. Although many real problems might require the problem solver to understand existing theories, the learning focus might shift from the process of solving and understanding problems to understanding theory if the problem requires too much theory that is not previously known to the students. Principle five states that the problem should be easy to remember as a case. In conventional mathematics education students are often expected to calculate an abundance of small tasks. Working with fewer but more extensive problems helps students distinguish the different tasks from each other which can also help them to compare strategies and solutions to problems they have already solved. Wedelin and Adawi claims that designing problems with help of these principles support learning in three dimensions, students become familiar with real-world problems, students get to know concepts and theory needed for calculations and students learn modelling processes and skills. The last two principles regard these three dimensions of learning and state that the teacher should provide a perspective on the problem in all three dimensions of learning, and that the teacher should create a problem set with variation in all three dimensions of learning. Discussing and analysing different aspects of the problems and solutions with the students is an important part and these three learning dimensions is a way to compare models with real-world problems and different methods to find solutions.

Learning mathematical modelling involves learning how to use mathematics to describe and analyse problems or situations in non-mathematical contexts. Doing so requires simplifications, guesses and assumptions which are somewhat unusual mathematical methods to most pupils since they generally consider mathematics a subject that requires great accuracy and exactness (Schoenfeld 1992). Many engineering students know much more mathematics than they are able to use since they have never gotten to practice the applications of it in their mathematics classes (Wedelin & Adawi 2014). One essential part of mathematical modelling is the modelling cycle. It describes a method for designing mathematical models and consists of a number of steps that the pupils should repeat until they consider their results adequate.

There are obvious similarities between the modelling cycle and models for problem-solving strategies (e.g. Pólya 1973), but I would say that the main difference is that problem-solving strategies aim to find the correct solution whereas the modelling cycle is aiming to find a satisfying result. This means that the evaluation of the results is different in modelling compared to problem-solving, since evaluation often is synonymous with validating when it comes to problem-solving whereas the results of a model must be evaluated through analysis and argumentation for the adequacy of a result.

5.3 Redefine mathematics

While advocates and researchers of a problem-solving approach and a modelling approach mainly argue for different answers to the question how we should teach mathematics, others instead question the current idea of why the pupils should learn mathematics at all. As mentioned in the introduction of this chapter, most researchers agree that there are issues regarding mathematics that we need to deal with, for example the high number of pupils that fail mandatory mathematics courses, poor results on international tests, and the fact that many pupils consider mathematics meaningless and boring. Some argue that the best way to solve these problems is to change the school subject mathematics fundamentally and to question the very idea that mathematical knowledge is important.

If mathematics is not necessary, we should probably change how much we emphasize it in school and how we perceive the subject, but this is not easily done. First of all there is no consensus that mathematics is not important. As mentioned in section 4.1, mathematics has had an important role in our society for a very long time, and many oppose the idea to put less emphasis on mathematics since it is already such an important part of the educational system. Grades in mathematics are also considered an important proof of a pupil's or a school's general ability or quality (Hacker 2012). Even if there would be evidence showing that a change would be beneficial, there would still be many who would not want us to change the way we teach. New ideas, even if they would be based on evidence from research, are often opposed by people who want things to remain the way they are. These opinions are common among all groups who are interested in education: parents, teachers, pupils, and politicians (Boaler 2009).

Logical reasoning

Lundin (2011) has found that the Swedish mathematics education has been criticised using similar arguments for almost two hundred years. He claims that the fact that we still have not been able to change it into the subject many believe it could be, point to the fact that it is not the methods but the actual subject that is the problem. Lundin argues that the constant dissatisfaction with the subject does not necessarily indicate that we should try harder to find better ways to teach. We blame poor results and unmotivated pupils on pupils, teachers, and assessment systems alternatively but some argue that the only explanation to why otherwise intelligent and capable pupils taught by competent teachers fail time after time is that there is something fundamentally wrong with the school subject mathematics (Magnusson 2012).

To solve the problems with low achieving, stressed, and unmotivated pupils one solution could be to radically change the purpose and idea of mathematics education. Since most people will never have actual use for most skills taught in high school mathematics some argue that there is no reason to teach these topics to pupils who are not specifically interested in mathematics. Instead we should focus on teaching the very basics that is useful to everyone (Magnusson 2012). Any further time and effort should be put on another subject such as logical reasoning or mathematical thinking (Magnusson 2012 and Wedelin 2015). Both these ideas, though somewhat different, are based on the idea that the subject mathematics has a long history as an academic subject which makes it almost impossible to change into something that it relevant and useful to the general public.

An artistic subject

If we are unable to convince pupils of the necessity of mathematics, another way to motivate them is to convince them that mathematics is interesting and fascinating in itself.

In his critique of the american K-12 learning standards Paul Lockhart (2009) argues that pupils who consider math class stupid and boring are right. What Lockhart means is that mathematics and the subject taught in mathematics classes are two completely different things. While he argues that mathematics is an art form that should encourage creativity and arouse curiosity, he means that mathematics education engage in a subject that rather values skills such as discipline and precision. Instead of arguing that the study of mathematics is necessary for our everyday lives, we could argue that it is important for our imagination and creativity, or just fun. Lockhart (2012) points out that the physical reality that we all live in and the mathematical reality are two different things, and that we should point this out to the pupils as well. In the physical world there are no points, lines, circles or right triangles, these exist only in the mathematical reality. Mathematics exist in our minds and there we can create and analyse perfect mathematical shapes and figures that do not exist in the chaotic physical reality.

Both Berndtsson (2015) and Lockhart (2009) argue that if mathematics was to be likened to any other subject it most of all resembles artistic subjects like composing music or painting. This means that mathematics could be fun and creative, but it does not explain why all pupils have to study the subject so extensively. In fact, Lockhart believes that the motivational problems stem from the fact that our society considers mathematics to be so important (2009).

5.4 Summary

The three different solutions to the problems regarding mathematics education that I have presented here can be looked upon as different levels of critique. The problem-solving approach is primarily focusing on *how* we are teaching mathematics, the implementation of this idea does not necessarily need any significant changes in curricula or the way the subject mathematics is looked upon. Dedicated teachers and supporting school management are enough to reach the goals of a problem-solving approach as Boaler (2009) and Lampert (Green 2014) give examples of.

This is to some extent true for a modelling approach as well but this idea is also focusing on the question *what* we are teaching. This approach is calling for a greater emphasis on the applications on mathematics which could imply that the contents of the mathematics education needs to be adjusted to this idea. As mentioned in chapter 4.2 modelling skill is already one of the skills that Swedish upper secondary school pupils are supposed to develop but despite this most pupils finish high school with very little experience of mathematical modelling (Wedelin & Adawi 2014).

The third idea to redefine school mathematics is the most radical solution to the problem as it mainly questions the reason *why* we are teaching mathematics. Both a problem-solving, and modelling approach do this to some extent, but do not stress this with as much emphasis. For this idea to be implemented, changes on a societal level are required. Teachers could highlight some of these ideas and discuss questions regarding the issue with pupils but since teachers have to adjust to national learning objectives it would be difficult to implement the teachings of a redefined version of mathematics. In chapter 7 I will go more into detail on what is needed to implement any of the ideas presented in this chapter.

6 Mathematics and architecture - A comparison

The main reason for me to compare the two subjects architecture and mathematics is because I have experienced two very different kinds of problem-solving strategies in school, one in mathematics education and another when studying architecture. In mathematics, problem-solving is emphasised as an important part of the subject, while I cannot recall ever discussing the subject at architecture school. There, much focus is on creativity and students get to practice ways of exploring and expressing their ideas and opinions. I believe that the role of the architect could be looked at as the role of a problem-solver and that the two subjects therefore could have much in common.

6.1 Well-defined and ill-defined problems

While mathematical problems often take place in a reality of their own (Lockhart 2012), or in an absurd version of the reality we live in (Boaler 2009, Lundin 2011), architectural problems are in one sense often much more real. A typical introduction to an architectural project could be that the teachers and the students visit the location where this specific project is to be built. Even if the students' projects most probably will not be built, these projects are often based in real problems, ideas or plans, for example of a new building at a certain location. From discussions about the sight and the purpose of the building the students start working on the project. There are also often some requirements regarding, for example, the function and the size of the project. After the introduction to the project the students have to plan most of their time and structure their work individually or in groups. They have access to tutoring at regular intervals but have to answer most of the questions that arise by themselves, or by discussions with their peers.

These are some of the aspects of a typical architectural project as I have experienced it. When comparing this to my experience of mathematical problem-solving I have difficulties in finding any similarities at all. As mentioned above, architectural problems are often very open and ill-defined, there are always some constraints that one has to relate to but there are unlimited ways to tackle the problems and infinitely many solutions. In mathematics education, problems and questions are often much more exact which limit the possible approaches and solutions. On the other hand

Berndtsson (2015) claims that the problems that mathematicians work on often are much more ill-defined than the ones found in textbooks. This could mean that mathematical and architectural problems have more in common than I have experienced.

I believe that my impression that mathematics and architecture is so different is not only based on my own experience, but also comes from the widespread idea that mathematics is a subject where every question and solution is well-defined and exact, and that architecture is a creative subject with no objective truths.

6.2 Hard and soft knowledge

> **Hard knowledge is that which is accepted as indubitably uncontested, while soft knowledge is denoted by a lack of agreement about its properties and is characterized by contestation.**
>
> (Hall, Clegg & Sillince 2008, p. 68)

I would say that one reason for the difference between the subjects is that hard knowledge is valued in mathematics education while architecture values soft knowledge. Hard knowledge in this case being for example truths, facts, formulas, and multiplication tables, and soft knowledge innovation, creativity, ingenuity, beauty et cetera.

This makes the conditions for testing knowledge and assessing pupils very different in the two subjects. In mathematics, there are specific goals that all pupils should achieve, and national tests are used to test and grade pupils without the individual teacher being able to influence the grade. When grading an architectural project or task, the teacher's preferences and opinions are always important factors. Lockhart (2009) claims that it does not have to be this way but that the fact that our culture considers mathematics a science and architecture an art form is the reason for this difference.

Another example of how the school system tend to value hard knowledge higher than soft knowledge can be found in a study referred to by Lawson (2006). Children who scored highly on creativity tests were compared to children with high scores on intelligence tests. The conclusions were that the so called creative children were independent and wanted to go their own way, while the supposedly intelligent children were more compliant and wanted approval from their teachers. When the teachers were asked which pupils they liked the most, the intelligent children showed to be more popular than the creative.

I believe that this pinpoints one of the major issues with the school system, that we not only want to promote the pupils' learning possibilities, but also want to shape them into well mannered citizens that are adaptable and can take instructions. At Uppsala universitet, Sweden's oldest university, there is a controversial inscription that expresses this view: “Tänka fritt är stort, men tänka rätt är större” [To think free is great, but to think right is greater] (Uppsala universitet 2015). This quote, although perhaps taken out of context, expresses an issue that the school system has to deal with. Furthermore I think that the way mathematics is taught today fits well into a system where you get to give exact instructions and expect to get exact results from the pupils.

6.3 Creativity

In architectural projects, just as Morten Lund (2015) points out, much focus lies on the process and the questions the students has chosen to focus on. The students are not necessarily expected to present a finished project in the sense that the building could be built directly from the documentation, but rather to highlight the most important aspects and ideas of the project.

There is a lot of literature about mathematical problem-solving strategies and many authors and researchers argue that we should focus on the process rather than the results in mathematics as well, for example Polya (1973), Boaler (2009) and Lockhart (2012). There are many handbooks for problem-solving that describe different methods for how to approach mathematical problems and these are somewhat similar to the methods used in architecture. The idea of a greater focus on problem-solving in mathematics education resembles Lund’s (2015) ideas that students need to be aware of the methods they are using, both to argue for their choices and as a tool for coming up with new ideas. This idea that strategies for creative thinking is needed for problem-solving, is something that I myself have never come across in mathematics education, but that could be one of the main arguments for the idea that the architecture and mathematics have much in common.

The common perception seems to be that creative subjects is synonymous with artistic subjects, architecture often fall into this category but mathematics seldom do. On the other hand, the importance of problem-solving in mathematics is often stressed, and problem-solving without creativity is not really problem-solving, as for example expressed in the interviews I have conducted. I believe that this contradiction, that problem-solving is an inevitable part of mathematics and the idea that mathematics is not a creative subject, is a big problem when it comes to the purpose of mathematics and how we should teach it.

Some people, like Bo Berndtsson (2015), are able to see and appreciate the creative elements of mathematics at an early age, but many pupils, teachers and parents do not (Schoenfeld 1992). Most people do not associate the repetitive elements and facts to be learned by heart with creativity. On the other hand, creative subjects also consist of facts and skills that its practitioners have to practice. Exercises in drawing technique to be able to make sharp and clear drawings is not necessarily a creative chore, but it is a tool that architects need to express their ideas.

7 Conclusions

My research has provided me with methods and arguments for different approaches to mathematics education and many valuable ideas for how to plan and implement a variety of pedagogical ideas regarding mathematics education. I think that the results of this thesis will be of great use in my, and hopefully some of my peers', future professional lives. I have already experienced the complexity of the work of a teacher, and the knowledge I have gathered during the work on this thesis will be very useful in discussions with pupils and colleagues about their ideas about mathematics, and for inspiring and motivating pupils.

Mathematics education is a very complex subject on many different levels and depending on which level one chooses to analyse or criticise, the solutions can look very different. I have been interested in all these levels, from questions about how to practically motivate pupils in the classroom and help them learn and achieve high grades, to questions regarding the nature and philosophy of mathematics and what role mathematics play in our society and everyday lives.

One of the questions that I expect to hear as a teacher and which I have feared is "Why are we supposed to learn this?" Many pupils do not see any purpose of knowing mathematics but our educational system considers it very important. My own opinion is somewhere in between the two. On the one hand I find many of the arguments for an extensive mandatory mathematics education insufficient and strange, but on the other I think that mathematics is fascinating and interesting and I hope to be able to inspire many of my future pupils to see the beauty of mathematics. Pragmatically, one could also argue that the fact that high grades are considered important is a reason for pupils to consider the subject important, however the question about tests and grades, and how these affect pupils is another complex issue which I have not focused on in this thesis.

One of the main reasons for me to write this thesis was that I believed that mathematics could be more interesting and fun for many pupils if we make classes and problems more focused on creativity and exploration. Ideas about a focus on problem solving as well as the opinion that mathematics should be considered an artistic subject have given me deeper insight in this area but I have also found arguments for a more practical and pragmatic view on mathematics in the modelling perspective. I find this perspective very interesting as well, and I believe that they are very similar in some ways. I find the ideas of a problem-solving approach and a modelling approach similar since they both emphasise the importance of strategies and the process, the main difference being that the problem-solving approach uses the process to find a solution, whereas the process and the results are more interconnected in a modelling approach where the results is just one part of the modelling cycle.

Before I started to think about this thesis, I have thought about different mathematical problems that I would like to use, instead of, or as a complement to textbook tasks, when I work as a mathematics teacher. The evolution of the problems in my mind have shifted focus from, for example, the philosophical aspects of mathematics, to problem-solving strategies, to a modelling perspective, and back again. And I realise that many of the ideas about mathematics are interconnected. I believe that we can choose to look at mathematics in any way we want as long as we are able to motivate pupils to study the subject out of curiosity rather than out of constraint.

7.1 Mathematics and creativity

I would say that all suggestions for how to change mathematics education agrees with Lampert's idea to change from the traditional answer-getting process towards sense-making (Green 2014) and that the creative aspects of mathematics are very important is in line with constructivist ideas about learning. Most researchers seem to agree that learning is best supported by focusing on processes and strategies rather than on calculations and results. I would say that the main difference between the three different categories of solutions I have identified, is if we should study pure mathematics or applied mathematics. Figures 1 and 2 show a conceptual framework of similarities and differences of the three different suggestions; a problem-solving approach, a modelling approach and mathematics as an art. I have chosen to exclude other way of redefining mathematics mentioned in section 5.3, mathematical thinking, from the framework since it suggests to broaden the school subject mathematics, and the framework revolves around different views on mathematics.

Figure 1 shows that the three suggestions have in common the idea to strive towards sense-making rather than answer-getting which Lampert argues is dominating in traditional education (Green 2014). The differences lie in which kind of mathematics to focus on, pure or applied.

Figure 2 highlights and summarizes the different ways the three suggestions answer the questions *why*, *what* and *how* asked in chapter 4.

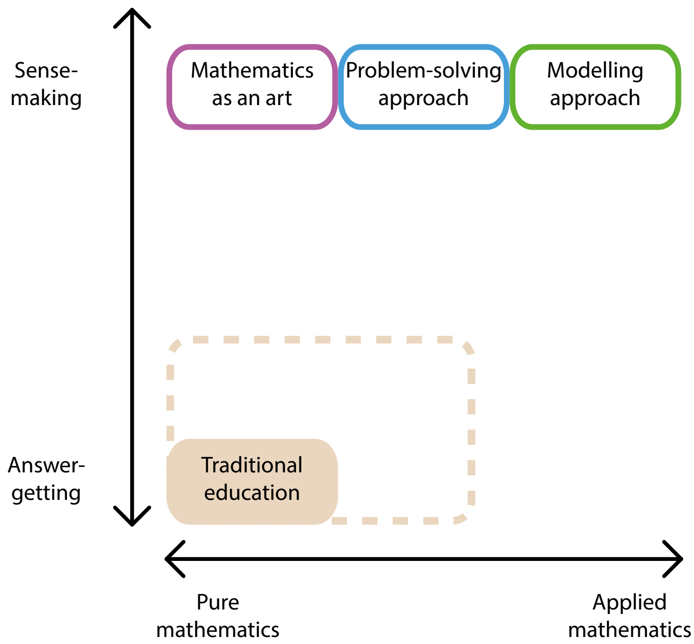

Figure 1. Conceptual framework: Dimensions

	Why?	**What?**	**How?**
Common ideas for all three approaches	-	Strategies rather than algorithms, rules and formulas.	Collaborative work, discussions and analysis.
Modelling approach	Problem-solving and modelling abilities are useful in many everyday situations.	Modelling strategies that can be used in many professions or situations in everyday life.	Using the modelling cycle, the iterative process and validation of results to solve ill-defined problems.
Problem-solving approach	Problem-solving ability is useful in many everyday situations.	Problem-solving strategies that will help students deal with everyday problems.	Solving well-defined problems with a focus on strategies and methods.
Mathematics as an art	Mathematics is interesting, stimulating and fascinating.	Gainedinsight into creativity and the philosophy of mathematics.	Pattern finding and exploration.

Figure 2. Conceptual framework: Why, What and How

7.2 Implementing change

Questions about the nature of mathematics and what reasons we have for putting such great effort into mathematics education have interested me for a long time, but when writing this thesis I have found that many of these questions are difficult to relate directly to the everyday work of the practicing teacher. It seems as if most of the different approaches to mathematics education can be applied rather independently of the curriculum, but it requires support from the heads of the schools and colleagues. The teacher could discuss different aspects of mathematics with the pupils depending on belief. I do not think that one truth is necessarily better than the other, and I believe that it is often possible to highlight for instance the artistic and abstract aspects or the applications of similar problems, depending on what the teacher believe the pupils are most susceptible to.

In this thesis I have described the current state of mathematics education and what is seen as its major problems, different ideas about how we could improve it, and in what ways mathematics is different from subjects that are generally perceived as creative, such as architecture. As mentioned there are a lot of different opinions about what we should do to increase pupils' interest for mathematics, and consequently also their ability in the subject, but implementing any of these ideas seem very difficult. I would say that the problem with carrying out change is twofold, first of all we need to agree on a solution to the problem that will work on all levels, for pupils, teachers, schools, universities and future employees of the pupils. After reaching agreement on what to do it is as important to make sure that the changes are actually carried out, and for this to happen we need a broad support for the changes and structures to help all involved learn the new philosophy and methods (Green 2014).

One example of the difficulties of implementing change is that three major reforms of mathematics education have been implemented in the United States, in the 1960's, the 80's and in recent years, but none has had the positive impact researchers and politicians hoped for (Green 2014). Instead the reforms have resulted in resistance or at best in confused teachers and pupils, who try to teach and learn with the use of new methods and material without knowing how to use them. Changes require a lot from our teachers, and maybe working through a textbook from the first page to the last and showing the examples on the chalkboard is not enough, maybe we need teachers who cooperate and develop study plans that work best for their pupils, maybe we need teachers who dare to test new methods and challenge their old assumptions about which teaching methods are best. Whichever methods we want our teachers to use, they need good conditions to do so and develop their teaching ability.

Implementing change is difficult but not impossible. Japanese mathematics education shows that the same ideas that failed in the United States during the 1980's can work to efficiently change the organization of mathematics education. In Japan they managed to establish change on all levels and provided possibilities for teachers to learn about the new methods and continuously develop their ability, for example by making sure that teachers were able to cooperate and learn from each other and from public lectures that they could attend (Green 2014). Hopefully future Swedish educational reforms will be as successful.

8 References

8.1 Written references

Andersson, M., Lundh, T. and Jäntti, K. (2013) Därför är matematiken så viktig - för alla. Svenska dagbladet. February 20. http://www.svd.se/ (2015-09-21)

Ang, K. C. (2001). Teaching Mathematical Modelling in Singapore Schools. In The Mathematics Educator, Singapore, 6(1) pp. 62-74.

Boaler, J. (2009) What's Math Got to Do With It?: How Parents and Teachers Can Help Children Learn to Love Their Least Favorite Subject. London: Penguin Books Ltd.

Green, E. (2014) Why do americans stink at math? The New York Times. 23 July. http://www.nytimes.com (2016-01-14)

Hacker, A. (2012) Is Algebra Necessary? The New York Times. 28 July. http://www.nytimes.com (2015-10-22)

Hagland, K., Hedrén, R. and Taflin, E. (2005) Rika matematiska problem - inspiration till variation. Malmö: Elanders Berlings AB.

Hall, M., Clegg, S. R. and Sillince, J. (2008) The Importance of Learning to Differentiate between 'Hard' and 'Soft' Knowledge. In Communications of the IBIMA, 6 (11), pp. 67–74.

IAAF - International Association of Athletics Federations (2016) http://www.iaaf.org (2016-03-23)

Lampert, M. (1990) When The Problem is not The Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. In American Educational Research Journal, 27 (1) pp. 29-63.

Lawson, B. (2006) How Designers Think: The Design Process Demystified. Fourth edition. Oxford: Architectural Press.

Legard, R., Keegan, J. and Ward, K. (2003). In-depth interviews. In Qualitative research practice: a guide for social science students and researchers, Eds. Ritchie, J., and Lewis, J. pp. 138–169. London ; Thousand Oaks, California: Sage Publications.

Lesh, R. and Doerr, H. M. (2003) Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. In Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching, Eds. Lesh, R. and Doerr H. M. pp. 3-33. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Levy, R. (2015) 5 Reasons to Teach Mathematical Modeling. American Scientist. May 5. http://www.americanscientist.org (2015-11-05)

Lockhart, P. (2009) A Mathematician's Lament. New York: Bellevue Literary Press.

Lockhart, P. (2012) Measurement. Cambridge, Massachusetts: The Belknap Press of Harvard University Press.

Lundgren, U. P., Säljö, R. and Liberg, C. (Ed.) (2012) Lärande, skola, bildning: grundbok för lärare. Second edition. Stockholm: Bokförlaget Natur & Kultur.

Lundin, S. (2011) Hating School, Loving Mathematics: On the Ideological Function of Critique and Reform in Mathematics Education. In Educational Studies in Mathematics, 80 (1) pp. 73-85.

Magnusson, A. (2012) Slopa matematiken i gymnasieskolan. Göteborgs-Posten. 23 August. http://www.gp.se (2015-11-23)

Olén, S. (2016) Mattekollen: Attityden till matte - ett hinder för svensk konkurrenskraft? (Västsvenska handelskammaren rapport 2016:1)

Pólya, G. (1973) How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. Second edition. Princeton: Princeton University Press.

Posamentier, A., S. and Krulik, S. (2008) Problem-Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions, Grades 6-12: A resource for the Mathematics Teacher. Second edition. Thousand Oaks: Corwin Press.

Schoenfeld, A. H. (1992) Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In Handbook for Research in Mathematics Teaching and Learning, Ed. Grouws, D. pp. 334-370. New York: Macmillan.

Skolministeriet (2013) Vad är grejen med matte? [Sveriges utbildningsradio] http://www.ur.se (2015-11-03)

Skolverket (2015) Matematik - om ämnet. http://www.skolverket.se (2015-10-27)

Svinicki, M. D. (1999) New Directions in Learning and Motivation. In New Directions for Teaching and Learning, 1999 (80) pp. 5-27.

Uppsala universitet (2015) To think free is great, but to think right is greater. http://www.uu.se/ (2015-10-07)

UR Samtiden - Matematik i kubik (2012) Att bedöma problemlösning i matematik. [Sveriges utbildningsradio] http://www.ur.se (2015-10-02).

Wedelin, D. and Adawi, T. (2014) Teaching Mathematical modelling and Problem Solving - A Cognitive Apprenticeship Approach to Mathematics and Engineering Education. In International Journal of Engineering Pedagogy, 4 (5) pp. 49-55.

Wedelin, D. and Adawi, T. (2015) Applied Mathematical Problem Solving: Principles for Designing Small Realistic Problems. In Mathematical Modelling in Education Research and Practice, Eds. Stillman, G. A. et al., pp. 417-427. Springer International Publishing Switzerland.

Welin, S. (2013a) Modernt liv kräver inte så mycket matte. Svenska dagbladet. 19 February. http://www.svd.se (2015-09-21)

Welin, S. (2013b) Matten har blivit den nya katekesen. Svenska dagbladet. 25 February. http://www.svd.se (2015-09-21)

8.2 Oral references

Berndtsson, Bo (2015) interviewed by the author, May 4.

Fülöp, Éva (2015) interviewed by the author, June 17.

Lund, Morten (2015) interviewed by the author, May 13.

Wedelin, Dag (2015) interviewed by the author, May 20.

Appendix A

Transcript from interviews

Regular text: Interviewee, italics: Interviewer.

Interview with Bo Berndtsson

2015-05-04

Jag skriver om .. pedagogik, matematik, problemlösning och kreativitet. Utgångspunkten är att synen på kreativitet och problemlösning har jag upplevt som så skiljd inom arkitekturen och matematiken. Till att börja med vill jag intervjua lite olika människor som sysslar med problemlösning. Kan du presentera dig och vad du gör lite snabbt?

Jag är professor här [på Chalmers] sen ett antal år tillbaka och förutom undervisning och så så sysslar jag alltså med forskning inom komplex analys och geometri kan man beskriva det som. Och det innefattar dels att skriva artiklar själv och ihop med olika samarbetspartners och dels handledning av doktorander och examensarbetare. Och det är ett ganska fritt område på det sättet att jag i väldigt stor utsträckning bestämmer mina arbetsuppgifter själv. Samtidigt så, man kan ju välja problem och sånt som man vill skriva om själv i stort sätt, men samtidigt måste det vara någonting som andra är intresserade av om man ska kunna få anslag och bli någorlunda respekterad inom sitt område så måste man ju hålla på med saker som folk tycker är bra då. Så det är ju inte helt kravlöst även om man väljer själv vad man ska syssla med.

Du förväntas forska inom nya områden?

Tja, nya och nya. Det måste ju finnas något slags nyhetsvärde med det alltså. Och det är väldigt uttalat i matematik kan man väl säga. Jag tänker ofta på det i många sammanhang om man tittar på, det finns ju många olika saker som kallas för forskning, inom andra områden. Det finns forskning, dels inom naturvetenskaperna, kemi och fysik och så vidare, och sen så finns det ju forskning inom samhällsvetenskaper och det ena och det andra va. Och en hel del av den forskningen som man hör nämnas på radio eller läser om i tidningar och sådär, det rör ju inte sådana saker som matematik då, för att det är någonting som är ganska svårt att förklara för gemene man vad det egentligen handlar om.

Och mycket utav det som kallas forskning då, som till exempel inom samhällsvetenskap och så, det skiljer sig så mycket från min verksamhet så jag skulle egentligen inte kalla det för forskning alls. För om du tittar till exempel på folk som skriver om den här väljarundersökningen och analyserar svensk politik och så vidare. Då verkar det ju inte krävas nya idéer på samma sätt, utan om man vill ha reda på hur många som har gått från Centerpartiet till Kristdemokraterna eller vice versa så gör man i stort sätt en statistisk undersökning och så kollar man vad man får för svar. Det tycker jag är mer en inventering. Det är säkert en vrångbild jag gör för det måste vara någonting mera i det, men i matematik är det väldigt uttalat detta att om en artikel ska vara värd att publicera så måste den innehålla en ny idé. Så det handlar väldigt mycket om nya idéer.

Min första fråga jag har nedskriven handlar om vad problemlösning är och hur du arbetar med problemlösning. Skulle du säga att du arbetar med problemlösning?

Det skulle jag nog säga. Då finns det olika typer av problemlösning. I matematiken finns det ett antal problem som cirkulerar och det uppstår hela tiden nya problem och det finns en massa såhär klassiska problem i matematiken till exempel, en del har blivit lösta då till exempel det här, du har säkert hört talas om Fermats stora sats och så där, som var ett olöst problem sedan 1600-talet som löstes för inte så länge sen. Och andra såhär spektakulära genombrott. Och sen finns det ju då mera mänskliga problem som dyker upp som går ut på att forskare A kommer fram till någon förmodan, någonting som han inte kan bevisa, och sen så är det någon annan som gör det och som då har löst det här problemet. Men sen finns det någonting annat som är väldigt besläktat men som inte är riktigt samma sak och det är egentligen att hitta nya frågeställningar och det tycker väl jag då att det innehåller ett lika stort mått av kreativitet som att lösa ett problem som någon annan har ställt.

I skolans värld så pratar man om problemlösning som ett särskilt sätt [att räkna] till skillnad från att räkna standardtal, så är problemlösning en annan typ av…

Just det, men då rör det sig ofta om väldigt väl definierade problem som framför allt skiljer ut sig på det sättet att man kan veta säkert att de har en lösning för det är någon som har konstruerat dem för att de ska ha en lösning. De flesta problem som dyker upp de kanske inte har någon sådan lösning. De kanske måste formuleras om, man kanske måste göra något annat istället, så det är en skillnad.

Det är ju lite lustigt det där, man kan tycka först att det är lite - de allra flesta problem som man kan tänka sig som dyker upp i någon tillämpning av matematiken de har ju ingen snygg lösning. Men alla problem som man läser i läroböcker de ska ha en mer eller mindre snygg lösning, en avgränsad lösning. Så de är väldigt otypiska på det sättet, läroboksproblem. Men de är ju där mera som ett slags övning i problemlösande då. Det är ett bättre sätt att lära sig materialet att lösa sådana problem än att bara läsa det. För om man bara läser det så fastnar det inte alls på samma sätt.

Jag ser det ibland som att de här frågorna är så exakt ställda vilket gör att det finns ett exakt svar. Är de problemen som du jobbar med mer luddiga i formuleringen eller är de lika [exakta?]

De är nog - många av dem är nog sådana att de kan tänkas ha ett exakt svar då men det är inte alls säkert att det finns något sätt att ta reda på det då. Men som sagt, mycket ligger då i att kanske ändra på problemställningen och hitta nånting annat i anslutning till det. Delresultat kan man också tala om och sånt där. Och allting går inte ut på att lösa precis de problem som råkar cirkulera utan mycket handlar om att skapa ny teori och nya frågeställningar och så.

Jag har en annan fråga: Vad kännertecknar en bra problemlösningsprocess? Finns det några sådana generella tankar som du har eller erkända metoder för hur man [bäst löser problem?]

Det finns ju folk som har analyserat - jag kan inte så noga - men det finns ju folk som till och med har skrivit böcker om detta. Hur man löser problem alltså. Men det är ju ingenting som jag medvetet använder mig av, sådana recept för hur man löser problem, det är det ju inte. Jag tror det finns en bok utav Polya till exempel som heter "How to solve it" där han går igenom olika exempel och visar på strategier för att lösa olika problem. Jag kommer inte riktigt ihåg, jag tror inte jag har läst den heller, men det är väl frågan om att man hittar något liknande fast enklare problem och så där som man löser först och så.

Men du har inga steg eller metoder som du använder?

Nej det kan jag inte säga att jag har.

Jag har läst lite om den kreativa processen. Inom arkitekturen är det svårt att sätta fingret på vad det egentligen är - hur man kommer på en ny design eller en idé för hur en byggnad bäst löser ett problem som den ställs inför. [Inom arkitekturen] är man väldigt öppen med att det inte finns ett rätt svar och därför måste vi pröva massa olika idéer. Och det är då det som är kreativiteten, att komma på idéer.

Ja, men det är nog inte så olikt alltså. Det är nog ofta fråga om det i matematiken också. Att innan man får en lösning, innan man får fram ett bra resultat, någonting som man kan skriva ner, så har man försökt en massa olika saker som inte fungerade innan alltså. Så är det säkert alltså så det är nog ganska likt alltså. Och det är väl det som då kännetecknar en bra matematiker och kanske en bra arkitekt också, att man får många olika sådana idéer att pröva så att säga.

Och det är där i som kreativiteten kan ligga då?

Ja det kan jag tänka mig.

Jag har ju intresserat mig för det här för att jag, när jag tittar på skolmatematiken, både min egen erfarenhet och vad jag tror är den gängse uppfattningen att matematik nog ses som ett väldigt icke kreativt ämne av många.

Ja det är ju konstigt för det är det ju inte alls om man håller på med matematik som yrke. Utan det är i extremt hög grad fråga om kreativitet.

Kan du komma ihåg om det var någon skillnad för dig eller om du [alltid] har haft den bilden?

Nej jag var intresserad av matematik redan i skolan. Jag tyckte nog att det var fråga om kreativitet där också. För även om de här problemen som står i böckerna redan var lösta och så vidare så skulle man ju hitta dem då så att - och det var ju inte alltid så lätt. Det är väl det som är moroten, man försöker lösa någonting, försöker hitta en snygg lösning på ett problem och så får man något slags tillfredsställelse när man lyckas med detta då. Så det är nog ändå det som är grunden till det hela fortfarande.

Jag tror att om man ska jämföra matematikforskning med någon annan verksamhet så tror jag att det man kommer att tänka på mest är andra sådana här kreativa saker som bildkonst och musik, kanske att komponera musik och göra nya bilder och sånt där. Det tror jag. Fast i matematiken är rätt så bundna former då, man kan inte skriva vad som helst utan det måste stämma på slutet. Vilket gör att det är ganska orättvis på det sättet, det kan vara en person som har haft jättemycket bra idéer och som har jobbat väldigt hårt men som ändå inte kommer någonstans över huvud taget för det finns ingen garanti. Det är det som för mig skiljer riktig forskning från sådant som jag inte skulle kalla forskning. Om det är fråga om riktigt forskning så har man ingen garanti från början att det här verkligen kommer bli någonting.

Jag misstror sådana som säger att "nu har vi ett forskningsprojekt här, och vi beräknar komma med vår första rapport om ett halvår" och sådär. Om man kan vara så säker på att det ska komma ut någonting ur det så, ja då är det ingenting nytt i det.

Jag skulle gissa på att det är viktigt att ha problemlösning i skolorna också.

Man pratar väldigt mycket om det men jag tycker att mycket av problemlösningen är i stort sätt textuppgifter, och det kallar man problemlösning.

Jag tror att de flesta människor egentligen tycker det är roligt med matematik, de flesta som du möter skulle hävda motsatsen själva, de skulle inte säga att de tycker det är roligt. Men om man börjar med de som är bra på matte i skolan, de tycker säkert det är roligt att lösa problem då och de håller på med det bara för nöjes skull därför att de tycker det är roligt, ungefär som en del personer löser korsord eller soduko eller någonting i den stilen. Det är någonting som jag tror att alla har då. Det som förmodligen knäcker folk då, som gör att eleverna tycker det är tråkigt, det är kanske när de inte får problem som är anpassade efter deras nivå då så att de antingen är för svåra eller för lätta. Det tror jag är en utmaning att hitta någonting i matematiken som är precis lagom svårighetsgrad som studenterna eller eleverna kan få ut någonting av. Det ska vara såpass svårt att man får någon glädje av att ha gjort det och det ska vara såpass lätt att man faktiskt klarar av det.

Interview with Morten Lund
2015-05-13

Min utgångspunkt är att både matematik och arkitektur handlar om problemlösning. håller du med om det?

Nej, jag håller inte med. Arkitektur kan vara problemlösning men det är bara ett fält bland många. Jag tror också att matematik handlar om mer än problemlösning. Jag tror matematik handlar om glädjen, om lusten, om förtjusningen i mönster, i skönheten. Så jag tror det är en väldigt komplex sak. Det kan också handla om fåfänga, att visa vad man kan, precis som alla andra saker som människor gör, vi är ju människor allihop. Så det är sådana saker, ambitioner, lusten att förstå, lusten att komma lite närmare. Jag tror egentligen att vi skall akta oss för att definiera våra fält, så … som att det handlar om problem. Det är väl självklart att det gör det också. Jag läste en intressant artikel, av en dansk matematiker som hade knutit sig till det en israelisk matematiker hade gjort tidigare.

Det är den där vanliga övningen där man staplar tegelstenar och så ska man se hur man kan göra ett kragvalv, teorietiskt hur långt man kan kraga ut och hur långt man kan nå. Och i den artikeln så kände jag igen typisk konstruktionsundervisning från mina första år när jag gick på arkitektskolan i Köpenhamn. Då gjorde vi typiskt sådana och så kom man fram och ur den där enkla staplingstekniken som alla kunde så kom man fram till en ganska definierad kurva. Men så visar det sig när man läser den här artikeln att det finns många, många andra sätt man kan göra, man kan arbeta med motvikter, och plötsligt blir det en komplexitet i problemställningen som var långt ifrån den där förenklingen som jag blev undervisad i.

Och plötsligt så upptäckte jag precis samma övning i en matematikers hand och inte i en ingenjörs hand som har tillämpat matematiken för bara 10 år sedan. En wow-känla att ur en sådan enkel princip kan beskriva en exakt formel som beskrivs i en enkel algoritm, så plötsligt har jag en jättekomplexitet med hål och motvikter och en märklig form som inte alls gick att beskriva så enkelt. Och det är ju det matematik kan, och det är kanske den viktigaste orsaken till att, … jag försöker ju när vi ska driva forskningsprojekt att utveckla vårt undervisningsfält vart som helst. Kan vi när vi arbetar med digital design, kan vi gå vägen in via samarbete med matematiker? Framför att använda enkla scriptverktyg då man på något sätt blir väldigt låst av andras tolkning och andras system. Det vill säga, en grasshopper-lösning, det blir väldigt lätt som den enkla modell som jag fick av mina lärare på skolan medan en matematiker kan vidga ut frågeställningarna. [Så att det blir] mycket mer intressant, mycket mer komplext. Och då tycker jag att vi i den ingången närmar oss matematikerna.

Och när matematikerna älskar en sådan sak är det på grund av skönheten, överraskningen, de bristande symmetrierna, mönstren som inte upprepar sig men ändå har en skönhet och en ordning fast på en annan nivå än bara en enkel form. Och det är där jag tycker vi möter varandra.

Så för mig är samarbetet med Fraunhofer någonting som jag värdesätter otroligt högt här på skolan. [...] Det viktigaste i matematiken tycker jag nog är att man har utvecklat ett språk som gör att vi kan fånga förnimmelser, företeelser, fenomen som vi ser och på något sätt förstå deras relationer genom detta språk. Det tycker jag är väldigt, väldigt viktigt. Mitt nästa steg det är också ett arbetssätt. Matematikerna strävar både efter precision, men också efter pregnans. Pregnans, det är djupet, det är frodigheten, det är det som jag tog fram i det där staplingsexemplet där det blev komplext och överraskande. Men precisionen är också att vi är väldigt, väldigt medvetna om vad som är våra parametrar, vad som är våra konstanter. Bara att kunna definiera sådant. Det måste du göra för att applicera matematiken. Men det är inte många arkitekter som egentligen är duktiga på att definiera sådana frågeställningar när man sätter igång med en uppgift. “Vad kan jag röra?” och “Vad ska jag lägga fast?”.

Så jag tycker det finns en struktur i tankesättet som jag tycker vi kan lära otroligt mycket av från matematiker. Men det är grundläggande genom arbetssättet, det är inte genom den konkreta metoden, det är ju matematik och inte arkitektur, men sättet vi går tillväga på, där tycker jag vi har mycket gemensamt. Och jag är övertygad om att frågar du matematiker, och de vågar släppa sitt försvar, så tror jag att skönhet, överraskning, mönster, alla sådana saker är jätte, jätteviktiga och kanske det mest motiverande.

Jag har pratat med matematiker och frågat dem om deras arbetsmetod och de flesta verkar inte ha en specifik metod som de använder sig av för att lösa olika problem.

Om jag börjar med en matematisk formel så kan jag första tänka mig att jag har F, parentes och så alla olika variabler jag kan föreställa mig, slut parentes. Det är jättegrovt, det är bara funktioner och så skriver vi vad det är funktioner av. Och det motsvarar väl om jag som arkitekt börjar att göra en mind map eller en brainstorm eller någonting sådant och gör min första skiss, min första konceptskiss utifrån det. Men sen blir det intressant att försöka beskriva hur de olika konstanter och parametrar och så vidare, hur är de i spel med varandra i den här formeln. Och på samma sätt är det i min konceptskiss, “Vilka saker kan jag ändra på?”, “Vilka saker ligger fast?”. Du har en tomt, du har en tyngdlag, du har lite olika saker men det är mycket mer saker än man tror som man kan ändra på.

Sen kan du säga att alla arkitekter är ju olika, precis som matematiker är olika människor, så jag vill inte säga att det finns en arkitektmetod. Men den arkitektmetod jag strävar efter, allra viktigast är att mina studenter, i Matter-space-studion, de måste, när de gör sitt examensprojekt åtminstone, så måste de vara medvetna om vilken metod de använder, den får inte bara komma automatiskt. Det får inte komma som obearbetad import, de måste lägga den på bordet och vara kritiska. Det är jätteviktigt. Och det kräver jag redan i programmet, att de ska reflektera över vilken metod de använder. Därför erbjuder jag också att exjobbare ett halvår innan så får de göra undersökande projekt i området de tänker arbeta i. Då får de gärna hoppa ut i det men jag vill att de reflekterar över sin metod så de tar det med sig. Så det viktigaste är, på något sätt, att man hittar en metod, och ta inte patent på en metod som bättre än en annan, var väldigt öppen omkring det.

Men sen när jag undervisar och jag tillrättalägger mina kurser med metoder så är det helt klart att det som jag undervisar efter det är väldigt mycket så att vi börjar med öppna koncept. Och jag vill att de öppna koncepten byggs i modell, och det beror på två orsaker. För det första att undvika att man går för mycket efter förebilder, redan byggd eller magasinens arkitektur, så därför gäller det att börja i sig själv. Och då är det viktigt att studenterna i en representation av en form börjar göra designen istället för bara en analys så förpliktigar man sig. Så därför vill jag se en konceptmodell.

Så den frågan är jätteviktig. Den andra frågan som är viktig det är ju att det är en modell som man kan bearbeta, man kan trycka på den och den reagerar. Kanske blir man förvånad. Den kan någonting, den har en egenskap. Och den andra egenskapen modellen har är att du kan lyfta upp den framför ögat och titta in och föreställa dig att du var där. Så du kan inte lura dig själv som du ofta kan göra i ritningar där du går vilse i din egen design. För om den är gjort i papp och lim så är en pappskiva en vägg eller golv eller tak, eller vad som helst vad du nu väljer, men det är någonting. På något sätt föreställer du dig rummet i alla fall. Men det är också möjligt att det är en imaginär linje, som är icke materiell, och så får vi den diskussionen. Och det kallar jag konceptmodeller. Och så brukar jag gå över till det jag kallar skissmodeller, och då börjar de olika materiella delarna att vara mer tydliga. Då är det plötsligt så att gör jag någonting i modellen så är det materiellt. Då går det inte längre att säga att "det är en visuell linje" eller så. Jag vill också ha en större precision av skalförhållandet, så det är en modell i ett till tjugo eller ett till tvåhundra eller något sådant där, det ska man veta så vi kan föreställa oss mer precist hur det är.

Och det betyder också att om du trycker på den, då kan du nästan börja se om något är en balk och om det är realistiskt att ha en balk på det avståndet eller ska vi kanske tänka på något annat. Så vi kan dimensionera också konstruktivt. Vi kan diskutera avstånd, bygger man ett auditorium som är tvåhundra meter långt så är det kanske inte naturlig akustik vi kan arbeta med här utan vi ska ha en förstärkare. Men är det trettio meter, då kan vi kanske klara det på det sättet om vi är lite smarta. Om det är tio meter så behöver vi knappt rummet till att hjälpa oss, då kan vi ha ett direkt samtal om vi bara höjer rösten. Har vi tre eller två meter då kan vi bara sitta som här, över bordet, behöver knappt någonting, vi kan sitta var vi vill.

Så skalan, storleken spelar en jätteroll, och den kommer aktivt in i skissmodellen, alltså den andra fasen. Och så nästa fas kallar jag presentationsfasen och den handlar om hur arkitektur kommunicerar. Kommunikationen är jätteviktig, och ett projekt är inte ett hus, jag tycker att många här på skolan blandar ihop arkitekturprojektet med det byggda, och det är det inte. Typiskt för de projekten vi gör, i den professionella världen så representerar de kanske det första [förslaget] som arkitekten har till klienten. Och sedan börjar samarbetet på allvar. Detta är utgångspunkten, detta speglar en intention, det är det jag vill. Och sedan börjar kompromissandet. Och om man kan etablera en god grund, komma överens om utgångspunkten, då går alla kompromisser åt rätt håll, och så blir det ett bra projekt. Men om man inte fattar intentionen i projektet så går alla kompromisser emot varandra, då blir det öppet krig, det kan bli ett helvete och ingen vill ta ansvar för projektet till slut. För det blir inte som någon hade tänkt sig och ingen känner igen sig i projektet. Så därför är kommunikationen alfa och omega i detta här. Och det är de tre stegen jag brukar köra väldigt slaviskt, man kan säga kanske lite överdrivet på det sättet men sen hoppas jag att i själva undervisningsformen så visar jag ändå öppenhet och jag ger alltid möjlighet att bryta formatet. Men jag tror att de är ganska bra steg, de fungerar bra i mina undervisningssammanhang.

Samtidigt så fungerar jag också som chefskonsult för Nyréns, och hjälper dem att utveckla sig, och jag använder det samma, alltså på ett professionellt kontor för att få dem att bli bättre. Och det fungerar väldigt bra också i professionella sammanhang.

Men det är en metod av många?

Det är den som fungerar bra för mig i de sammanhang jag är, men det är klart. Det är därför jag säger till mina exjobbare, nu ska de upp, nu blir de mina kollegor, och då får de hitta det som fungerar bra för dem. Poängen är att du är medveten om att du har en metod, och den får inte vara tyst kunskap, den ska fram på bordet och man ska kunna reflektera över den och man ska vara medveten om den. Det får inte bara vara fingertoppskänsla eller intuition, man kan använda intuition men även användningen av intuition måste vara reflekterat också som metod. Jag säger till exempel typiskt när jag gör en sådan metod, en konceptmodell, "gör först, tänk sen". Eller jag menar, vi ställer modellen på bordet och så vänder vi på den och så tänker vi, och så ser vi hur den fungerar. Så det är klart, det börjar så, men det är också retoriskt för, herregud, man vet ju vad man vill i alla fall, det finns en intention, man har läst på sig, man har varit på platsen, man känner de material man gärna vill arbeta med. Så du är ju inte oinformerad när du gör din första modell, du har ju klätt på dig och förberett dig inför projektet. Men det har vi gjort på olika sätt.

Men grundläggande är att när vi går in och arbetar med själva formgivningen, efter att vi har förberett oss och så gör jag det alltså utifrån en modell som jag bygger. Och det är väldigt centralt för mig. Och jag måste säga att det är faktiskt så som alla de bra kontoren som jag känner till jobbar, om det så är Snöhätta, Herzog de Meuron, Fosters and partners, vem som helst. De jobbar på det sättet. De är tidiga ute och gör sina första designkoncept.

Det är intressant, just det här att göra först och tänka sedan. För så som matematikundervisningen är så känns det som att det ofta är så att man tänker väldigt mycket och inte gör innan man vet exakt hur man ska göra. Och det är det som jag tycker är skillnaden, att i matten är man så rädd att göra fel så man vågar inte göra något innan man vet exakt vad man ska göra.

Det är också väldigt många arkitekter som är rädda för att göra fel och som pratar om att “problemet kommer först”, istället för lusten att göra form, eller rum eller något sådant. Men jag är övertygad om att det finns väldigt många matematiker som älskar att ta utgångspunkt i paradoxer och i märkligheter och vad gör de då? När de ska försöka få grepp om en företeelse som de knappt förnimmer men vet att “här finns det någonting intressant.” Jag har ju sett hur tavlan växer när de står med kritan och laborerar över sammanhang och prövar “nej detta funkar inte, då gör vi så”. Med den lilla matematik jag kan, om jag ska förstå det, så försöker jag alltid på något sätt att göra ett geometriskt problem av det. Jag försöker alltså översätta till geometri så jag kan rita det eller bygga det, då kan jag plötsligt se sammanhang som jag annars inte kunde se i formlerna. Men jag vet andra matematiker som tänker annorlunda är mig, de ser det hela i sin formel. Vi är olika, kanske är det därför jag är arkitekt. Jag behöver översätta matematiken till geometri för att förstå den.

Det var så jag lärde mig differentialekvationer minns jag, i gymnasiet, det var då jag började göra geometri av dem och inte bara löste dem som abstrakta formler. När jag gjorde kurvor och satte minimum och maximum och upptäckte “Hur ser det ut när den är icke differentiabel och vad händer i spetsarna”. Och så började jag förstå det.

Vi har ju pratat en del om problemlösningsprocessen men om vi nu kommer in på det här med kreativitet. Du sa att du inte vill prata så mycket om kreativitet och arkitektur men en tanke jag har haft är att problemlösning måste innehålla något mått av kreativitet. För man måste komma på ett sätt att lösa problemet.

Jo men det är ordet och inte sättet [jag inte gillar]. Det är klart att varenda gång du gör något nytt, varenda gång du kombinerar två saker på ett icke tidigare gjort sätt, vill du kalla det kreativitet så är det kreativitet. Men på något sätt så tycker jag att alla människor är kreativa. Jag har ingenting emot ordet i sig men jag har någonting emot att man kopplar särskilt arkitektyrket till kreativitet. Alla, om du är bagare, murare, om du är dagispedagog, vad som helst så har vi kreativitet annars skulle vi inte överleva. Så ordet är nästan innehållstomt i det sammanhanget och därför finns det ingen mening med att säga det. Så det är bara det, jag vill inte ge olika yrken monopol på begreppet. Jag vill hellre säga att om jag ska använda begreppet rätt så är det en egenskap hos någon människa framför andra, mer eller mindre. Och du kan vara en kreativ dagispedagog, en kreativ bagare och du kan vara en tråkig dagispedagog och en tråkig bagare som bara upprepar vad andra har sagt. Och det gäller också arkitekter och matematiker.

Jag känner mig nöjd nu, jag tycker att vi har fått med det mesta.

Jag vill bara säga när det gäller matematik, för mig så är matematiken ett universellt språk. Och jag tycker att arkitekter kan alldeles för lite matematik och jag är väldigt, väldigt glad över att arkitektur och teknikstudenterna är väldigt starka i matematik. Och det kan man se, att det är otroligt värdefullt, och jag skulle gärna stärka matematikundervisningen också på arkitektur. Jag tror att det är viktigt [...] det handlar mest om sättet man strukturerar det man ser omkring sig och försöker att sammanfatta det i ett enkelt, kort och precist och inte minst vackert språk. Det finns en otrolig skönhet i matematik, och jag tror att när vi ser många av de stora förståelserna för saker och ting så kommer de fram ur ett matematiskt mönster där det kanske finns en asymmetri som retas och som plötsligt visar sig vara det allra viktigaste. Maxwells fyra formler är ju lite intressant där han fick fram en asymmetri, en konstant som ledde fram till Hertz förståelse av elektromagnetism. Det är ju jätteintressant. Och i alla stora vetenskapliga genombrott de senaste 130-200 åren har det ofta varit en matematisk beskrivning som i sig själv varit ett mönster och det mönstret har fångat vår uppmärksamhet genom asymmetri, genom en märklighet, genom en bristande logik som riktade vår uppmärksamhet på det. Och den uppmärksamheten skapade en lust att knäcka nöten och det var den som skapade genombrottet. Så man kan säga att skönheten i formeln gav oss, alla människor, inklusive personen själv som utvecklade den, ett fokus på ämnet. Om det sen var personen själv som skrev formeln som löste det eller om det kom två eller tre generationer efter henne eller honom, det vet vi inte, men det var jätteviktigt för fokuset. Så utan skönheten kunde vi inte heller fokusera på den problemställningen, och det tycker jag är riktigt spännande.

Du får gärna skriva med nyfikenhet på de plusorden, det tror jag är jätteviktigt. Sofie Germain känner du till henne? En fransk matematiker. Hon var aktiv ungefär under första hälften av artonhundratalet och hon var jätteinspirerad av Chladni, hans klangfigurer. Du har en tung metalskiva och får den att vibrera, det kan du göra genom att ta en stråke från en fiol och drar den på kanten. Så börjar den vibrera och ger ett ljud ifrån sig också precis som strängen gör, fast det är en platta. Om du lägger lite fint pulver på, typiskt svampsporer som är jättesmå, och den vibrerar så samlar sig alla sporerna i punkterna som inte hoppar, som inte gungar upp och ned. Medan, över allt där det gungar upp och ner, där kastas dammet bort kan man säga. Så dammet samlar sig i alla knutpunkterna. Och knutpunkterna bildar ett mönter, och olika frekvenser ger olika mönster.

Och det finns några skift mellan mönstren … precis som om du svänger en linje så kan du svänga den upp och ner som ett hopprep men du kan också svänga så att du har en knytpunkt i mitten, du kan göra två knytpunkter och den gungar mer beroende på hur snabbt du gör. Det vill säga första, andra eller tredje ordningens vibrationer eller svängningar kan du skapa på det sättet. Och mer komplex form är den när den är tvådimensionell. Hon gjorde sådana undersökningar och använde det till att utveckla en teori för skiv- eller plattkonstruktioner. Alltså en matematisk beskrivning av byggnadskunstruktioner. Och franska akademin hade gjort en tävling där man skulle göra en teori för sådana plattor eller skivor. Och hon löste det bäst men hon fick aldrig erkännandet eftersom hon var kvinna. Så hon insisterade och efter många, många år, som en gammal kvinna, så fick hon till slut sitt erkännande. Men man kan säga att hennes utgångspunkt var lusten, skönheten i klangfigurerna. Under romantiken har vi den danska vetenskapsmannen [?] som var han som beskrev sammanhangen mellan elektricitet och magnitism som den första. När han fick sin officiella målning, där han visar sig med orden och alla sina attributer så håller han en sådan Chladnis klangfigur i sin hand, och för honom så var det ett bevis på att gud fanns i naturen eftersom det var en skönehet ett mönster som dök upp. Vi andra är ju inte romantiker på samma sätt men vi ser skönheten. Och det är den som fångar vår uppmärksamhet.

Interview with Dag Wedelin
2015-05-20

Hur skulle du definiera ordet problemlösning?

Ett sätt att se det, som jag knyckt från Schoenfeld, vilket är ett klassiskt sätt att se på problemlösning, det är att: en problemlösningssituation hamnar man i när man inte har någon färdig metod för hur man ska lösa ett problem. Så att om du befinner dig i en situation där du inte vet, där du har något slags mål som du vill uppnå, men när du inte vet hur du ska göra, då är du i en problemlösningssituation. Så kan man väl säga. Men i vilket fall som helst så är en väsentlig del i det här, på ett eller annat sätt, avsaknaden av algoritm. Att det är inte så att du kan nå ditt mål genom att bara följa ett antal mekaniska steg. Utan, stegen kanske finns men man har ingen aning vilka de är och så vidare. Så det är väl problemlösning för mig. Och jag vill också säga att det upplever jag att det är en väldigt vanlig situation. Detta är också något som diskuteras "men är det inte så att människor mest gör det som de är vana att göra? Är inte det en väldigt udda grej det här att man ställs inför problem som man inte vet hur man ska hantera?" Men jag menar att det inte är det, därför att även om 90 eller 95% av vad man gör är sådant som man vet så är det alltid så att de där fem, tio procenten, de måste också finnas där för att det ska bli komplett.

Om man tar en människa så kan man säga det att "sköldkörteln det är ju bara en ganska liten del av människan så den är ju inte så väsentlig. För det mesta är ju ändå inte sköldkörteln" och så vidare. Men så kan man ju inte resonera för man fungerar ju inte utan den. Och då menar jag det att i varierande utsträckning som forskare och som ingenjör då hamnar jag väldigt ofta i situationer då jag inte vet hur jag ska göra och som lärare också ibland men inte lika mycket. Och det är klart att om man har ett väldigt rutinmässigt jobb så kanske man aldrig gör det. Så det varierar naturligtvis från person till person hur ofta man hamnar i sådana situationer. Och jag kan förstå också att då skiljer sig synen åt på vad matematik är. Om allt man gör är att räkna ut summan i kassan, eller något sådant där, då är ju matematik bara något som är en algoritm. Men om man ska hitta på att lösa problem med matematiska metoder då är det kanske så att man huvudsakligen ser det som problemlösning. Men det som karakteriserar problemlösning egentligen, vare sig man är van vid det eller ej, det är att man måste söka sig fram, man måste undersöka, man måste utforska, det är hela tiden en ständig utforskning.

Och utforskning då, för att glida över till kreativitet, det är alltså också någonting där man ständigt måste … man måste hitta på idéer hela tiden, frågor till exempel för vad man ska fråga för att kunna göra en utforskning. För en utforskning börjar ofta men en liten fråga, så att säga, "nu ska jag ta reda på hur det är med det här". Eller det kan börja med att man hittar på något, en enkel modell, en preliminär design eller någonting sådant där, och då är det ett kreativt steg från ingenting till något, som ingen kan beskriva vad det är. Det är någonting som bara dyker upp i huvudet och det kan man ju då beskriva som kreativitet, att skapa något från inget.

Och det är då ett viktigt element i problemlösning, det är inte nödvändigtvis samma sak som problemlösning för problemlösning kan också vara att man på ett systematiskt och rutinmässigt sätt undersöker saker i syfte att uppnå en ökad förståelse. Men det finns ett kreativt element i detta också som kommer till ibland och som också är nödvändigt.

Då kommer vi in på vad som kännetecknar en bra problemlösningsprocess. Du nämnde att det kan vara ganska olika då? Man kan ha rutinmässiga frågor som man ställer sig…

Tja, en bra problemlösningsprocess… Då skulle jag säga så här att. Det är ju så att, beroende på vad man själv har för kunskaper och beroende på hur svåra problemen är, så kan det ibland vara så att inslaget av färdiga algoritmer dominerar, eller det kan också vara så att inslaget av att hitta på nytt dominerar. Det varierar från situation till situation, från person till person och från yrke till yrke och så vidare. Men en bra problemlösningsprocess, om man nu har ett problem som man inte vet … Några grundpunkter är ju då att, framför allt att förståelsen av problemet är central. Därför att man kan nästan se problemlösningsprocessen som att man undersöker, utforskar tills man uppnår en så hög grad av förståelse att man faktiskt kan komma ganska nära lösningen på problemet bara genom att förstå problemet. Så att det handlar inte om att, jag talar inte om bara den förståelsen på en nominell, grundläggande nivå att man säger att "ja men nu förstår jag frågan". Okej, men vad innebär problemet, man kan skapa ständigt ökad förståelse kring någonting och koppla ihop med annat tills man på så sätt kan komma nära lösningen eller en idé om lösningen.

Så det är väldigt viktigt. Och en annan sak som kännetecknar en bra problemlösningsprocess, det är att man inte låser sig vid en idé. Att man måste vara öppen för andra lösningssätt, man kan behöva backa. "Jag kanske inte förstog problemet tillräckligt väl, jag går tillbaka." Att dela upp det så mycket som möjligt i små steg där man har en idé om vad de här stegen är, det kan man behöva planera om hela tiden men att man ändå försöker dela upp. Det är typiska saker som ingår i en bra problemlösningsprocess, en annan är att inte bara ta mallar och försöka passa mallar, det är den sämsta typen av problemlösningsprocess: "här har jag tre metoder som jag inte riktigt förstår, eller möjligen så kan jag utföra dem. Och nu har jag ett problem, vilken av de här tre metoderna passar bäst på det här problemet?" Så försöker man pressa metoden på problemet även om det här problemet kanske egentligen behöver lösas på ett fjärde sätt.

Det är inte en bra problemlösningsprocess. Det är bra att kunna ha annan kunskap runt omkring. I form av olika färdiga metoder och kunskaper som man har lärt sig men jag tycker att vilket problem man än angriper så är det min filosofi att man ska angripa det från grunden. Som om man inte visste någonting, som om man inte hade några förkunskaper, att man ska ha en attityd att jag börjar jobba från scratch. Och sedan, alla de kunskaper jag har, som jag oundvikligen har samlat på mig, de använder jag som acceleration för att accelerera min egen problemlösning, men att jag ändå, så att säga, bygger från grunden. Och det är inte så att jag hoppar över det steget och bara försöker applicera en färdig metod. Så det är några saker som jag kommer att tänka på. Det kan säkert sägas mycket mer om detta.

När det gäller design, för du var ju intresserad av design också … , då är det väldigt naturligt med ett iterativt arbetssätt. Att man gör något enkelt först och så undersöker man hur det blev och utifrån det så kan man kanske göra någonting som är lite bättre. Och så jobbar man så i steg, så gör ingenjören, så gör säkert arkitekten, och så gör också matematikern som försöker hitta på ett bevis eller konstruera ett begrepp som intuitionen säger kanske finns där men som man inte riktigt har fått till. Då gör man ett försök och så ser man om det motsvarar den diffusa idéen av vad man vill åstadkomma. Om det inte gör det så gör man ett iterativt försök till, man försöker många gånger där man hela tiden lär i sin process.

Och det där, just det där steget i den här iterativa processen från att man har en idé om vad för slags objekt man skulle vilja skapa till att komma på ett förslag på vad det skulle kunna vara. Det är ett kreativt steg. Så att den här iterativa processen involverar hela tiden ett regelbundet kreativt steg där man skapar någonting och sen finns det därefter ett mer analytiskt steg där man tar reda på "det som jag har skapat, vad har det nu för egenskaper egentligen?" … Detta beror på att man alltså måste jobba baklänges, för det finns ingen algoritm som talar om hur du kan räkna dig från dina önskemål om hur det här objektet ska se ut till dess faktiska konstruktion. Så därför gör du ett steg ut i det blå för att skapa det och sedan får du ta reda på egenskaper. Så du är tvungen att jobba åt fel håll där du har ett magiskt steg där hela tiden som vi kallar för kreativitet. Så ser jag på det.

Det känner jag igen tydligt från arkitetkturutbildningen det här att snabbt göra en modell som man kan analysera för man behöver något som man kan diskutera.

Och själva analysen, den kan du möjligen sätta upp en lista för hur den går till. Men själva det skapande steget är väldigt svårt att tala om hur det går till. Och det är därför som vi kallar det för kreativt.

Hur arbetar du själv med problemlösning?

Framför allt så är det tycker jag att man jobbar med det väldigt aktivt. Det är inte någonting där man sitter ner och gör ingenting och väntar på att någonting ska komma till en. Utan det är att man hela tiden utforskar möjligheter, att man är aktiv i den här iterativa cykeln. "Pröva något, lär jag mig någonting av det? Eller fungerar det här? Vad kan jag göra nu? Eller nu fattar jag inte ens vilken fråga det är jag håller på att lösa. Okej då måste jag försöka precisera frågan." Ett ständigt aktivt kämpande med att hitta dörrar som vill öppna sig.

Vi har nämnt att problemlösning alltid innehåller en kreativ del, men om man ser på matematiken som ämne, anser du att det är kreativt?

Jag menar det att matematiken i sig, som en värld men matematiska begrepp, den är, att utforska den är precis lika kreativt som att utforska vilket område som helst. Därför att det handlar om att man skall skapa, man kan skapa matematiska begrepp, och så kan man utforska deras egenskaper. Så det är att man är upptäcksresande i matematikens värld. Helt enkelt. Och på vägen, att man utforskar är en sak men det är kanske inte nödvändigtvis det samma som att det är kreativt, men det är kreativt därför att på vägen så måste man hela tiden hitta på saker. Man måste hitta på nya begrepp, man måste hitta på olika typer av förklaringar, alltså egentligen bevis, för varför saker och ting är på ett visst sätt. Det är alltså en skapandeprocess som då är ungefär som den här itterativa processen, som påminner om den som ingenjören eller arkitekten har, fast det som man skapar det är definitioner, det som man skapar är matematiska resonemang.

Det enda är att det äger rum i idévärlden och det är inte fyskiska föremål som vi skapar utan det är logiska objekt. Men arbetssättet är det samma, och anledningen till att skolmatematiken inte förefaller vara kreativ, det finns ju flera anledningar som delvis gäller all utbildning, eller mycket utbildning, nämligen det att man är ivrig att berätta om färdiga resultat. Så istället för att låta eleverna eller studenterna skapa kunskap så är det så att man talar om vad andra har skapat för kunskap. Och det är klart att det är ju ingen kreativitet i det. Och sedan i matematiken, särskilt i skolans matematik, så har den gått förmodligen länge än i något annat ämne för att, i tillexempel svenskan i skolan då är det så att då ska man skriva uppsats, och det får ju anses vara kreativt, man ska skapa någonting, men det gör man inte i matematiken. I matematiken lär man sig bara metod på metod på metod. Och man gör det dessutom på ett väldigt repititivt sätt som gör att man placerar sig nästan i en yttersta motpol i förhållande till den kreativa attityden. Medan annan undervisning mer befinner sig någonstans mitt emellan, om än ofta då med ett ganska stort kunskapsinslag, att man berättar om vad andra har kommit fram till.

Det som du nämnde innan, när personer räknar ut växeln i kassan är kanske inte så kreativt? Men det kanske inte ens är matematik?

Det är väldigt vanligt att de som sysslar med matematikpedagogik, matematiklärare eller de som sysslar med vad man ska lära ut i matematik i skolan, på något sätt, när de ska vara djupt filosofiska, så grubblar de över frågan "vad är matematik egentligen?". Men jag menar den frågan tycker jag är fel ställd. Därför det är så att den fråga som vi framför allt ska ställa oss är "vad tycker vi att våra barn ska lära sig?". Och då kan vi komma fram till att de ska lära sig matematik, vi kan också komma fram till att de ska lära sig något annat. Så att det är den frågan som ska vara ledande för skolans verksamhet, inte att man traditionellt har ett ämne som heter matematik och sen så ställer man sig den djupa frågan vad matematik är. Det kanske inte är det som är målet för skolutbildningen?

Att då gå till matematikhuset här borta på Chalmers och fråga "vad är egentligen matematik?", man får säkert väldigt intressanta svar, men det är inte säkert att det är någon vägledning alls i förhållande till vad man bör lära ut till barnen. Även om jag tror att kommer man ifrån det där mest repititiva så är det väl bra i och för sig. Men det som jag skulle vilja säga då det är att jag tror att för skolans del så ska man fokusera på något som jag kallar för matematiskt tänkande snarare än matematik. För matematik är ett akademiskt ämne och det finns alltid en massa människor som kan ha starka åsikter om vad matematik är och vad det inte är. Men då menar jag att matematiskt tänkande är ett begrepp som inte är riktigt lika begränsande, det används inte riktigt lika mycket och man kan definiera det lite friare. Jag menar det att alla former av tänkande som har matematiska inslag, av det ena eller andra slaget, inklusive den som räknar ihop summan av priser, ägnar sig åt något slags matematisk aktivitet eller kan sägas deltaga i ett matematiskt tänkande av något slag. Så då ingår det, det är ett inkluderande begrepp som jag menar är vidare än det svaret som man får om man bara frågar vad matematik är.

Det är väl kanske ett mer ideologiskt ställningstagande. Det som jag gärna vill föra fram då det är idéen om matematiskt tänkande som ett inkluderande begrepp. Snarare än att ställa mig just frågan vad matematik är.

Så, är matematik ett kreativt ämne?

Ja, på samma sätt som alla andra ämnen. Men inga ämnen är kreativa om man bara ska lära sig saker som andra redan har kommit fram till. Och då menar jag det att den metoden att lära sig hantera världen genom att lära sig alla färdiga svar som mänskligheten har kommit fram till hittils, det är en fundamentalt otillräcklig metod för att hantera framtiden. Därför att det finns alltid en så stor variation i det som kommer sen. Det kommer inte vara exakt ett av de här tusen fallen som man har lärt sig utantill, utan det kommer vara någon variant av det. Och därför så kan man inte bara ha den algoritmen.

Skiljer sig matemateisk tänkande från logiskt tänkande eller är det besläktat med det?

Jag tror att matematiskt tänkande är lite vidare än så, jag menar matematiskt tänkande är ju till exempel också det att man är intresserad av att mäta saker i världen: "hur många grader är det?", "vad är det för temperatur idag?", "hur många meter per sekund blåser det?". Detta är ju utslag av matematiskt tänkande. Det är ju inte ologiskt men med logik menar man ju ofta det att man skall kunna hålla reda på ett logiskt strikt resonemang, "om A gäller och icke B, vad händer då?". Så jag tror att matematiskt tänkande är vidare än så, det inbegriper att man tänker på världen kvantitativt, det innebär att man förenklar till enkla matematiska begrepp, det innebär det här kreativa utforskandet, det är en del av det matematiska tänkandet också. Så att matematisk slutledning är väl det som ligger närmast logiskt tänkande men jag tror att logiskt tänkande fortfarande är bara en del … För ett matematiskt tänkande är ju till exempel det att om vi skriver in en fyrkant i en cirkel så måste fyrkantens yta vara mindre än cirkelns yta.

Detta kan man ju säga då är logiskt tänkande men samtidigt så bygger det på vår visuella geometriska förståelse av något. Så det är ju inte logik i den strikta bemärkelsen att det handlar om "och" och "eller" och "icke" och så. Däremot så är det ju något slags sund slutledning eftersom den är riktig men vi ser det, vi kan se bilden framför oss, fyrkanten måste vara mindre än cirkeln och därför så måste ytan på fyrkanten vara mindre än cirkeln för det finns bitar över annars. Det kan vi se framför oss och det är ett exempel på matematisk slutledning där jag använder mina mänskliga förmågor. Det är möjligt att många människor skulle anse att detta är logiskt tänkande, fast det kanske bara är jag som reserverar logiskt tänkande för något som är mer specifikt än så. Men det kanske bara är för att jag är en produkt av mitt ämne. Det kan hända att på ett mer allmänt plan så, det som jag kallar för matematisk slutledning, det skulle andra säga är logiskt tänkande.

Interview with Éva Fülöp

2015-06-17

Jag skriver om problemlösning och kreativitet kan man säga. Min bakgrund är att jag har läst tre år på Arkitektur och teknik. Det arbetssättet man har inom arkitekturen, man kan ju kalla det problemlösning när man skall rita en byggnad, då har man ett väldigt kreativt ingångssätt till hur man tar sig an problemet som jag inte känner igen från matematiken. Problemlösningen där var mycket mer att lära sig en metod och träna på att göra den. Nu läser jag om matematikpedagogik och kreativitet, som det finns mycket skrivet om, och jämför det med mina egna erfarenheter.

Men du har inte läst någon matematikkurs om problemlösning till exempel? Eller du har aldrig deltagit i en undervisning där problemlösninga var en del av undervisningen inom matematik under din uppväxt, alltså även i småskolan menar jag?

Nej, men det kallades ju problem i läroböckerna och så där men när jag tänker tillbaka på det så tänker jag att det mest var textuppgifter och sådär som kallades för problem.

Okej. Eftersom jag just forskar om undervisning och problemlösningsstrategier - jag har grävt in mig lite mer i vad som menas med ett problem. För jag ser att, där är problemet för dig.

Precis. Min första fråga som jag skrivit ner [inför intervjun] är vad är egentligen ett problem och vad är problemlösning.

Inom matematik skiljer sig två begrepp, problem och uppgift. Och skillnaden mellan de två begreppen är att en uppgift blir ett problem om den eleven inte känner igen en metod eller algoritm för att lösa det. Så det är relativt till eleven, jag kan inte säga att "den här uppgiften är ett problem" utan det är eleven som ska uppleva att det är ett problem. Schoenfeld som forskar ganska mycket om just problem, säger att det finns två faktorer egentligen. En att man inte känner igen någon metod och algoritm, för då behöver du inte tänka utan du tar fram den som ett verktyg och använder det och koncentrerar dig på att få fram svaret. Men det finns också en annan faktor, att eleven eller den personen som får uppgiften måste känna sig engagerad, intresserad av att lösa det. Annars blir det inte ett problem heller. Så för mig är allt uppgifter men vissa blir problem beroende av vem som får frågan och självklart påverkar hur man ställer frågan också om det blir ett problem eller bara en uppgift.

Så egentligen om man tittar på nationella prov, där vi betygsätter med olika förmågor, bland annat problemlösningsförmåga, och tittar på vilken typ av uppgifter som ger problemlösningspoäng, då är det inte bara textuppgifter. Just på 80- och 90-talet kanske folk associerade till mer vardagsproblem när man pratade om problem, men även en abstrakt matematisk uppgift kan bli ett problem när du inte vet hur du ska börja, när du inte känner igen en algoritm eller metod för att lösa det, när du måste tänka till. Så här kommer kreativiteten in och, enligt mig, strategitänkandet. Så, enligt mig, när du får ett problem, alltså inte en uppgift, innan du kan välja en metod och algoritm, då måste du göra något innan dess. Och då tycker jag att då kommer strategitänkandet in, du måste göra en strategi. Jag fokuserar på vad ska jag lösa, vad fick jag för problem. Men det är ganska löst, det är mer på tänkandet nivå och inte på görandets nivå. Efter strategin följer sen metodvalet, sen algoritmvalet. Algoritmen är bara steg för steg, du vet precis vad du ska göra för att få rätt svar.

Så, enligt mig, när du får ett problem, då måste du gå genom de tre stegen: strategigörandet, metodval sen algoritmvalet. Om det är en uppgift och inte ett problem så behöver du inte det första steget. Då väljer du en metod och en algoritm så löser du uppgiften. Så kreativiteten kommer egentligen in i det första steget, enligt mig. Så när du får en uppgift behöver du inte vara så jättekreativ för då vet du precis vad du ska göra. Men när du får ett problem har du först olika möjligheter, "hur ska jag börja?", "vad ska jag göra?" så då är det i den fasen du skapar något nytt. Och det är kreativiteten egentligen, nyskapandet, enligt många som forskar om det och jag tycker själv också det.

Och då behöver man inte skapa någonting helt helt nytt utan det räcker att eleven upplever att det är nyskapande för sig själv. Då är man kreativ. Man pratar om två olika kreativiteter, i början när man pratade om kreativitet sa man att "det måste vara helt nytt, alltså något som är nytt för hela välden" men egentligen räcker det att den personer som gör problemet upplever att för den personen är det nytt, då är man kreativ. Så tänker jag. Så kopplar jag ihop problemlösning med kreativitet. Så egentligen, varje gång när du löser ett problem, inte en uppgift, då måste du vara kreativ.

Forskar du på vad som är problem mest eller också på vad det är som specifikt gör att en uppgift blir ett problem?

Det är inte det jag är först och främst intresserad av. Men jag närmar mig det mer och mer nu i slutändan. [...] Min första fråga var att [...] mitt problem var, som lärare, att vad gör man när en elev fick ett problem och tänkte "vi har inte lärt oss detta", "jag kan inte svaret", "jag ger upp". Jag var då intresserad av frågan kan man undervisa, lära, eleverna på något sätt att inte göra detta utan börja tänka på vad de ska göra när de inte känner igen uppgiften. Vad görs de första fem, tio minuterna när du får ett problem, alltså en uppgift som du inte känner igen och inte vet hur du ska lösa. Och då började jag läsa om strategitänkande.

När man får ett problem inom andra områden så säger man ofta att vi har en strategi för att lösa det. Så inom militärteorin, inom spelteorin, inom managementteorin, på alla områden där det förekommer problemlösning upptäckte jag att de pratar om strategi, taktik och [...]. Det finns de här tre stegen. Då tänkte jag "vad finns då inom matematikproblemlösningen?", "kanske finns samma modell?". Och då upptäckte jag att litteraturen blandar strategi- och metodbegreppet, skiljer inte på dessa. Så jag började läsa och skriva om detta, att det är olika steg vi pratar om och ville lyfta fram de tre stegen i problemlösningssituationer även inom matematik. Och försöker beskriva vad menar jag med strategi. För det är väldigt svårt att ge en definition för det.

Det som var intressant för mig var om det går att undervisa strategitänkande och om strategier. Så jag gjorde ett designexperiment i ett klassrum. Så jag designade några mattelektioner med målet att undervisa om strategier. Men för mig var det viktigt att göra det inom ett vanligt klassrum inom en vanlig kurs. För man läser ganska mycket om att man väljer ut några elever eller man ger en kurs bredvid och undervisar problemlösning och strategier. Men jag ville testa om det gick att göra i ett vanligt klassrum. Jag höll själv i klassen och undervisade i ett år, första matematikkursen på gymnasienivå med målet att vi pratade väldigt mycket om att närma sig problem på olika sätt och vilka strategier [man kan använda], det finns några kända strategier. Pratade lite om det och medvetandegjorde detta att du alltid måste göra ett val när du får ett problem.

Att tänka att det inte är inte rätt eller fel svar eller val just i den fasen, utan lära eleverna att det handlar om att diskutera. Och inse att detta leder så småningom leder till rätt metod och algoritm, och till slut till rätt svar, eller icke. Så att de inte blir rädda för byta strategi om det behövs, just för att komma ifrån den undervisningen som jag pratade om i början att matematik handlar om att göra uppgifter och få rätt svar. Att inte koncentrera sig på svaren utan koncentrera sig på sina val, kunna motivera, varför går jag den vägen och inte den andra. Det är vad jag har jobbat med och skriver om just nu, resultaten av de här lektionerna.

Det känns som en väldigt viktig och närvarande del. Jag jobbar nere på sommarmatten nu och läser ju till lärare och en fråga som jag får ofta är "hur ska jag veta att jag ska göra så?". Om man säger att du ska använda den här metoden, "ja, men hur ska jag veta det?". Men det är ju det som är uppgiften.

Ja, precis. Och det är det som läraren ofta hoppar över i klassrummet också. För läraren förbereder lektionen, går fram till tavlan, skriver upp en uppgift att "så ska ni tänka" och låter aldrig eleverna uppleva frågan som ett problem. Och då när man har prov, testsituationer, finns ingen där att hoppa över just det första steget och säga till dig hur du ska göra eller hur du ska tänka. Så i skolan undervisar vi väldigt mycket metod och algoritm och icke strategier. Just det här "hur kom jag på att jag ska gå den vägen och inte någon annan". Och det kan man lära sig bara genom träning det också, helt enkelt genom att låta eleverna uppleva, analysera uppgiften. Det finns de här välkända strategierna, organisera data, hitta mönster, tänka baklänges, [...] speciellt med "visa att"-uppgifter, vart vill jag kanske kan leda mig till hur jag ska börja. Prata om de här kända strategierna, det finns många andra också. Om man visar detta för eleverna kanske det hjälper dem genom det första steget innan man kommer till metod och algoritm. Innan problemet blir en uppgift, då har du passerat den kreativa delen, resten är en görande del inte tänkande.

Hur togs det emot av eleverna?

De första två veckorna var ganska jobbiga. Eftersom de flesta av eleverna, mer än nittio procent av eleverna i den klassen, tidigare har haft matteundervisning som såg ut så att man satt ensam i tystnad och räknade. Och nu plötsligt behövde man prata och uttrycka sina tankar och motivera "varför tänker jag så". Jag har till och med läst om sådana tankar att någon gav en idé och någon annan behöver sen förklara hur den andra personen har tänkt. Vi jobbade väldigt mycket i smågrupper just för att komma igång med det här att förklara, och medvetandegöra att den andra kanske tänker på ett annat sätt och börjar på ett annat sätt men ändå löser uppgiften eller problemet. Jag försökte välja ut antingen sådana [...] för att göra uppgifter till problem kan man antingen ha flera olika lösningssätt och be eleverna hitta dessa. Jag valde inte väldigt komplicerade uppgifter, utan till och med väldigt lätta var de. Meningen var att inte fastna på den tekniska biten utan visa att det går att närma sig en uppgift på olika sätt.

I början jobbade jag bara med att göra om uppgifterna i boken till problem genom att ställa frågan på ett annat sätt. Eleverna upplevde en frustration, speciellt de svaga eleverna som var vana vid att sitta längs bak och vara tysta och göra kanske en, två uppgifter per lektion och gå hem. Nu plötsligt blev de synliga och de kunde inte slappna av på mattelektionen. De duktiga var frustrerade för de tyckte att "vi lär oss ingenting". Jag har lärt mig väldigt mycket av det så nästa gång när jag kör kursen kanske jag gör olika förändringar. Föräldrarna var också frustrerade på grund av att jag inte använde boken så mycket på lektionerna utan det blev mer som läxa att göra de här uppgifterna. Så den delen att välja metod och algoritm, som egentligen är ren träning av vad du har förstått på lektionen, eller borde vara.

Eleverna kände inte att de är kopplade till varandra. Det tog lång tid innan vi förstod varandra, vad vill vi få ut av det här. Men då gjorde jag så att jag hade två parallella klasser, eller inte jag utan två andra lärare, och vi har planerat ihop så vi gör samma material och eleverna kommer att skriva samma prov efter fyra veckor. Bara att jag hade min speciellt designade undervisning.

Använde de andra lärarna sin vanliga metod?

De andra lärarna undervisade som de brukade göra. En av dem testade faktiskt också ett nytt sätt att undervisa. Så det var verkligen en variation av alla typer av undervisning. Och efter det här provet så lugnade föräldrarna ner sig, för klassen klarade sig väldigt bra på provet. Och så småningom vande klassen sig vid det sättet att jobba. Så på slutet av läsåret hade vi kommit till att eleverna tävlade "jag har en lösning till, jag vill visa på tavlan!", så de kom fram och diskuterade och ville visa upp hur man kan tänka. Även när de gick hem fortsatte vissa att fundera kring vissa uppgifter och nästa dag kom de och sa "man skulle kunna göra så här också". Så det blev bra faktiskt, men det var en hel del frustration kring just det att de inte hade tillräckligt mycket tid att träna in, på lektionstid, det som vi läste om.

Så det var jag lite oroad för, hur kommer de att klara av den proceduriella delen. Så så småningom gav jag upp och insåg jag att vi behöver då och då en sådan lektion där de jobbar med uppgifter från boken. Alltså inte med problemlösning utan med uppgifter. Vanlig träning där de får ställa sina frågor, både till mig och till varandra. Det behöver man också.

Jag hade tre designprinciper när jag designade lektionerna. Då sa jag att antingen väljer jag en uppgift som kan lösas med olika strategier, eller så väljer jag en strategi och visar att olika uppgifter kan lösas med den, för jag ville visa att strategin kontra metod och algoritm är inte knuten till en del av matematiken utan samma strategi kan du använda inom geometri, algebra, aritmetik, och den tredje var att visa att vissa strategier är mer effektiva än de andra. Jag kan inte bara lösa en uppgift på flera olika sätt utan vi kan diskutera varför jag väljer den ena kontra den andra, varför är den effektivare? Effektiviteten i de här lösningsstrategierna.

I alla problemlösningssituationer har vi tidspress på oss så det är också ibland en faktor att lösa det på det effektivaste sättet. Så även den ska komma sen att inte välja att räkna ut någonting som tar väldigt lång tid om det kanske finns något sätt att para ihop, till exempel med talföljder så ser man ett mönster och snabbt får man svaret. Så det tänkte jag också är bra att medvetandegöra.

Nu tittade jag på nationella provens uppgifter, och tittade vilka uppgifter som blir problem. Jag kollar upp lite grand de uppgifter som de tycker ska ge problemlösningspoäng. Och självklart är det då viktigt med problemets definition, vet de att alla elever kommer att uppleva den uppgiften som ett problem? Självklart kommer uppgiften för vissa inte att vara ett problem eftersom de känner igen den och löser den.

För andra blir det ett problem. Just nu tittar jag [...] Mina elever har plockar fler problemlösningspoäng jämfört med kontrollgrupperna och nu undersöker jag om det är min undervisning som har påverkat dem. Är strategitänkandet viktigt ändå i de uppgifter som ger problemlösningspoäng och i så fall hur.

Har du undervisat under året, samtidigt som du doktorerar?

Jag har valt att undervisa på skolan, så mina tjugo procent undervisning är på gymnasiet, eftersom jag forskar om detta.