



# Modellering av avkastningen på svenska statsobligationsmarknaden

Kalibrering av Vasiceks modell med den generaliserade momentmetoden

*Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers tekniska högskola*

Daniel Boman

Frida Eriksson

Erika Salomonsson

Lisa Wallin



# Modellering av avkastningen på svenska statsobligationsmarknaden

Kalibrering av Vasiceks modell med den generaliserade momentmetoden

*Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik vid Chalmers tekniska högskola*

Frida Eriksson   Erika Salomonsson

*Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Industriell ekonomi vid Chalmers tekniska högskola*

Daniel Boman   Lisa Wallin

Handledare: Simone Calogero  
Examinator: Marina Axelson-Fisk   Maria Roginskaya

Institutionen för Matematiska vetenskaper  
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA  
GÖTEBORGS UNIVERSITET  
Göteborg, Sverige 2018



# Populärvetenskaplig presentation

## Vanlig metod förkastas för beräkning av värdet på finansiella produkter

Under våren 2018 har det genomförts en studie för att förutspå värdet av statsobligationer vid Chalmers tekniska högskola. Studien har gått ut på att undersöka en populär modell som kan användas för att beräkna värdet av finansiella produkter. Undersökningen genomfördes genom att beräkna värdet på statsobligationer och jämföra de beräknade värdena med motsvarande värden som riksbanken har listat på sin officiella hemsida. Just en statsobligation är en finansiell produkt som staten säljer för att finansiera sin upplåning på lång sikt. Statsobligationer kan i vissa fall även användas för att prissätta andra finansiella produkter. Gruppen som genomfört studien består av två studenter från civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik och två studenter från civilingenjörsprogrammet Industriell ekonomi med teknikinriktning mot finansiell matematik.

Det svenska ränteläget med negativa räntor skapar problem för vissa metoder som vanligtvis används för att göra värderingar av finansiella produkter. Det är också extra intressant att förutspå framtida avkastningar i en negativ ekonomi där negativa räntor kan resultera i negativa förväntningar på ekonomin. Samtidigt är det viktigt att ha positiv avkastning för långa kontrakt för att de ska säljas. Statsobligationer säljs ofta för en lång tid och avkastningen för upp till 20 år framåt har studerats.

Studien har genomförts genom att använda en kalibreringsmetod som etablerades av Lars Peter Hansen på 80-talet. Hansen blev tilldelad *Sveriges Riksbanks pris i ekonomisk vetenskap till Alfred Nobels minne* för sitt arbete med kalibreringsmetoden, vilken används för att ta fram parametrar till modeller som beskriver utvecklingen av räntor. Den modell som har undersökts i studien etablerades på 70-talet av Oldřich Vašíček. Modellen var den första av sitt slag och öppnade upp för det vi idag känner till som räntederivatmarknaden. Den har även varit föregångaren till många efterkommande populära räntemodeller. Modellen har fått mycket kritik för dess förmåga att teoretiskt kunna beräkna negativa räntor eftersom det länge varit ett ovanligt scenario för en ekonomi. I den aktuella studien har det däremot varit nödvändigt att använda just en modell som kan generera negativa räntor eftersom ränteläget i Sverige varit negativt under flera års tid.

Genom att verifiera en fungerande modell för att kunna förutspå rättvisa priser på finansiella produkter möjliggörs en mer komplett informationsbild vilket i sin tur kan leda till att mer välgrundade strategiska ekonomiska beslut kan tas. Det blir extra tydligt i avvikande ekonomiska scenarier hur viktigt det är att utvärdera de metoder som används för beräkningar då de kan ha inbyggda egenskaper som gör att de inte är tillämpbara i just det fallet.

Vid jämförelsen av värden som den valda metoden genererar och värden som riksbanken listar blir det tydligt att de är avvikande. Samtliga värden på de finansiella produkter som undersökts skiljer sig mycket, vilket tyder på att modellen med den valda kalibreringsmetoden inte är lämplig att använda på den svenska statsobligationsmarknaden. Trots att metodiken i studien är uppbyggd av väl etablerade metoder och modeller samt att den är vald för att passa för negativa räntor visar resultaten att den ändå inte är lämplig för att prissätta statsobligationer. Resultatet visar på att det är viktigt att göra noggranna undersökningar av matematiska metoder för varje ändamål och inte bara använda dem som färdiga koncept för att prissätta finansiella produkter. Ofta stödköps exempelvis statsobligationer av riksbanken för att försöka stimulera ekonomin, vilket ur ett samhällsperspektiv blir en av många anledningar till varför det är viktigt att ha trovärdiga analytiska metoder för att prissätta statsobligationerna.

## Sammanfattning

I denna rapport undersöks det om den generaliserade momentmetoden (GMM) är en lämplig metod för att skatta parametrar till Vasiceks modell. Studiens syfte är att se om Vasiceks modell även i praktiken kan ge en negativ avkastning och framförallt om de rådande negativa räntorna på den svenska statsobligationsmarknaden kan modelleras. Samtliga beräkningar och modellimplementeringar görs i programspråket MATLAB.

För att avgöra vilken eller vilka dataserier av statsskuldväxlar och STIBOR som är lämpligast att använda för att utföra studien görs  $\chi^2$ -test, p-värden beräknas och standardavvikelse för de skattade parametrarna tas fram. Utifrån informationen som fås vid testerna och beräkningarna konstateras att korttidsräntor av statsskuldväxlar och STIBOR med fem års historisk data har störst potential att ge bra resultat och används därför vid fortsatta studier. Genom att sätta in de skattade parametrarna i uttrycket för avkastningen från Vasiceks modell jämförs den teoretiskt erhållna avkastningen med den verkliga listade avkastningen. Den rättvisa swapräntan beräknas också med syftet att undersöka om de teoretiska resultaten överensstämmer med de verkliga. Parametrarna som skattas med GMM är förväntningsskeva, vilket innebär att de är mer eller mindre felaktiga. Tekniken med jackknife används för att eliminera en del av förväntningsskevhetsen och därmed få noggrannare och mer korrekta värden på parametrarna.

Undersökningen visar att den teoretiska avkastningen är ständigt negativ och minskar när löptiden ökar. Den teoretiska avkastningen följer därför inte samma beteende som den verkliga avkastningen, eftersom den verkliga avkastningen för statsobligationer med fem års löptid eller längre ger en positiv avkastning som ökar med löptiden. Det teoretiska resultatet överensstämmer inte med verkligheten vilket är en indikation på att parametrarna som är skattade med GMM inte är korrekta. Beräkningen av den rättvisa swapräntan stärker också denna tes eftersom de teoretiska och verkliga värdena inte stämmer överens med varandra. Undersökningen visar också att parameterskattningarna inte blir bättre när tekniken med jackknife används. Istället blir förväntningsskevhetsen snarare större. Studiens slutsats är därför att Vasiceks modell med parametrar skattade med GMM inte är lämplig att använda för att modellera avkastningen på den svenska statsobligationsmarknaden. Trots detta resultat belyser studien vikten av att undersöka förväntningsskevhetsen hos parametrar eftersom förväntningsskeva resultat som appliceras i verkligheten kan medföra oönskade konsekvenser.

## Abstract

In this report, the adequacy of using the generalized method of moments (GMM) to estimate the parameters of the Vasicek model is being investigated. The purpose of the study is to find out whether the Vasicek model is able to produce a negative yield even in practise and especially whether the current negative interest rates on the swedish government bond market can be modelled or not. All calculations and models are implemented using MATLAB.

To determine which time series of treasury bills and STIBOR to use in the study  $p$ -values and standard deviations are being calculated and  $\chi^2$  tests are being done for the estimated parameters. With the information obtained from these tests and calculations it can be concluded that time series of treasury bills and STIBOR with five years historic data have the highest potential to produce good results and hence will be used during further studies. To be able to compare the real life observed yield with the calculated theoretical yield the parameter estimations from GMM are plugged into the expression for the yield from the Vasicek model. Moreover, the fair swap rate is calculated to analyze whether the theoretical swap rate agree with observed swap rates. The parameters that are being estimated using GMM are biased, which means that they are more or less inaccurate. To eliminate some of the bias and hence obtain more accurate estimations the jackknife technique is used.

The study shows that the calculated, theoretical yield is permanently negative and becomes lower for longer maturities. Hence, the behaviour of the calculated yield does not agree with the behaviour of the observed yield, since the observed yield of swedish government bonds with five or more years to maturity is positive and becomes higher when the maturities become longer. The fact that the calculated and the observed values of the yield does not coincide indicates that the parameter estimations are incorrect. Moreover, by comparing the theoretical swap rates with the calculated ones and observing that they are different, the conjecture that the estimations are incorrect is improved. However, the estimation of the parameters does not improve using the jackknife technique. On the contrary, the bias is rather stronger using this technique. Therefore, the conclusion which can be drawn is that the Vasicek model with parameters estimated using GMM is not suitable to model the swedish government bond market. However, the study is still meaningful, since it highlights the importance of investigating the bias of the estimated parameters. A biased result that is applied in practise may lead to undesirable consequences.

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Inledning</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Bakgrund och teori</b>	<b>1</b>
2.1	Introduktion till finansiella termer . . . . .	2
2.2	Vasiceks modell . . . . .	3
2.3	Generaliserade momentmetoden . . . . .	4
2.4	Jackknife . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Implementering</b>	<b>5</b>
3.1	Generaliserade momentmetoden . . . . .	5
3.1.1	Populationsmomentvillkor . . . . .	5
3.1.2	Parameterskattning . . . . .	6
3.1.3	Kovariansmatris och konfidensintervall . . . . .	7
3.2	Jackknife . . . . .	8
3.3	Avkastning . . . . .	9
3.4	Ränteswappar . . . . .	10
3.5	Data . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Resultat</b>	<b>11</b>
4.1	Parameterskattningar . . . . .	11
4.2	Avkastning . . . . .	12
4.2.1	Kupongobligationer . . . . .	12
4.2.2	Nollkupongobligationer . . . . .	13
4.3	Förväntningsskevhet . . . . .	14
4.4	Swapränta . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>17</b>
5.1	Parameterskattningar . . . . .	17
5.2	Avkastning . . . . .	18
5.3	Förväntningsskevhet . . . . .	18
5.4	Swapränta . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Slutsats</b>	<b>19</b>
<b>A</b>	<b>Ämnes fördjupning</b>	<b>21</b>
A.1	Finansiell fördjupning . . . . .	21
A.1.1	Olika typer av räntor . . . . .	21
A.1.2	Räntemodeller . . . . .	22
A.1.3	Avkastningskurva . . . . .	24
A.2	Matematisk fördjupning . . . . .	25
A.2.1	Förväntningsskevhet . . . . .	25
A.2.2	Newtons metod . . . . .	25
A.2.3	Moment . . . . .	25
A.2.4	Skattning av parametrar på genererade dataserier . . . . .	26
A.2.5	Autokorrelation . . . . .	26
<b>B</b>	<b>Utökat resultat och diskussion</b>	<b>27</b>
B.1	Autokorrelation . . . . .	27
B.2	Avkastning . . . . .	29
B.3	Förväntningsskevhet . . . . .	31



<b>C</b>	<b>Bevis och härledningar</b>	<b>35</b>
C.1	Härledning av uttrycket för korttidsräntan för Vasiceks modell . . . . .	35
C.2	Itô-isometri . . . . .	35
C.3	Härledning av uttryck för den optimala viktningsmatrisen . . . . .	35
C.4	Härledning av uttryck för Jakobimatrisen . . . . .	36
C.5	Härledning av priset på en obligation . . . . .	37
C.6	Bevis av den rättvisa swapräntan . . . . .	41
C.7	Test av överidentifierade populationsmomentvillkor . . . . .	42
<b>D</b>	<b>MATLAB programkod</b>	<b>43</b>
D.1	Generaliserade momentmetoden . . . . .	43
D.2	Avkastning . . . . .	45
D.3	Ränteswappar . . . . .	47
D.4	Förväntnings skevhet . . . . .	47
D.5	Autokorrelation . . . . .	49
<b>E</b>	<b>Gloslista</b>	<b>50</b>

## Förord

Den här rapporten har producerats för Matematiska vetenskaper vid Chalmers tekniska högskola under våren 2018. Rapporten är slutprodukten av ett kandidatprojekt som två studenter från civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik respektive två studenter från civilingenjörsprogrammet Industriell ekonomi har arbetat med.

Vi vill tacka alla som på ett eller annat sätt hjälpt oss under arbetets gång. När det kommer till rapportens struktur, språk och stil har Hans Malmström på institutionen för fackspråk varit mycket hjälpsam. Framför allt har vi haft stor hjälp av vår handledare Simone Calogero. Han har varit tillmötesgående och hjälpsam under alla projektets olika moment och har alltid lett oss i rätt riktning när vi fastnat. Ett stort tack till dig!

En loggbok har förts under hela arbetets gång, både på individuell nivå och gemensamt i gruppen. De individuella loggböckerna innehåller den tid som gruppens medlemmar lagt ned på projektet och vad tiden har lagts på. Den gemensamma dagboken innehåller information om hur projektet har fortskridit och vilka framsteg som gjorts vecka för vecka.

Samtliga av oss är mycket nöjda med vårt val av projekt och gruppen vi hamnat i. Samarbetet har fungerat mycket bra och alla har tagit sitt ansvar för att projektets fortskridande och slutgiltiga resultat ska bli så bra som möjligt. Själva studien har för det mesta flutit på bra, även om den emellanåt inneburit en utmaning. Med ihärdigt arbete och en god inställning har vi dock löst de problem vi stött på. Projektet har varit lärorikt för oss alla, framförallt har vi haft mycket nytta av varandras kunskaper eftersom vi studerar olika utbildningar.

På nästa sida presenteras huvudförfattaren av respektive avsnitt i rapporten. Samtliga av gruppens medlemmar har dock korrekturläst, reviderat och bidragit med idéer till alla avsnitt. Rapporten bör därför ses som en gemensam insats av hela gruppen snarare än en sammanställning av individuellt arbete.

Populärvetenskaplig presentation	Lisa Wallin
Sammanfattning/Abstract	Frida Eriksson & Erika Salomonsson
Förord	Frida Eriksson
1. Inledning	Daniel Boman & Frida Eriksson
2.1 Introduktion till finansiella termer	Lisa Wallin
2.2 Vasiceks modell	Lisa Wallin
2.3 Generaliserade momentmetoden	Frida Eriksson
2.4 Jackknife	Erika Salomonsson
3.1 Generaliserade momentmetoden	Frida Eriksson
3.2 Jackknife	Erika Salomonsson
3.3 Avkastning	Daniel Boman
3.4 Ränteswappar	Erika Salomonsson
3.5 Data	Daniel Boman
4.1 Parameterskattningar	Daniel Boman
4.2 Avkastning	Lisa Wallin
4.3 Förväntningsskevheter	Erika Salomonsson
4.4 Swapränta	Daniel Boman
5.1 Parameterskattningar	Daniel Boman
5.2 Avkastning	Lisa Wallin
5.3 Förväntningsskevheter	Frida Eriksson & Erika Salomonsson
5.4 Swapränta	Daniel Boman
6. Slutsats	Frida Eriksson
A.1 Finansiell fördjupning	Daniel Boman, Erika Salomonsson & Lisa Wallin
A.2 Matematisk fördjupning	Alla
B.1 Autokorrelation	Daniel Boman
B.2 Avkastning	Lisa Wallin
B.3 Förväntningsskevheter	Daniel Boman & Erika Salomonsson
C.1 Härledning av uttrycket för korttidsräntan för Vasiceks modell	Frida Eriksson
C.2 Itô-isometri	Frida Eriksson
C.3 Härledning av uttryck för den optimala viktningssmatrisen	Daniel Boman
C.4 Härledning av uttryck för Jakobimatrisen	Frida Eriksson
C.5 Härledning av priset på en obligation	Frida Eriksson & Erika Salomonsson
C.6 Bevis av den rättvisa swapräntan	Erika Salomonsson
C.7 Test av överidentifierade populationsmomentvillkor	Daniel Boman
D.1 Generaliserade momentmetoden	Daniel Boman
D.2 Avkastning	Frida Eriksson & Lisa Wallin
D.3 Ränteswappar	Daniel Boman & Frida Eriksson
D.4 Förväntningsskevheter	Daniel Boman & Erika Salomonsson
D.5 Autokorrelation	Erika Salomonsson & Lisa Wallin
E. Gloslista	Alla

# 1 Inledning

Obligationer är viktiga eftersom de möjliggör bankers, staters och företags finansiering av sina projekt. Obligationerna utfärdas på obligationsmarknaden där investerare kan låna ut sina pengar mot en kupongränta. Mest fördelaktiga är obligationer då aktiemarknaden är osäker eller om börsen förväntas gå ner under en längre tid, eftersom de har en lägre risk jämfört med aktier - på bekostnad av en lägre avkastning. För att modellera avkastningen samt värdera räntederivat används modeller som beskriver utvecklingen av framtida räntor. En sådan modell, som när den presenterades år 1977 var den första att modellera korttidsräntor, är Vasiceks modell [1]. Modellen innehåller tre parametrar som alla beskriver olika egenskaper hos räntan. Med hjälp av historisk data och genom att studera den ekvation som beskriver modellen kan värden på parametrarna skattas. Det finns olika alternativa metoder som kan användas för parameterskattningen, till exempel minstakvadratmetoden, maximum likelihood samt den generaliserade momentmetoden (GMM). Metoden som används i den här studien är GMM, vilken introducerades år 1982 av Lars Peter Hansen. GMM har sedan dess varit ett av de statistiska verktyg inom empirisk ekonomisk forskning som använts allra mest - inte bara på finansmarknaden utan även inom många andra områden. Hansen blev år 2013 tilldelad *Sveriges Riksbanks pris i ekonomisk vetenskap till Alfred Nobels minne* för sitt arbete med GMM [2].

Syftet med studien är att med hjälp av GMM kalibrera Vasiceks modell mot den svenska obligationsmarknaden. Kalibreringen görs mot flera olika svenska marknadsräntor i syfte att jämföra kalibreringens resultat beroende på hur ofta observationer görs och längden på tidsspannet datan samlas från. Kalibreringen görs i syfte att undersöka om de numera negativa räntorna på den svenska obligationsmarknaden kan modelleras av Vasiceks modell med parametrar skattade med GMM. Vidare beräknas teoretiska avkastningar och swapräntor med hjälp av de erhållna parameterskattningarna i syfte att undersöka om de teoretiska värdena avspeglar de verkliga. Slutligen studeras GMM:s förväntnings skevhet med hjälp av genererade dataserier av korttidsräntor, detta i syfte att kunna dra slutsatser om metodens lämplighet i de ändamål som undersöks i studien. Programspråket MATLAB används för samtliga moment i studien.

Rapporten inleds med ett bakgrundsavsnitt som introducerar läsaren till de olika koncepten som används i studien. Dessa koncept inkluderar obligationsmarknader, avkastningskurvor, swapräntor, Vasiceks modell, GMM samt tekniken med jackknife. Genom att läsa bakgrundsavsnittet bör läsaren få all nödvändig information för att ta del av resten av rapporten. Efter bakgrunden följer en redogörelse för studiens implementering. Där redogörs hur GMM implementeras, hur tekniken med jackknife implementeras, hur olika avkastningar räknas fram, hur teoretiska rättvisa swapräntor beräknas, samt vilken data som används för att utföra studien. De dataserier av korttidsräntor som används hämtas från riksbankens hemsida [3]. Efter implementering presenteras studiens resultat. Resultaten innefattar de parameterskattningar som görs, teoretisk avkastning, teoretisk rättvis swapränta, samt grafer som illustrerar förväntnings skevhet. Resultaten diskuteras sedan i diskussionsavsnittet. Avslutningsvis dras slutsatser och möjlig utvidgning av studien föreslås. Efter rapportens huvuddel följer Appendix, vilket inleds med en finansiell och matematisk fördjupning kring de områden som används i studien. Därefter presenteras utökade resultat och tillhörande diskussion, följt av bevis och härledningar av de ekvationer som används i rapportens huvuddel. Allra sist i rapporten återfinns den programkod som används i studien samt en gloslista med de ej vedertagna begrepp som översatts från engelska till svenska.

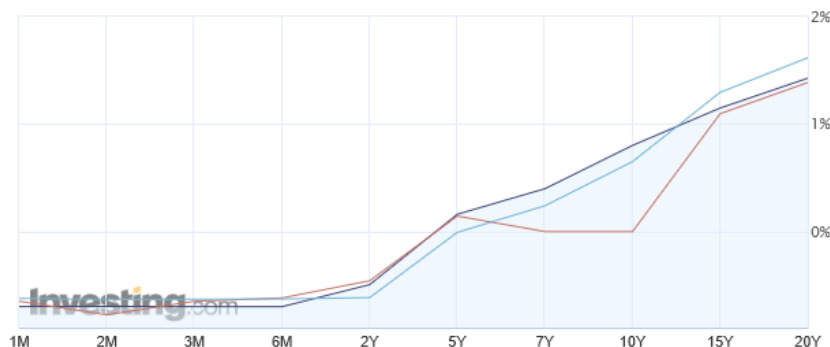
## 2 Bakgrund och teori

I bakgrunds- och teoriavsnittet ger vi en introduktion till finansiella termer, därefter presenteras Vasiceks modell, GMM och slutligen jackknife.

## 2.1 Introduktion till finansiella termer

För förståelse av den här studien behövs grundläggande kunskap om vissa finansiella termer. De finansiella produkter som avkastningen ska undersökas för är statsobligationer. För att förstå obligationsmarknaden behöver läsaren veta vad dessa produkter innebär. Avkastning kan sägas vara förändringen i värde på en tillgång över tid uttryckt i exempelvis kronor eller procent av det ursprungliga värdet [4]. En obligation är ett räntebärande skuldebrev, vilket innebär att köparen av obligationen lånar ut pengar till den som säljer obligationen mot en bestämd ränta vid lösendagen [5]. Med lösendag menas det datum då obligationen betalas ut. I praktiken köps en obligation med ett givet nominellt värde - i detta fall det värde som ska betalas ut vid lösendagen - för ett visst pris. Differensen mellan priset och det nominella värdet plus eventuella kuponger motsvarar avkastningen, vilken representerar räntan på obligationen. En typ av obligation är statsobligationer, där staten säljer räntebärande skuldebrev för att finansiera sin upplåning på lång sikt [6]. I studien beräknas avkastningen på två olika sorters obligationer: kupongobligationer och nollkupongobligationer. En kupongobligation är en obligation som har en fast årlig ränta som betalas ut under hela löptiden, medan en nollkupongobligation inte ger någon löpande ränteutbetalning alls [5]. Värdet på olika räntederivat, till exempel ränteswappar, är ofta funktioner av värdet på nollkupongobligationer. Värdningen av nollkupongobligationer är därför en fundamental del av denna typ av studier.

En avkastningskurva visar obligationers avkastning som en funktion av dess lösendag. Avkastningskurvan kan bland annat användas för att dra slutsatser kring det rådande ekonomiska läget. Vanligtvis är avkastningskurvan växande för längre tid till lösendag, vilket innebär att ägaren till obligationen får högre avkastning ju längre tid personen lånar ut sina pengar. I denna rapport ligger fokus främst på att använda avkastningskurvan för att se hur väl skattade parametrar till Vasiceks modell kan avspegla den svenska obligationsmarknaden. För mer ingående information kring avkastningskurvans användningsområden och former se Appendix A.1.3. I figur 2.1 visas den svenska obligationsmarknadens avkastningskurva [7]. Genom att rita upp avkastningskurvor med hjälp av Vasiceks modell och de skattade parametrarna kan de teoretiska avkastningskurvorna jämföras med de observerade avkastningskurvorna från den svenska obligationsmarknaden.



Figur 2.1: Den svenska obligationsmarknadens avkastningskurva den 25 april 2018. Horisontalaxeln visar obligationens lösendag, där M betecknar månad och Y betecknar år, och vertikalaxeln visar avkastningen på obligationen uttryckt i procent [7]. Den mörkblå kurvan visar den nuvarande avkastningskurvan, den röda och ljusblå kurvan visar avkastningskurvan för en månad respektive ett år sedan.

I figur 2.1 är avkastningen negativ för korta löptider men ökar med tiden. Strax innan fem års löptid blir avkastningen positiv och är därefter fortsatt växande. Grafen i figur 2.1 representerar den avkastningskurva som de teoretiska avkastningskurvorna kan jämföras med.

Diskontering är ett begrepp som används i studien och innebär att värdet av en betalning beräknas om till att motsvara värdet vid en vald referenstidpunkt. Ofta är denna tidpunkt nuet och det diskonterade värdet kallas därför ofta för nuvärdet. Vid diskontering beräknas värdet med hänsyn till exempelvis räntor eller inflation [8].

De räntor som används för skattning av parametrar är statsskuldväxlar (SSVX) och STIBOR. En statsskuldväxel är ett räntebärande värdepapper med kort löptid som riksgälden ger ut för att hantera variationer i lånebehovet [9]. Tiden till lösendag är högst tolv månader [10]. STIBOR - Stockholm Interbank Offered Rate - är en referensränta som visar ett genomsnitt av räntorna mellan banker på den svenska penningmarknaden<sup>1</sup>. Dessa banker är så kallade Stiborbanker och genomsnittet av räntorna kommer från de räntesatser Stiborbankerna är beredda att låna ut till varandra med. Lånen tas utan säkerhet med löptid från en dag till sex månader. En vanligt förekommande ränta är STIBOR T/N, där T/N står för Tomorrow/Next, vilket innebär att löptiden sträcker sig från kommande bankdag till bankdagen därpå [10]. LIBOR - London Interbank Offered Rate - är Storbritanniens motsvarighet till STIBOR [12].

En ränteswap är ett avtal mellan två aktörer om att utbyta räntebetalningar utan utbyte av den underliggande skulden [13]. Ränteswapmarknaden introducerades i början av 80-talet och växte snabbt till en stor ekonomisk marknad [14]. Det typiska exemplet är ett utbyte mellan två aktörer med fast respektive rörlig ränta där den parten med fast ränta betalar en rörlig ränta till den andra parten och den andra parten med rörlig ränta betalar en fast ränta till den första parten [13].

Ränteswappar kan vid rätt användning verka som ett finansiellt instrument för att hantera risken med korttidsräntornas fluktuation och kan exempelvis användas för att täcka upp differenser mellan tillgångar och skulder i ett företags balansräkning<sup>2</sup>. Det är vanligt att företag har tillgångar och skulder på olika långa löptider vilket kan hanteras med hjälp av ränteswappar. Ett annat exempel på när ränteswappar är användbara är när en jämförelse av olika länders räntor är aktuell. Ländernas räntor kan vara olika fördelaktiga på lång och kort sikt beroende på olika konkurrenskraft och regleringar vilket kan ge ett incitament för att ingå en ränteswap [13].

## 2.2 Vasiceks modell

År 1977 presenterade Oldřich Vašíček den första modellen av sitt slag. Vasiceks modell är en modell som modellerar korttidsräntan<sup>3</sup> och kan på så sätt generera obligationspriser och därmed också avkastningar. Vasiceks modell var den tidigaste av de nuvarande räntemodellerna och har legat till grund för och inspirerat många efterföljande modeller. Vissa har till och med menat att just denna modell var startskottet för räntederivatmarknaden och att den skulle ha tagit mycket längre tid att utveckla utan Vašíčeks framsteg [1].

En av de största fördelarna med Vasiceks modell var att konceptet om återkomst till medelvärdet infördes [16], vilket skiljer den från andra enklare modeller<sup>4</sup>. Återkomsten till medelvärdet är en viktig egenskap, eftersom det inte förväntas kunna ske en oändlig ökning för korttidsräntor över tid [18]. Vasiceks modell antar också att räntan är normalfördelad till skillnad från många andra modeller [19]. Formeln som blivit känd som Vasiceks modell ges av den stokastiska differentialekvationen

<sup>1</sup>Penningmarknaden är den del av kreditmarknaden som köper och säljer lån med kortare löptid än ett år. Lån med längre löptid räknas till kreditmarknaden [11].

<sup>2</sup>Ett sammandrag som visar ett företags ekonomiska ställning vid en viss tidpunkt [15].

<sup>3</sup>I Appendix A.1.2 beskrivs korttidsränta mer utförligt. Där förklaras också terminränta som är en annan typ av ränta.

<sup>4</sup>Återkomst till medelvärdet är ett begrepp inom finansvärlden som beskriver en teori om att priser och avkastningar över tid går tillbaka mot ett genomsnitt. Fenomenet används i statistiska modeller för att kunna identifiera avvikande kurser för att taktiskt kunna investera billigt och sälja dyrt [17].

$$dx_t = \alpha(r - x_t)dt + \sigma dW_t, \quad (2.1)$$

där  $x_t$  representerar korttidsräntan vid tiden  $t$  och  $W_t$  är en Brownsk rörelse. Vidare motsvarar  $r$  det långsiktiga väntevärdet av korttidsräntan,  $\alpha$  är hastigheten med vilken korttidsräntan närmar sig  $r$  och  $\sigma$  står för volatiliteten [20]. Från ekvation (2.1) kan vi härleda ett uttryck för korttidsräntan. Härledningen återfinns i Appendix C.1 och det slutliga uttrycket för korttidsräntan blir

$$x_t = x_0 e^{-\alpha t} + r(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma \int_0^t e^{\alpha(s-t)} dW_s. \quad (2.2)$$

Integralen i ekvation (2.2) är en Itô-integral<sup>5</sup>. Vasiceks modell har fått mycket kritik för det faktum att den i teorin kan generera negativa räntor [16]. Negativa räntor ansågs länge vara ett extremt undantagsfall som bara förväntades ske i ekonomiska krissituationer, vilket numera är en sanning som måste ifrågasättas med tanke på den svenska ekonomins ränteläge. Eftersom ränteläget varit negativt under flera års tid är förmågan att kunna generera negativa räntor en av modellens främsta egenskaper för en tillämpning på den svenska obligationsmarknaden [3]. I Appendix A.1.2 beskrivs flera andra räntemodeller som också kan användas för att beskriva utvecklingen av framtida räntor.

### 2.3 Generaliserade momentmetoden

Den generaliserade momentmetoden (GMM) är en metod som används för att skatta parametrar i statistiska modeller och utvecklades av Lars Peter Hansen år 1982. Metoden kombinerar observerad ekonomisk data med informationen i populationsmomentvillkor [21]. Populationsmomentvillkor är villkor som grundar sig i momentfunktioner, där de första fyra representerar en populations väntevärde, varians, skevhet, respektive kurtosis<sup>6</sup>. Hur populationsmomentvillkoren väljs beror på vilken modell som studeras och villkoren härleds från den ekvation som beskriver modellen. När populationsmomentvillkoren valts utnyttjas analogin mellan en populations väntevärde och provmotsvarigheten medelvärde. Här sker alltså en övergång då populationsmomentvillkoren som tidigare uttryckts i termer av väntevärden övergår i att uttryckas som medelvärden. Omskrivningen av populationsmomentvillkor till provmomentvillkor kommer att vara basen för skattningen av parametrarna i modellen som studeras. Slutligen går själva skattningen ut på att hitta de värden på parametrarna som minimerar provmomentvillkoren.

GMM grundar sig i momentmetoden (MM) som introducerades av Karl Pearson år 1894 [21]. I MM används lika många populationsmomentvillkor som antalet parametrar, vilket innebär att det går att hitta en unik lösning till systemet av ekvationer. Principen hos de båda metoderna är densamma, men skillnaden ligger i antalet populationsmomentvillkor som används, vilket för skattning med GMM ska vara större än antalet parametrar. På så sätt går inte viktig information förlorad, däremot uppstår problemet med att hitta en unik lösning till systemet av ekvationer. Det är dock fortfarande möjligt att hitta en skattning av parametrarna som gör att provmomentvillkoren kommer så nära noll som möjligt.

### 2.4 Jackknife

Förväntningsskevhet är ett systematiskt fel som gör värden mer eller mindre felaktiga. För matematisk definition se Appendix A.2.1. Jackknife är en teknik som används för att minska just förväntningsskevheten av en parameter. Idén infördes år 1956 av Maurice Quenouille och går ut på att dela upp den givna datan i ett antal mindre delar. Därefter görs skattningar av den aktuella parametern på varje mindre del för att slutligen få en skattning med mindre förväntningsskevhet på parametern.

<sup>5</sup>Se Appendix C.2

<sup>6</sup>Se appendix A.2.3

Under generella villkor är det möjligt att visa att förväntningsskevheten av jackknifeskattningen är av ordning  $\mathcal{O}(n^{-2})$  snarare än  $\mathcal{O}(n^{-1})$ , där  $n$  är antalet observationer [22]. Dessutom är tekniken med jackknife fördelaktig på flera sätt jämfört med andra metoder som används för att minska förväntningsskevheten. För det första är tekniken med jackknife mer generell eftersom tekniken inte förlitar sig på en exakt form av asymptotisk utvidgning, vilket betyder att tekniken kan appliceras på många olika typer av modeller och att det inte är nödvändigt att explicit utveckla en högre ordning av förväntningsskevheten. För det andra kan tekniken med jackknife användas tillsammans med många olika skattningsmetoder för att minska förväntningsskevheten. Slutligen är tekniken förhållandesvis lätt att implementera och det går snabbt att få fram jackknifeskattningar i exempelvis MATLAB. En nackdel är att tekniken endast reducerar förväntningsskevheten av parametrarna istället för att eliminera all förväntningsskevhets [22].

### 3 Implementering

Här redogör vi för hur GMM och tekniken med jackknife implementeras, hur priset och avkastningen på en obligation beräknas samt hur den rättvisa swapräntan beräknas. Därefter presenterar vi de dataserier av korttidsräntor som används i studien.

#### 3.1 Generaliserade momentmetoden

I detta avsnitt visar vi hur vi går till väga för att beräkna skattningar av parametrarna i Vasiceks modell med hjälp av GMM.

##### 3.1.1 Populationsmomentvillkor

Det första steget i metoden är att ange lämpliga populationsmomentvillkor. Eftersom modellen som studeras är Vasiceks modell utgår vi från dess räntemodell som representeras av den stokastiska differentialekvationen given i ekvation (2.1)

$$dx_t = \alpha(r - x_t)dt + \sigma dW_t,$$

där  $W_t$  är en Brownsk rörelse,  $x_t$  är korttidsräntan vid tiden  $t$  och  $\alpha$ ,  $r$  och  $\sigma$  är okända parametrar [23]. För att kunna skatta de okända parametrarna behöver vi skriva om ekvation (2.1) på diskret form. Med hjälp av Eulers metod får vi enligt [24]

$$x_{t+1} - x_t = \alpha(r - x_t) + \epsilon_{t+1}, \tag{3.1}$$

$$\epsilon_{t+1} = \sigma dW_t \equiv \sigma \mathcal{N}(0, 1). \tag{3.2}$$

Det är inte nödvändigt att anta standardnormalfördelning, men det är ett antagande som Eulers diskretisering gör. Vidare kallar vi  $\epsilon_{t+1}$  för den icke-observerade feltermen, vilken är den term vi vill uttrycka populationsmomentvillkoren i. Innan vi går vidare med att ta fram populationsmomentvillkoren introducerar vi variabeln  $\Delta t$  som representerar tidssteget mellan två korttidsräntor, vilken i [24] antas vara lika med ett. Ekvation (3.1) och (3.2) skrivs därför om till

$$x_{t+1} = \alpha r \Delta t + x_t(1 - \alpha)\Delta t + \epsilon_{t+1}, \tag{3.3}$$

$$\epsilon_{t+1} \equiv \sigma \sqrt{\Delta t} \mathcal{N}(0, 1).$$

Eftersom vi vill uttrycka populationsmomentvillkoren i termer av  $\epsilon_{t+1}$  löser vi ut den termen ur ekvation (3.3) och får

$$\epsilon_{t+1} = x_{t+1} - x_t(1 - \alpha)\Delta t - \alpha r \Delta t. \tag{3.4}$$



Som tidigare nämnt grundar sig populationsmomentvillkoren för GMM i momentfunktioner. De första två representerar väntevärde och varians, vilka vi med hjälp av ekvation (3.2) kan skriva som

$$\mathbb{E}[\epsilon_{t+1}] = 0, \quad (3.5)$$

$$\mathbb{E}[\epsilon_{t+1}^2] = \sigma^2 \Delta t. \quad (3.6)$$

Eftersom antalet okända parametrar (betecknat  $p$ ) i Vasiceks modell är tre stycken och utförandet av GMM bygger på att antalet momentfunktioner (betecknat  $q$ ) är större än antalet parametrar - alltså minst fyra stycken - behövs ytterligare två momentfunktioner. Vi skulle kunna använda oss av tredje och fjärde momenten som representerar skevhet och kurtosis, men det ger oss ingen ytterligare information om modellen. Istället kan vi använda oss av villkor av typen  $\mathbb{E}[x_t dW_t] = 0$ , vilka innehåller information om Vasiceks modell som vi vill utnyttja. Vi kan därför införa de sista två momentfunktionerna

$$\mathbb{E}[\epsilon_{t+1} x_t] = 0, \quad (3.7)$$

$$\mathbb{E}[(\epsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 \Delta t) x_t] = 0. \quad (3.8)$$

Ekvationerna (3.5)-(3.8) utgör därför våra populationsmomentvillkor. För en mer kompakt notation inför vi  $(q \times 1)$ -vektorerna

$$g_t(\theta) = \begin{bmatrix} \epsilon_{t+1} \\ \epsilon_{t+1} x_t \\ \epsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 \Delta t \\ (\epsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 \Delta t) x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{t+1} - \alpha r \Delta t - x_t(1 - \alpha) \Delta t \\ (x_{t+1} - \alpha r \Delta t - x_t(1 - \alpha) \Delta t) x_t \\ (x_{t+1} - \alpha r \Delta t - x_t(1 - \alpha) \Delta t)^2 - \sigma^2 \Delta t \\ ((x_{t+1} - \alpha r \Delta t - x_t(1 - \alpha) \Delta t)^2 - \sigma^2 \Delta t) x_t \end{bmatrix},$$

$$m_t(\theta) = \mathbb{E}[g_t(\theta)],$$

där  $\theta$  betecknar den okända  $(1 \times p)$ -parametervektorn som ska skattas. I vårt fall är  $p = 3$ .

Till sist byter vi ut väntevärdet i populationsmomentvillkoren mot den empiriska provmotsvarigheten medelvärde och använder de stora talens lag<sup>7</sup> för att komma fram till

$$\hat{m}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n g_t(\theta), \quad (3.9)$$

där  $n$  är antalet observerade korttidsräntor. Den här omskrivningen från populationsmomentvillkor till provmomentvillkor är basen för den generaliserade momentmetoden [23].

### 3.1.2 Parameterskattning

Själva parameterskattningen består nu av att minimera funktion (3.9). Eftersom vi har fler ekvationer än parametrar kommer det inte att finnas en lösning som gör att ekvationen blir exakt lika med noll. Intuitivt kan vi istället betrakta problemet att hitta den skattning som gör att ekvation (3.9) kommer så nära noll som möjligt<sup>8</sup>. Det är däremot inte den optimala lösningen till problemet, eftersom värdena på vissa av provmomentvillkoren kan variera mer än andra. Alla provmoments närhet till noll borde därför inte ha samma vikt. För att ta hänsyn till vikterna introducerar vi därför kriteriefunktionen

$$Q_n(\theta) = \hat{m}_n(\theta) W_n \hat{m}_n(\theta)^T, \quad (3.10)$$

där  $W_n$  är en viktningsmatris som konvergerar mot en positivt definit matris  $W$  för stora  $n$ . Då ges GMM-skattningen av det verkliga värdet  $\theta_0$  av

<sup>7</sup>De stora talens lag säger att medelvärdet av ett stort antal oberoende observationer av en slumpvariabel med stor sannolikhet kommer gå mot variabelns väntevärde [25].

<sup>8</sup>För att testa provmomentvillkorens närhet till noll utförs  $\chi^2$ -test, se Appendix C.7.

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Theta} Q_n(\theta). \quad (3.11)$$

Alltså är lösningen på skattningsproblemet  $\hat{\theta}$ , vilken är den vektor vars element minimerar kriteriefunktionen i ekvation (3.10).

Nu återstår problemet att hitta den optimala viktningsmatrisen<sup>9</sup>. Kravet är att matrisen ska vara positivt definit och symmetrisk och för att vara optimal ska dessutom viktningsmatrisens kovariansmatris vara så liten som möjligt. I [26] visas att den optimala viktningsmatrisen ges av uttrycket

$$W_n = \left( \mathbb{E}[g_t(\theta)g_t(\theta)^T] \right)^{-1}. \quad (3.12)$$

Vi använder oss därför av viktningsmatrisen i ekvation (3.12) när vi utför parameterskattningen. Eftersom ekvation (3.12) beror av den okända parametervektorn  $\theta$  kan vi inte beräkna viktningsmatrisen direkt. Ett sätt att komma runt detta problem är att använda sig av en tvåstegsprocedure [26]. I det första steget gör vi en skattning av parametervektorn genom att använda en viktningsmatris som uppfyller kraven ovan men som inte är optimal. Lämpligt är att välja  $W_n$  som identitetsmatrisen  $I$ , vilket innebär att vi betraktar alla populationsmomentvillkor som lika viktiga. Detta ger oss en preliminär första skattning av  $\theta$ , vilken vi beräknar med hjälp av ekvation (3.10) och ekvation (3.11) och väljer att kalla  $\hat{\theta}_{(1)}$ . I det andra steget använder vi oss av  $\hat{\theta}_{(1)}$  för att få en skattning av den optimala viktningsmatrisen, vilken vi beräknar som

$$\hat{W}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (g_t(\hat{\theta}_{(1)})g_t(\hat{\theta}_{(1)})^T)^{-1},$$

där väntevärdet i ekvation (3.12) bytts ut mot provmotsvarigheten medelvärde. Viktningsmatrisen  $\hat{W}_n$  kan sedan användas i ekvation (3.10) för att beräkna en skattning av  $\theta$ .

Tvåstegsproceduren ovan bör upprepas tills samtliga parametrar i  $\hat{\theta}$  har konvergerat mot ett slutgiltigt värde, vilket ofta refereras till som *itererad GMM*.

### 3.1.3 Kovariansmatris och konfidensintervall

**Antagande 3.1.** *Vi antar att provmomenten följer en central gränsvärdessats. Då gäller att momenten har en ändlig asymptotisk kovariansmatris  $(1/n)F$ , så att*

$$\sqrt{n}g_n(\theta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, F).$$

Om observationerna inte är oberoende är det nödvändigt att göra vissa antaganden om datan så att vi kan använda oss av en lämplig central gränsvärdessats [21].

**Sats 3.1.** *Under antaganden i antagande 3.1 gäller att GMM-skattningen är följdriktig och asymptotiskt normalfördelad med asymptotisk kovariansmatris*

$$V_{GMM} = \frac{1}{n} \left[ G(\theta_0)^T W G(\theta_0) \right]^{-1} G(\theta_0)^T W F W G(\theta_0) \left[ G(\theta_0) W G(\theta_0) \right]^{-1},$$

där

$$G(\theta) = \mathbb{E} \left[ \frac{\partial g_t(\theta)}{\partial \theta} \right] = \mathbb{E} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\theta)}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial g_1(\theta)}{\partial \theta_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_q(\theta)}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial g_q(\theta)}{\partial \theta_p} \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

<sup>9</sup>För härledning av den optimala viktningsmatrisen se Appendix C.3

alltså är  $G(\theta)$  väntevärdet av Jakobimatrisen<sup>10</sup> av populationsmomentvillkoren.

Generellt sett beror variansen hos GMM-skattningen på valet av viktningsmatris  $W_n$ , så genom att välja en lämplig viktningsmatris kan vi utnyttja så mycket information från populationsmomentvillkoren som möjligt. Genom att analysera kriteriefunktionen (3.10) ser vi att valet  $W_n = I$  ger oss summan av provmomenten i kvadrat. Väljer vi en mer optimal viktningsmatris kommer vi istället att minimera den viktade summan av kvadrater. Det är naturligt att vissa moment är mer instabila än andra, varför vi kan normalisera felen genom att dividera med dess respektive varians. Men elementen hos  $\hat{m}_n(\theta)$  är fritt korrelerade. Om vi sätter  $F$  lika med den asymptotiska kovariansen av provmomenten normaliserad med kvadratroten ur provstorleken, alltså

$$F = \text{Cov}[\sqrt{n}\hat{m}_n(\theta_0)],$$

så gäller att  $W_n = F^{-1}$  viktat alla element av kriteriefunktionen på ett lämpligt sätt. Liksom [21] kan vi sammanfatta detta med följande sats, som dessutom ger oss ett förenklat uttryck för kovariansmatrisen.

**Sats 3.2.** För en given mängd populationsmomentvillkor med det optimala valet av viktningsmatris  $W_n = F^{-1}$  gäller att GMM-skattningen är asymptotiskt användbar med kovariansmatris

$$V_{\text{GMM, optimal}} = \frac{1}{n} \left[ G(\hat{\theta})^T \hat{W}_n G(\hat{\theta}) \right]^{-1}.$$

$V_{\text{GMM, optimal}}$  kan nu utnyttjas för att beräkna ett konfidensintervall för den skattade vektorn  $\hat{\theta}$ .

Eftersom parameterskattningen från GMM är asymptotiskt normalfördelad utgår vi från definitionen av konfidensintervall för just en normalfördelning [27]. För okänt väntevärde  $\mu$  och känd varians  $\sigma^2$  ges konfidensintervallet för  $\mu$  vid endast ett stickprov av

$$I_\mu = \left( \bar{x} - \frac{\lambda_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{\lambda_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} \right), \quad (3.14)$$

där  $\lambda_{\alpha/2}$  är den  $100(1-\alpha/2)$ :te percentilen av standardnormalfördelningen [28]. Observera att eftersom vi känner kovariansmatrisen  $V_{\text{GMM, optimal}}$  känner vi även variansen hos varje parameter  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , vilken ges av diagonalelementet  $V_{ii}$  i  $V_{\text{GMM, optimal}}$ . Vi kan därför skriva om ekvation (3.14) som

$$I_{\hat{\theta}_i} = \left( \hat{\theta}_i - \lambda_{\alpha/2} \sqrt{\frac{V_{ii}}{n}}, \hat{\theta}_i + \lambda_{\alpha/2} \sqrt{\frac{V_{ii}}{n}} \right).$$

## 3.2 Jackknife

Tekniken med jackknife använder vi i denna studie på parametrarna  $\alpha$ ,  $r$  och  $\sigma$  för att få noggrannare och mer korrekta värden på skattningarna. Det första steget är att dela upp dataserien, som i detta fall består av  $n$  antal observerade räntor, i  $m$  stycken mindre delar där varje mindre del består av  $l$  stycken observerade räntor. För att minska förväntningsskevheten och därmed få jackknifeskattningen av parametern  $\theta$  gör vi skattningar av  $\theta$  på de olika delarna. Ekvationen som används för att beräkna jackknifeskattningarna är

$$\hat{\theta}_{jack} = \frac{m}{m-1} \hat{\theta}_n - \frac{\sum_{i=1}^m \hat{\theta}_{li}}{m^2 - m},$$

där  $\hat{\theta}_n$  och  $\hat{\theta}_{li}$  är skattningen av  $\theta$  givet alla räntor respektive räntorna i den  $i$ :te delen [22] som fås med hjälp av GMM.

<sup>10</sup>För härledning av Jakobimatrisen se Appendix C.4

### 3.3 Avkastning

I detta avsnitt redogör vi för hur obligationers teoretiska avkastning beräknas. Tillvägagångssättet skiljer sig åt beroende på om obligationen betalar kuponger eller inte. Vi börjar med att redogöra för hur avkastningen på nollkupongobligationer beräknas, därefter redogör vi för hur avkastningen på kupongobligationer beräknas. Avkastningen på en nollkupongobligation kan enligt [29] beräknas med definition 3.1.

**Definition 3.1.** *Avkastningen på en nollkupongobligation som tecknas vid tiden  $t$  och har lösendag  $T$  är*

$$Y(t, T) = -\frac{1}{T-t} \log B(t, T), \quad (3.15)$$

där  $B(t, T)$  är priset på en nollkupongobligation som tecknas vid tiden  $t$  och har lösendag  $T$ .

För att beräkna priset på en nollkupongobligation använder vi oss, i enlighet med [29], av det riskneutrala priset i definition 3.2. Med riskneutralt pris menas det diskonterade förväntade värdet på tillgången. I vårt fall är tillgången en nollkupongobligation som vid tiden  $T$  betalar värdet 1. Det diskonterade värdet blir således värdet av 1, diskonterat med hjälp av korttidsräntan från tiden  $T$  till tiden  $t$ .

**Definition 3.2.** *Det riskneutrala priset på en nollkupongobligation som tecknas vid tiden  $t$  och har lösendag  $T$  är*

$$B(t, T) = \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_t^T x_u du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (3.16)$$

där  $x_u$  är korttidsräntan och  $\mathcal{F}_t$  är filtrationen som genereras av den Brownska rörelsen.

Med hjälp av definition 3.2 kan priset på en nollkupongobligation i Vasiceks modell härledas.

**Definition 3.3.** *Priset på en nollkupongobligation (i Vasiceks modell) som tecknas vid tiden  $t$  och har lösendag  $T$  är*

$$\begin{aligned} B(t, T, x_t) &= \exp(-A(t, T)x_t + D(t, T)), \\ A(t, T) &= \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}, \\ D(t, T) &= \left( r - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} \right) \left[ A(t, T) - (T-t) \right] - \frac{\sigma^2 A(t, T)^2}{4\alpha}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

där  $\alpha$ ,  $r$  och  $\sigma$  är parametrarna i Vasiceks modell och  $x_t$  är den nuvarande korttidsräntan.

För härledning av ekvation (3.17), se Appendix C.5 eller [29]. För att beräkna priset på en kupongobligation används definition 3.4.

**Definition 3.4.** *Det riskneutrala priset på en kupongobligation som tecknas vid tiden  $t$ , har lösendag  $T$  och som vid tidpunkterna  $t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$ ,  $t < t_1$  betalar kupongerna  $c_1, c_2, \dots, c_N$  är*

$$B_c(t, T) = \sum_{k=1}^N c_k B(t, t_k), \quad (3.18)$$

där  $B(t, t_k)$  är priset på en nollkupongobligation som tecknas vid tiden  $t$  och har lösendag  $t_k$  [30].

Definition 3.4 innebär att en kupongobligation som vid tidpunkterna  $t_1, t_2, \dots, t_N$  betalar kupongerna  $c_1, c_2, \dots, c_N$  är ekvivalent med att ha  $c_1, c_2, \dots, c_N$  stycken nollkupongobligationer med lösendag  $t_1, t_2, \dots, t_N$ . Beräkning av priset på en kupongobligation består alltså i grund och botten av att räkna ut priset på nollkupongobligationer. Genom att beräkna värdet på kupongobligationspriset  $B_c(t, T)$

kan en kupongobligations avkastning beräknas. Avkastningen på en kupongobligation kan implicit uttryckas som

$$B_c(t, T) = \sum_{k=1}^N c_k e^{-Y_c(t, T)(t_k - t)}. \quad (3.19)$$

Genom att utveckla ekvation (3.19) ser vi att

$$\begin{aligned} B_c(t, T) &= \sum_{k=1}^N c_k e^{-Y_c(t, T)(t_k - t)} = c_1 e^{-Y_c(t, T)(t_1 - t)} + c_2 e^{-Y_c(t, T)(t_2 - t)} + \dots \\ &+ c_{N-1} e^{-Y_c(t, T)(t_{N-1} - t)} + c_N e^{-Y_c(t, T)(t_N - t)} \\ &= c_1 y^{t_1 - t} + c_2 y^{t_2 - t} + \dots + c_{N-1} y^{t_{N-1} - t} + c_N y^{t_N - t}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

där  $y = e^{-Y_c(t, T)}$ . För att få fram ett värde på avkastningen löser vi därför ekvation (3.20), vilket vi gör med hjälp av Newtons metod<sup>11</sup>. Slutligen får vi fram avkastningen som

$$Y_c(t, T) = -\log y.$$

Vi använder oss alltså av ekvation (3.18) för att beräkna  $B_c(t, T)$ , som vi sedan sätter in i ekvation (3.19) för att kunna beräkna  $Y_c(t, T)$ .

### 3.4 Ränteswappar

För att beräkna den rättvisa swapräntan  $r_{IRS}$  börjar vi med att notera att  $x_t$  är korttidsräntan, det vill säga räntan när vi lånar i det korta tidsintervallet  $[t, t + 1]$  där  $t = 1, \dots, N - 1$ . Korttidsräntan är given vid en viss tid  $t$  men inte vid den nuvarande tiden  $t = 0$ . Som nämnt i avsnitt 2.1 är en ränteswap ett avtal mellan två parter som tecknas vid tiden  $t = 0$  och innebär ett utbyte av summan  $L(x_t - r_{IRS})$  vid varje tidpunkt  $t$  [31]. Här är  $L > 0$  den underliggande skulden som är omräknad från ränta till valuta och vi kan utan inskränkning anta att  $L = 1$ . Det riskneutrala priset på en ränteswap  $\pi_{IRS}(t)$  vid tiden  $t = 0, \dots, N - 2$  kan vi därför definiera enligt

$$\pi_{IRS}(t) = \sum_{k=t+1}^{N-1} \mathbb{E}[c_k D(k) | \mathcal{F}_t],$$

där  $c = (c_1, \dots, c_{N-1})$  med  $c_t = x_t - r_{IRS}$ ,  $t = 1, \dots, N - 1$ . Vidare är  $D(k) = e^{-\int_0^k x_s ds}$  den diskonterade processen och  $\mathcal{F}_t$  är filtrationen. Vid tiden  $t = 0$  får vi

$$\pi_{IRS}(0) = \sum_{k=1}^{N-1} \mathbb{E}[c_k D(k) | \mathcal{F}_0] = \sum_{k=1}^{N-1} \mathbb{E}[(x_k - r_{IRS}) D(k)] = \sum_{t=1}^{N-1} \mathbb{E}[(x_t - r_{IRS}) D(t)]. \quad (3.21)$$

I sista likheten har endast notationen för tiden ändrats från  $k$  till  $t$  för att tydliggöra att korttidsräntan beror av tid. Från ekvation (3.21) framgår det alltså att det riskneutrala priset på en ränteswap är summan av det förväntade diskonterade kassaflödet. I en rättvis ränteswap ska ingen av parterna ha någon fördel i avtalet och därmed ska det totala kassaflödet mellan parterna vara noll, vilket betyder att  $\pi_{IRS} = 0$ . Värdet på  $r_{IRS}$  som uppfyller  $\pi_{IRS} = 0$  vid tiden  $t = 0$  kallas den rättvisa swapräntan och ges av sats 3.3 med bevis i Appendix C.6.

**Sats 3.3.** *Den rättvisa swapräntan är*

$$r_{IRS} = \frac{\sum_{t=1}^{N-1} (B(0, t-1) - B(0, t))}{\sum_{t=1}^{N-1} B(0, t)},$$

där  $B(0, t)$  är det riskneutrala priset på en nollkupongobligation.

<sup>11</sup>Se Appendix A.2.2

### 3.5 Data

För att utföra studien används sju olika dataserier av korttidsräntor. Anledningen till att vi studerar flera olika dataserier är att vi ska kunna jämföra skattningarnas kvalitet mellan de olika dataserierna. Fyra av dataserierna som används innehåller korttidsräntor från historiska statsskuldväxlar med en månads lösendag och tre innehåller korttidsräntor från historiska STIBOR T/N. I den andra dataserien av statsskuldväxlar med dagliga observationer övergår korttidsräntan på den svenska statsobligationsmarknaden från positiv till negativ och finns med för att undersöka om övergången har någon inverkan på skattningarna. De sju dataserierna presenteras i djupare detalj i tabell 3.1. Samtliga dataserier har hämtats från den svenska riksbankens officiella hemsida [3].

Tabell 3.1: Lista över samtliga dataserier som används i studien. Dataserierna har hämtats från den svenska riksbankens officiella hemsida [3].

SSVX 1M 2017-03-21 - 2018-03-21	Statsskuldväxlar, 1 månads lösendag. Dagliga observ.
SSVX 1M 2014-08-06 - 2015-08-06	Statsskuldväxlar, 1 månads lösendag. Dagliga observ.
SSVX 1M 2013-03-21 - 2018-03-21	Statsskuldväxlar, 1 månads lösendag. Veckovisa observ.
SSVX 1M 1998-03-21 - 2018-03-21	Statsskuldväxlar, 1 månads lösendag. Månadsvisa observ.
STIBOR T/N 2017-03-21 - 2018-03-21	STIBOR T/N, Dagliga observ.
STIBOR T/N 2013-03-21 - 2018-03-21	STIBOR T/N, Veckovisa observ.
STIBOR T/N 1998-03-21 - 2018-03-21	STIBOR T/N, Månadsvisa observ.

För att få en bättre förståelse av dataseriernas egenskaper sammanställs medelvärde, standardavvikelse samt autokorrelation för samtliga dataserier. Resultatet presenteras i tabell 3.2. För mer ingående information kring autokorrelationen för upp till 50 tidsskillnader samt hur den beräknas, se Appendix B.1 respektive Appendix A.2.5.

Tabell 3.2: Lista över samtliga dataseriernas egenskaper. Egenskaperna som redogörs för är antal observationer, medelvärde, standardavvikelse samt autokorrelation för de fem första tidsstegen.

Dataserie	N	Medelv.	Stdav.	1	2	3	4	5
SSVX 1 år 2017 - 2018	253	-0,0068	$5 \cdot 10^{-4}$	0,67	0,56	0,46	0,48	0,45
SSVX 1 år 2014 - 2015	251	$-5,37 \cdot 10^{-4}$	0,0023	0,97	0,95	0,94	0,93	0,91
SSVX 5 år 2013 - 2018	260	-0,0011	0,0065	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95
SSVX 20 år 1998-2018	239	0,0193	0,016	0,98	0,96	0,94	0,91	0,89
STIBOR 1 år 2017 - 2018	253	-0,0052	$2,1 \cdot 10^{-4}$	0,77	0,63	0,5	0,41	0,36
STIBOR 5 år 2013 - 2018	260	$-1,9 \cdot 10^{-4}$	0,0062	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95
STIBOR 20 år 1998 - 2018	237	0,02	0,017	0,99	0,96	0,94	0,91	0,88

## 4 Resultat

Här presenteras resultat som berör parameterskattningar, teoretisk avkastning för nollkupong- och kupongobligationer, förväntningskevhets av parametrarna  $\alpha$ ,  $r$  och  $\sigma^2$  samt teoretisk rättvis swapränta.

### 4.1 Parameterskattningar

De erhållna parameterskattningarna presenteras i tabell 4.1. Vi har skattat parametrar på samtliga dataserier som presenteras i tabell 3.1. Utöver skattningar med GMM enligt den metodik som presenteras i avsnitt 3.1 samt [23, 24] har skattningar med hjälp av tekniken med jackknife tagits fram för parametern  $\alpha$  i enlighet med metodiken som presenteras i avsnitt 3.2. Skattningarna med jackknife presenteras tillsammans med resterande skattningar och betecknas  $\alpha_j$ . För varje skattning

har dessutom ett  $\chi^2$ -test gjorts för att testa momentvillkorens närhet till noll. Mer information kring testets funktion finns i Appendix C.7. De programkoder som vi använt finns att betrakta i Appendix D.

I tabell 4.1 ser vi att skattningar gjorda på ett års historisk korttidsränta uppvisar extrema värden på parametern  $\alpha$ . Skattningarna på parametern  $\alpha$  har dessutom höga standardavvikelser på 14,5; 12,9 respektive 16, vilket innebär att konfidensintervallen för dessa parametrar troligen är för stora för att resultaten ska vara användbara. På fem års historisk korttidsränta uppvisar inte skattningarna några uppenbara avvikelser. Ingen av dessa skattningar förkastas heller av  $\chi^2$ -testet. Vidare uppvisar skattningarna på fem års historisk korttidsränta lägre standardavvikelser än motsvarande för ett års historisk korttidsränta. Skattningarna gjorda på 20 års historisk korttidsränta uppvisar negativa värden på  $\alpha$  för både SSVX 1M och STIBOR T/N. Samtliga skattningar gjorda på 20 års historisk korttidsränta förkastas dessutom av  $\chi^2$ -testet. De värden på  $\alpha$  som skattats med hjälp av tekniken men jackknife uppvisar ingen tydlig överensstämmelse med skattningen av  $\alpha$  utan jackknife.

Tabell 4.1: Skattningar av parametrarna  $\alpha$ ,  $r$ ,  $\sigma^2$  samt  $\chi^2$ -värde. Standardavvikelse står under respektive skattning på  $\alpha$ ,  $r$  och  $\sigma^2$  och p-värde står under respektive  $\chi^2$ -värde. I tabellen syns att skattningar på ett års historisk korttidsränta ger extrema värden på parametern  $\alpha$ . Skattningarna på fem års historisk korttidsränta uppvisar inga uppenbara avvikelser. Skattningarna på 20 års historisk korttidsränta förkastas av  $\chi^2$ -testet med p-värden på 0,0294 respektive 0,043.

	$\hat{\alpha}$	$\hat{r}$	$\hat{\sigma}^2$	$\chi^2$	$\hat{\alpha}_j$
<b>SSVX 1M (2017 - 2018)</b>	80,6	-0,00683	0,00003	0,174	106
<i>Standardavvikelse/p-värde</i>	14,5	0,0000481	0,00000762	0,677	
<b>SSVX 1M (2014 - 2015)</b>	-2,74	0,0051	0,000028	3,9094	-4,66
<i>Standardavvikelse/p-värde</i>	12,9	0,0000431	$4,75 \cdot 10^{-11}$	0,048	
<b>SSVX 1M (2013 - 2018)</b>	0,236	-0,0195	0,0000114	1,64	-0,483
<i>Standardavvikelse/p-värde</i>	0,3	0,027	0,00000276	0,2	
<b>SSVX 1M (1998 - 2018)</b>	-0,0557	0,0341	0,0000136	4,74	-0,159
<i>Standardavvikelse/p-värde</i>	0,0601	0,0294	0,00000366	0,0294	
<b>STIBOR T/N (2017 - 2018)</b>	3,28	-0,00442	0,00000204	2,37	3,18
<i>Standardavvikelse/p-värde</i>	16	0,0039	0,000000436	0,124	
<b>STIBOR T/N (2013 - 2018)</b>	0,199	-0,0119	0,00000626	1,23	-0,53
<i>Standardavvikelse/p-värde</i>	0,171	0,0114	0,0000013	0,268	
<b>STIBOR T/N (1998 - 2018)</b>	-0,0802	0,0327	0,0000172	4,095	-0,167
<i>Standardavvikelse/p-värde</i>	0,064	0,0206	0,0000037	0,043	

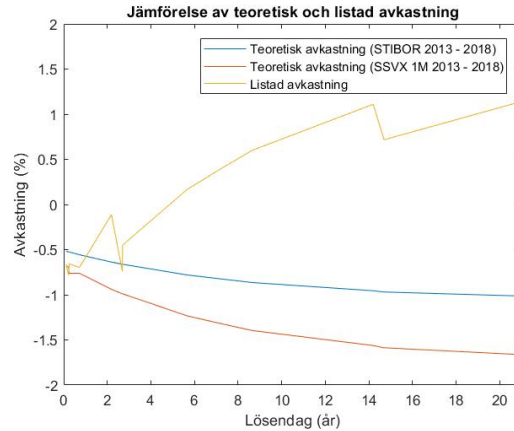
## 4.2 Avkastning

Avkastningen har beräknats för både kupongobligationer och nollkupongobligationer med olika kuponger och lösendagar. Metodiken som används presenteras i avsnitt 3.3. Avkastningarna har räknats ut för att kunna se om den teoretiska avkastningskurvan liknar den verkliga avkastningskurvan i figur 2.1.

### 4.2.1 Kupongobligationer

Figur 4.1 visar avkastningskurvan för de statsobligationer som just nu är aktuella på marknaden (2018-03-21) samt de uträknade teoretiska avkastningskurvorna. Informationen kring verklig avkastning kommer främst från historiska auktionsresultat från riksgäldens hemsida [32] kompletterat med information från andra hemsidor som visar finansiella mått [7, 33]. I figur 4.1 anger horisontalaxeln hur lång tid det är från den 21 mars 2018 till obligationens lösendag och vertikalaxeln anger avkastningen i procent. Den listade avkastningen representeras av den gula linjen medan den blå och röda linjen

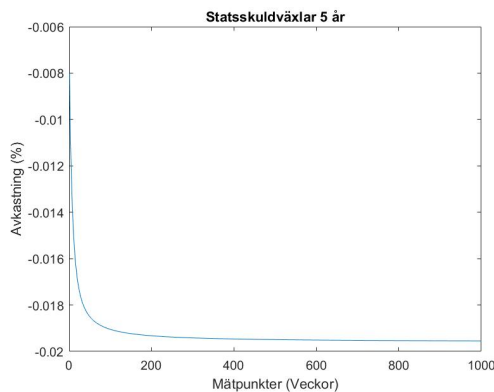
representerar den teoretiska avkastningen med parametrar skattade från fem års historisk korttidsränta med STIBOR respektive statsskuldväxlar. Vi ser att den teoretiska avkastningen är lägre än den listade och fortsätter ge negativa värden även på lång sikt där den listade avkastningen blir positiv.



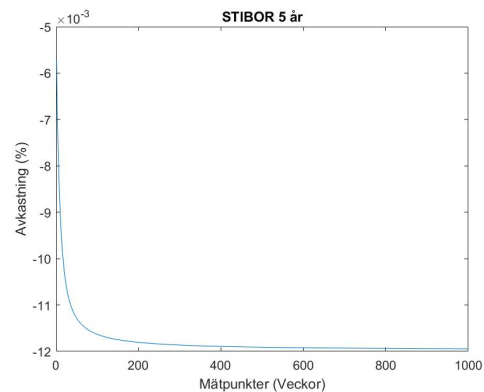
Figur 4.1: Jämförelse av den verkliga avkastningskurvan med de avkastningskurvor som erhålls med parameterskattningar från SSVX 1M 2013 - 2018 respektive STIBOR T/N 2013 - 2018.

#### 4.2.2 Nollkupongobligationer

Figur 4.2 visar teoretiska avkastningskurvor för nollkupongobligationer med parametrar skattade från dataserierna SSVX 1M 2013 - 2018 respektive STIBOR T/N 2013 - 2018. I figur 4.2 ser vi att avkastningen konvergerar mot en negativ avkastning för de båda dataserierna. I Appendix B.2 finns avkastningskurvor för övriga dataserier av korttidsräntor med tillhörande parametrar. Eftersom samtliga avkastningskurvor för nollkupongobligationer uppvisar negativa avkastningar finns inga tecken på att de resterande dataserierna skulle ge en bättre avkastningskurva än den i figur 4.1.



(a) Teoretisk avkastningskurva för nollkupongobligationer med parameterskattningar från SSVX 1M 2013 - 2018.



(b) Teoretisk avkastningskurva för nollkupongobligationer med parameterskattningar från STIBOR T/N 2013 - 2018.

Figur 4.2: Teoretiska avkastningskurvor med parameterskattningar SSVX 1M 2013 - 2018 respektive STIBOR T/N 2013 - 2018.

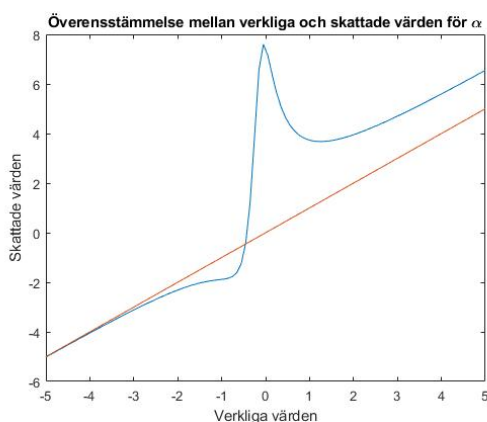


### 4.3 Förväntningskevhets

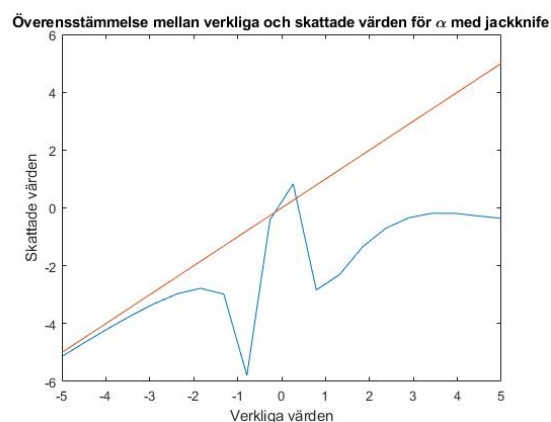
Genom att generera dataserier som är Vasicek-processer på samma sätt som beskrivs i Appendix A.2.4 - med givna värden på parametrarna  $\alpha$ ,  $r$  och  $\sigma^2$  och därefter skatta parametrarna med hjälp av koden i Appendix D - är det möjligt att få fram grafer som visar hur väl de verkliga och skattade värdena på parametrarna överensstämmer med varandra och därmed hur stor förväntningskevhetsen är. Figur 4.3, 4.4 och 4.5 visar överensstämmelsen för  $\alpha$ ,  $r$  och  $\sigma^2$  där tekniken med jackknife inte har respektive har använts. Som nämnt i avsnitt 3.2 borde de skattade parametervärdena vara närmare de verkliga värdena när tekniken med jackknife används eftersom förväntningskevhetsen då ska minska.

Vid testerna är  $\Delta t = 1/252$ , vilket motsvarar dagliga observationer och antalet observationer är  $n = 252$ , vilket motsvarar antalet bankdagar under ett år. I figurerna representerar horisontalaxeln de verkliga värdena medan vertikalaxeln representerar de skattade värdena. En rät linje med lutning +1 antyder att de skattade värdena överensstämmer väl med de verkliga och att ingen förväntningskevhets finns. För att se i vilka intervall som parameterskattningarna är bra respektive dåliga finns en orange linje med lutning +1 i samtliga figurer som visar resultat över förväntningskevhetsen.

I figur 4.3 varierar  $\alpha$  mellan -5 och 5 medan  $r = -0.2$  och  $\sigma^2 = 0.005$ . Som vi kan se i figur 4.3a är överensstämmelsen sämst när  $\alpha$  är nära noll, mer precist när  $\alpha$  är mellan -1 och 1, vilket betyder att förväntningskevhetsen är störst i det området. Att förväntningskevhetsen är stor ser vi eftersom förhållandet mellan de verkliga och skattade värdena på parametern inte följer en rät linje med lutning +1 i det området. Skattningarna blir bättre när  $\alpha$  antar antingen lägre eller högre värden. I figur 4.3b har tekniken med jackknife använts och där ser vi att skattningarna inte är bättre, utan snarare sämre för större värden på  $\alpha$ .



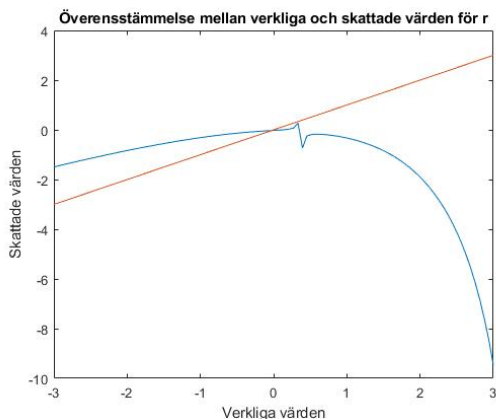
(a) Överensstämmelse mellan verkliga och skattade värden på parametern  $\alpha$  där tekniken med jackknife inte har använts.



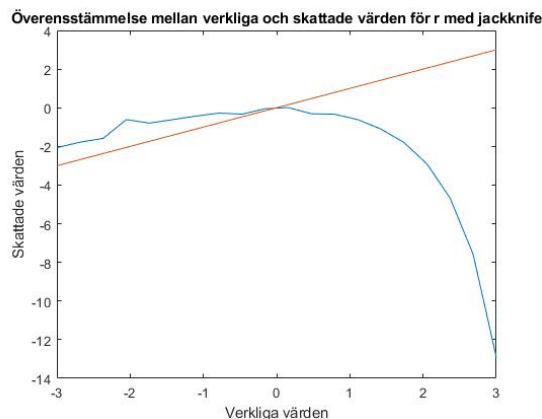
(b) Överensstämmelse mellan verkliga och skattade värden på parametern  $\alpha$  där tekniken med jackknife har använts.

Figur 4.3: Överensstämmelse mellan verkliga och skattade värden på parametern  $\alpha$ . På horisontalaxeln visas de verkliga värdena och på vertikalaxeln visas de skattade värdena.

Figur 4.4 visar överensstämmelsen för parametern  $r$  när  $r$  antar värden mellan -3 och 3 samtidigt som  $\alpha = 0,3$  och  $\sigma^2 = 0.005$ . Oavsett om tekniken med jackknife har använts eller inte är skattningarna bäst när  $r$  är negativ och när större värden antas blir skattningarna sämre och sämre. Förväntningskevhetsen ökar alltså med större värden på  $r$ .



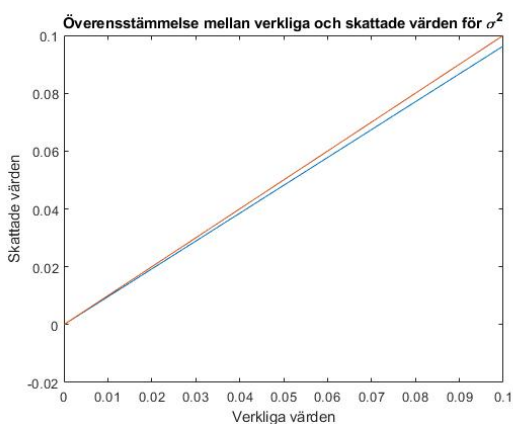
(a) Överensstämmelse mellan verkliga och skattade värden på parametern  $r$  där tekniken med jackknife inte har använts.



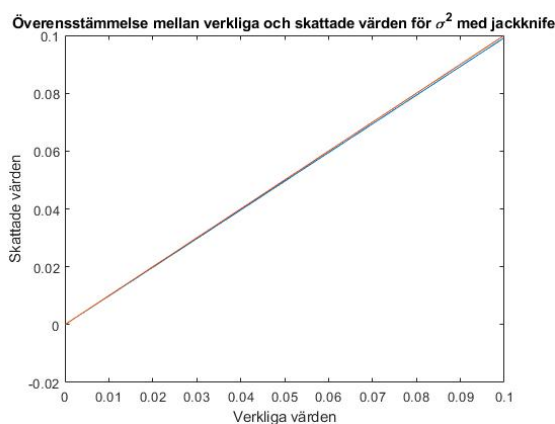
(b) Överensstämmelse mellan verkliga och skattade värden på parametern  $r$  där tekniken med jackknife har använts.

Figur 4.4: Överensstämmelse mellan verkliga och skattade värden på parametern  $r$ . På horisontalaxeln visas de verkliga värdena och på vertikalaxeln visas de skattade värdena.

Resultatet då  $\sigma^2$  antar värden mellan 0 och 0.1,  $\alpha = 0,3$  och  $r = -0,2$  kan vi se i figur 4.5. Både när tekniken med jackknife inte används och när den används ser vi att överensstämmelsen är bra för alla värden på  $\sigma^2$  i det givna intervallet, vilket är en indikation på att förväntningskevheten är liten.



(a) Överensstämmelse mellan verkliga och skattade värden på parametern  $\sigma^2$  där tekniken med jackknife inte har använts.



(b) Överensstämmelse mellan verkliga och skattade värden på parametern  $\sigma^2$  där tekniken med jackknife har använts.

Figur 4.5: Överensstämmelse mellan verkliga och skattade värden på parametern  $\sigma^2$ . På horisontalaxeln visas de verkliga värdena och på vertikalaxeln visas de skattade värdena.

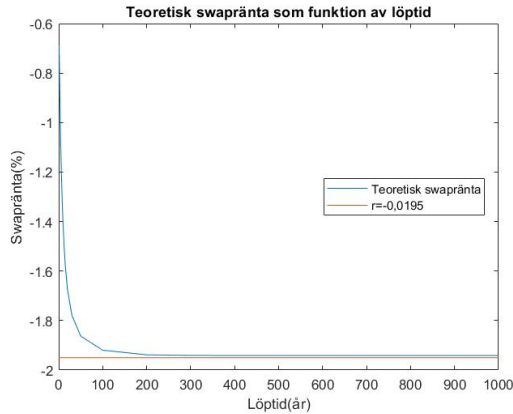
I Appendix B.3 finns tabeller och figurer som visar motsvarande resultat när parametrarna  $\alpha$ ,  $r$  och  $\sigma^2$  antar andra värden och när fler tidsobservationer betraktas.

## 4.4 Swapränta

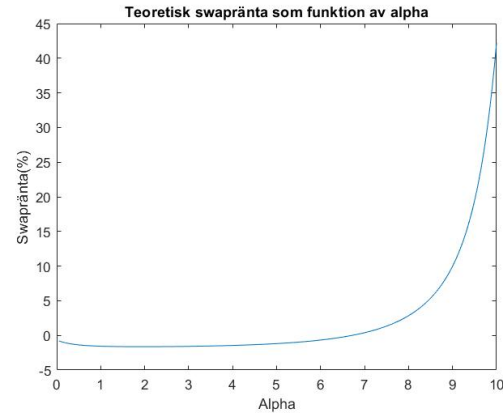
I figur 4.6 presenterar vi de resultat som erhålls vid analys av den teoretiska swapräntan. Vi presenterar resultaten i form av fyra grafer där figur 4.6a visar den teoretiska swapräntan i Vasiceks modell då pa-

parametrar erhållna från dataserien SSVX 1M 2013 - 2018 används. Vidare presenterar vi figurerna 4.6b, 4.6c och 4.6d som visar parametrarna  $\alpha$ ,  $r$  respektive  $\sigma^2$ 's inverkan på den teoretiska swapräntan. Vid beräkningarna har det antagits att betalningarna sker kvartalsvis och en löptid på fem år har använts.

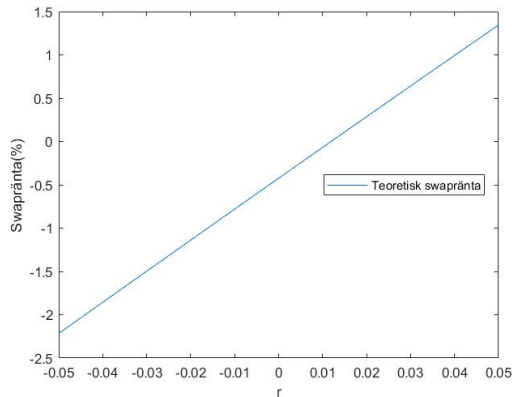
Värdet på den teoretiska swapräntan konvergerar enligt figur 4.6a mot värdet på parametern  $r$ . Konvergensten är förväntad eftersom  $r$  är det långsiktiga medelvärdet på räntan. I figur 4.6b ser vi att den teoretiska swapräntan som funktion av  $\alpha$  ökar kraftigt vid höga värden på  $\alpha$ . Figur 4.6c visar att den teoretiska swapräntan ökar linjärt som funktion av  $r$  och i figur 4.6d ser vi att den teoretiska swapräntan är avtagande då  $\sigma^2$  ökar.



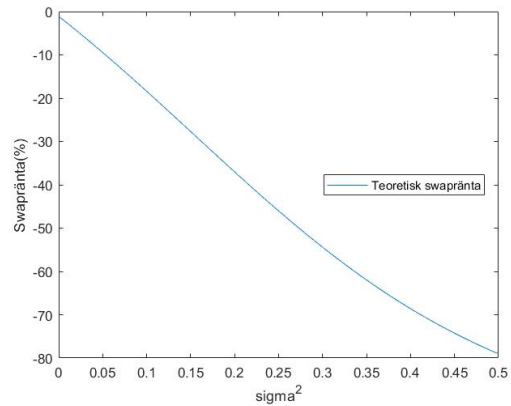
(a) Teoretisk rättvis swapränta uträknad med hjälp av parametrar skattade från SSVX 1M 2013 - 2018.



(b) Teoretisk rättvis swapränta som funktion av parametern  $\alpha$  medan  $r = -0.0195$  och  $\sigma^2 = 0.0000114$ .



(c) Teoretisk rättvis swapränta som funktion av parametern  $r$ . I figuren är  $\alpha = 0,236$  och  $\sigma^2 = 0.0000114$ .



(d) Teoretisk rättvis swapränta som funktion av parametern  $\sigma^2$ . I figuren är  $\alpha = 0,236$  och  $r = -0,0195$ .

Figur 4.6: Erhållna resultat av teoretiska rättvisa swapräntor.

Vidare har teoretisk rättvis swapränta beräknats med hjälp av de parametrar som erhöles från korttidräntorna SSVX 1M 2013-2018. De teoretiska rättvisa swapräntorna presenteras i tabell 4.2 tillsammans med verkliga swapräntor hämtade från SEB [34]. Ur tabellen kan utläsas att de teoretiska swapräntorna uppvisar en negativ trend för längre löptider medan den verkliga uppvisar en positiv trend för längre löptider.

Tabell 4.2: Teoretiska swapräntor beräknade med parameterskattningar från dataserien SSVX 1M 2013 - 2018 samt verkliga swapräntor hämtade från SEB [34]. Vid beräkningarna användes kvartalsvisa betalningar.

Löptid (år)	Teoretisk swapränta (%)	Verklig swapränta (%)
1	-0,69	-0,35
2	-0,82	-0,15
3	-0,94	0,09
4	-1,04	0,32
5	-1,12	0,53
10	-1,42	1,24

## 5 Diskussion

Här diskuterar vi de resultat som erhållits. Diskussionen sker i samma ordning som resultaten presenterades och fungerar som underlag för studiens slutsats kring huruvida det är lämpligt att modellera den svenska statsobligationsmarknaden med Vasiceks modell med parametrar skattade med GMM.

### 5.1 Parameterskattningar

Under studiens gång har vi skattat parametrar på sju dataserier från verkliga observerade korttidsräntor. Dessa skattningar presenteras i tabell 4.1. Tre av dem är ett års historisk korttidsränta med dagliga observationer av olika marknadsräntor (SSVX 1M/ STIBOR T/N). Gemensamt för skattningarna på de tre dataserierna är att de har en hög förväntningskevhets på parametern  $\alpha$ , eftersom de alla har till synes extrema värden på  $\alpha$  samt stora standardavvikelser. En möjlig förklaring till de extrema värdena på  $\alpha$  är att dataserierna med ett års historisk korttidsränta och dagliga observationer har lägre standardavvikelse än resterande dataserier. Förklaringen är rimlig eftersom  $\alpha$ :s innebörd är hastigheten som dataserien konvergerar till det långsiktiga medelvärdet  $r$ . En dataserie med låg standardavvikelse bör således konvergera snabbt mot det långsiktiga medelvärdet och därför ha ett högt värde på parametern  $\alpha$ . Trots de underliga parameterskattningarna förkastas endast en av skattningarna av  $\chi^2$ -testet på en 5 % signifikansnivå, med p-värden på 0,677; 0,124 respektive 0,048.

Om vi studerar de skattningar som gjorts på fem års historisk korttidsränta med veckovisa observationer ser vi att skattningarna på  $\alpha$  antar rimligare värden i enlighet med andra liknande studier, till exempel [19, 23]. Dessutom har skattningarna relativt låga standardavvikelser: 0,3 respektive 0,171 för parametern  $\alpha$  för de två olika dataserierna. Vidare är skattningarna för de två olika dataserierna relativt nära varandra till värdet, vilket är förväntat och stärker skattningarnas trovärdighet eftersom de olika marknadsräntorna är starkt korrelerade. Slutligen, med p-värden på 0,2 respektive 0,268 kan ingen av skattningarna förkastas med  $\chi^2$ -testet. Sammantaget finns alltså flertalet argument som stödjer skattningarnas trovärdighet och användbarhet på fem års historisk korttidsränta med veckovisa observationer.

Slutligen flyttar vi vårt fokus till de skattningar som gjorts för 20 års historisk korttidsränta med månadsvisa observationer. Utmärkande för skattningarna på dessa dataserier är att  $\alpha$  är negativ. Det skulle innebära att korttidsräntan divergerar snarare än konvergerar. Om vi studerar tabell 3.2 ser vi att dataserierna med 20 års historisk korttidsränta har en hög standardavvikelse, vilket är en trolig anledning till varför parametern  $\alpha$  blir negativ. Det är dock tvivelaktigt att den svenska statsobligationsmarknaden kan modelleras med negativt  $\alpha$  eftersom det motsäger principen om återgång till medelvärdet. Vidare kan konstateras att standardavvikelserna för samtliga skattningar på 20 års historisk korttidsränta är relativt låga, vilket talar för att skattningarna skulle kunna vara användbara eftersom vi då får ett litet konfidensintervall för parameterns sanna värde. Skattningarna förkastas

dock av  $\chi^2$ -testet på en 5% signifikansnivå med p-värden på 0,0294 respektive 0,048. Detta talar starkt emot skattningarnas trovärdighet.

De skattningar som gjorts med hjälp av tekniken med jackknive överensstämmer inte med de skattningar som gjorts med hjälp av GMM, vilket ökar osäkerheten kring skattningarnas trovärdighet. Ytterligare diskussion kring skattningar med tekniken med jackknive finns i diskussionen kring förväntningskevheter i avsnitt 5.3.

## 5.2 Avkastning

Figur 4.1 visar att den listade avkastningen övergår från negativ till positiv runt fem års löptid medan den teoretiska avkastningen blir mer och mer negativ desto längre löptiden är. Den svenska statsobligationsmarknadens avkastningskurva (se figur 2.1) har negativ avkastning fram till runt fem års löptid, vilket kan kopplas samman med det negativa ränteläget, och övergår till positiv avkastning för längre löptider. Införskaffandet av en statsobligation är ett utlåning till staten och därför är det rimligt att få högre avkastning ju längre lånets löptid är. För studiens resultat är det önskvärt om graferna som representerar de studerade korttidsräntorna ger ett liknande resultat, vilket ingen av dem gör. Vi ser också att det inte spelar någon roll för resultatet om värdena är från STIBOR eller statsskuldväxlar eftersom de har samma avvikande tendens.

Nollkupongobligationerna analyseras för att ge en indikation på hur bra resultatet är. Det verkliga resultatet representeras av kupongobligationerna som är vanligare att teckna över lång tid. Det är önskvärt om graferna i figur 4.2 har tendenser till att följa formen på den svenska statsobligationsmarknadens avkastning och ge positiv avkastning på lång sikt. Avkastningskurvorna som presenteras i avsnitt 4.2.2 samt i Appendix B.2 konvergerar samtliga mot en negativ avkastning på 20 år vilket inte motsvarar de tendenser som hade behövts för att få ett bra resultat av kupongobligationerna. Genom att titta på de skattade parametrarna vi presenterar i tabell 4.1 kan vi se att flera av dataserierna har negativa värden på  $r$ . Eftersom  $r$  motsvarar det långsiktade väntevärdet av korttidsräntan borde avkastningen bli negativ över längre löptid. De dataserier som har positiva värden på  $r$  borde konvergera mot en positiv avkastning, men istället divergerar de mot den negativa oändligheten. En potentiell anledning till divergensen av avkastningen kan vara att dataserierna också har negativa värden på  $\alpha$ , vilket innebär att korttidsräntan divergerar.

Vi har observerat att det andra och fjärde momentvillkoret i GMM byter tecken för varje tidssteg när korttidsräntan är negativ, vilket skulle kunna orsaka singularitet i momentvillkoren. Det är därför intressant att studera om vår metod fungerar bättre för att modellera positiva räntor. Vi genomförde ett försök med simulerade positiva korttidsräntor i Appendix B.3, vilket inte gav bättre resultat. Därför förkastades denna teori som ett alternativ till studiens resultat. Det bör dock tilläggas att resultaten på den beräknade avkastningen inte nödvändigtvis behöver betyda att de skattade parametrarna är felaktiga. Eftersom de parametrar vi använder oss av i prissättningen av obligationer kommer från observerade värden medan de använda metoderna för att beräkna avkastning baseras på antagandet om riskneutralitet skulle egentligen en omvandling behöva göras för att eliminera marknadens pris för risk. Ett sätt att undvika antagandet om riskneutralitet är att använda Heathon-Jarrow-Morton-metoden (HJM-metoden) istället för att använda GMM för parameterskattningar. HJM-metoden skattar parametrar från den observerade avkastningen och tar därför med justeringen av priset som uppkommer på grund av risk, vilket skulle kunna ge ett bättre resultat på avkastningen från Vasiceks modell [35].

## 5.3 Förväntningskevheter

Ett stort problem som dyker upp när det kommer till parametrar skattade med GMM är att vi saknar uttryck för att beräkna förväntningskevheter. Därför kan vi varken ta reda på storleken på förväntningskevheter eller hur vi får den att försvinna från parameterskattningarna. För att försöka komma

runt problemet används tekniken med jackknife. Genom att studera figur 4.3, 4.4 och 4.5 över förväntningsskevheten för parametrarna  $\alpha$ ,  $r$ , respektive  $\sigma^2$  kan vi dock konstatera att tekniken med jackknife inte ger någon minskning av förväntningsskevheten. Det kan vi konstatera eftersom graferna som representerar parametrar som modifierats med hjälp av tekniken med jackknife inte har ett utseende som är mer likt en rät linje med lutning  $+1$  jämfört med de grafer som representerar originalparametrarna. Tekniken med jackknife användes i den här studien framförallt på grund av dess simplicitet. Det finns flera andra metoder som kan användas för att bli av med förväntningsskevheten men då uppstår istället problemet att de baseras på simulationer och blir på så sätt mycket mer beräkningstunga [36].

Studerar vi återigen figur 4.5 syns det tydligt att parametern  $\sigma^2$  inte har någon förväntningsskevhets, medan det i figur 4.3 och figur 4.4 är tydligt att förväntningsskevheten för  $\alpha$  och  $r$  är hög. Att förväntningsskevheten i dessa fall blir hög beror på att ett litet antal observationer används. I Appendix B.3 återfinns motsvarande grafer när antalet observationer ökas till  $n = 5041$ . Det visar sig att förväntningsskevheten för parametern  $r$  försvinner när antalet observationer ökar. För att bli av med förväntningsskevheten skulle därför en lösning vara att använda dataserier av korttidsräntor med fler observationer än de som använts i studien.

Förväntningsskevheten minskar även för parametern  $\alpha$ , men som vi kan se tendenser av redan i figur 4.3 blir förväntningsskevheten hög då  $\alpha$  antar värden mellan  $-1$  och  $1$ . Vid parameterskattning med andra metoder finns en förklaring till beteendet. I de metoderna är det nämligen möjligt att ta fram ett uttryck för att approximera förväntningsskevheten på de givna parametrarna. När  $\alpha$  närmar sig noll uppstår en singularitet i uttrycket för approximationen, vilket gör approximationen betydligt sämre. Därmed ökar förväntningsskevheten för små värden på  $\alpha$ . För skattningar med metoder som minstakvadratmetoden och maximum likelihood stämmer detta resonemang. Det är dock inte säkert att det kan användas som förklaring till hög förväntningsskevhets för  $\alpha$  vid skattning med GMM [36].

## 5.4 Swapränta

I figur 4.6a ser vi den teoretiska swapräntan som funktion av kontraktets löptid. Från figuren ser vi att den teoretiska swapräntan konvergerar mot parametern  $r$  vid långa löptider, vilket inte är förvånande då parametern  $r$  är det värde som räntan konvergerar mot på lång sikt. Vidare ser vi i figur 4.6b - 4.6d hur den teoretiska nivån på den rättvisa swapräntan påverkas av variationer av parametrarna  $\alpha$ ,  $r$  och  $\sigma^2$ . I figur 4.6b syns den teoretiska swapräntan som funktion av  $\alpha$ . Figuren visar att för tillräckligt stora  $\alpha$  ökar den teoretiska swapräntan kraftigt, vilket är oväntat eftersom höga värden på parametern  $\alpha$  enbart innebär en snabbare konvergens mot den långsiktiga snitträntan. Ett högre värde på  $\alpha$  borde således inte ha någon avsevärd effekt på den rättvisa swapräntan. Varför swapräntan får effekten av höga värden på  $\alpha$  studeras inte vidare. I figur 4.6c ser vi den teoretiska swapräntan som funktion av  $r$ . Swapräntan ökar linjärt med  $r$  vilket är väntat eftersom en högre medelränta även borde innebära en högre swapränta. Slutligen ser vi att den teoretiska swapräntan minskar när  $\sigma^2$  ökar. Vidare visar jämförelsen av de teoretiska och verkliga swapräntorna att de teoretiska swapräntorna har en negativ trend och de verkliga swapräntorna har en positiv trend. Anledningen till den negativa trenden hos de teoretiska swapräntorna är att  $r = -0,0195$ , vilket innebär att korttidsräntan på lång sikt konvergerar mot en negativ ränta. Troligen har SEB en annan bild av den långsiktiga räntan och således därför en positiv trend för swapräntor med längre löptid.

## 6 Slutsats

Syftet med rapporten var att undersöka om Vasiceks modell med parametrar skattade med GMM är lämplig för att modellera avkastningen på den svenska statsobligationsmarknaden. Det programspråk som användes för att implementera modeller och utföra beräkningar var MATLAB.

För att kunna utföra undersökningen började vi med att ta fram historisk korttidsränta på statsskuldväxlar och STIBOR. Dataserierna som användes hade ett, fem och 20 års löptid med dagliga, veckovisa, respektive månadsvisa observationer. Genom att utföra  $\chi^2$ -test, beräkna p-värden och ta fram standardavvikelser för de skattade parametrarna kunde vi undersöka vilka dataserier med korttidsräntor som var mest lämpliga att använda för vidare beräkningar i studien. Vi kan konstatera att dataserierna över statsskuldväxlar och STIBOR med fem års historiska korttidsräntor är de som skulle kunna ge bäst resultat, eftersom standardavvikelserna för alla tre parametrar var relativt små och att skattningarna för de två olika dataserierna var någorlunda överensstämmande. Dessutom kunde ingen av skattningarna på fem års historisk korttidsränta förkastas med  $\chi^2$ -testet, vilket talar för användbarheten av dessa dataserier. Skattningarna på ett års historisk korttidsränta uppvisade dock extrema värden på parametern  $\alpha$  och skattningarna på 20 års korttidsränta förkastades av  $\chi^2$ -testet. Det sammantagna intrycket är därför att det tillvägagångssätt som använts i denna studie för att skatta parametrar ej är lämpligt för att modellera den svenska statsobligationsmarknaden.

När det kommer till avkastningen satte vi in de skattade parametrarna i uttrycket för avkastningen från Vasiceks modell för att sedan jämföra dem med den listade avkastning som fås i verkligheten. I dagsläget ger statsobligationer med en löptid längre än fem år en positiv avkastning och avkastningen ökar ju längre obligationens löptid är. Ett sådant beteende uppnåddes inte då vi beräknade den teoretiska avkastningen efter att ha kalibrerat Vasiceks modell med parametrar skattade med GMM. Våra resultat visade istället på en avkastning som var ständigt negativ, oavsett vilken löptid obligationen hade. Dessutom blev avkastningen lägre med ökad löptid. Ett sådant resultat är varken rimligt eller överensstämmande med verkligheten. Vi kan inte dra någon definitiv slutsats, men resultatet stärker teorin om att Vasiceks modell med parametrar skattade med GMM inte är lämplig för att modellera avkastningen på den svenska statsobligationsmarknaden.

En anledning till varför resultaten i studien inte överensstämmer med vad som kan observeras på den svenska statsobligationsmarknaden kan vara att parameterskattningarna är förväntningsskeva. För att försöka bli av med förväntningsskevheten använde vi tekniken med jackknife. Eftersom förväntningsskevheten snarare blev större än mindre efter att ha använt oss av den kan vi konstatera att tekniken med jackknife inte är lämplig för att bli av med förväntningsskevheten hos parametrarna. Problemet med förväntningsskevheter bör tas i beaktande, vilket helt har undvikits i flera liknande studier som till exempel [21, 24, 37]. Trots att vi kommit fram till att Vasiceks modell med parametrar skattade med GMM inte är lämplig för modellering av avkastningen på den svenska statsobligationsmarknaden är studien ändå viktig eftersom den belyser värdet av att undersöka förväntningsskevheten hos parametrarna. Om förväntningsskevheten inte undersöks finns risken att förväntningsskeva resultat fås, vilket kan ge oönskade konsekvenser om de appliceras i verkligheten med ovissheten om att de är förväntningsskeva.

Till sist såg vi att vår teoretiska beräkning av den rättvisa swapräntan inte heller överensstämmer med listade swapräntor, vilket är ytterligare ett resultat som pekar på att de i studien erhållna parameterskattningarna inte är lämpliga att använda för att modellera avkastningen på den svenska statsobligationsmarknaden.

Avslutningsvis kan vi konstatera att ett intressant område för framtida studier är att implementera en annan parameterskattningsmetod, till exempel minsta kvadrat-skattning. Alternativt skulle andra metoder för att bli av med förväntningsskevheten kunna undersökas. Det är också möjligt att utföra en liknande studie med en annan korttidsräntemodell än just Vasiceks modell för att modellera korttidsräntan eller att utföra en liknande studie med fler observationer. Ur ett ekonomiskt perspektiv blir det också tydligt hur viktigt det är att analysera även etablerade modeller då de inte alltid går att tillämpa på det aktuella området.

## A Ämnesfördjupning

I ämnesfördjupningsavsnittet presenteras och beskrivs finansiella begrepp och modeller som inte är nödvändiga för rapportens huvuddel men som ändå är relevanta för studien. Här presenteras också en fördjupning av matematiska metoder som används under studiens gång.

### A.1 Finansiell fördjupning

I det finansiella fördjupningsavsnittet presenteras två typer av räntor, olika räntemodeller som ibland används istället för Vasiceks modell samt en fördjupning av avkastning och en ekonomisk tolkning av avkastningskurvans potentiella utseenden.

#### A.1.1 Olika typer av räntor

Det finns flera olika typer av räntor. Nedan förklaras terminsränta och korttidsränta.

##### Terminsränta

Räntor som kan tecknas idag för att sedan användas vid en framtida investering kallas terminsräntor. Detta scenario kan illustreras med hjälp av ett exempel där vi antar att vi skapar en portfölj bestående av två olika nollkupongobligationer. För det första ska portföljen bestå av -1 del av den ena obligationen med lösendag  $T > t$ , vilket betyder att vi betalar värdet 1 vid tiden  $T$ . Dessutom ska portföljen bestå av  $\frac{B(t,T)}{B(t,T+\delta)}$  delar av den andra obligationen som upphör vid tiden  $T + \delta$ , vilket betyder att vi får värdet  $\frac{B(t,T)}{B(t,T+\delta)}$  vid tiden  $T + \delta$ . Notera att värdet av den nuvarande portföljen är  $V(t) = 0$ . Utifrån detta kan vi se att en investering vid tiden  $t$  är ekvivalent med en framtida investering i tidsintervallet  $[T, T + \delta]$  med en avkastning  $Y_\delta(t, T)$ . Avkastningen, som också benämns diskreta terminsräntan på intervallet  $[T, T + \delta]$  som tecknas vid tiden  $t$ , ges av

$$Y_\delta(t, T) = \frac{1}{\delta} \left( \frac{B(t, T)}{B(t, T + \delta)} - 1 \right) = \frac{B(t, T) - B(t, T + \delta)}{\delta B(t, T + \delta)}. \quad (\text{A.1})$$

Här är den stokastiska variabeln  $B(t, T)$  värdet av en nollkupongobligation vid tiden  $t$  med lösendag  $T > t$  [38].

Genom att låta  $0 \leq t \leq T \leq S$ , där alla nollkupongobligationer i marknaden har upphört före tiden  $S$ , samt låta  $\delta$  gå mot noll i ekvation (A.1), fås den momentana terminsräntan  $F(t, T)$  som definieras enligt

$$F(t, T) = \lim_{\delta \rightarrow 0} Y_\delta(t, T) = -\frac{1}{B(t, T)} \frac{\partial B(t, T)}{\partial T} = -\frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T}. \quad (\text{A.2})$$

Från ekvation (A.2) får vi ekvationen

$$B(t, T) = \exp\left(-\int_t^T F(t, v) dv\right)$$

som används för att beräkna värdet på en nollkupongobligation som tecknas vid tiden  $t$  och har lösendag  $T > t$  [38].

##### Korttidsränta

Med korttidsränta menas den ränta som pengar kan lånas för med en mycket kort löptid. Korttidsräntemodeller som till exempel Vasiceks modell använder sig av modeller av korttidsräntan för att generera priser på räntederivat. Korttidsräntan  $x_t$  vid tiden  $t$  kan matematiskt uttryckas som

$$x_t = \lim_{T \rightarrow t^+} F(t, T),$$

där  $F(t, T)$  är den momentana terminsräntan. [39].



### A.1.2 Räntemodeller

Utöver Vasiceks modell finns flera andra matematiska modeller som används för att beskriva utvecklingen av framtida räntor och för att värdera räntederivat. Nedan följer en kort presentation av några sådana räntemodeller, vissa väldigt lika och andra väldigt olika Vasiceks modell.

#### Dothans modell

Året efter Vasiceks modell presenterades, det vill säga år 1978, presenterades en modell av Michael Dothan. I Dothans modell kan korttidsräntan  $x_t$  bestämmas med hjälp av den stokastiska differentialekvationen

$$dx_t = \alpha x_t dt + \sigma x_t dW_t,$$

där  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  och  $W_t$  är en Brownsk rörelse [38]. Genom att låta  $0 \leq s \leq t \leq T$  och  $T$  vara lösendagen fås

$$x_t = x_s \exp\left\{\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s) + \sigma(W_t - W_s)\right\}.$$

Notera att korttidsräntan  $x_t$  i Dothans modell är lognormalfördelad och därmed alltid positiv. Att korttidsräntan endast kan anta positiva värden bedöms ofta vara en bra egenskap men om den ska appliceras på marknader med negativa räntor, som i detta fall svenska statsobligationsmarknaden, är det en nackdel. Dessutom har modellen egenskapen att den återgår till medelvärdet om och endast om  $\alpha < 0$ . [38].

#### Cox, Ingersoll och Ross modell

År 1985 introducerades Cox, Ingersoll och Ross modell, även kallad CIR-modellen av John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll och Stephen A. Ross som en utvidgning av Vasiceks modell [19]. CIR-modell används mycket än idag. I modellen antas korttidsräntan  $x_t$  uppfylla den stokastiska differentialekvationen

$$dx_t = \alpha(r - x_t)dt + \sigma\sqrt{x_t}dW_t, \tag{A.3}$$

där  $\alpha$ ,  $r$  och  $\sigma$  är positiva konstanter och  $W_t$  är en Brownsk rörelse.

Precis som för Vasiceks modell är egenskapen att återgå till medelvärdet bevarad. Räntorna dras således tillbaka till en långsiktig genomsnittlig nivå över tiden. Det finns dock också några skillnader mellan CIR-modellen och Vasiceks modell. För det första finns inte någon explicit formel för korttidsräntan  $x_t$  i CIR-modellen, men däremot är fördelningen av  $x_t$  känd (som mer precist är en  $\chi^2$ -fördelning). För det andra är det inte möjligt att med CIR-modellen hantera negativa räntor på grund av kvadratrotten  $\sqrt{x_t}$  i ekvation (A.3), vilket var anledningen till att Cox, Ingersoll och Ross valde att införa kvadratrottermen i sin modell. En ränta på noll är också utesluten eftersom det i modellen antas att  $2\alpha r > \sigma^2$  [38]. Konsekvenserna av detta är att CIR-modellen inte är en lämplig matematisk modell att applicera på den svenska statsobligationsmarknaden på grund av det rådande negativ ränteläget.

#### Hull och Whites modell

John C. Hull och Alan White presenterade sin första Hull- och White-modell år 1990. Modellen är en utvidgning av Vasiceks modell och CIR-modellen. Korttidsränta  $x_t$  kan här beskrivas med hjälp av de positiva konstanterna  $\alpha$  och  $\sigma$ , den deterministiska funktionen  $\theta(t)$  och den Brownska rörelsen  $W_t$  [38]. Mer exakt gäller att

$$dx_t = \alpha(\theta(t) - x_t)dt + \sigma dW_t. \tag{A.4}$$

Den deterministiska funktionen  $\theta(t)$  används för att modellen bättre ska kunna anpassas till den riktiga marknaden [38].

Diskretiserar vi den stokastiska differentialekvationen (A.4) givet att  $0 \leq s \leq t \leq T$ , där  $T$  representerar lösendagen, får vi

$$x_t = x_s e^{\alpha(s-t)} + \alpha \int_s^t \theta(u) e^{\alpha(u-t)} du + \sigma \int_s^t e^{\alpha(u-t)} dW_u.$$

Eftersom korttidsräntan  $x_t$  är normalfördelad för varje tidpunkt  $t$  i Hull och Whites modell leder det till att även negativa räntor kan hanteras. En annan likhet med Vasicek modell är att priser och avkastningar går tillbaka till medelvärdet över tid [38].

### Black, Derman och Toys modell

Ytterligare en matematisk modell föreslogs år 1990 och denna gång av Fischer Black, Emanuel Derman och Bill Toy. Modellen beskrivs av formeln

$$d \ln x_t = (\theta(t) - a(t) \ln x_t) dt + \sigma(t) dW_t$$

och används mycket än idag. I den stokastiska differentialekvation är  $a(t) = -\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}$ ,  $\theta$  och  $\sigma$  är funktioner av  $t$  och  $W_t$  är en Brownsk rörelse [30]. Modellen var den första som kombinerade egenskapen angående återgång till medelvärdet med lognormalfördelning. På grund av lognormalfördelningen kan inte räntorna anta negativa värden vilket utesluter en applicering på den svenska statsobligationsmarknaden.

I praktiken är Black, Derman och Toys modell mest användbar när det antas att  $\sigma(t)$  är en konstant. Då blir  $a(t)$  lika med noll [30], vilket i sin tur medför att det inte finns någon återgång till medelvärdet och modellen reduceras till

$$d \ln x_t = \theta(t) dt + \sigma dW_t.$$

### Black och Karasinskis modell

Fisher Black och Piotr Karasinski antog år 1991 att den naturliga logaritmen av korttidsräntan  $\ln x_t$  utvecklas enligt

$$d \ln x_t = (\theta(t) - a(t) \ln x_t) dt + \sigma(t) dW_t.$$

Här är  $\theta(t)$ ,  $a(t)$  och  $\sigma(t)$  deterministiska funktioner beroende av tid, vilka kan väljas för att passa den initiala avkastningskurvan eller en marknads volatilitetskurva [38], och  $W_t$  är en Brownsk rörelse. Black och Karasinskis modell utgör ett särskilt fall av Hull och Whites modell [40] och är en generalisering av Black, Derman och Toys modell, formulerad i kontinuerlig tid [38].

Eftersom beräkningar på flera olika finansiella derivat är baserade på antagandet att räntorna är lognormalfördelade har samma antagande gjorts när det kommer till att modellera korttidsräntan med Black och Karasinskis modell. Vidare är modellen fördelaktig eftersom den har en god anpassningsförmåga till marknaden, vilket har gjort den populär bland användarna [38]. Modellen kan dessvärre av sin natur inte generera negativa räntor och är därför inte lämplig att applicera på den svenska statsobligationsmarknaden.

### A.1.3 Avkastningskurva

Informationen i avkastningskurvan kan användas för att dra slutsatser kring rådande och framtida ekonomiska faktorer. I [41] presenteras fem huvudsakliga användningsområden för avkastningskurvan: att fastställa avkastning på den resterande skuldmarknaden, ge ledtrådar om framtida avkastningsnivåer, jämföra avkastning för olika lösendagar, ge information om det relativa värdet på olika obligationer med samma lösendag, samt prissättning av räntederivat. Avkastningskurvan kan anta oändligt många former, några vanligt förekommande former i relevant litteratur är: normal, omvänd, platt, brant och pucklig.

#### Normal

Avkastningskurvan har vanligtvis en positiv lutning när den sägs ha normal form. När avkastningskurvan har en positiv lutning innebär det att obligationer med en längre lösendag har högre avkastning. Den positiva lutningen har två huvudsakliga förklaringar. Den ena är att marknaden förväntar sig en ökning av den riskneutrala räntan, vilket resulterar i att investerare avstår från att investera med förhoppning om att få en bättre avkastning i framtiden. Investerare som köper statsobligationer trots förväntningar om högre avkastning i framtiden, kompenseras i form av en högre avkastning på obligationerna och således är avkastningen högre för obligationer med en lösendag längre fram. Den andra anledningen är att obligationer med längre tid till lösendag innebär en högre risk för inflation och investerare kräver därför en riskpremie i form av högre avkastning på obligationer med längre löptid [42].

#### Omvänd

Med en omvänd avkastningskurva menas en kurva med negativ lutning, vilket innebär att obligationer med lång löptid har lägre avkastning än de med kort tid till lösendag. Det innebär alltså att de obligationer med lång löptid kommer få lägre och lägre avkastning, vilket kan spegla ekonomisk recession [42].

#### Platt

En platt avkastningskurva kan uppstå som en följd av förändringar i ekonomin från en normal eller omvänd avkastningskurva. När ekonomin genomgår förändringar från en normal avkastningskurva sjunker förväntningarna för avkastningen på obligationerna med lång löptid och avkastningen för obligationer med kort löptid ökar. Detta leder till ett skifte i avkastningskurvans utseende och leder till att den blir platt. På samma sätt gör en förändring från en ekonomisk recession att avkastningskurvan genomgår motsvarande skifte i form av utseende [42]. Detta utseende signalerar osäkerhet i rådande ekonomisk marknad och ekonomiska nedgångar kan ibland även förutspås av en platt avkastningskurva [3].

#### Brant

När en avkastningskurva är brant antas det bero på en signifikant höjning av räntorna i framtiden eller en signifikant sänkning av korttidsräntorna med kort tid till lösendag i förhållande till de med längre löptid. Detta har ofta varit en indikation på en ekonomisk uppgång och kan leda till höjd inflation [3].

#### Pucklig

En pucklig avkastningskurva uppstår då de obligationer med lång och kort löptid ger samma avkastning men obligationer med medellång löptid ger högre. Detta visar att förväntningarna på avkastningen med lång tid till lösendag är betydligt lägre än de med medellång tid. Detta kan ibland uppstå som följd av skeva förväntningar på framtida avkastning. En annan vanlig förklaring till att avkastningskurvan får ett puckligt utseende ligger i teorin om den föredragna miljön<sup>12</sup> [44].

<sup>12</sup>En teori om att investerare bara är intresserade av att köpa obligationer med kort tid till lösendag och egentligen bara är intresserade av att investera på längre sikt om det ges en särskilt riskpremie för detta [43].

## A.2 Matematisk fördjupning

För att få en bättre förståelse för förväntnings skevhet, Newtons metod, momenten som används vid skattningar med GMM, hur skattningar av parametrar på genererade dataserier görs samt autokorrelationsfunktionen, presenteras här en utförlig förklaring av de ovan nämnda matematiska metoderna och begreppen.

### A.2.1 Förväntnings skevhet

Matematiskt definieras förväntnings skevhet hos en parameterskattning enligt definition A.1.

**Definition A.1.** *En skattad parameter  $\hat{\theta}$  är förväntnings skev om  $\mathbb{E}[\hat{\theta}] \neq \theta$ . Om  $\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta$  finns ingen förväntnings skevhet hos den skattade parametern [28].*

### A.2.2 Newtons metod

Newtons metod används för att approximera en funktions nollställen, vilket görs genom att successivt hitta bättre approximationer för rötterna till en reellvärd funktion, ofta  $x : f(x) = 0$ .

För funktioner av en variabel implementeras metoden på följande vis. Vi börjar med att välja ett startvärde  $x_0$ , det vill säga en initial uppskattning av funktionens rot. Därefter approximeras funktionen med dess tangent i punkten  $(x_0, f(x_0))$  och skärningspunkten av tangenten och  $x$ -axeln beräknas. Skärningspunktens  $x$ -värde är nu typiskt en bättre uppskattning av funktionens rot än den initiala gissningen  $x_0$ . Metoden itereras sedan för att få ett värde  $x$  som är tillräckligt nära den verkliga roten.

Antag att  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  är en deriverbar funktion. Då kan formeln för konvergens av roten enkelt härledas. Antag att vi har en nuvarande approximation  $x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Då kan vi härleda formeln för en bättre approximation  $x_{n+1}$  genom att först beräkna tangenten till kurvan  $y = f(x)$  i punkten  $x = x_n$  som

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n). \quad (\text{A.5})$$

Skärningspunkten för tangenten och  $x$ -axeln är det värde på  $x$  sådant att  $y = 0$ . Därför sätter vi  $y = 0$  i ekvation (A.5) och löser därefter ut  $x_{n+1}$ , vilket resulterar i

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (\text{A.6})$$

När  $n \rightarrow \infty$  konvergerar ekvation (A.6) mot den verkliga roten [45].

### A.2.3 Moment

Det  $n$ :te momentet av en reell, kontinuerlig funktion  $f(x)$  av en reell variabel kring ett värde  $c$  definieras som

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^n f(x) dx.$$

Första ordningens moment representeras av en funktions väntevärde, vilket betecknas som  $\mu = \mathbb{E}[X]$ .

Andra ordningens moment är variansen av funktionen, vilket ofta betecknas med  $\sigma^2$  och uttrycks som  $\sigma^2 = \mathbb{E}[(X - \mu)^2]$ .

Tredje ordningens moment är funktionens skevhet, ofta betecknad med  $\gamma$  och definierad som  $\gamma = \mathbb{E}[(X - \mu)^3]$ . Skevheten är ett mått på asymmetrin hos en sannolikhetsfördelning av en reellvärd slumpvariabel kring dess medelvärde. En fördelning som är skev åt vänster det vill säga att fördelningsfunktionen svans är längre till vänster, har negativ skevhet medan en fördelning som är skev åt

höger har positiv skevhet.

Fjärde ordningens moment är funktionens kurtosis, vilken betecknas olika beroende på litteratur men ett vanligt notationsval är  $\kappa = \mathbb{E}[(X - \mu)^4]$ . Kurtosisen hos en sannolikhetsfördelning är ett mått på hur sannolika de extrema utfallen är. En fördelning med långa svansar har en hög kurtosis, medan fördelningar med färre extrema utfall har en lägre kurtosis [46].

#### A.2.4 Skattning av parametrar på genererade dataserier

För att testa hur väl de skattade parametrarna överensstämmer med de verkliga parametrarna har ett antal skattningar på genererade dataserier gjorts. För att förstå hur dataserierna har genererats studerar vi den stokastiska differentialekvationen i Vasiceks modell:

$$dx_t = \alpha(r - x_t)dt + \sigma dW_t.$$

Denna stokastiska differentialekvation kan approximeras med följande diskretisering

$$x_{t+1} - x_t = \alpha(r - x_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}(W_{t+1} - W_t), \quad (\text{A.7})$$

där  $W_t$  är en Brownsk rörelse. Eftersom den Brownska rörelsen är fördelad enligt

$$W_t - W_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

kan en dataserie med parametrarna  $\alpha$ ,  $r$  och  $\sigma^2$  genereras med hjälp av ekvation (A.7) och en slumpgenerator [47]. Genom att låta  $x_1 = 0$  genererar vi alltså dataserien med hjälp av

$$x_{t+1} = x_t + \alpha(r - x_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\mathcal{N}(0, 1),$$

där  $\mathcal{N}(0, 1)$  motsvarar oberoende identiskt fördelade genererade slumpantal från standardnormalfördelningen.

#### A.2.5 Autokorrelation

Om  $X$  är en tidsserie där  $X = (X_t, t \in \mathbb{N})$ , ges medelvärdet  $\bar{X}_n$  av  $X$  av

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t,$$

där  $n$  är antalet värden i tidsserien. Dataseriens autokovariansfunktion  $\hat{\gamma}$  definieras enligt

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (X_{t-h} - \bar{X})(X_t - \bar{X}),$$

där tidsskillnaden  $h = 0, \dots, n - 1$ . Vidare ges autokorrelationsfunktionen  $\hat{\rho}$  [48] av

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}.$$

Autokorrelationsfunktionen används för att undersöka om datapunkterna, i vårt fall korttidsräntorna, i tidserierna är beroende av varandra. För att kunna anta att räntorna i den aktuella tidsserien är oberoende ska 95% av alla värden på autokorrelationer ligga inom ett intervall centrerat runt horisontalaxeln som begränsas av signifikansnivån  $\frac{1.96}{\sqrt{n}}$ . Om två räntor är helt oberoende av varandra är korrelationen lika med noll.

Värdet på tidsskillnaden  $h$  kan bestämmas utifrån önskad undersökning av beroende. Om värdet  $h$  är ett, undersöks beroendet mellan två efterföljande räntor. Om värdet på  $h$  är större undersöks varje steg upp till  $h$ . Till exempel om  $h = 10$ , då undersöks först beroendet mellan två efterföljande räntor, sedan räntor med ett tidssteg emellan och så vidare upp till räntor med nio tidssteg emellan.

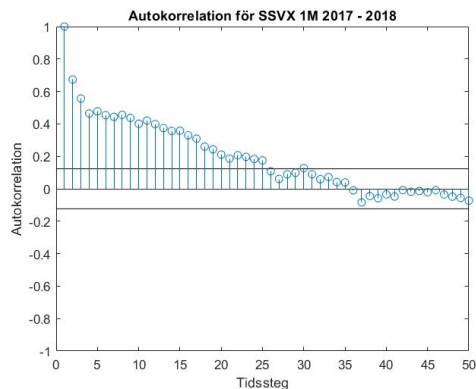
## B Utökad resultat och diskussion

I Appendix B presenteras de resultat och diskussioner som gjorts under studiens gång men som inte faller inom studiens direkta räckvidd. Resultaten och diskussionerna innefattar analys av de historiska korttidsräntornas autokorrelation, analys av teoretiska avkastningskurvor för samtliga dataserier av korttidsräntor samt utökad analys av förväntningsskevheten hos parameterskattningarna.

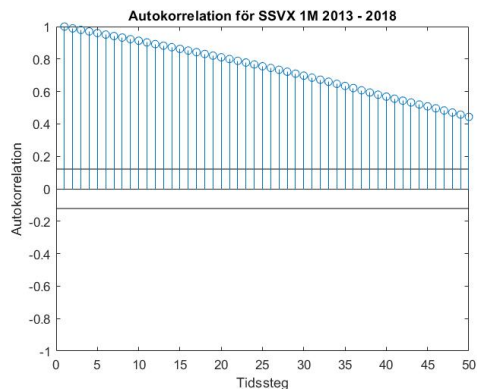
### B.1 Autokorrelation

I figur B.1 - B.4 presenterar vi de delar av autokorrelationsresultatet som inte fick plats i huvuddelen. Vi har undersökt autokorrelationen för korttidsräntorna i de sju dataserier som använts. Undersökningen har gjorts för upp till 50 tidsskillnader och resultaten presenteras därför med en graf med tidsskillnad på horisontalaxeln och autokorrelation på vertikalaxeln.

Genom att studera figur B.1 - B.4 kan vi observera att autokorrelationen är hög i samtliga fall, speciellt då tidsskillnaden är liten. Inte i någon av figurerna håller sig autokorrelationen inom de horisontella linjerna som representerar signifikansnivån, vilket indikerar att de studerade korttidsräntorna är beroende.

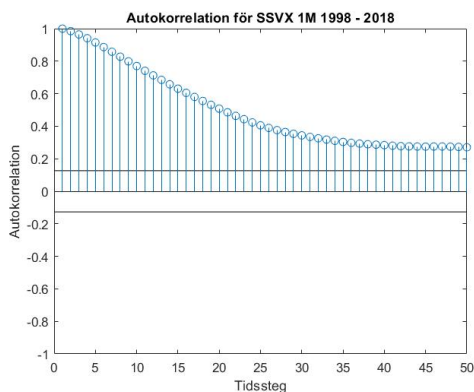


(a) Autokorrelation för svenska stadsskuldväxlar med en månads lösendag. Observationerna är dagliga och sträcker sig från 2017-03-21 till 2018-03-21.

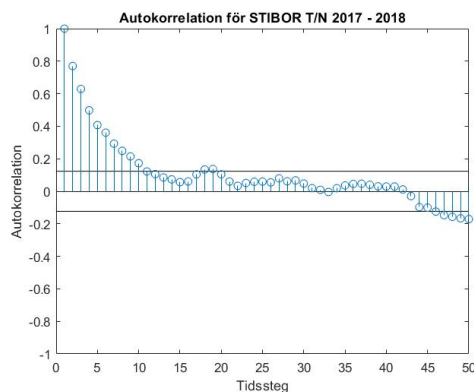


(b) Autokorrelation för svenska stadsskuldväxlar med en månads lösendag. Observationerna är dagliga och sträcker sig från 2013-03-21 till 2018-03-21.

Figur B.1: Autokorrelation för svenska statsskuldväxlar med en månads lösendag för olika tidsspann.

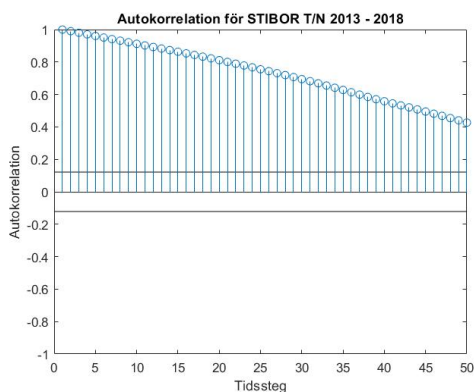


(a) Autokorrelation för svenska statsskuldväxlar med en månads lösendag. Observationerna är månadsvisa och sträcker sig mellan 1998-03-21 till 2018-03-21.

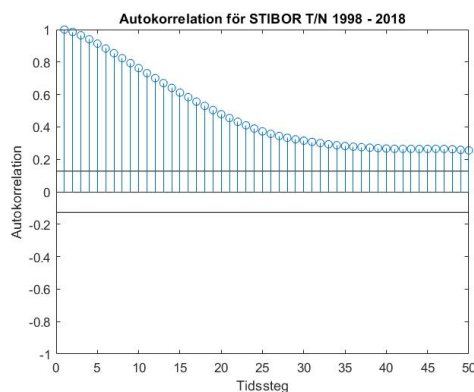


(b) Autokorrelation för STIBOR T/N. Observationerna är dagliga och sträcker sig mellan 2017-03-21 till 2018-03-21.

Figur B.2: Autokorrelation för svenska statsskuldväxlar respektive STIBOR för olika tidsspann.

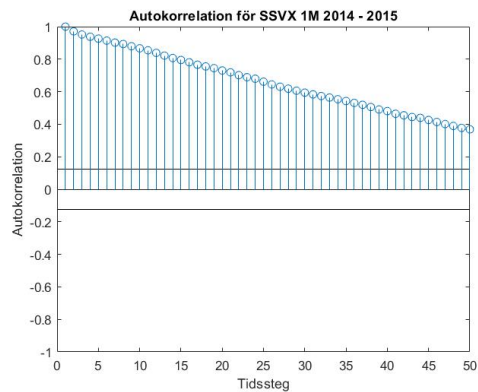


(a) Autokorrelation för STIBOR T/N. Observationerna är veckovisa och sträcker sig från 2013-03-21 till 2018-03-21.



(b) Autokorrelation för STIBOR T/N. Observationerna är månadsvisa och sträcker sig från 1998-03-21 till 2018-03-21.

Figur B.3: Autokorrelation för STIBOR T/N för olika tidsspann.

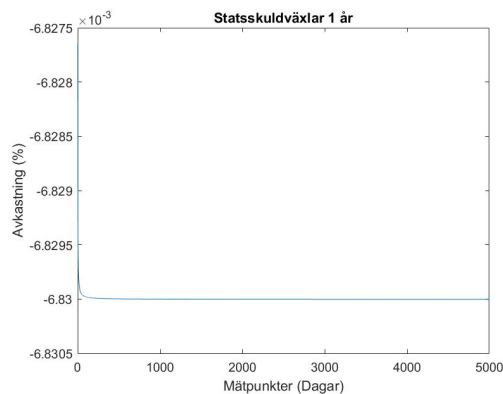


Figur B.4: Autokorrelation för statsskuldväxlar med en månads lösendag, 2014-08-06 - 2015-08-06.

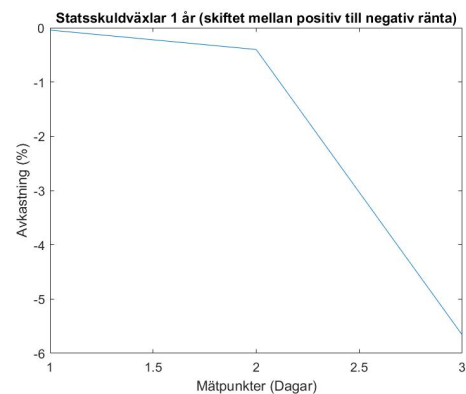
## B.2 Avkastning

Utöver de avkastningskurvor för nollkupongobligationer som redovisas i 4.2.2 undersöker vi avkastningen för resterande dataserier av korttidsräntor med tillhörande parametrar. I figur B.5 - B.7 återfinns grafer över avkastningen som beräknats från respektive dataserie av korttidsräntor. Avkastningskurvor beräknas med hjälp av den metodik som presenteras i avsnitt 3.3.

I figur B.5a kan vi observera att när parametrar skattas från statsskuldväxlar observerade från perioden 2017-2018 konvergerar grafen över avkastningen mot negativa värden i likhet med avkastningskurvorna som presenteras i 4.2.2. Till skillnad från utseendet i figur B.5a ser vi i figur B.5b att grafen över avkastningen är divergerande och konkav när parametrar skattas från statsskuldväxlar från perioden 2014-2015.



(a) Avkastningskurva framräknad med parametrar skattade från korttidsräntor SSVX 1M 2017 - 2018.

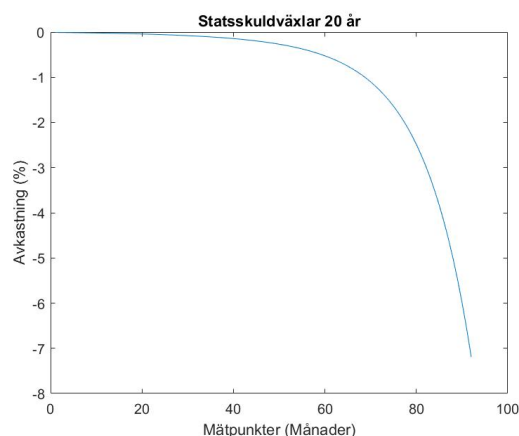


(b) Avkastningskurva framräknad med parametrar skattade från korttidsräntor SSVX 1M 2014 - 2015.

Figur B.5: Avkastningskurva framräknad med parametrar skattade från korttidsräntor SSVX 1M för två olika tidsspann.

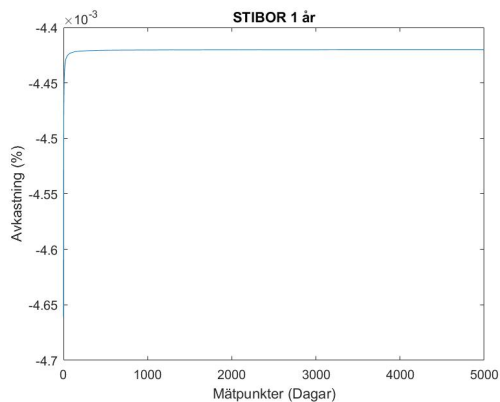
I likhet med figur B.5b visar figur B.6 en avkastningskurva som är konkav och divergerar mot negativa oändligheten när parametrar skattas från statsskuldväxlar observerade från perioden 1998-2018.



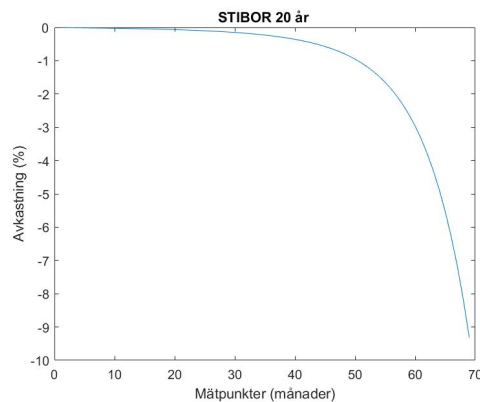


Figur B.6: Avkastningskurva framräknad med parametrar skattade från korttidsräntor SSVX 1M 1998 - 2018.

Figur B.7a visar en avkastningskurva som är konkav, men som på sikt konvergerar mot en negativ ränta då parametrar skattas från STIBOR observerade från perioden 2017-2018. I figur B.7b visas avkastningen när parametrar skattas från STIBOR observerade från perioden 1998-2018. Vi ser en konkav kurva där avkastningen divergerar mot negativa oändligheten, precis som kurvorna i figur B.5b och B.6. Ur ett ekonomiskt perspektiv skulle en divergerande avkastning innebära att investeringen ger oändligt negativ ränta på sikt, vilket gör det tydligt att tillämpningen stämmer dåligt överens med verkligheten.



(a) Avkastningskurva framräknad med parametrar skattade från korttidsräntor STIBOR T/N 2017 - 2018.



(b) Avkastningskurva framräknad med parametrar skattade från korttidsräntor STIBOR T/N 1998 - 2018.

Figur B.7: Avkastningskurva framräknad med parametrar skattade från korttidsräntor STIBOR T/N för olika tidsspann.

Eftersom ingen av dataserierna över korttidsräntor som används i studien någonsin ger en positiv avkastning på nollkupongobligationer kan vi konstatera att vi inte kommer att kunna reproducera avkastningskurvan på den svenska statsobligationsmarknaden. Anledningen är att kupongobligationer beräknas som summor av nollkupongobligationer och om nollkupongobligationerna är ständigt negativa kan inte heller kupongobligationerna ge positiv avkastning. Därför kommer inte någon ytterligare beräkning av avkastningen ske för kupongobligationer än den som är presenterad i avsnitt 4.2.1.

### B.3 Förväntningskevheter

För att testa hur väl GMM fungerar för att skatta parametrar till Vasiceks modell genereras ett antal dataserier av korttidsräntor med varierande värden på parametrarna  $\alpha$ ,  $r$  och  $\sigma^2$  på det sätt som beskrivs i Appendix A.2.4. Vi använder oss sedan av GMM för att skatta parametrar från dataserierna av korttidsräntor. Vid testerna används  $\Delta t = 1/252$  samt  $\Delta t = 1/12$ , vilket motsvarar dagliga respektive månadsvisa observationer. Vidare används varierande värden på antalet observationer  $n$  och olika storleksordningar på parametrarna  $\alpha$ ,  $r$  och  $\sigma^2$ . Resultaten presenteras i tabell B.1 - B.3 där enskilda värden på parametrarna kan utläsas, samt i figur B.8 - B.10 där de skattade värdena på parametrarna visualiseras som funktion av parametrarnas verkliga värden.

I tabell B.3 är värdet på parametern  $r$  positivt. Att ett positivt  $r$  används beror på att det andra och fjärde momentvillkoret byter tecken i varje delsumma när korttidsräntan är negativ, vilket kan ge upphov till en singularitet. Därför undersöker vi om skattningarna blir bättre för positiva räntor. I tabell B.1 och B.2 ser vi att förväntningskevheter är större när  $\alpha$  antar värden nära noll, vilket är i linje med resultaten som presenteras i avsnitt 4.3. I tabell B.3 ser vi att förväntningskevheter är lika stor då positiva korttidsräntor används för skattningarna.

Tabell B.1: Skattade parametrar av dataserier som är fördelade enligt Vasiceks modell med  $\Delta t = 1/252$  och varierande antal observationer. Parametern  $r$  är negativ i samtliga dataserier i denna tabell.

	$\alpha$	$r$	$\sigma^2$	$\hat{\alpha}$	$\hat{r}$	$\hat{\sigma}^2$
<b>Dataserie 1</b> $\Delta t = 1/252, n = 252$	0,03	-0,002	0,00005	7,5	-0,0028	0,000048
<b>Dataserie 2</b> $\Delta t = 1/252, n = 252$	0,3	-0,2	0,005	7,5	-0,027	0,0048
<b>Dataserie 3</b> $\Delta t = 1/252, n = 252$	3	-2	0,5	4,7	-1,8	0,49
<b>Dataserie 4</b> $\Delta t = 1/252, n = 1260$	0,03	-0,002	0,00005	2,4	-0,00098	0,000051
<b>Dataserie 5</b> $\Delta t = 1/252, n = 1260$	0,3	-0,2	0,005	1,1	-0,13	0,005
<b>Dataserie 6</b> $\Delta t = 1/252, n = 1260$	3	-2	0,5	3,8	-2	0,5
<b>Dataserie 7</b> $\Delta t = 1/252, n = 5040$	0,03	-0,002	0,00005	0,3817	0,0079	0,0001
<b>Dataserie 8</b> $\Delta t = 1/252, n = 5040$	0,3	-0,2	0,005	0,44	-0,17	0,0051
<b>Dataserie 9</b> $\Delta t = 1/252, n = 5040$	3	-2	0,5	2,8	-2	0,51

Tabell B.2: Skattade parametrar av dataserier som är fördelade enligt Vasiceks modell med  $\Delta t = 1/12$  och varierande antal observationer.

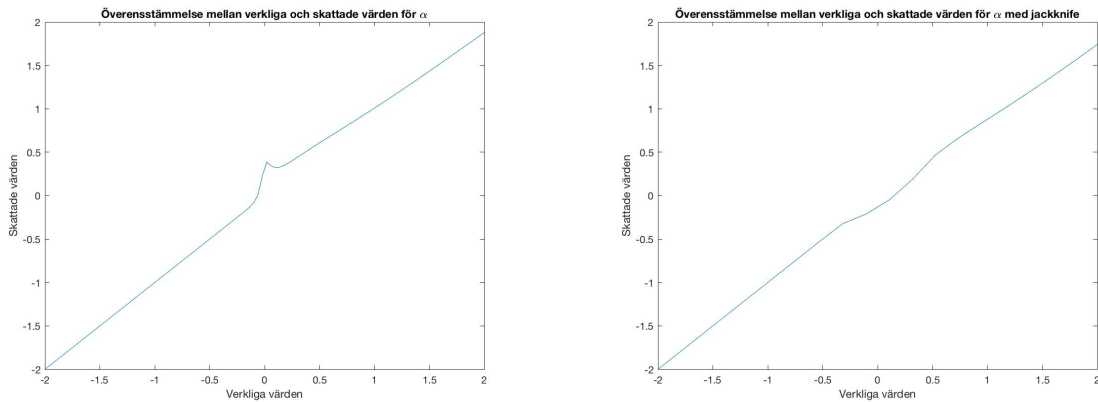
	$\alpha$	$r$	$\sigma^2$	$\hat{\alpha}$	$\hat{r}$	$\hat{\sigma}^2$
<b>Dataserie 1</b> $\Delta t = 1/12, n = 241$	0,03	-0,002	0,00005	0,67 (0,068)	-0,0082 ( $5,6 \cdot 10^{-6}$ )	0,000049 ( $2 \cdot 10^{-11}$ )
<b>Dataserie 2</b> $\Delta t = 1/12, n = 241$	0,3	-0,2	0,005	0,093 (0,022)	-0,25 (0,099)	0,0046 ( $1,6 \cdot 10^{-7}$ )
<b>Dataserie 3</b> $\Delta t = 1/12, n = 241$	3	-2	0,5	3,2 (0,27)	-2 (0,0025)	0,52 (0,002)
<b>Dataserie 4</b> $\Delta t = 1/12, n = 1201$	0,03	-0,002	0,00005	0,11 (0,0023)	0,0087 (0,000038)	0,000047 ( $3,4 \cdot 10^{-12}$ )
<b>Dataserie 5</b> $\Delta t = 1/12, n = 1201$	0,3	-0,2	0,005	0,3 (0,0054)	-0,2 (0,00056)	0,0051 ( $4,1 \cdot 10^{-8}$ )
<b>Dataserie 6</b> $\Delta t = 1/12, n = 1201$	3	-2	0,5	2,8 (0,059)	-2 (0,00066)	0,52 (0,00045)
<b>Dataserie 7</b> $\Delta t = 1/12, n = 4801$	0,03	-0,002	0,00005	0,015 (0,000083)	-0,017 (0,00055)	0,000049 ( $8,9 \cdot 10^{-13}$ )
<b>Dataserie 8</b> $\Delta t = 1/12, n = 4801$	0,3	-0,2	0,005	0,33 (0,0016)	-0,2 (0,00012)	0,0053 ( $1,2 \cdot 10^{-8}$ )
<b>Dataserie 9</b> $\Delta t = 1/12, n = 4801$	3	-2	0,5	3,1 (0,013)	-2,1 (0,00013)	0,5 (0,0001)

Tabell B.3: Skattade parametrar av dataserier som är fördelade enligt Vasiceks modell med  $\Delta t = 1/252$  och varierande antal observationer. Parametern  $r$  är positiv i samtliga dataserier i denna tabell.

	$\alpha$	$r$	$\sigma^2$	$\hat{\alpha}$	$\hat{r}$	$\hat{\sigma}^2$
<b>Dataserie 1</b> $\Delta t = 1/252, n = 252$	0,03	0,002	0,00005	3,7 (21)	0,00039 ( $3,6 \cdot 10^{-7}$ )	$4,7 \cdot 10^{-6}$ ( $1,6 \cdot 10^{-13}$ )
<b>Dataserie 2</b> $\Delta t = 1/252, n = 252$	0,3	0,2	0,005	3,2 (8)	0,045 (0,00085)	0,0051 ( $2 \cdot 10^{-7}$ )
<b>Dataserie 3</b> $\Delta t = 1/252, n = 252$	3	2	0,5	5,7 (2,9)	1,5 (0,021)	0,49 (0,0016)
<b>Dataserie 4</b> $\Delta t = 1/252, n = 1260$	0,03	0,002	0,00005	0,91 (0,38)	-0,0046 (0,000011)	0,000048 ( $3,6 \cdot 10^{-12}$ )
<b>Dataserie 5</b> $\Delta t = 1/252, n = 1260$	0,3	0,2	0,005	0,53 (0,31)	-0,0025 (0,0032)	0,0044 ( $3,1 \cdot 10^{-8}$ )
<b>Dataserie 6</b> $\Delta t = 1/252, n = 1260$	3	2	0,5	2,4 (0,44)	1,9 (0,019)	0,51 (0,00037)
<b>Dataserie 7</b> $\Delta t = 1/252, n = 5040$	0,03	0,002	0,00005	1,1 (0,1)	0,013 ( $2,1 \cdot 10^{-6}$ )	0,000051 ( $10^{-12}$ )
<b>Dataserie 8</b> $\Delta t = 1/252, n = 5040$	0,3	0,2	0,005	0,77 (0,063)	0,16 (0,00043)	0,005 ( $9,7 \cdot 10^{-9}$ )
<b>Dataserie 9</b> $\Delta t = 1/252, n = 5040$	3	2	0,5	3,1 (0,22)	2 (0,0027)	0,52 (0,00011)

Figurerna nedan presenteras som ett komplement till figur 4.3, 4.4 och 4.5. Skillnaden är att resultaten som presenteras i figur B.8, B.9 och B.10 fås med antal observationer  $n = 5040$  istället för  $n = 252$ . Syftet är att undersöka om skattningarnas förväntningskevheter blir mindre när antalet observationer ökar. I figurerna är det önskvärt att kurvan är linjär med lutning  $+1$ , eftersom det innebär att de skattade och de verkliga värdena på parametern stämmer överens. Värden som stämmer överens innebär i sin tur att parametern inte är förväntningskevh.

Resultatet vi får när parametern  $\alpha$  varierar mellan  $-3$  och  $3$  med  $r = -0.2$  och  $\sigma^2 = 0.005$  visas i figur B.8. I figur B.8a är överensstämmelsen sämst när  $\alpha$  är mellan  $-0,1$  och  $0,2$  och därmed är förväntningskevheten störst i detta område. När  $\alpha$  är antingen mindre eller större blir skattningarna betydligt bättre. I figur B.8b har tekniken med jackknife använts och vi ser att skattningen med GMM för de flesta värden på  $\alpha$  även här är väldigt bra. Det innebär att de skattade värdena på  $\alpha$  liknar de verkliga, vilket såklart är önskvärt. Däremot ser vi att när  $\alpha$  antar värden i intervallet  $-0,3$  till  $0,5$  är skattningarna inte lika bra, men inte heller dåliga. Därför kan vi notera att skattningarna överlag är bättre när tekniken med jackknife inte används eftersom det då är fler skattningar som blir mer exakta. De skattningar som inte blir lika bra när tekniken med jackknife inte används, det vill säga när  $\alpha$  antar värden mellan  $-0,1$  och  $0,2$ , blir dock mer exakta när tekniken med jackknife används. Fördelen med jackknife när  $\alpha$  skattas med GMM är alltså att de dåliga skattningarna blir bättre, medan nackdelen är att färre skattningar blir exakta. Således kan användningen av jackknife vara lämplig i vissa fall, medan den i andra fall inte är lämplig.

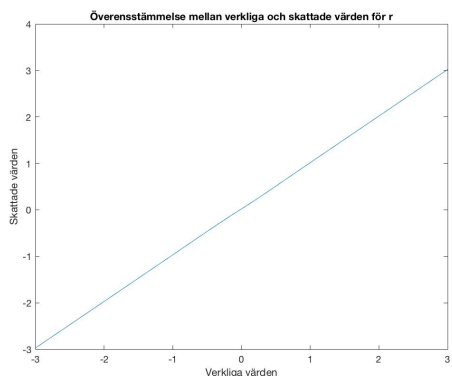


(a) Överensstämmelse mellan verkliga och skattade värden på parametern  $\alpha$ , där tekniken med jackknife inte har använts.

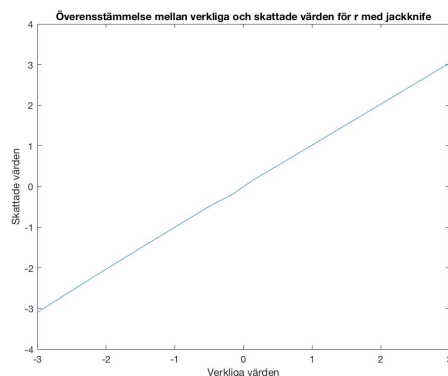
(b) Överensstämmelse mellan verkliga och skattade värden på parametern  $\alpha$ , där tekniken med jackknife har använts.

Figur B.8: Överensstämmelse mellan verkliga och skattade värden på parametern  $\alpha$ . På horisontalaxeln visas de verkliga värdena och på vertikalaxeln visas de skattade värdena.

Överensstämmelsen för parametern  $r$  när  $r$  antar värden mellan  $-3$  och  $3$  samtidigt som  $\alpha = 0,3$  och  $\sigma^2 = 0.005$  kan vi se i figur B.9. I det givna intervallet är överensstämmelsen bra både när tekniken med jackknife inte används och när den används. Eftersom förväntningskevheten alltid är liten och resultatet alltid blir optimalt finns ingen anledning att använda tekniken med jackknife vid skattning av  $r$ .



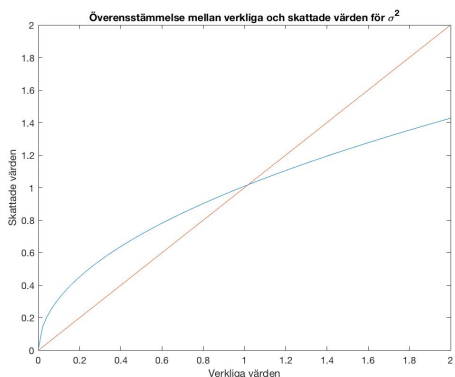
(a) Överensstämmelse mellan verkliga och skattade värden på parametern  $r$ , där tekniken med jackknife inte har använts.



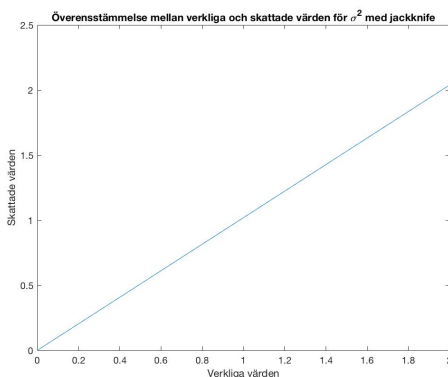
(b) Överensstämmelse mellan verkliga och skattade värden på parametern  $r$ , där tekniken med jackknife har använts.

Figur B.9: Överensstämmelse mellan verkliga och skattade värden på parametern  $r$ . På horisontalaxeln visas de verkliga värdena och på vertikalaxeln visas de skattade värdena.

När  $\sigma^2$  antar värden mellan 0 och 2,  $\alpha = 0,3$  och  $r = -0,2$  får vi resultatet i figur B.10 som representeras av den blå linjen. Den orange linjen i figur B.10a är rät med lutning  $+1$  och finns med för att tydliggöra var förväntningsskevheten av  $\sigma^2$  är liten respektive stor. I figur B.10a kan vi därför se att skattningarna när tekniken med jackknife inte används överensstämmer exakt när  $\sigma^2 = 1$ , eftersom linjerna skär varandra i den punkten. I intervallet  $(0, 1)$  fungerar skattningen relativt bra och för värden större än ett blir skattningen sämre och sämre ju större värdena på  $\sigma^2$  blir, vilket betyder att förväntningsskevheten ökar när värdet på  $\sigma^2$  ökar. När jackknife används på de skattade värdena minskar förväntningsskevheten och en rät linje med lutning ett fås som resultat, vilket vi kan se i figur B.10b. Vid skattning av  $\sigma^2$  är det därmed fördelaktigt att använda tekniken med jackknife.



(a) Överensstämmelse mellan verkliga och skattade värden på parametern  $\sigma^2$ , där tekniken med jackknife inte har använts.



(b) Överensstämmelse mellan verkliga och skattade värden på parametern  $\sigma^2$ , där tekniken med jackknife har använts.

Figur B.10: Överensstämmelse mellan verkliga och skattade värden på parametern  $\sigma^2$ . På horisontalaxeln visas de verkliga värdena och på vertikalaxeln visas de skattade värdena.

Om vi jämför resultaten som fås vid dagliga observationer och med det totala antalet observationer  $n = 5041$  respektive  $n = 252$  som i avsnitt 4.3, blir generellt sätt förväntningsskevheten mindre när antalet observationer ökar.

## C Bevis och härledningar

I det här avsnittet återfinns bevis och härledningar till somliga satser och definitioner som används under studiens gång. Mer precist finns ett bevis av den rättvisa swapräntan, härledningar av korttidsräntan för Vasiceks modell, den optimala viktningsmatrisen, uttryck för Jakobimatrisen och priset på en obligation, samt definition av Itô-isometri och test av överidentifierade populationsmomentvillkor.

### C.1 Härledning av uttrycket för korttidsräntan för Vasiceks modell

Vi utgår från den stokastiska differentialekvationen

$$dx_t = \alpha(r - x_t)dt + \sigma dW_t$$

när vi härleder uttrycket för korttidsräntan  $x_t$  för Vasiceks modell och därefter utför vi beräkningen

$$\begin{aligned} d(e^{\alpha t} x_t) &= e^{\alpha t} \alpha x_t dt + e^{\alpha t} (\alpha(r - x_t)) dt + \sigma e^{\alpha t} dW_t \\ d(e^{\alpha t} x_t) &= e^{\alpha t} \alpha r dt + \sigma e^{\alpha t} dW_t \\ e^{\alpha t} x_t &= x_0 + \frac{\alpha r}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dW_s \\ x_t &= x_0 e^{-\alpha t} + r(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma \int_0^t e^{\alpha(s-t)} dW_s. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Ekvation (C.1) representerar nu ett uttryck för korttidsräntan för Vasiceks modell. Integralen i ekvationen är en Itô-integral.

### C.2 Itô-isometri

Låt  $W : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  beteckna en Wienerprocess definierad upp till tiden  $T > 0$  och låt  $X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  vara en stokastisk process anpassad till den filtration som Wienerprocessen genererar. Då gäller att

$$E \left[ \left( \int_0^T X_s dW_s \right)^2 \right] = E \left[ \int_0^T X_s^2 ds \right], \quad (\text{C.2})$$

där integralen i vänsterledet är en Itô-integral [49]. Sambandet i ekvation (C.2) refereras till som Itô-isometri.

### C.3 Härledning av uttryck för den optimala viktningsmatrisen

Vi har använt oss av samma metod för att ta fram viktningsmatrisen som [19]. Denna viktningsmatris minimerar GMM-skattningens kovariansmatris och uttrycks som

$$\hat{W}_n = \left( \left( \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n g_t(\hat{\theta}_{(1)}) g_t(\hat{\theta}_{(1)})^T \right)^{-1} \right), \quad (\text{C.3})$$

där

$$g_t(\theta) = \begin{bmatrix} x_{t+1} - \alpha r \Delta t - x_t(1 - \alpha \Delta t) \\ (x_{t+1} - \alpha r \Delta t - x_t(1 - \alpha \Delta t)) x_t \\ (x_{t+1} - \alpha r \Delta t - x_t(1 - \alpha \Delta t))^2 - \sigma^2 \Delta t \\ ((x_{t+1} - \alpha r \Delta t - x_t(1 - \alpha \Delta t))^2 - \sigma^2 \Delta t) x_t \end{bmatrix}.$$

Låt oss nu beteckna de fyra ekvationerna i  $g$  som  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  och  $g_4$ . Genom att använda ekvation (C.3) och enkel matrismultiplikation kan vi beräkna viktningsmatrisen som

$$\begin{aligned}
\hat{W}_n &= \left( \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} [g_1 \ g_2 \ g_3 \ g_4] \right)^{-1} \\
&= \left( \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \begin{bmatrix} g_1^2 & g_1 g_2 & g_1 g_3 & g_1 g_4 \\ g_1 g_2 & g_2^2 & g_2 g_3 & g_2 g_4 \\ g_1 g_3 & g_2 g_3 & g_3^2 & g_3 g_4 \\ g_1 g_4 & g_2 g_4 & g_3 g_4 & g_4^2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&= \left( \frac{1}{n} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^n g_1^2 & \sum_{t=1}^n g_1 g_2 & \sum_{t=1}^n g_1 g_3 & \sum_{t=1}^n g_1 g_4 \\ \sum_{t=1}^n g_1 g_2 & \sum_{t=1}^n g_2^2 & \sum_{t=1}^n g_2 g_3 & \sum_{t=1}^n g_2 g_4 \\ \sum_{t=1}^n g_1 g_3 & \sum_{t=1}^n g_2 g_3 & \sum_{t=1}^n g_3^2 & \sum_{t=1}^n g_3 g_4 \\ \sum_{t=1}^n g_1 g_4 & \sum_{t=1}^n g_2 g_4 & \sum_{t=1}^n g_3 g_4 & \sum_{t=1}^n g_4^2 \end{bmatrix} \right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{C.4}$$

Ekvation (C.4) har implementerats i MATLAB för att beräkna viktningsmatrisen.

#### C.4 Härledning av uttryck för Jakobimatrisen

Vi har sett att kovariansmatrisen kan beräknas via uttrycket

$$V = \left( \frac{1}{n} [G(\hat{\theta})^T \hat{W}_n G(\hat{\theta})] \right)^{-1}, \tag{C.5}$$

där  $G(\theta)$  är väntevärdet av Jakobimatrisen för  $g_t(\theta)$  och  $\hat{W}_n$  är den skattade viktningsmatrisen. Jakobimatrisen definieras som derivatan av  $g_t(\theta)$  med avseende på  $\theta$ , vilket introducerades i ekvation (3.13). Med parametervektorn specificerad som  $\theta = [\alpha \ r \ \sigma^2]$  kan ekvation (3.13) skrivas som

$$G(\theta) = \mathbb{E} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\theta)}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_1(\theta)}{\partial r} & \frac{\partial g_1(\theta)}{\partial \sigma^2} \\ \frac{\partial g_2(\theta)}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_2(\theta)}{\partial r} & \frac{\partial g_2(\theta)}{\partial \sigma^2} \\ \frac{\partial g_3(\theta)}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_3(\theta)}{\partial r} & \frac{\partial g_3(\theta)}{\partial \sigma^2} \\ \frac{\partial g_4(\theta)}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_4(\theta)}{\partial r} & \frac{\partial g_4(\theta)}{\partial \sigma^2} \end{bmatrix}, \tag{C.6}$$

där respektive funktion i vektorn  $g_t(\theta)$  ges av följande uttryck:

$$\begin{aligned}
g_1(\theta) &= \epsilon_{t+1} = x_{t+1}t - \alpha r \Delta t - x_t(1 - \alpha)\Delta t, \\
g_2(\theta) &= \epsilon_{t+1}x_t = (x_{t+1} - \alpha r \Delta t - x_t(1 - \alpha)\Delta t)x_t, \\
g_3(\theta) &= \epsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 \Delta t = (x_{t+1} - \alpha r \Delta t - x_t(1 - \alpha)\Delta t)^2 - \sigma^2 \Delta t, \\
g_4(\theta) &= (\epsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 \Delta t)x_t = ((x_{t+1} - \alpha r \Delta t - x_t(1 - \alpha)\Delta t)^2 - \sigma^2 \Delta t)x_t.
\end{aligned}$$

Beräknar vi samtliga derivator i ekvation (C.6), samt approximerar väntevärdet med provmotsvarigheten medelvärde får vi

$$G(\theta) = -\frac{1}{n} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^n (r - x_t)\Delta t & \sum_{t=1}^n \alpha\Delta t & 0 \\ \sum_{t=1}^n (r - x_t)x_t\Delta t & \sum_{t=1}^n \alpha x_t\Delta t & 0 \\ \sum_{t=1}^n 2(x_{t+1} - \alpha r\Delta t - x_t(1 - \alpha)\Delta t)(r - x_t)\Delta t & \sum_{t=1}^n 2(x_{t+1} - \alpha r\Delta t - x_t(1 - \alpha)\Delta t)\alpha\Delta t & \sum_{t=1}^n \Delta t \\ \sum_{t=1}^n 2(x_{t+1} - \alpha r\Delta t - x_t(1 - \alpha)\Delta t)(r - x_t)x_t\Delta t & \sum_{t=1}^n 2(x_{t+1} - \alpha r\Delta t - x_t(1 - \alpha)\Delta t)\alpha\Delta t & \sum_{t=1}^n x_t\Delta t \end{bmatrix}.$$

Detta uttryck för väntevärdet Jakobimatrisen kan nu implementeras och med hjälp av ekvation (C.5) kan kovariansmatrisen därefter beräknas.

## C.5 Härledning av priset på en obligation

Härledningen av priset på en obligation för Vasiceks modell kan enligt [29] genomföras på flera olika sätt, bland annat via partiella differentialekvationer eller med hjälp av HJM-metodologin. Ytterligare ett sätt är att använda korttidsräntans fördelning vilket presenteras i [29], vilket också liknar det sätt vi kommer göra härledningen på.

Antag först att det finns ett underliggande sannolikhetsrum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , där  $\Omega$  är ett icke-tomt utfallsrum,  $\mathcal{F}$  är en mängd av händelser och  $P$  är en sannolikhetsfunktion som tilldelar sannolikheter till händelserna i  $\mathcal{F}$ . Antag även att sannolikhetsrummet har ett standardfilter  $\{\mathcal{F}_t\}$ . Under det riskneutrala måttet  $P$  kan nu korttidsräntan  $x_t$ , precis som tidigare, beskrivas av den stokastiska differentialekvationen

$$dx_t = \alpha(r - x_t)dt + \sigma dW_t. \quad (\text{C.7})$$

Här är  $\alpha$ ,  $r$  och  $\sigma$  okända parametrar medan  $W_t$  är en Brownsk rörelse. Lösningen till ekvation (C.7) kan med hjälp av Itô-isometri, som återfinns i avsnitt C.2, skrivas som

$$x_t = e^{-\alpha t} \left( x_0 + \int_0^t \alpha r e^{\alpha u} du + \sigma \int_0^t e^{\alpha u} dW_u \right). \quad (\text{C.8})$$

Om vi beräknar den första integralen får vi

$$\begin{aligned} x_t &= e^{-\alpha t} \left( x_0 + r(e^{\alpha t} - 1) + \sigma \int_0^t e^{\alpha u} dW_u \right) \\ &= \mu_t + \sigma \int_0^t e^{\alpha(u-t)} dW_u, \end{aligned}$$

där  $\mu_t$  är en deterministisk funktion. Vi ser direkt att

$$\mathbb{E}[x_t] = \mu_t = e^{-\alpha t} (x_0 + r(e^{\alpha t} - 1)), \quad (\text{C.9})$$

eftersom väntevärdet av en Brownsk rörelse är noll. Dessutom är  $x_t$  en normalfördelad stokastisk variabel, vilket följer från definitionen av en stokastisk integralterm, det vill säga  $\lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} e^{\alpha(u_i - t)} (W_{u_{i+1}} - W_{u_i})$  med  $(W_{u_{i+1}} - W_{u_i}) \sim \mathcal{N}(0, u_{i+1} - u_i)$ . Generellt, om  $\delta$  är deterministisk, gäller då att  $\int_0^t \delta(u) dW_u$  är normalfördelad.



Variansen av korttidsräntan  $x_t$  betecknas  $\sigma_t^2$  och beräknas enligt

$$\begin{aligned}
\sigma_t^2 &= \text{Var}[x_t] = \mathbb{E}[x_t^2] - \mathbb{E}[x_t]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\mu_t + \sigma \int_0^t e^{\alpha(u-t)} dW_u\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\mu_t + \sigma \int_0^t e^{\alpha(u-t)} dW_u\right]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\mu_t^2 + 2\mu_t\sigma \int_0^t e^{\alpha(u-t)} dW_u + \left(\sigma \int_0^t e^{\alpha(u-t)} dW_u\right)^2\right] - \mathbb{E}[\mu_t]^2 \\
&= \mu_t^2 + \mathbb{E}\left[2\mu_t\sigma \int_0^t e^{\alpha(u-t)} dW_u\right] + \mathbb{E}\left[\left(\sigma \int_0^t e^{\alpha(u-t)} dW_u\right)^2\right] - \mu_t^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sigma \int_0^t e^{\alpha(u-t)} dW_u\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha u} dW_u\right)^2\right] = \{\text{It\^o-isometri}\} \\
&= \sigma^2 e^{-2\alpha t} \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{2\alpha u} du\right] = \sigma^2 e^{-2\alpha t} \left(\frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha}\right) = \sigma^2 \left(\frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha}\right),
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Alltså gäller att  $x_t = \mathcal{N}(\mu_t, \sigma_t^2)$  med väntevärde  $\mu_t$  som i ekvation (C.9) och varians  $\sigma_t^2$  som i ekvation (C.10).

Från definition 3.2 vet vi att priset för en nollkupongobligation som tecknas vid tiden  $t$  och har lösendag  $T$  ges av uttrycket

$$B(t, T) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^T x_u du\right) \middle| \mathcal{F}_t\right]. \tag{C.11}$$

Vi definierar

$$X(u) = x_u + r, \tag{C.12}$$

där  $X(u)$  är lösningen till Ornstein-Uhlenbeckekvationen<sup>13</sup>

$$dX(t) = -\alpha X(t) + \sigma dW_t$$

med  $X(0) = x_0 - r$ . Med hjälp av It\^os lemma får nu vi att

$$X(u) = e^{-\alpha u} \left(X(0) + \int_0^u \sigma e^{\alpha s} dW_s\right). \tag{C.13}$$

Eftersom  $X(u)$  är en Gaussisk process med kontinuerliga provvägar gäller även att  $\int_0^t X(u) du$  är normalfördelad. För att beräkna variansen av denna integral - vilket kommer att vara nödvändigt för att hitta ett explicit uttryck för priset på en obligation - beräknar vi först väntevärdet av  $X(u)$  med hjälp av ekvation (C.13):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(u)] &= \mathbb{E}\left[e^{-\alpha u} \left(X(0) + \int_0^u \sigma e^{\alpha s} dW_s\right)\right] \\
&= e^{-\alpha u} X(0) + \mathbb{E}\left[\int_0^u \sigma e^{\alpha s} dW_s\right] = e^{-\alpha u} X(0),
\end{aligned} \tag{C.14}$$

där den sista likheten är giltig på grund av att väntevärdet av en Brownsk rörelse är noll. Vi fortsätter genom att beräkna väntevärdet av integralen av  $X(u)$  som

<sup>13</sup>En stokastisk process som beskriver hastigheten hos en massiv Brownsk partikel som påverkas av friktion. Processen är en stationär, Gaussisk markovprocess.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^t X(u)du\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(e^{-\alpha u}\left(X(0) + \int_0^u \sigma e^{\alpha s}dW_s\right)\right)du\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-\alpha u}X(0)du\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\int_0^u \sigma e^{-\alpha(u-s)}dW_s\right)du\right] \\
&= \int_0^t e^{-\alpha u}X(0)du + \int_0^t \mathbb{E}\left[\int_0^u \sigma e^{-\alpha(u-s)}dW_s\right]du \\
&= \frac{e^{-\alpha u}X(0)}{-\alpha}\Big|_{u=0}^{u=t} = \frac{X(0)}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}).
\end{aligned} \tag{C.15}$$

Vi kan nu beräkna kovariansen av  $X(u)$  och  $X(t)$ , vilken även den behövs för att senare kunna beräkna variansen av  $\int_0^t X(u)du$ . Kovariansmatrisen definieras som

$$\text{Cov}[X(u), X(t)] = \mathbb{E}[(X(u) - \mathbb{E}[X(u)])(X(t) - \mathbb{E}[X(t)])].$$

Insättning av ekvation (C.14) och (C.15) ger

$$\begin{aligned}
&\text{Cov}[X(u), X(t)] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(e^{-\alpha u}\left(X(0) + \int_0^u \sigma e^{\alpha s}dW_s\right) - X(0)e^{-\alpha u}\right)\left(e^{-\alpha t}\left(X(0) + \int_0^t \sigma e^{\alpha s}dW_s\right) - X(0)e^{-\alpha t}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{-\alpha(u+t)}\left(X(0) + \int_0^u \sigma e^{\alpha s}dW_s\right)\left(X(0) + \int_0^t \sigma e^{\alpha s}dW_s\right)\right. \\
&\quad \left.- e^{-\alpha(u+t)}X(0)\left(X(0) + \int_0^u \sigma e^{\alpha s}dW_s\right) - X(0)e^{-\alpha(u+t)}\left(X(0) + \int_0^t \sigma e^{\alpha s}dW_s\right)\right. \\
&\quad \left.+ e^{-\alpha(u+t)}X(0)^2\right] \\
&= e^{-\alpha(u+t)}\mathbb{E}\left[X(0)^2 + X(0)\int_0^t \sigma e^{\alpha s}dW_s + X(0)\int_0^u \sigma e^{\alpha s}dW_s\right. \\
&\quad \left.+ \int_0^u \sigma e^{\alpha s}dW_s \int_0^t \sigma e^{\alpha s}dW_s - X(0)^2 - X(0)\int_0^t \sigma e^{\alpha s}dW_s + X(0)^2\right] \\
&= e^{-\alpha(u+t)}\mathbb{E}\left[\sigma^2 \int_0^u \sigma e^{\alpha s}dW_s \int_0^t \sigma e^{\alpha s}dW_s\right] \\
&= e^{-\alpha(u+t)}\sigma^2\mathbb{E}\left[\int_0^{\min(u,t)} (e^{\alpha s}dW_s)^2 + \int_{\min(u,t)}^{\max(u,t)} e^{\alpha s}dW_s\right] = \{\text{Itô's isometri}\} \\
&= e^{-\alpha(u+t)}\sigma^2\mathbb{E}\left[\int_0^{\min(u,t)} e^{2\alpha s}ds\right] = e^{-\alpha(u+t)}\sigma^2 \frac{e^{2\alpha s}}{2\alpha}\Big|_{s=0}^{s=\min(u,t)} \\
&= \frac{e^{-\alpha(u+t)}\sigma^2}{2\alpha}(e^{2\alpha(\min(u,t))} - 1).
\end{aligned} \tag{C.16}$$

Ekvation (C.16) kan nu användas för att få fram ett uttryck för variansen av  $\int_0^t X(u)du$  på följande sätt:

$$\begin{aligned}
\text{Var} \left[ \int_0^t X(u) du \right] &= \text{Cov} \left[ \int_0^t X(u) du, \int_0^t X(s) ds \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t X(u) du - \mathbb{E} \left[ \int_0^t X(u) du \right] \right) \left( \int_0^t X(s) ds - \mathbb{E} \left[ \int_0^t X(s) ds \right] \right) \right] \\
&= \int_0^t \int_0^t \mathbb{E} [(X(u) - \mathbb{E}[X(u)])(X(s) - \mathbb{E}[X(s)])] dud s \tag{C.17} \\
&= \int_0^t \int_0^t \text{Cov}[X(u), X(s)] dud s = \int_0^t \int_0^t \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-\alpha(u+s)} (e^{2\alpha \min(u,s)} - 1) dud s \\
&= \frac{\sigma^2}{2\alpha^3} (-e^{-2\alpha t} + 4e^{-\alpha t} + 2\alpha t - 3).
\end{aligned}$$

För att kunna beräkna priset för en nollkupongobligation som tecknas vid tiden  $t$  med lösendag  $T$  som ges av ekvation (C.11) behövs ett uttryck för väntevärdet och variansen av integralen av  $x_u$ . Därför börjar vi med att subtrahera  $X(u)$  och  $x_u$  på båda sidor i ekvation (C.12). Integrerar vi och därefter tar väntevärdet av båda sidor kommer vi fram till

$$\mathbb{E} \left[ - \int_t^T x_u du \right] = \mathbb{E} \left[ - \int_t^T (X(u) + r) du \right].$$

Om vi sedan använder uttrycket i ekvation (C.15) får vi

$$\mathbb{E} \left[ - \int_t^T x_u du \right] = -\frac{x_t - r}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(T-t)}) - r(T-t) \tag{C.18}$$

och med hjälp av ekvation (C.17) fås på motsvarande vis

$$\begin{aligned}
\text{Var} \left[ - \int_t^T x_u du \right] &= \text{Var} \left[ \int_t^T X(u) du \right] \\
&= \frac{\sigma^2}{2\alpha^3} (2\alpha(T-t) - 3 + 4e^{-\alpha(T-t)} - e^{-2\alpha(T-t)}). \tag{C.19}
\end{aligned}$$

Från Itôs integralrepresentation av  $x_t$  - det vill säga från ekvation (C.8) - är det möjligt att notera att den definierade processen för korttidsräntan är en Markovprocess<sup>14</sup>. Således kan vi skriva om priset för en nollkupongobligation enligt

$$B(t, T) = \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_t^T x_u du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_t^T x_u du \right) \middle| x_t \right].$$

Eftersom  $x_u$  är en funktion av  $x_t$  kan vi även definiera

$$B(t, T, x_t) := \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_t^T x_u du \right) \middle| x_t \right] = \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_t^T x_u(x_t) du \right) \right].$$

Nu har vi allt som krävs för att få ett uttryck för priset av en nollkupongobligation för Vasiceks modell. Med hjälp av ekvationerna (C.18) och (C.19) får vi följande uttryck för obligationspriset

<sup>14</sup>För bevis, se I. Karatzas and S. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1988.

$$\begin{aligned}
B(t, T, x_t) &= \exp\left(\mathbb{E}\left[-\int_t^T x_u(x_t)du\right] + \frac{1}{2}\text{Var}\left[-\int_t^T x_u(x_t)du\right]\right) \\
&= \exp\left(-\frac{x_t - r}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(T-t)}) - r(T-t) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma^2}{4\alpha^3}(2\alpha(T-t) - 3 + 4e^{-\alpha(T-t)} - e^{-2\alpha(T-t)})\right) \\
&= \exp\left[-\left(\frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}\right)x_t + r\left(\frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} - (T-t)\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\left(\frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}\right) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(T-t) - \frac{\sigma^2}{4\alpha}\left(\frac{1 - 2e^{-\alpha(T-t)} + e^{-2\alpha(T-t)}}{\alpha^2}\right)\right] \\
&= \exp\left[-A(t, T)x_t + rA(t, T) - r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}A(t, T) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(T-t) - \frac{\sigma^2}{4\alpha}A(t, T)^2\right] \\
&= \exp(-A(t, T)x_t + D(t, T)),
\end{aligned}$$

där

$$A(t, T) = \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}$$

och

$$D(t, T) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\right)[A(t, T) - (T-t)] - \frac{\sigma^2 A(t, T)^2}{4\alpha}.$$

## C.6 Bevis av den rättvisa swapräntan

*Bevis.* Från ekvation (3.21) har vi att

$$\pi_{IRS}(0) = \sum_{t=1}^{N-1} \mathbb{E}[x_t D(t)] - r_{IRS} \sum_{t=1}^{N-1} \mathbb{E}[D(t)].$$

Genom att sätta  $\pi_{IRS}(0) = 0$  och utnyttja likheten  $\mathbb{E}[D(t)] = B(0, t)$  [31] kan vi uttrycka den rättvisa swapräntan som

$$r_{IRS} = \frac{\sum_{t=1}^{N-1} \mathbb{E}[x_t D(t)]}{\sum_{t=1}^{N-1} B(0, t)}.$$

Slutligen har vi att

$$\mathbb{E}[x_t D(t)] = \mathbb{E}[(1 + x_t)D(t)] - \mathbb{E}[D(t)] = \mathbb{E}[D(t-1)] - \mathbb{E}[D(t)] = B(0, t-1) - B(0, t)$$

och därmed kan vi skriva om uttrycket för den rättvisa swapräntan som

$$r_{IRS} = \frac{\sum_{t=1}^{N-1} (B(0, t-1) - B(0, t))}{\sum_{t=1}^{N-1} B(0, t)},$$

vilket gör beviset komplett. □

## C.7 Test av överidentifierade populationsmomentvillkor

I ett system med fler momentvillkor än parametrar ( $q > p$ ) finns ingen unik lösning som uppfyller  $\hat{m}_n(\theta) = 0$ . Istället använder vi det värdet på  $\theta$  som minimerar den kvadratiska formen  $Q_n(\theta) = \hat{m}_n(\theta)W_n\hat{m}_n(\theta)^T$ , vilket dock inte innebär att samtliga momentvillkor är lika med noll. Med hjälp av följande definition testar vi om momentvillkoren är tillräckligt nära noll [26].

**Definition C.1.** Om  $n$  är antalet observationer,  $\hat{m}_n(\theta)$  är momentvillkoren och  $W_n$  är viktningsmatrisen så konvergerar

$$n(\hat{m}_n(\theta)^T W_n \hat{m}_n(\theta)) \tag{C.20}$$

i distribution mot  $\chi_{q-p}^2$ , där  $\chi_{q-p}^2$  är en  $\chi^2$ -fördelning med  $q - p$  frihetsgrader.

Med hjälp av definition C.1 kan vi testa om momentvillkoren är tillräckligt nära noll på olika signifikansnivåer. Om testet ger ett signifikant värde på  $n(\hat{m}_n(\theta)W_n\hat{m}_n(\theta)^T)$  i relation till  $\chi_{q-p}^2$  är modellen inte lämplig för de analyserade korttidsräntorna.

## D MATLAB programkod

I Appendix D presenteras programkoden som används under studiens gång. Samtliga beräkningar och modellimplementeringar har gjorts i programspråket MATLAB.

### D.1 Generaliserade momentmetoden

Skript för att skatta parametrar med hjälp av GMM

```
1 x=SSVX5yr; %Inladdning av dataserier, x är serien
2
3 t=length(x);
4 deltat=1/52; %Delta t, längden på tiden mellan observationer
5 W=eye(4); %Identitetsmatrix för första iteration
6 theta1=[]; values=[]; %Vektorer som lagrar parametrar och värden
7 fun=@(theta) argmin1(theta, r, W, deltat); %Skapar momentfunktion med givna x, W,
   deltat
8 par_res = [0 0 0];
9
10 for i=1:100 %Testar 1000 startpunkter och söker lokalt minimum
11 startpoint=-2+4*rand(1,3); %Genererar startpunkt mellan -2 och 2
12 [theta value]=fminsearch(fun, startpoint); %Söker närmsta minimipunkt
13 theta1=[theta1; theta]; %Sparar värdet på parametrarna för minimipunkten
14 values=[values value]; %Sparar värdet på momentfunktionen för minimipunkten
15
16 end
17
18 [val, index]=min(values); %Väljer det lägsta av värdena på momentfunktionen
19 theta2=theta1(index, :); %Väjer ut parametervärdena för lägsta värdet
20 par_res=[par_res; theta2]; %Lägger in skattning i en vektor
21 hight = size(par_res, 1); %Storlek på matrix
22 condition=2; %Initialt värde på condition
23
24 while abs(condition)>0.1 %Skattar parametrar tills de konvergerar
25 W1=weightingmatrix(theta2, x, deltat); %Genererar viktningsmatrix
26
27 fun=@(theta) argmin1(theta, x, W1, deltat); %Definierar momentfunktion
28 theta1=[]; values=[]; %Återställer de vektorer där värden sparas
29
30 for i=1:100 %Testar 1000 startpunkter, samma som tidigare
31 startpoint=-2+4*rand(1,3);
32 [theta value]=fminsearch(fun, startpoint);
33 theta1=[theta1; theta];
34 values=[values value];
35 end
36
37 [val, index]=min(values);
38 theta2=theta1(index, :); %Plockar ut parametrar som ger lägsta värde
39 par_res=[par_res; theta2]; %Lägger in parametrar i matrix
40 hight = size(par_res, 1); %Antal rader på vektorn av skattningar
41 condition=par_res(hight, 1)-par_res(hight-1, 1); %Kontrollerar skillnad
42 end
43
44 I=covariancematrix(theta2, x, W1, deltat); %Tar fram kovariansmatrix
45 Chi2test=[val*t chi2inv(0.95, 1)]; %Räknar fram chi-2 värde
```

Funktion för kriteriefunktion

```
1 function [Q]=argmin1(theta, x, W, deltat)
2
3 Q=momentconditions(theta, x, deltat) .* W .* momentconditions(theta, x, deltat);
4 %Räknar ut värdet på kriteriefunktionen
5 %med givna parametrar, dataserie,
6 %viktningsmatrix och Delta t
7 end
```

Funktion för uträkning av momentfunktionernas värde

```
1 function [m]=momentconditions(theta, x, deltat)
2 t=length(x); a=theta(1); r=theta(2); s=theta(3);
3
4 m=1/t * [sum(x(2:t)-x(1:t-1)*(1-a*deltat)-a*r*deltat)
5          sum((x(2:t)-x(1:t-1)*(1-a*deltat)-a*r*deltat) .* x(1:t-1))
6          sum((x(2:t)-x(1:t-1)*(1-a*deltat)-a*r*deltat).^2-s*deltat)]
```

```

7         sum(((x(2:t)-x(1:t-1))*(1-a*deltat)-a*r*deltat).^2-s*deltat).*x(1:t-1)];
8 %Räknar fram matrisen med momentvillkor
9 end

```

### Funktion för uträkning av viktningsmatris

```

1 function [W]=weightingmatrix(theta,x,deltat)
2 a=theta(1); r=theta(2); s=theta(3); t=length(x); s1=0;s2=0;s3=0;s4=0;s12=0;s13=0;s14
   =0;s23=0;s24=0;s34=0;
3
4 for i=1:t-1
5     s1=s1+(x(i+1)-x(i))*(1-a*deltat)-a*r*deltat)^2;
6     s2=s2+((x(i+1)-x(i))*(1-a*deltat)-a*r*deltat)*x(i))^2;
7     s3=s3+((x(i+1)-x(i))*(1-a*deltat)-a*r*deltat)^2-s*deltat)^2;
8     s4=s4+(((x(i+1)-x(i))*(1-a*deltat)-a*r*deltat)^2-s*deltat)*x(i))^2;
9     s12=s12+(x(i+1)-x(i))*(1-a*deltat)-a*r*deltat)*((x(i+1)-x(i))*(1-a*deltat)-a*r*
   deltat)*x(i));
10    s13=s13+(x(i+1)-x(i))*(1-a*deltat)-a*r*deltat)*((x(i+1)-x(i))*(1-a*deltat)-a*r*
   deltat)^2-s*deltat);
11    s14=s14+(x(i+1)-x(i))*(1-a*deltat)-a*r*deltat)*(((x(i+1)-x(i))*(1-a*deltat)-a*r
   *deltat)^2-s*deltat)*x(i));
12    s23=s23+((x(i+1)-x(i))*(1-a*deltat)-a*r*deltat)*x(i))*((x(i+1)-x(i))*(1-a*
   deltat)-a*r*deltat)^2-s*deltat);
13    s24=s24+((x(i+1)-x(i))*(1-a*deltat)-a*r*deltat)*x(i))*(((x(i+1)-x(i))*(1-a*
   deltat)-a*r*deltat)^2-s*deltat)*x(i));
14    s34=s34+((x(i+1)-x(i))*(1-a*deltat)-a*r*deltat)^2-s*deltat)*(((x(i+1)-x(i))*(1-
   a*deltat)-a*r*deltat)^2-s*deltat)*x(i));
15 end
16 %Räknar ut respektive funktion i
17 %viktningsmatrisen
18
19 W=(1/t*[s1 s12 s13 s14
20         s12 s2 s23 s24
21         s13 s23 s3 s34
22         s14 s24 s34 s4])^(-1);
23 %Placeras respektive funktion
24 %på rätt plats i matrisen
25 end

```

### Funktion för uträkning av kovariansmatris

```

1 function C=covariancematrix(theta,x,W,deltat)
2 f11=0; f12=0; f21=0; f22=0; f31=0; f32=0; f33=0; f41=0; f42=0; f43=0;t=length(x);
   a=theta(1);r=theta(2);s=theta(3);
3
4 for i=1:t-1
5     f11=f11+(x(i)*deltat-r*deltat);
6     f12=f12+(-a*deltat);
7     f21=f21+(x(i)^2*deltat-x(i)*r*deltat);
8     f22=f22+(-a*x(i)*deltat);
9     f31=f31+(2*(x(i+1)-x(i))*(1-a*deltat)-a*r*deltat)*(x(i)*deltat-r*deltat));
10    f32=f32+(2*(x(i+1)-x(i))*(1-a*deltat)-a*r*deltat)*(-a*deltat);
11    f33=f33+(-deltat);
12    f41=f41+(2*(x(i+1)-x(i))*(1-a*deltat)-a*r*deltat)*(x(i)*deltat-r*deltat)*x(i));
13    f42=f42+(2*(x(i+1)-x(i))*(1-a*deltat)-a*r*deltat)*(-a*deltat)*x(i));
14    f43=f43+(-deltat*x(i));
15 end
16 %Räknar fram respektive
17 %funktion i kovariansmatrisen
18
19 D=1/t*[f11 f12 0;f21 f22 0;f31 f32 f33;f41 f42 f43]
20 C=1/t*(D.'*W*D)^(-1);
21 %Placerar ut respektive funktion
22 %på rätt plats i matrisen.
23 %Räknar sedan ut kovariansmatris
24 %enligt formeln i rapporten.
25 end

```

### Skript för att skatta parametrar med GMM när tekniken med jackknife används

```

1
2 xdata=STIBOR20yr; %Inladdning av dataserier, xdata är serien
3 xvec = zeros(5,3);
4
5 for j=1:5
6     if j == 1
7         x=xdata;
8     else

```

```

9         x=xdata((1+length(xdata)/4*(j-2)):(length(xdata)/4*(j-1)));
10     end
11
12
13     t=length(x);
14     deltat=1/12; %Delta t, längden på tiden mellan observationer
15     W=eye(4); %Identitetsmatris för första iteration
16     theta1=[]; values=[]; theta2=[]; %Vektorer som lagrar parametrar och värden
17     fun=@(theta) argmin1(theta,x,W,deltat); %Skapar momentfunktion med givna r,W,s
18     par_res = [0 0 0];
19
20
21     for i=1:100 %Testar 1000 startpunkter och söker lokalt min
22         startpoint=-2+4*rand(1,3); %Genererar startpunkt mellan -2 och 2
23         [theta value]=fminsearch(fun,startpoint); %Söker närmsta minpunkt
24         theta1=[theta1; theta]; %Sparar värdet på parametrarna för minpunkt
25         values=[values value]; %Sparar värdet på momentfunktionen för minpunkt
26
27     end
28
29     [val,index]=min(values); %Väljer lägsta av värdena på momentfunktionen
30     theta2=theta1(index,:); %Väjer ut parametervärdena för lägsta värdet
31     par_res=[par_res;theta2]; %Lägger in skattning i en vektor
32     hight = size(par_res,1); %Storlek på matris
33     condition=2; %Initialt värde på condition
34
35     while abs(condition)>0.1 %Skattar parametrar tills de konvergerar
36         W1=weightingmatrix(theta2,x,deltat); %Genererar viktningsmatris
37
38         fun=@(theta) argmin1(theta,x,W1,deltat); %Definierar momentfunktion
39         theta1=[]; values=[]; %Återställer de vektorer där värden sparas
40
41         for i=1:100 %Testar 1000 startpunkter, samma som tidigare
42             startpoint=-2+4*rand(1,3);
43             [theta value]=fminsearch(fun,startpoint);
44             theta1=[theta1; theta];
45             values=[values value];
46         end
47
48         [val,index]=min(values);
49         theta2=theta1(index,:); %Plockar ut parametrar som ger lägsta värde
50         par_res=[par_res;theta2] %Lägger in parametrar i matris
51         hight = size(par_res,1); %Antal rader på vektorn av skattningar
52         condition=par_res(hight,1)-par_res(hight-1,1); %Kontrollerar skillnad
53     end
54
55     xvec(j,:) = theta2(end,:);
56     end
57     subvec = xvec(2:5,:);
58     for i = 1:3
59         thetajak(i) = 4/3*xvec(1,i) - 1/12*sum(subvec(:,i));
60     end
61     thetajak
62     xvec(1,:)

```

## D.2 Avkastning

Funktion som beräknar avkastningen utan kuponger

```

1
2 function y = Yield(alpha,sigma,r,t,x,T) %funktion som tar in parametrar
3 tao = T-t;
4 %uttryck för avkastning med Vasiceks modell
5 C = (1/alpha).*(1-exp(-alpha.*tao));
6 A = r.*tao - r*(1-exp(-alpha.*tao))/alpha - (sigma*(1-exp(-2*alpha.*tao)))/(4*
7     alpha^3)+(sigma*(1-exp(-alpha.*tao))/alpha^3 - sigma*tao./(2*alpha^2));
8 B = exp(-x*C - A);
9 y = (-1./tao).*log(B);
10 end

```



Funktion som beräknar avkastningen med kuponger som eventuellt betalas ut vid tidpunkter som inte är jämna heltal

```

1
2 function yieldwcoupon = CouponAllT(alpha , sigma , r , t , R , T , c)
3
4 bond=0;
5 if T > 1
6     floorT = floor(T); %Spara det närmasta heltalet mindre än T (lösendagen)
7 else
8     floorT = 1;
9 end
10
11 if T == floorT && T > 1 %Om lösendagen T är ett heltal (större än 1)
12     floorT = T-1; %Sätt det närmasta mindre heltalet till T.
13 end
14
15 Tvec=zeros(1,floorT); %Skapa en vektor som kommer att innehålla de
16 %tidpunkter då kuponger betalas ut
17 for i=1:floorT
18     Tvec(i)= T - floorT + (i-1);
19 end
20
21 if T <= 1
22     Tvec(1) = T;
23 end
24
25 if T > 1
26     for i=1:floorT %För varje kupongutbetalningstid (exklusive lösendagen)...
27         tao = Tvec(i);
28         C = ((1/alpha).*(1-exp(-alpha.*tao)));
29         A = (r.*tao - r*(1-exp(-alpha.*tao))/alpha - ...
30             (sigma*(1-exp(-2*alpha.*tao)))/(4*alpha.^3) + ...
31             (sigma*(1-exp(-alpha.*tao)))/alpha^3 - sigma*tao./(2*alpha^2));
32         B= exp(-R*C - A);
33         bond=bond+c.*B; %... beräknar vi obligationspriset med uttrycket
34         %ovan och multiplicerar med kupongen c. Dessa summeras ihop i
35         %variabeln bond
36     end
37 end
38 %Här gör vi samma sak, fast vid lösendagen T
39 tao=T;
40 C = ((1/alpha).*(1-exp(-alpha.*tao)));
41 A = (r.*tao - r*(1-exp(-alpha.*tao))/alpha - ...
42     (sigma*(1-exp(-2*alpha.*tao)))/(4*alpha.^3) + ...
43     (sigma*(1-exp(-alpha.*tao)))/alpha^3 - sigma*tao./(2*alpha^2));
44 B= exp(-R*C - A);
45 bond=bond + B*(1+c); % Det slutgiltiga obligationspriset ligger nu sparat
46 %i variabeln bond
47
48
49
50 syms f(x) Df(x);
51 f(x)=0; %Initiering av funktionen som beskriver obligationspriset på en
52 %kupongobligation. Eftersom vi ska använda Newtons metod och eftersom
53 %obligationspriset är känt kommer funktionen att vara på formen
54 % f(x) = polynom - bond = 0
55 Df(x)=0; %Derivatnan av funktionen
56 for i=1:floorT
57     f(x) = f(x) + c*x^(Tvec(i)); %Här bygger vi upp funktionen term för term
58     Df(x) = Df(x) + c*Tvec(i)*x^(Tvec(i)-1); %Detsamma gäller dess derivata
59 end
60 %Slutligen lägger vi till de sista termerna i funktionen resp. derivatan
61 f(x)=f(x)+(c+1)*x^T - bond;
62 Df(x)=Df(x) + T*(c+1)*x^(Tvec(floorT));
63
64 %Newtons metod, se avsnitt i appendix för logiken bakom koden
65 y=1; %Startgissning
66 kmax=10; tol=0.5e-10; %Iterera tills vi når ett tillräckligt bra värde
67 for k=1:kmax
68     h=-vpa(f(y)/Df(y)); %vpa gör om bråktal till decimaltal,
69     %endast för att få en snyggare utskrift
70     y=y+h;
71     if abs(h)<tol
72         break
73     end
74 end

```

```

75
76 yieldwcoupon = -log(y); %Slutligen får vi avkastningen genom att ta den
77 %negativa logaritmen av vår slutgissning
78 end

```

Kod som ritar upp avkastningskurvan

```

1
2 x=SSVX20yr; alpha=-0.0554;sigma=0.00001361;r=0.036;
3 c=0.05; %Kupongränta
4 T=1:length(x); %Tid till lösendag
5 t=0; %Nuet
6 yield=CouponAllT(alpha,sigma,r,t,x(end),T,c);
7 plot(T,yield) %Rita upp avkastningskurvan

```

### D.3 Ränteswappar

Funktion som beräknar priset på en obligation

```

1
2 function B = BondPrice(alpha,sigma,r,t,x,T)
3 tao = T-t;
4 %Beräkna obligationspriset med uttrycket som härleds i Appendix
5 C = (1/alpha).*(1-exp(-alpha.*tao));
6 A = r.*tao - r.*(1-exp(-alpha.*tao))/alpha - (sigma*(1-exp(-2*alpha.*tao)))/(4*
7 alpha.^3) + (sigma*(1-exp(-alpha.*tao)))/alpha^3 - sigma*tao./(2*alpha^2);
8 B = exp(-x*C - A);
9 end

```

Kod som beräknar swapräntan från skattade parametrar

```

1 alpha=0.236; %Värdet på parametern alpha
2 r=-0.0195; %Värdet på parametern r
3 sigma=0.0000114; %Värdet på parametern sigma^2
4 T=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 12 15 20 30]; %Vektor med lösendagar
5 deltat=1/4; %Hur ofta betalningarna sker, 1/4 motsvarar varje kvartal
6 x=-0.0066; %Dagens ränta
7 resultat=[]; %Tom vektor där resultaten lagras
8
9 for i=1:length(T)
10     rate1=0;
11     rate2=0;
12     for n=deltat:deltat:T(i) %Summera över samtliga tillfällen då betalningar
13         sker
14             t=n;
15             rate1 = rate1 + (BondPrice(alpha,sigma,r,0,x(end),t-1) - ...
16                 BondPrice(alpha,sigma,r,0,x(end),t));
17             rate2 = rate2 + BondPrice(alpha,sigma,r,0,x(end),t);
18         end
19     resultat(i)=rate1/rate2; %Dela de två summorna för att få swapräntan
20 end
21 plot(T,resultat*100); legend('Teoretisk swapränta','Location','east');
22 xlabel('Lösendag(år)');
23 ylabel('Swapränta(%)');
24 %Plottar resultaten

```

### D.4 Förväntningskevheter

Kod som genererar tidsserier med givna parametrar och undersöker förväntningskevheter hos de skattade parametrarna

```

1
2 %avec = [0.03 0.3 3];
3 avec = linspace(-0.5,0.5,20) %20 om jackknife
4 %rvec = [-0.002 -0.2 -2];
5 %rvektor = linspace(-3,3,100) %20 om jackknife
6 %sigvec = [0.00005 0.005 0.5];
7 %sigvec = linspace(0,2,20) % bara 20 med jackknife, annars 100
8
9 for atemp = 1:length(avec)

```

```

10 %sig = sqrt(sigvec(sigtemp));
11 a = avec(atep);
12 %r = rvektor(rtemp);
13 r = -0.2;
14 sig = sqrt(0.005);
15 deltat = 1/252;
16 t = 0:deltat:20;
17 %Val av parametrar samt tid mellan observationer
18 %och längd på hela perioden
19 x = zeros(1,length(t));
20 rng(1);
21 for i = 1:length(t)-1
22     x(i+1) = x(i)+a*(r-x(i))*deltat+sig*sqrt(deltat)*randn;
23 end
24 x
25 %Genererar tidsserien
26 %figure;
27 %plot(t,x); %axis([0 0.02 -0.05 0.05])
28 %Plottar tidsserien
29
30 % xvec = zeros(5,3);
31 %
32 % for j=1:5
33 %     if j == 1
34 %         x=xdata;
35 %     else
36 %         x=xdata((1+length(xdata)/4*(j-2)):(length(xdata)/4*(j-1)));
37 %     end
38 %end
39
40
41
42 deltat=1/252; %Delta t, längden på tiden mellan observationer
43 W=eye(4); %Identitetsmatris för första iteration
44 theta1=[]; values=[]; theta2=[]; %Vektorer som lagrar parametrar och värden
45 fun=@(theta) argmin1(theta,x,W,deltat); %Skapar momentfunktion med givna r,W,s
46 par_res = [0 0 0];
47
48
49 for i=1:100 %Testar 1000 startpunkter och söker lokalt min
50     startpoint=-2+4*rand(1,3); %Genererar startpunkt mellan -2 och 2
51     [theta value]=fminsearch(fun,startpoint); %Söker närmsta minpunkt
52     theta1=[theta1; theta]; %Sparar värdet på parametrarna för minpunkt
53     values=[values value]; %Sparar värdet på momentfunktionen för minpunkt
54
55 end
56
57 [val,index]=min(values); %Väljer lägsta av värdena på momentfunktionen
58 theta2=theta1(index,:); %Väjer ut parametervärdena för lägsta värdet
59 par_res=[par_res;theta2]; %Lägger in skattning i en vektor
60 hight = size(par_res,1); %Storlek på matris
61 condition=2; %Initialt värde på condition
62
63 while abs(condition)>0.05 %Skattar parametrar tills de konvergerar
64     W1=weightingmatrix(theta2,x,deltat); %Genererar viktningsmatris
65
66     fun=@(theta) argmin1(theta,x,W1,deltat); %Definierar momentfunktion
67     theta1=[]; values=[]; %Återställer de vektorer där värden sparas
68
69     for i=1:100 %Testar 1000 startpunkter, samma som tidigare
70         startpoint=-2+4*rand(1,3);
71         [theta value]=fminsearch(fun,startpoint);
72         theta1=[theta1; theta];
73         values=[values value];
74     end
75
76     [val,index]=min(values);
77     theta2=theta1(index,:); %Plockar ut parametrar som ger lägsta värde
78     par_res=[par_res;theta2] %Lägger in parametrar i matris
79     hight = size(par_res,1); %Antal rader på vektorn av skattningar
80     condition=par_res(hight,1)-par_res(hight-1,1); %Kontrollerar skillnad
81 end
82
83 %xvec(j,:) = theta2(end,:);
84 alpha(atep) = theta2(1)
85 %rskatt(rtemp) = theta2(2)

```

```

86 %sigskatt(sigtemp) = theta2(3);
87
88 end
89 % subvec = xvec(2:5,:);
90 % for i = 1:3
91 %     thetajack(i) = 4/3*xvec(1,i) - 1/12*sum(subvec(:,i));
92 % end
93 % thetajack
94 % % xvec(j,:) = thetajack
95 % %alpha(atemp) = thetajack(1);
96 % %rskatt(rtemp) = thetajack(2);
97 % sigskatt(sigtemp) = thetajack(3);
98 % end
99
100 plot(avec, alpha)
101 title('Överensstämmelse mellan verkliga och skattade värden för \alpha med
      jackknife')
102 xlabel('Verkliga värden')
103 ylabel('Skattade värden')
104
105 % plot(sigvec, sigskatt)
106 % title('Överensstämmelse mellan verkliga och skattade värden för \sigma^2 med
      jackknife')
107 % xlabel('Verkliga värden')
108 % ylabel('Skattade värden')
109
110 % plot(rvektor, rskatt)
111 % title('Överensstämmelse mellan verkliga och skattade värden för r med jackknife
      ')
112 % xlabel('Verkliga värden')
113 % ylabel('Skattade värden')

```

## D.5 Autokorrelation

Kod för att beräkna och rita upp autokorrelation

```

1 data = STIBOR20yearsdiff;
2 n=length(data);
3 mx=mean(data);
4 lags = n-1;
5 gamma=zeros(1,lags+1);
6 %Laddar in data samt räknar ut några nyckeltal
7
8 for h=0:lags
9     gamma(h+1)=(1/n)*(data(1+h:end)-mx)*(data(1:end-h)-mx);
10 end
11 %Räknar ut autokovarians
12
13 acf=gamma/gamma(1);
14 size(acf);
15 %Räknar ut autokorrelation
16
17 count = 0;
18 for i = 1:length(acf)
19     if abs(acf(i)) > 1.96/sqrt(n)
20         count = count +1;
21     end
22 end
23 count
24 %Räknar ut antal punkter utanför intervallet
25
26 xhorizont= [0 300];
27 yhorizont1= [1.96/sqrt(n) 1.96/sqrt(n)];
28 yhorizont2 = [-1.96/sqrt(n) -1.96/sqrt(n)];
29 plot(xhorizont, yhorizont1, 'black')
30 hold on
31 plot(xhorizont, yhorizont2, 'black')
32 hold on
33 stem(acf)
34 %Ritar ut autokorrelation samt konfidensintervall

```

## E Gloslista

Svenska	Engelska	Förklaring
Användbar	Efficient	
Avkastning	Yield	Beskriver hur mycket en tillgångs värde förändrats från en tidigare tidpunkt.
Avkastningskurva	Yield curve	Kurva över avkastningen.
Brant	Steep	
Brownsk rörelse	Brownian motion	Slumpmässig rörelse som förekommer hos små partiklar i en vätska eller gas.
De stora talens lag	The law of large numbers	Medelvärdet av ett stort antal observationer av en slumpvariabel går med stor sannolikhet mot variabelns väntevärde.
Diskreta terminsräntan	Simply compounded forward interest rate	
Diskontering	Discount	En metod för att ta fram värdet av en investering vid en viss tidpunkt.
Eulers metod	Euler discretization scheme	En metod för att approximera den numeriska lösningen till en stokastisk differentialekvation
Följdriktig	Consistent	
Förväntnings skevhet	Bias	Ett systematiskt fel som gör värden mer eller mindre felaktiga.
Generaliserade momentmetoden	Generalized method of moments	Metoden som används för parameter-skattning i projektet. Se 3.1.
Internränta	Internal rate of return	Den räntesats som investeringen avkastar.

<b>Svenska</b>	<b>Engelska</b>	<b>Förklaring</b>
Kontinueliga provvägar	Continuous sample paths	
Korrekthetsvillkor	Regularity conditions	
Korttidsränta	Short rate	Den ränta som pengar kan lånas för med en mycket kort lösendag.
Kriteriefunktion	Criterion function	Används för uppskattning med GMM. Se 3.1.2.
Kupongobligation	Coupon bond	Obligation med förbestämd årlig ränteutbetalning.
Lösendag	Time of maturity	Den dag då optionens rättigheter att köpa och sälja aktier utnyttjas.
Nollkupongobligation	Zero-Coupon bond	Obligation utan ränteutbetalningar.
Nettonuvärde	Net present value	Det diskonterade värdet av en investering med nuet som referenstid.
Obligation	Bond	Räntebärande skuldbrev.
Omvänd	Inverse	
Penningmarknad	Money market	Den del av kreditmarknaden som handlar med krediter med kortare än ett års löptid.
Platt	Flat	
Populationsmomentvillkor	Population moment condition	Villkor som används för skattning med GMM. Se 3.1.1.
Prov-	Sample-	
Riskneutral	Risk-neutral	Utan hänsyn till risk.
Ränta	Interest rate	Allmänna priset för att låna pengar.
Räntederivat	Interest rate contracts	
Rättvis	Fair	
Sannolikhetsrum	Probability space	Ett begrepp som samlar ihop utfall, händelse och sannolikhet.
Stokastisk variabel	Random variable	En variabel som beskriver något som påverkas av slumpen.

<b>Svenska</b>	<b>Engelska</b>	<b>Förklaring</b>
Teorin om den föredragna miljön	Preferred habitat theory	
Terminsränta	Forward rate	Förväntad framtida ränta grundad på den nuvarande nollräntan. Se A.1.1
Tidsskillnader	Lag	Förskjutning som används i exempelvis beräkning av autokorrelation.
Upphör	Expire	
Viktningsmatris	Weighting matrix	Används för skattning med GMM. Se 3.1.2.
Återgång till medelvärdet	Mean reversion	Egenskap hos tillgångar och aktier om de återgår till medelvärdet.

## Referenser

- [1] O. A. Vasicek, *Finance, Economics, and Mathematics*. John Wiley & Sons, 2015.
- [2] P. Englund, P. Krusell, M. Persson, T. Persson, and P. Strömberg, “2013 års ekonomipris till eugene farma, robert schiller och lars peter hansen,” *Ekonomisk Debatt*, vol. 2013, no. 8, pp. 26–36, 2013.
- [3] Riksbanken, “Sök räntor och valutakurser.” <https://www.riksbank.se/sv/statistik/sok-rantor-valutakurser/>. [2018-03-02].
- [4] Nationalencyklopedin, “Avkastning.” <https://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/avkastning>. [2018-02-13].
- [5] Nationalencyklopedin, “Obligation.” <https://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/obligation>. [2018-02-07].
- [6] Swedbank, “Statsobligationer.” <https://www.swedbank.se/foretag/spara-och-placera/aktier-rantor-och-andra-placeringar/ranteplaceringar/statsobligationer/#>. [2018-02-07].
- [7] Investing, “Sweden - government bonds.” <https://www.investing.com/rates-bonds/sweden-government-bonds>. [2018-04-25].
- [8] B. Lantz, A. Isaksson, and H. Löfsten, *Industriell ekonomi - Grundläggande ekonomisk analys*. Lund: Studentlitteratur AB, 2014. pp. 158.
- [9] Riksgälden, “Statsskuldväxel.” <https://www.riksdagen.se/sv/global/ordlista/S/Statsskuldvaxel/>. [2017-03-30].
- [10] Riksbanken, “Svenska marknadsräntor.” <https://www.riksbank.se/sv/statistik/sok-rantor--valutakurser/forklaring-till-serierna/svenska-marknadsrantor/>. [2018-02-01].
- [11] Nationalencyklopedin, “Peningmarknad.” <https://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/penningmarknad>. [2018-02-07].
- [12] Investopedia, “Libor.” <https://www.investopedia.com/terms/l/libor.asp>. [2018-03-27].
- [13] J. Bicksler and A. H. Chen, “An economic analysis of interest rate swaps,” *The Journal of Finance*, vol. 41, no. 3, pp. 645–655, 1986.
- [14] S. Titman, “Interest rate swaps and corporate financing choices,” *The Journal of Finance*, vol. 47, no. 4, pp. 1503–1516, 1992.
- [15] Nationalencyklopedin, “Balansräkning.” <https://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/balansr%C3%A4kning>. [2018-04-17].
- [16] S. Svoboda and B. (e-book collection), *Interest rate modelling*. New York: Palgrave Macmillan, 2004;2003;.
- [17] Investopedia, “Mean reversion.” <https://www.investopedia.com/terms/m/meanreversion.asp>. [2018-02-07].
- [18] K. Fergusson, “Asymptotics of bond yields and volatilities for extended vasicek models under the real-world measure,” *Annals of Financial Economics*, vol. 12, no. 01, p. 1750005, 2017.
- [19] K. C. Chan, G. A. Karolyi, F. A. Longstaff, and A. B. Sanders, “An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate,” *The journal of finance*, vol. 47, no. 3, pp. 1209–1227, 1992.



- [20] S. Zeytun and A. Gupta, “A comparative study of the vasicek and the cir model of the short rate,” 2007.
- [21] P. Zsohar, “Short introduction to the generalized method of moments,” *Hungarian Statistical Review*, vol. 16, pp. 150–170, 2010.
- [22] P. C. Phillips and J. Yu, “Maximum likelihood and gaussian estimation of continuous time models in finance,” 2007.
- [23] S. Hanevik, “Comparing maximum likelihood and generalized method of moments in short term interest rate models,” Master’s thesis, The University of Bergen, 2016.
- [24] K. Kladrivko, “The general method of moments (gmm) using matlab: The practical guide based on the ekls interest rate model,” *Department of Statistics and Probability Calculus, University of Economics, Prague*, 2007.
- [25] Nationalencyklopedin, “De stora talens lag.” <https://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l/2018-02-13>.
- [26] L. P. Hansen, “Large sample properties of generalized method of moments estimators,” *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 1029–1054, 1982.
- [27] A. R. Hall, *Generalized method of moments*. Oxford University Press, 2005.
- [28] P. Olofsson and M. Andersson, *Probability, statistics, and stochastic processes*. John Wiley & Sons, 2012.
- [29] R. S. Mamon, “Three ways to solve for bond prices in the vasicek model,” *Advances in Decision Sciences*, vol. 8, no. 1, pp. 1–14, 2004.
- [30] J. C. Hull, *Options, futures, and other derivatives*. Pearson Education Limited, 2012.
- [31] S. Calogero, “Stochastic processes in finance, part 2,” *Chalmers University of Technology*, pp. 18–19.
- [32] Riksgälden, “Aktionsresultat - historik.” <https://www.riksgalden.se/sv/For-investerare/Statspapper/Auktionsresultat---Historik/>. [2018-03-06].
- [33] Nasdaq, “Obligationer sverige.” <http://www.nasdaqomxnordic.com/bonds/sweden>. [2018-03-21].
- [34] SEB, “Swaprates.” <https://sebgroupp.com/large-corporates-and-institutions/prospectuses-and-downloads/rates/swap-rates>. [2018-04-18].
- [35] D. Heath, R. Jarrow, and A. Morton, “Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation,” *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 77–105, 1992.
- [36] J. Yu, “Bias in the estimation of the mean reversion parameter in continuous time models,” *Journal of Econometrics*, vol. 169, no. 1, pp. 114–122, 2012.
- [37] M. V. Khramov, *Estimating Parameters of Short-Term Real Interest Rate Models*. No. 13-212, International Monetary Fund, 2013.
- [38] D. Brigo and F. Mercurio, *Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [39] S. Calogero, “Stochastic processes in finance, part ii,” *Chalmers University of Technology*, pp. 18–19, 1982.

- [40] F. Black and P. Karasinski, “Bond and option pricing when short rates are lognormal,” *Financial Analysts Journal*, vol. 47, no. 4, pp. 52–59, 1991.
- [41] M. Choudhry, *Analyzing and interpreting the yield curve*. Wiley Online Library, 2004.
- [42] Investopedia, “Yield curve.” <https://www.investopedia.com/terms/y/yieldcurve.asp>. [2018-02-06].
- [43] Investopedia, “Preferred habitat theory.” <https://www.investopedia.com/terms/p/preferred-habitat-theory.asp>. [2018-02-06].
- [44] M. Choudhry and E. C. (e-book collection), *Analyzing and Interpreting the Yield Curve*. Wiley [Imprint], 2004.
- [45] A. Burton, “Newton’s method and fractals,” *Technical manuscript, Whitman College*, 2009.
- [46] S. J. Wilson, “Moments and moment generating functions.” <http://www.milefoot.com/math/stat/rv-moments.htm>. [2018-05-29].
- [47] R. L. Schilling and L. Partzsch, *Brownian motion: an introduction to stochastic processes*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2014.
- [48] A. Lang and A. Petterson, “Financial time series,” May 2017.
- [49] B. Øksendal, “Stochastic differential equations,” in *Stochastic differential equations*, pp. 65–84, Springer, 2003.